

Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. POINCARÉ

Professore:
Gilberto Bini
Scriba:
Gabriele Bozzola

Indice

1	Omologia Singolare	4
1.1	Introduzione	4
1.1.1	Richiami di algebra	4
1.1.2	Omomorfismo tra \mathbb{R} e \mathbb{R}^N	7
1.1.3	Omologia	9
1.1.4	Richiami sul gruppo fondamentale	17
1.2	Omologia delle sfere	23
1.2.1	Teoria del grado	26

Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pagina
\mathbb{N}	Numeri naturali	2
\mathbb{Z}	Numeri interi	2
\mathcal{R}	Anello	4
$\langle \cdots \rangle$	Gruppo generato	5
\simeq	Spazi omeomorfi	7
$\xrightarrow{\sim}$	Omeomorfismo	8
π_1	Gruppo fondamentale	8
Δ_k	Simpleso standard	10
\sim_{hom}	Relazione di omologia	15

1 Omologia Singolare

1.1 Introduzione

1.1.1 Richiami di algebra

Definizione 1.1.1 Un **anello** è un insieme \mathcal{R} dotato di due operazioni $+$ e \cdot tali che \mathcal{R} sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro¹) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

Definizione 1.1.2 Un anello si dice **anello commutativo** se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.

Definizione 1.1.3 Un **campo** è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.

Definizione 1.1.4 Sia \mathcal{R} un anello commutativo si definisce l' **\mathcal{R} -modulo** un gruppo abeliano \mathcal{M} equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in \mathcal{R} tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.1.5 Se \mathcal{R} è un campo allora l' \mathcal{R} -modulo è uno spazio vettoriale.

Sostanzialmente la nozione di \mathcal{R} -modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

Osservazione 1.1.6 Ogni gruppo abeliano \mathcal{G} è uno \mathbb{Z} -modulo in modo univoco, cioè \mathcal{G} è un gruppo abeliano se e solo se è uno \mathbb{Z} -modulo.

Dimostrazione: Sia $x \in \mathcal{G}$ si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento $n \in \mathbb{Z}$ come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

¹La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sia uno \mathbb{Z} -modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di \mathbb{Z} : $nx = (1 + 1 + 1 + 1 + \dots)x = x + x + x \dots$, quindi quella definita è l'unica possibile. ■

Definizione 1.1.7 Un gruppo \mathcal{G} si dice **generato** dai suoi elementi $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$ se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di x_1, x_2, \dots . In questo caso si indica $\mathcal{G} = \langle \{x_1, x_2, \dots\} \rangle$.

Definizione 1.1.8 Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.

Definizione 1.1.9 Siano (X, \cdot) e (Y, \star) due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè:

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.1.10 Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.

Voglio studiare gli omomorfismi tra \mathbb{Z} -moduli.

Definizione 1.1.11 Sia $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli \mathcal{R} -moduli \mathcal{M} e \mathcal{N} , allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine**:

$$\text{Ker}(\varphi) := \{m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0\} \quad \text{Im}(\varphi) := \{m \in \mathcal{N} \mid m = \varphi(k), k \in \mathcal{M}\}$$

Osservazione 1.1.12 $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Im}(\varphi)$ sono \mathcal{R} -sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di \mathcal{M} e \mathcal{N} che posseggono la struttura di \mathcal{R} -modulo.

Se \mathcal{M}_i sono \mathcal{R} -moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

Proposizione 1.1.13 Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\text{Im}(\varphi_1) \subseteq \text{Ker}(\varphi_2)$.

Dimostrazione: Se $u \in \text{Im}(\varphi_1)$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ per ipotesi, quindi $u \in \text{Ker}(\varphi_2)$. ■

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

Definizione 1.1.14 Siano \mathcal{M} un \mathcal{R} -modulo e \mathcal{N} un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di \mathcal{M} con \mathcal{N} è definito da:

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove \mathcal{M}/\sim è l'insieme delle classi di equivalenza di \sim equipaggiate con operazioni indotte dall' \mathcal{R} -modulo, cioè se $[u], [w] \in \mathcal{M}/\sim$ e $a \in \mathcal{R}$:

1 Omologia Singolare

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di \mathcal{M}/\mathcal{N} sono le classi di equivalenza $[m] = \{m + n \mid n \in \mathcal{N}\}$.

Siccome $\text{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\text{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.

A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\text{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\text{Im}(\varphi_1)$, dato che l'unica classe di equivalenza presente è $[0]$ significa che $\forall m \in \text{Ker}(\varphi_1) \exists n \in \text{Im}(\varphi_2)$ tale che $m - n = 0$, cioè m e n coincidono e quindi $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$.
2. $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \text{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \text{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\text{Im}(\varphi_1) \subsetneq \text{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli \mathcal{M} e delle applicazioni φ è **esatta** in \mathcal{M}_2 , nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto \mathcal{M}_2 della successione.

Definizione 1.1.15 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$ è detto **modulo di omologia** del complesso $\mathcal{M}_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ con le applicazioni φ_1 e φ_2 .

