Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

Esercizi

1 Esercizio 1.1.19 (iv)

Testo

Mostra che l'equivalenza omotopica tra spazi topologici è una relazione di equivalenza.

Soluzione

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una funzione continua $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove $\sim$ indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con $\sim$, soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f \colon X \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $g \colon X \to X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.

2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f \colon X \to Y$ tale che esiste una seconda funzione continua $g \colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi \colon Y \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $\gamma \colon X \to Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$ Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g \colon X \to Y$, $h \colon W \to X$ e $k \colon Y \to Z$ mappe continue con $f \sim g$, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim h \circ g$.*

Dimostrazione. Siccome $f \circ g$ significa che esiste una funzione continua $F \colon X \times I \to Y$ (con $I = [0, 1]$) tale che:

$$F(x, 0) = f(x)$$
$$F(x, 1) = g(x)$$

Definisco $\phi = f \circ h$ e $\gamma = g \circ h$, vale che $\phi, \gamma \colon W \to Y$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue. Devo mostrare che:

$$\exists H \colon W \times I \to Y \text{ continua tale che } H(w, 0) = \phi(w) \text{ e } H(w, 1) = \gamma(w)$$

Una possibile scelta per H è $H = F \circ (h, 1_I)$, questa è continua perché composizione di funzioni continue, inoltre è tale che $H(w, 0) = f \circ h(w) = \phi(w)$ e $H(w, 1) = g \circ h(w) = \gamma(w)$, e quindi è l'omotopia cercata. □

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\exists f_1 \colon X \to Y \text{ tale che } \exists g_1 \colon Y \to X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X$$
$$\exists f_2 \colon Y \to Z \text{ tale che } \exists g_2 \colon Z \to Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y$$

Devo mostrare che:

$$\exists f_3 \colon X \to Z \text{ tale che } \exists g_3 \colon Z \to X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3 \colon X \to Z$ e $g_3 \colon Z \to X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere che:

a) $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$

b) $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$

Definisco $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2$, mostrare la prima relazione equivale a mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$. Per il lemma 1 vale che $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi, ma siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$.

La seconda relazione è analoga. □

2 Esercizio 1.1.19 (v)

Testo

Mostra che una mappa equivalente a una equivalenza omotopica è una equivalenza omotopica.

Soluzione

Se X, Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti esiste una funzione continua $f \colon X \to Y$, detta equivalenza omotopica tale che esista una seconda funzione continua $g \colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h \colon X \to Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una equivalenza omotopica, cioè che esiste una funzione continua $k \colon Y \to X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. □

3 Esercizio 1.1.19 (vii)

Testo

Sia $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to X$ mappe tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano relazioni omotopiche, mostra che f e g sono equivalenze omotopiche.

Soluzione

Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to X$, $g\colon Y \to Y$ funzioni continue tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano equivalenze omotopiche, devo mostrare che questo implica che f e g stesse siano equivalenze omotopiche, cioè che:

$$\exists \phi\colon Y \to X \text{ continua tale che } f \circ \phi \sim 1_Y \text{ e } \phi \circ f \sim 1_X$$
$$\exists \gamma\colon X \to Y \text{ continua tale che } g \circ \gamma \sim 1_X \text{ e } \gamma \circ g \sim 1_Y$$

Siccome $f \circ g$ e $g \circ f$ sono equivalenze omotopiche vale che:

$$\exists h\colon Y \to Y \text{ continua tale che } f \circ g \circ h \sim 1_Y \text{ e } h \circ f \circ g \sim 1_Y$$
$$\exists k\colon X \to X \text{ continua tale che } g \circ f \circ k \sim 1_X \text{ e } k \circ g \circ f \sim 1_X$$

$k \circ g\colon Y \to X$ è continua e vale che $f \circ g \circ h \sim 1_Y$, allora per il lemma 1 $k \circ g \circ f \circ g \circ h \sim k \circ g$. Per il medesimo lemma e per il fatto che $k \circ g \circ f \sim 1_X$ deriva similmente che $g \circ h \sim k \circ g$.

