

Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. POINCARÈ

Professore:
Gilberto Bini

Scriba:
Gabriele Bozzola

Lezione 1: 29 Settembre

Agomenti: General introduction. Homology of a complex. Singular homology.

1 Introduzione

1.1 Richiami di geometria

Definizione 1.1 Un **anello** è un insieme \mathcal{R} dotato di due operazioni $+$ e \cdot tali che \mathcal{R} sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

Definizione 1.2 Sia \mathcal{R} un anello commutativo¹ si definisce l' **\mathcal{R} -modulo** il gruppo abeliano \mathcal{M} equipaggiato con un'operazione di somma tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.3 Se \mathcal{R} è un campo allora l' \mathcal{R} -modulo è uno spazio vettoriale.

Osservazione 1.4 Ogni gruppo abeliano è uno \mathbb{Z} -modulo in modo univoco.

Definizione 1.5 Siano (X, \cdot) e (Y, \star) due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè:

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.6 Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.

Voglio studiare gli omomorfismi tra \mathbb{Z} -moduli.

Definizione 1.7 Sia $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli \mathcal{R} -moduli \mathcal{M} e \mathcal{N} , allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :

$$\text{Ker}(\varphi) := \{ m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \} \quad \text{Im}(\varphi) := \{ m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \}$$

¹Si può rilassare questa ipotesi e costruire moduli destri e sinistri.

Osservazione 1.8 $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Im}(\varphi)$ sono \mathcal{R} -sottomoduli.

Posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3$$

Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\text{Im}(\varphi_1) \subseteq \text{Ker}(\varphi_2)$.

Dimostrazione: Se $u \in \text{Im} \varphi_1$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_1$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ quindi $u \in \text{Ker}(\varphi_2)$. ■

Definizione 1.9 Siano \mathcal{M} un \mathcal{R} -modulo e \mathcal{N} un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di \mathcal{M} con \mathcal{N} è definito da:

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Siccome $\text{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\text{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo.

A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\text{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\text{Im}(\varphi_1)$.
2. $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \text{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \text{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\text{Im}(\varphi_1) \subsetneq \text{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli \mathcal{M} e delle applicazioni φ è **esatta** in \mathcal{M}_2 , nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto \mathcal{M}_2 della successione.

Definizione 1.10 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$ è detto **modulo di omologia** del complesso $\mathcal{M}_\bullet = \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_3$ con le applicazioni φ_1 e φ_2 .

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso \mathcal{M} non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definizione 1.11 La coppia (X, \mathcal{T}) è detta **spazio topologico** (generalmente si omette la \mathcal{T}) se \mathcal{T} è una topologia, cioè se è una collezione di insiemi di X tali che:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ se $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \mathbb{N}$
3. $A \cap B \in \mathcal{T}$ se $A, B \in \mathcal{T}$

1.2 Omomorfismo tra \mathbb{R} e \mathbb{R}^N

È noto che $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta che tolgo un punto a \mathbb{R} che diventa sconnesso mentre \mathbb{R}^N rimane connesso anche togliendogli un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da \mathbb{R}^2 :

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{f(p)\}$$

Ma: $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa che manda $\underline{x} \mapsto \left(\|\underline{x}\|, \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right)$. Ma quindi il gruppo fondamentale deve essere isomorfo: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = \{1\}$ quindi non possono essere isomorfi. ■
Ho quindi dedotto proprietà geometriche a partire da considerazioni algebriche.

Definizione 1.12 Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^1 \rightarrow X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \} / \sim$$

$e \sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \rightarrow X$ tale che $G(z, 0) = g_1(z), G(z, 1) = g_2(z), G(1, t) = x_0$.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^N .

Dimostrazione: Come nel caso precedente tolgo q da \mathbb{R}^3 e $f(q)$ da \mathbb{R}^3 , quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definizione 1.13 Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \rightarrow X \mid g(p_0) = x_0, p_0 \in \mathcal{S}^k \} / \sim$$

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1$ per $1 \leq k < m$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z}$ per $k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via...