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso \mathcal{M}_\bullet non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definizione 1.1.16 La coppia (X, \mathcal{T}) è detta **spazio topologico** (generalmente si omette la \mathcal{T}) se \mathcal{T} è una **topologia**, cioè se è una collezione di insiemi di X tali che:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ se $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\bigcap_{n \in \{0, 1, \dots, N\}} A_n \in \mathcal{T}$ se $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$

Gli elementi di \mathcal{T} sono detti **aperti**.

Osservazione 1.1.17 Se τ è la collezione di tutti i sottoinsiemi di X allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la **topologia discreta**, invece $\tau = \{\emptyset, X\}$ è una topologia ed è la **topologia triviale**. Infine in \mathbb{R}^n si definisce la **topologia usuale** che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$. Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in \mathbb{R}^n .

Osservazione 1.1.18 Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.

Osservazione 1.1.19 Sia $A \subseteq X$ spazio topologico, si può rendere anche A uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di X intersecati con A .

Osservazione 1.1.20 Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.

Definizione 1.1.21 Sia X uno spazio topologico l'insieme $\{A_i \mid A_i \in X \forall i\}$ è un **ricoprimento** di X se:

$$\bigcup_i A_i = X$$

Se in particolare gli insiemi A_i sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.

Definizione 1.1.22 Un insieme U è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento finito di U .

Definizione 1.1.23 Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, [cioè se è una mappa uno a uno]. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo \simeq .

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

1.1.2 Omomorfismo tra \mathbb{R} e \mathbb{R}^N

Definizione 1.1.24 Un **arco** in uno spazio topologico X tra i punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ è una funzione continua da $I = [0, 1]$ a X tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y_0$. Si dice che l'arco parte da x_0 e finisce in y_0 .

Definizione 1.1.25 Uno spazio topologico X è **connesso per archi** se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco che parte da x e termina in y .

Definizione 1.1.26 Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale x e punto finale y .

Proposizione 1.1.27 Se $f : X \rightarrow Y$ è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se X è connesso per archi allora Y è connesso per archi. Questo vale in particolare se f è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.

Dimostrazione: Siano y_0, y_1 due punti di Y . La funzione f è suriettiva, e dunque esistono x_0 e x_1 in X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Dato che X è connesso, esiste un cammino $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Ma la composizione di funzioni continue è

1 Omologia Singolare

continua, e quindi il cammino ottenuto componendo α con f : $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow X \rightarrow Y$ è un cammino continuo che parte da y_0 e arriva a y_1 . ■

Si sa inoltre che:

Proposizione 1.1.28 \mathbb{R}^n è connesso per archi $\forall n \in \mathbb{N}$.

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta togliere un punto a \mathbb{R} che diventa sconnesso per archi mentre \mathbb{R}^N rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

Proposizione 1.1.29 Se $f : X \rightarrow Y$ è omeomorfismo tra spazi topologici allora $f|_U : U \rightarrow f(U)$ è omeomorfismo per ogni $U \subseteq X$.

Nel caso considerato $U = x_0$, siccome ho trovato un U per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo f non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omeomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da \mathbb{R}^2 , se f omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{f(p)\}$. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa $\vec{x} \mapsto \left(\|\vec{x}\|, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)$ (dopo aver fatto una traslazione di p nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi se esiste un omeomorfismo tra \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n significherebbe che $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$, $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ che è assurdo. ■

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

Definizione 1.1.30 Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^1 \rightarrow X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \} / \sim$$

e \sim è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \rightarrow X$ tale che $G(z, 0) = g_1(z)$, $G(z, 1) = g_2(z)$, $G(1, t) = x_0$ con G continua. In questo vedo \mathcal{S}^1 come sottospazio di \mathbb{R}^2 con la topologia indotta (il punto 1 è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$).

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti g è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di

1 Omologia Singolare

arrivo necessariamente coincidono dato che g è definito su \mathcal{S}^1 . Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^N .

Dimostrazione: Come nel caso precedente suppongo esiste f omeomorfismo tra \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^n , tolgo q da \mathbb{R}^3 e $f(q)$ da \mathbb{R}^n , quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definizione 1.1.31 Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \rightarrow X \mid g \text{ continua, } g(p_0) = x_0 \} / \sim$$

Con $p_0 \in \mathcal{S}^k$ e \sim relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1$ per $1 \leq k < m$ ($m > 2$)
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z}$ per $k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5. $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$

Definizione 1.1.32 Sia $A \subseteq X$ con X spazio topologico $i : A \rightarrow X$ si definisce mappa di **inclusione** e si scrive $i : A \hookrightarrow X$ se $\forall a \in A$ vale che $i(a) = a$.

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via... Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

1.1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare

²Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

1 Omologia Singolare

- Omologia persistente³
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Assocerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base \mathbb{Z} , che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

Definizione 1.1.33 In \mathbb{R}^{k+1} si definisce il **simpletso standard** Δ_k l'insieme:

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

Osservazione 1.1.34 Alcuni esempi sono:

- Δ_0 è un punto.
- Δ_1 è un segmento, che è omeomorfo a $[0, 1]$.

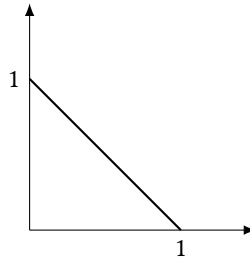


Figura 1.1: 1-Simpletso standard

- Δ_2 è un triangolo
- Δ_3 è un tetraedro
- ...

Definizione 1.1.35 Dato uno spazio topologico X si definisce il k -**simpletso singolare** in X come un'applicazione continua $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$.

Spesso conviene identificare il k -simpletso con la sua immagine in X . In questo modo uno 0-simpletso è un punto in X , mentre un 1-simpletso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simpletso potrebbe deformare è detto singolare.

³Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.

1 Omologia Singolare

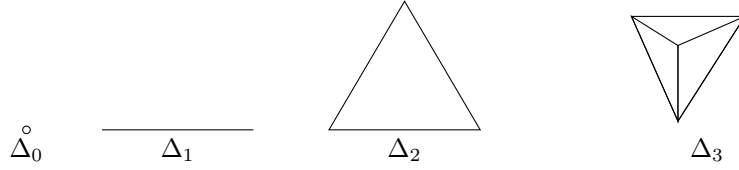


Figura 1.2: Simplessi standard

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

S_\bullet è il complesso (S sta per singolare), cioè:

$$\cdots \rightarrow S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \{ \text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g \text{ } k\text{-simplessi singolari di } X \}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^* g = \sum_g (n_g + n_g^*) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate **k -catene singolari**. $S_k(X)$ è generato da tutte le possibili applicazioni continue da Δ_k a X , cioè:

$$S_k(X) = \langle \{ g \mid g \text{ } k\text{-simpleso singolare in } X \} \rangle$$

Ad esempio se $k = 0$ allora $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \rightarrow X$, identifico l'applicazione con il punto in X sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k , queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \rightarrow X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un **arco**.

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simpleso è uno 0-simpleso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

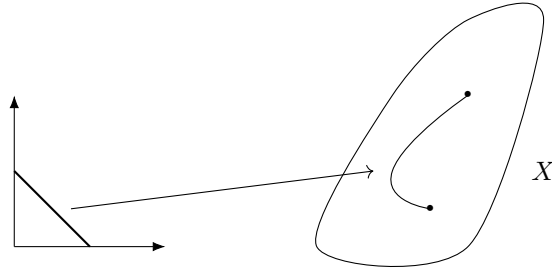


Figura 1.3: 1-Simplesso singolare

Definizione 1.1.36 Sia Δ_k un k -simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore **faccia** come la mappa $F_i^k : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$ tale che $F_i^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k .

L'operatore faccia prende un k -simplesso standard e lo immerge in un qualche senso in un simplex più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso $k = 0$),

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

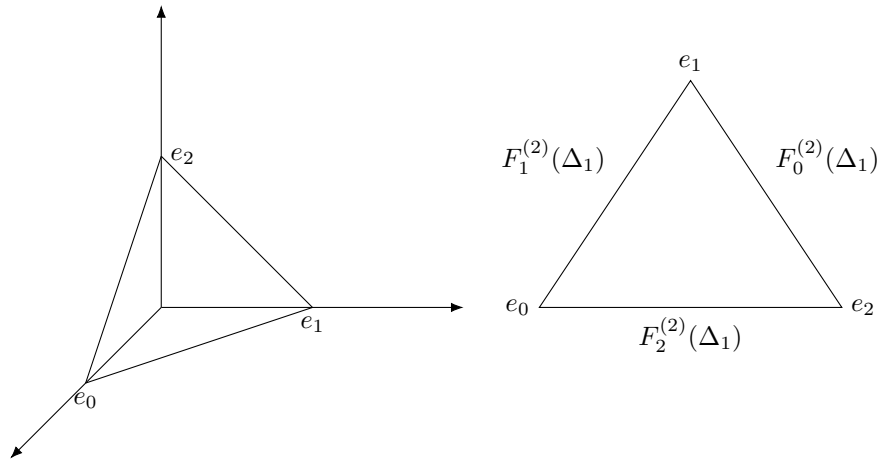


Figura 1.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia i -esimo è quello che non contiene il vertice i -esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplex.

1 Omologia Singolare

In generale se Δ_k è un simpleso standard definisco la base standard:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del simpleso, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} F_i^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ F_i^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

Esercizio 1 Dimostrare che se $[\cdot, \cdot]$ indica l'involuppo convesso allora:

1. Per $j > i$ vale che $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$.
2. Per $j \leq i$ vale che $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$.

Dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.

Definizione 1.1.37 L'involuppo convesso di un insieme U in \mathbb{R}^n è il più piccolo insieme convesso che contiene U .

Definizione 1.1.38 Un insieme in \mathbb{R}^n si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.

Definizione 1.1.39 Dato un k -simpleso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^k$, si definisce quindi il **bordo** di σ come $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$.

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle faccie.