1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. Ci sono varie possibilità:

- Omologia simpliciale
- Omologia cellulare
- Omologia singolare
- Omologia persistente¹

Ma cosa è l'omologia?

Definizione 1.14 In \mathbb{R}^{k+1} si definisce il **simplexso standard** Δ_k l'insieme:

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \quad 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

Osservazione 1.15 Alcuni esempi sono:

- Δ_0 è un punto.
- Δ_1 è un segmento omeomorfo a $[0, 1]$. [FIGURA]

Definizione 1.16 Dato uno spazio topologico X si definisce il **k -simplexso singolare** in X come un'applicazione continua $g : \Delta_k \rightarrow X$.

Spesso conviene identificare il k -simplexso con la sua immagine in X . In questo modo uno 0-simplexso è un punto in X , mentre un 1-simplexso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplexso deforma è detto singolare.

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

S è il complesso, cioè: $\dots \rightarrow S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow S_0(X)$, dove

$$S_k(X) = \{ \text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g \text{ } k\text{-simplexsi singolari di } X \}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^* g = \sum_g (n_g + n_g^*) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

¹Questa ha numerose applicazioni pratiche.

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate ***k*-catene singolari**.

Ad esempio: Se $k = 0$ $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \rightarrow X$)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k , queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \rightarrow X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un arco, ovvero una funzione da un intervallo $I = [0, 1]$ a X tale che $\alpha(0) = x_0$ e y_0 .

[FIGURA]

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco.

Definizione 1.17 Sia Δ_k un *k*-simpleso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore **faccia** come la mappa F_i^k da Δ_{k-1} a Δ_k tale che $F_i^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k .

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce. [FIGURA, CONSIDERAZIONI]

Esercizio 1 Dimostrare che se $[\cdot, \cdot]$ indica l'involuppo convesso allora:

1. Per $j > i$ vale che $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_k]$.
2. Per $j \leq i$ vale che $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, e_j, \dots, e_{i+1}, \dots, e_k]$.

Dato un *k*-simpleso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^k$.

[FIGURA]

Definizione 1.18 Si definisce il **bordo** di un *k*-simpleso singolare come $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-)^i \sigma^{(i)}$.

Per $k = 1$ $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ infatti $\sigma^0 = \sigma \circ F_0^1 = \sigma(1) = p_1$ e $\sigma^1 = \sigma \circ F_1^1 = \sigma(0) = p_0$.²

Allora definisco $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ infatti per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$.

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right) \end{aligned}$$

²Tecnicamente si intende $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$ e $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$.

Quindi il complesso è costituito da: ■

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$.

Dimostrazione: Se σ è un k -complesso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^k (-)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k = \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{■}$$

Topologia Algebrica

2016/2017

Lezione 2: 4 Ottobre

Agomenti: Banane

Topologia Algebrica

2016/2017

Lezione 3: 6 Ottobre

Agomenti: Banane

1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

Definizione 3.19 Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia (X, x_0) è detta spazio topologico puntato.

Definizione 3.20 Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \rightarrow X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0 \forall t \in I$, si dice che una funzione continua g è **omotopicamente equivalente** a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \rightarrow X$ tale che;

- $F(0, x) = f(x) \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0 \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0 \forall s \in I$

La relazione \sim_H è detta relazione di omotopia e si dimostra essere una relazione di equivalenza.

[FIGURA]

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua, } f(0) = f(1) = x_0 \} / \sim_H$$

Indice analitico

\mathcal{R} -modulo, 1

Anello, 1

Complesso di moduli, 2

Complesso di moduli esatto, 2

Immagine, 1

Modulo di omologia, 2

Modulo quoziente, 2

Nucleo, 1

Omomorfismo, 1

Spazio topologico, 2