Per $k = 1$ $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ infatti $\sigma^0 = \sigma \circ F_0^1 = \sigma(1) = p_1$ e $\sigma^1 = \sigma \circ F_1^1 = \sigma(0) = p_0$.⁴

QUI SISTEMARE Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ estendendolo per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$ (infatti si è definita l'azione sui generatori g).

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo e che soddisfa $\partial^2 = 0$. Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right) \end{aligned}$$

⁴Tecnicamente si intende $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$ e $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$.

1 Omologia Singolare

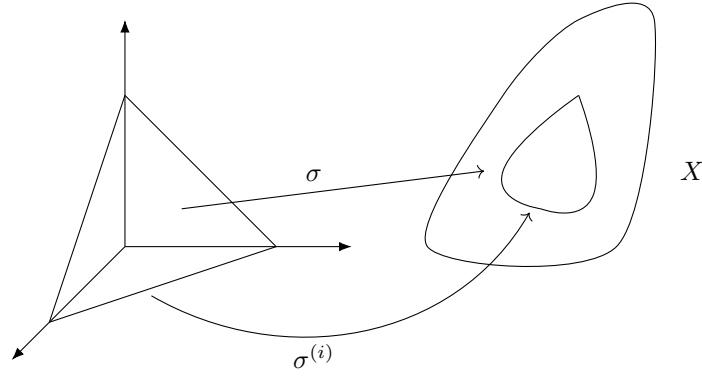


Figura 1.5: Azione di σ

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$.

Dimostrazione: Se σ è un k -complesso singolare $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$:

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio.

Esercizio 2 Verificare che fa veramente zero.

1 Omologia Singolare

Sia X uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare $H_k(X)$, cioè il k -esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso $(S_\bullet(X), \partial)$ con:

$$S_k(X) = \left\{ \sum_g n_g g \mid g \text{ semplice singolare, } n_g \in \mathbb{Z} \right\}$$

E $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ applicazione di bordo con $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i g^{(i)}$ con $g : \Delta_k \rightarrow X$, e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di S , dove $g^{(i)} = g \circ F_i^k$.

Siccome $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre $\partial_k \circ \partial_{k-1}$ è la mappa nulla dalle catene singolari di $S_k(X)$ a quelle di $S_{k-2}(X)$.

$(S_\bullet(X), \partial)$ è un complesso di gruppi abeliani o \mathbb{Z} -moduli liberi. Posso quindi calcolare l'omologia di $(S_\bullet(X), \partial)$ come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

Vale che $\text{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$, cioè le k -catene con bordo nullo, questi sono chiamati k -cicli.

Definizione 1.1.40 Sia $(S_\bullet(X), \partial)$ un complesso di moduli, gli elementi di $\text{Ker}(\partial)$ sono detti **k -cicli**. Un k -ciclo è quindi una k -catene con bordo nullo:

$$c \text{ ciclo} \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei k -cicli è indicato con $Z_k(X)$, cioè: $Z_k(X) = \text{Ker}(\partial)$.

Si pone invece $B_k(X)$ come l'insieme dei bordi, cioè le k -catene singolari che sono immagini di $k+1$ -catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che $H_k(X) = Z_k(X) / B_k(X)$, cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di $H_k(X)$ sono classi di equivalenza tali che se $[c] \in H_k(X)$ con $\partial c = 0$, e $c_1 \in [c]$ allora $c_1 - c \in B_k(X)$ e $\partial c_1 = 0$ quindi esiste b tale che $c_1 - c = \partial b$. Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

Definizione 1.1.41 Due elementi a, b si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

Osservazione 1.1.42 Vale che $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$, cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.

1 Omologia Singolare

Scopo del corso è studiare $H_k(X)$ e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

Proposizione 1.1.43 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0 \cong \mathbb{Z}$, cioè è uno \mathbb{Z} -modulo libero di rango 1. In effetti $H_0(X)$ conta le componenti connesse per archi in X e quindi dà informazioni di natura geometrica.*

Dimostrazione: Dalla definizione di gruppo di omologia: $H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X)$. Ma $Z_0(X) = \{c \in S_0(X) \mid \partial_0 c = 0\}$ e $S_0(X) = \{\sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X\}$. Tecnicamente uno 0-simplesso singolare è una mappa $\sigma_0 : \Delta_0 \rightarrow X$ tale che manda $\Delta_0 = 1$ in $\sigma_0(1) = p_0$ e per questo è naturale l'identificazione con i punti immagine dello spazio topologico. Sia $c \in S_0(X)$ allora $c = \sum n_i p_i$, e vale che $\partial_0(c) = \sum n_i \partial_0(p) = 0$, infatti per definizione $\partial_0 : S_0(X) \rightarrow S_{-1}(X)$, ma $S_{-1}(X)$ in ogni complesso è banale, cioè $S_{-1}(X) \cong 0$. Quindi per ora ho che:

$$H_0(X) = S_0(X)/B_0(X)$$

Per definizione $B_0(X) = \{x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x\}$, α è una catena. Sia $p_0 \in X$, allora $q \sim_{hom} p$ se e solo se $\exists \alpha \in S_1(X)$ tale che $q - p_0 = \partial_1 \alpha$. Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, essendo X connesso per archi esiste un arco che connette q e p_0 , infatti per definizione gli archi sono applicazioni dall'intervallo a X che hanno come bordo $q - p_0$. Esiste quindi un'unica classe di equivalenza.

Definizione 1.1.44 *Si definisce inoltre la mappa **grado** come l'applicazione che manda una catena in $S_0(X)$ nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg : S_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

Teorema 1.1.45 (Teorema fondamentale degli omomorfismi) *Sia $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:*

$$\mathcal{G}_1 / \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$$

Proposizione 1.1.46 *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1. \deg è un omomorfismo di gruppi abeliani
2. \deg è suriettivo
3. $\text{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema degli omomorfismi ...

*Dimostro quindi questa proposizione. **Dimostrazione:** Sia $c_1 = \sum n_i p_i$ e $c_2 = \sum m_i q_i$, devo mostrare che $\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$, cioè che $c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$ dove r_i è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene.*

1 Omologia Singolare

La mappa è suriettiva, basta prendere un punto: $m \in \mathbb{Z}$ e $\deg^{-1}(m) = mp$

Mostro che $\text{Ker}(\deg) = B_0(X)$. Prendo c tale che $\deg(c) = 0$, ma $c = \sum n_i p_i$ quindi $\sum n_i = 0$, allora $c \in B_0(X)$? Se $Eb \in S_1(X)$ con $\partial_1 b = c$. Prendo p_0 e altri punti p_1, p_2, p_3, \dots , ci sono archi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ che li uniscono a p_0 . Provo a costruire b in questo modo. Siano $\lambda_i : [0, 1] \rightarrow X$ con $\lambda_i(0) = p_i$ e $\lambda_i(1) = p_0$ considero $c - \partial(\sum n_i \lambda_i) = c - \sum n_i \partial \lambda_i = c - \sum n_i (p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i + \sum n_i p_0 = \sum n_i p_0 = 0$. Siccome per ipotesi $p_0 \in \text{Ker}(\deg)$ e $c = \sum n_i p_i$ allora $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$ quindi $\sum n_i \lambda_i = b$ da cui $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$. Mi rimane da mostrare che $B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\deg)$, infatti ora mostro che se $c \in B_0(X)$ allora $\deg(c) = 0$. $c = \partial b$ ma se λ_i sono gli archi $b = \sum m_i \lambda_i$ quindi $\partial b = \sum n_i \partial \lambda_i$ ma $\partial \lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$ e l'azione dell'operatore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial \lambda_i) = 0$$

■

Per questo $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe $[p] \forall p \in X$ (con X connesso per archi). ■

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove N_c è il numero di componenti connesse per archi di X con $N_c < +\infty$.

Cosa si può dire invece su $H_1(X)$?

Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$, allora alla coppia (X, x_0) si associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata: $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0) / \pi_1(X, x_0)'$ dove $'$ indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Se X è connesso per archi allora $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$, quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare il primo gruppo di omologia.

1.1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

Definizione 1.1.47 Sia X uno spazio topologico e x_0 un suo punto, allora un **laccio** è un arco in X avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto x_0 . Un laccio c_{x_0} si dice **costante** se $\forall t \in I \ c_{x_0}(t) = x_0$ con $x_0 \in X$.

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio X come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché il laccio costante non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

Definizione 1.1.48 Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia (X, x_0) è detta **spazio topologico puntato**.

Definizione 1.1.49 Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \rightarrow X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0 \forall t \in I$, si dice che una funzione continua g è **omotopicamente equivalente** a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \rightarrow X$ tale che;

- $F(0, x) = f(x) \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0 \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0 \forall s \in I$

La relazione \sim_H è detta **relazione di omotopia** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.

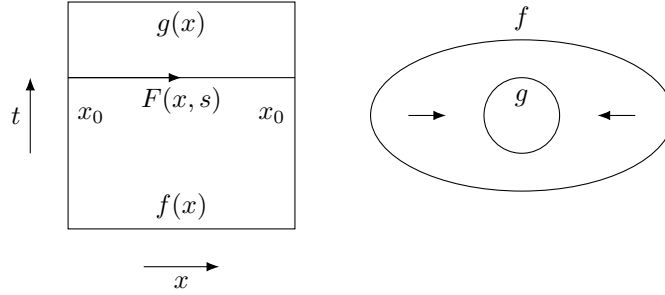


Figura 1.6: Omotopia: deforma f in g in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua, } f(0) = f(1) = x_0 \} / \sim_H$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale**, tale operazione è: Siano $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ si definisce $[f][g] = [f \star g]$, dove l'operazione \star è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $1 = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0 \forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove \bar{f} è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1 - t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

$$\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

allora $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

1 Omologia Singolare

Osservazione 1.1.50 Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.

- Se X è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

Proposizione 1.1.51 Se uno spazio topologico X è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati (X, x_0) sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da x_0 .

Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

Definizione 1.1.52 Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.

Osservazione 1.1.53 Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio S^2 .

- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned}\sigma : I &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t}\end{aligned}$$

Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ e $\pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ con $[\sigma] \mapsto 1$. Ogni elemento è multiplo di σ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert-van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio: $V_0 := S^2$ $V_g := P_{\frac{4g}{N}}$ con $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$ e $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con k lati e con identificazioni. Nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente -1 quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha $aba^{-1}b^{-1}$.

In generale si ha $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ si ha un toro, per $g = 2$ un bitoro, g è detto **genere**.

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ \langle a_1b_1 \dots \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

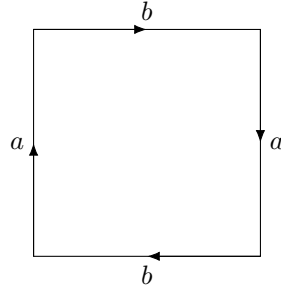


Figura 1.7: Toro piatto, o anche toro di Clifford

Dove $[\cdot, \cdot]$ è il commutatore, cioè esattamente $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Solo per $g = 0$ o $g = 1$ si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\text{Ab}(\pi_1(X)) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = \pi_1(X) / \pi_1'(X)$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\text{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ per $g \geq 2$. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

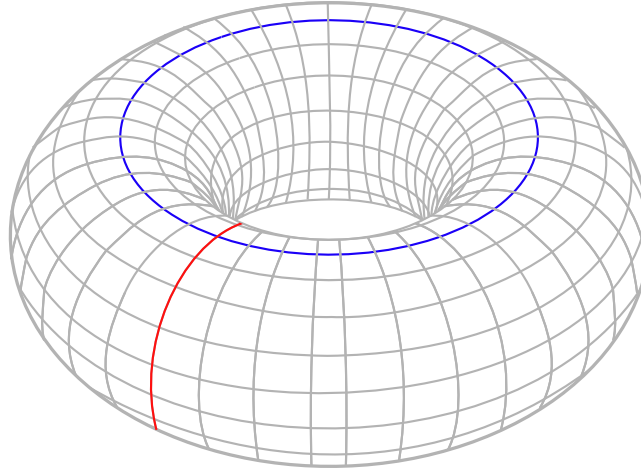


Figura 1.8: Generatori di un toro

L'abelianizzato è uno \mathbb{Z} -modulo.

Osservazione 1.1.54 Sia X uno spazio topologico connesso per archi, \mathcal{G} un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{G}$

1 Omologia Singolare

omomorfismo di gruppi abeliani.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

P è la proiezione sul quoziente. φ' esiste perchè in $\text{Ab}(\pi_1(X))$ c'è tutto quello che sta nel nucleo. $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$. Allora $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$, devo mostrare che $\varphi(c) = \varphi(d)$. Siccome \mathcal{G} è abeliano $p(c) \sim p(d)$, e quindi $c = d[x, y]$ per cui: $\varphi(c) = \varphi(d[x, y])$, siccome φ è omomorfismo:

$$\varphi(d[x, y]) = \varphi(d)\varphi([x, y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Per questo φ' è ben definito.

Questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.

Voglio dimostrare che $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$, in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen posso ottenere tante informazioni su $H_1(X)$. Per ora so che $H_1(X)$ è uno \mathbb{Z} -modulo. Se costruisco $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ ottengo gratuitamente la mappa da $\text{Ab}(\pi_1(X))$ a $H_1(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè $\exists \psi : H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$ tale che $\varphi' \circ \psi = \text{id}_{H_1(X)}$ e $\psi \circ \varphi' = \text{id}_{\text{Ab}(\pi_1(X))}$. Provo a costruire φ .

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{\text{hom}} \end{aligned}$$

Usando il seguente risultato:

Lemma 1.1.55 Se $f \sim_H g$ allora $f \sim_{\text{hom}} g$.

Dimostrazione: Siccome $f \sim_H g$ allora $\exists F$ continua tale $F : I \times I \rightarrow X$ tale che $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ e $F(t, 0) = x_0$ in quanto è un laccio. [FIGURA] Voglio mostrare che è il bordo di un 2-simplesso. Faccio l'equivalenza $I \times I / 0 \times I \simeq \Delta_2$. [FIGURA] E questo è omeomorfo a un 2-simplesso standard. Siccome rimane costante su x_0 questa mappa induce F' :

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow P & \nearrow F' & \\ I \times I / 0 \times I \simeq \Delta_2 & & \end{array}$$

1 Omologia Singolare

Calcolo il bordo: $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$ dove K è il cammino costante per definizione di omotopia. Se K fosse il bordo di qualcosa avrei finito ($\partial w = f - g$). Prendo il 2-simplesso standard K costante e uguale a x_0 (è la stessa costante di K):

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)}$$

ma questi sono uguali perché sono costanti, quindi $\partial K = K^{(2)} = k$, cioè k è un bordo, quindi:

$$\partial F' = \partial K - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial K = f - g \Rightarrow \partial(F' - K) = f - g$$

$F' - K$ è 2-simplesso singolare, lo chiamo σ : $\partial\sigma = f - g$. f e g sono omologhi e σ è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia. ■

Se X è uno spazio topologico connesso per archi sono in grado di costruire

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Nel far ciò non ho utilizzato l'ipotesi di connessione per archi. Ora voglio costruire $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$ e lo faccio ancora senza l'ipotesi di connessione per archi. Mostro che φ' è omomorfismo, per far ciò basta che mostro che φ lo è. **Dimostrazione:** Siano $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$ voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H [g]_H) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è vero se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{hom} + [g]_{hom}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{hom} = [f + g]_{hom}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti:

$$\exists T : \Delta_2 \rightarrow X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

[FIGURA, ROBA] ■

Al momento la situazione è che ho $\varphi : H_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ omomorfismo di gruppi ben definito anche con X non necessariamente connesso per archi, e dato che $H_1(X)$ è abeliano ho $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$.

Proposizione 1.1.56 *Se X è connesso per archi allora la mappa $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa. [QUI MANCA COMPLETAMENTE QUESTO PEZZO!!!]* ■

1.2 Omologia delle sfere

Considero \mathcal{S}^n con $n \geq 1$, ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

Corollario 1.2.1 $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ se e solo se $n = m$.

Dimostrazione: Se $n = m$ vale che $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$ quindi in particolare $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ con la mappa identità. Assumo $n \neq m$ e senza perdita di generalità pongo $n > m$.

Per assurdo $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$, quindi esiste un omomorfismo $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$, quindi esiste anche l'omomorfismo inverso $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$. Quindi esistono anche:

$$F_* : H_k \mathcal{S}^n \rightarrow H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_* : H_k \mathcal{S}^m \rightarrow H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$ e $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$, ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_* \circ G_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_* \circ F_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che F_* e G_* sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \quad \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni k in particolare vale per $k = n$, cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$ da cui $\mathbb{Z} \cong 0$, che è assurdo. ■

Corollario 1.2.2 (Invarianza topologica della dimensione) $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ se e solo se $n = m$.

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzando solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione:** Per assurdo esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ con $n > m > 2$. Con il vincolo imposto su m e n gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto $p \in \mathbb{R}^n$ e $f(p) \in \mathbb{R}^m$, e restringendo f in modo da ottenere l'omomorfismo $f' : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\}$. Si sa inoltre che per $s \geq 2$ vale che $\mathbb{R}^s \setminus \{q\} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$, infatti è sufficiente mandare a 0 il punto q con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{q\} &\rightarrow \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{aligned}$$

1 Omologia Singolare

Quindi:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare \mathbb{R} dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$, da cui $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$. Ma l'omologia è invariante omotopica, cioè $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$, utilizzando il trucco di prima scelgo $k = n - 1$ e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. ■

Corollario 1.2.3 \mathcal{S}^{n-1} non è un retratto di deformazione di \mathcal{D}^n per $n \geq 2$

Dimostrazione: Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$$

Chiaramente esiste $i: \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$.

Definizione 1.2.4 Uno spazio topologico Y si dice **retratto di deformazione** di un altro spazio topologico X tale che $Y \hookrightarrow X$ se esiste una funzione continua $r: X \rightarrow Y$ che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione $i: Y \rightarrow X$, cioè tale che soddisfa:

1. $r: X \rightarrow Y$ continua
2. $i \circ r \sim \mathbb{I}_X$
3. $r \circ i = \mathbb{I}_Y$

Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.

Suppongo per assurdo che \mathcal{S}^{n-1} è un retratto di deformazione di \mathcal{D}^n , cioè che esiste una retrazione r . Passando all'omologia:

$$\begin{aligned} i_*: H_k(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_k(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \\ (i \circ r)_* &= (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_* \text{ e } (r \circ i)_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_* \end{aligned}$$

Quindi:

$$i_* \circ r_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} i_*: H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_{n-1}(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

Cioè: $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$. Considero un generatore α di $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, cioè tale che $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ allora $i_*(\alpha) = 0$ quindi $r_* \circ i_* = 0$, ma $(r \circ i)_* = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ quindi significherebbe $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}(\alpha) = 0$, cioè che $\alpha = 0$, che è assurdo perché $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$. ■

Teorema 1.2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer) Ogni funzione continua $g: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$ con $n \geq 2$ ammette almeno un punto fisso in \mathcal{D}^n , cioè:

$$\exists \vec{x}_0 \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

Dimostrazione: Per assurdo g non ammette punto fisso cioè esisto $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$ tale che $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$. Sicuramente tuttavia $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$. Considero la retta l passante per \vec{x} e $g(\vec{x})$. Questa retta interseca il bordo di \mathcal{D}^n in due punti $\{p_1, p_2\}$:

$$l \cap \partial \mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{p_1, p_2\}$$

Definisco la mappa $r: \mathcal{D}^n \rightarrow \partial \mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta $l_{\vec{x}}$ che gli sta più vicino (infatti in \mathbb{R}^n è ben definita una nozione di distanza). La retta $l_{\vec{x}}$ è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$) passa una e una sola retta.

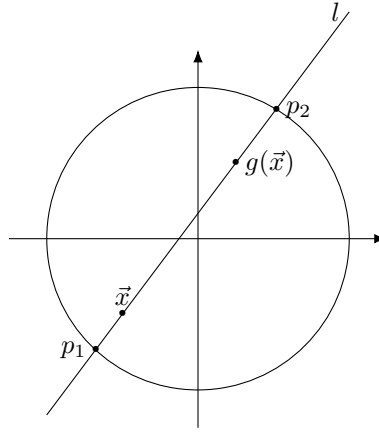


Figura 1.9: Schema per $n = 2$

Esercizio 3 Dimostrare che r è continua.

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{array}{ccc} i: \mathcal{S}^{n-1} & \rightarrow & \mathcal{D}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array}$$

Se dimostro che r è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ e $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$. La prima uguaglianza è certamente vera perché se $\vec{x} \in \partial \mathcal{D}^n$ allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a \vec{x} stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome \mathcal{D}^n è convesso è ben definita $G(t, \vec{x}) = (1-t)\vec{x} + tr(\vec{x})$ con $t \in [0, 1]$. Questa è una buona omotopia in quanto $\forall t, \vec{x}$:

- G è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{X}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{X}) = r(\vec{x})$

Quindi r è retrazione ma questo è assurdo. ■

1.2.1 Teoria del grado

Considero $H_n(\mathcal{S}^m)$, so che $H_n(\mathcal{S}^m) \cong \mathbb{Z}$, cioè esiste una mappa $f: \mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathcal{S}^m)$ tale che $f(1) = \alpha$ con α n -ciclo che non è un bordo. In questo modo $H_n(\mathcal{S}^m) = \langle \alpha \rangle$. Considero $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ continua con $n \geq 1$, so che esiste $\varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$. Per $n = 0$ φ_* manda punti in punti, per $n \geq 1$: sia $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$ allora $c = p\alpha$ con $p \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_*(c) = \varphi_*(p\alpha) = \varphi_*\underbrace{(\alpha + \alpha + \alpha + \dots)}_{|p|\text{volte}} = \underbrace{\varphi_*(\alpha) + \varphi_*(\alpha) + \dots}_{|p|\text{volte}} = p\varphi_*(\alpha)$$

Ma $\varphi_*(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$ quindi si deve poter scrivere come multiplo di α : $\varphi_*(\alpha) = d\alpha$ da cui: $\varphi_*(c) = pd\alpha = dc$ con $d \in \mathbb{Z}$. Questo numero d viene fuori dall'immagine di un generatore, ma non dipende dalla scelta del generatore, infatti:

Sia β un altro generatore, siccome α è un generatore si può scrivere $\beta = m\alpha$ con $m \in \mathbb{Z}$. Pongo come notazione:

$$\varphi_*(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_*(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_*(\beta) = m\varphi_*(\alpha) = md(\alpha)\alpha$$

Da cui $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$ cioè $(d(\beta) - d(\alpha))\beta = 0$, siccome questo vale per ogni α e β allora $d(\alpha) = d(\beta)$.

Definizione 1.2.6 Data un'applicazione $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$ continua è possibile associargli in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) & \rightarrow & H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha & \mapsto & \deg(\varphi)\alpha \end{array}$$

Con α generatore.

Indice analitico

- \mathcal{R} -modulo, 4
- \mathbb{Z} -modulo libero, 5
- k -catene singolari, 11
- k -ciclo, 15
- k -simplesso singolare, 10

- Anello, 4
- Anello commutativo, 4
- Anello unitario, 4
- Arco, 7

- Bordo, 13

- Cammino composto, 18
- Campo, 4
- Complesso di moduli, 6
- Complesso di moduli esatto, 6

- Elementi omologhi, 15

- Genere, 19
- Giunzione
 - vedi* Cammino composto, 18
- Grado, 16
- Grado di una sfera, 26
- Gruppi di omotopia superiore, 9
- Gruppo derivato, 17
- Gruppo fondamentale, 8, 18
- Gruppo generato, 5

- Immagine, 5
- Inclusione, 9
- Insieme compatto, 7
- Insieme convesso, 13
- Insiemi aperti, 6
- Inviluppo convesso, 13

- Laccio, 17

- Modulo di omologia, 6
- Modulo quoziente, 5

- Nucleo, 5

- Omeomorfismo, 7
- Omomorfismo, 5
- Omotopia
 - vedi* Relazione di omotopia, 18
- Operatore faccia, 12

- Rango di gruppo abeliano, 5
- Relazione di omotopia, 18
- Retratto di deformazione, 24
- Retrazione, 24
- Ricoprimento, 7

- Semplicemente connesso, 19
- Simplesso standard, 10
- Spazio connesso, 7
- Spazio connesso per archi, 7
- Spazio contraibile, 19
- Spazio topologico, 6
- Spazio topologico puntato, 17

- Teorema del punto fisso, 25
- Teorema di Seifert–van Kampen, 19
- Topologia, 6
- Topologia discreta, 6
- Topologia indotta, 7