Una possibile scelta per ϕ è $\phi = g \circ h$, infatti utilizzando il fatto che $f \circ g$ è equivalenza omotopica:

$$f \circ \phi = f \circ g \circ h \sim 1_Y$$

Inoltre utilizzando l'osservazione appena fatta e il lemma 1:

$$g \circ h \circ f \sim k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Anche in questo caso ho utilizzato il fatto che $g \circ f$ è equivalenza omotopica. Si può utilizzare un ragionamento analogo per γ. □

4 Esercizio 1.2.33 (v)

Testo

Considera la mappa $f\colon \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ data da $f(z_1, z_2) = (z_1 z_2, z_2)$, calcola l'omomorfismo indotto $f_\star$ sul gruppo fondamentale.

Soluzione

È dato l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (z_1 z_2, z_2) \end{aligned}$$

Sullo spazio $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ ogni laccio è omotopo ad un laccio della forma:

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta_1 \times \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (s, t) &\mapsto (\mathrm{e}^{2\pi i n s}, \mathrm{e}^{2\pi i m t}) \end{aligned}$$

Dove $\Delta_1 \simeq [0,1]$ è l'1-simplesso standard, e in cui sostanzialmente $n, m \in \mathbb{Z}$ contano il numero di avvolgimenti del laccio attorno alle due circonferenze, per questo il gruppo fondamentale è $\pi_1(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sto cercando quindi la mappa:

$$\begin{aligned} f_\star \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) &\mapsto ? \end{aligned}$$

L'azione di $f_\star$ è definita a partire dai lacci omotopicamente distinti del gruppo fondamentale: $f_\star[\sigma] = [f \circ \sigma]$ quindi:

$$(s,t) \xrightarrow{\ \sigma\ } (\mathrm{e}^{2\pi ins}, \mathrm{e}^{2\pi imt}) \longrightarrow (\mathrm{e}^{2\pi ins}\mathrm{e}^{2\pi imt}, \mathrm{e}^{2\pi imt})$$

Le classi di equivalenza distinte sono quelle in cui il numero di avvolgimenti del laccio intorno a $\mathcal{S}^1$ è diverso, quindi:

$$\begin{aligned} f_\star \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) &\mapsto (n+m, m) \end{aligned}$$

Intuitivamente quello che succede è che f fa ruotare il punto sulla prima $\mathcal{S}^1$ di un angolo pari a quello del punto della seconda $\mathcal{S}^1$ e quindi il numero di avvolgimenti si somma. $\square$

5 Esercizio 1.2.33 (xii)

Testo

Mostra che $\mathcal{S}^1$ non è dello stesso tipo di omotopia di $\mathcal{S}^n$ per $n \geq 2$.

Soluzione

Due spazi topologici hanno lo stesso tipo di omotopia se sono omotopicamente equivalenti. Per assurdo $\mathcal{S}^1$ e $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 2$ sono omotopicamente equivalenti, questo implica che i loro gruppi fondamentali sono isomorfi, indipendentemente dal punto base in quanto gli spazi sono connessi per archi. Ma $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 1$ per $n \geq 2$, quindi siccome i gruppi fondamentali non sono isomorfi gli spazi non possono essere omotopicamente equivalenti. $\square$

6 Esercizio 1.2.33 (xiii)

Testo

Mostra che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per ogni $n > 2$.

Soluzione

Per assurdo esiste una funzione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ con $n > 2$ che sia omeomorfismo. Tolgo un punto p da $\mathbb{R}^2$, se f è un omeomorfismo anche la restrizione $\tilde{f}$ di f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \}$ è omeomorfismo. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, infatti una mappa che realizza esplicitamente questo omeomorfismo è, dopo aver portato p in 0 (una traslazione è un omeomorfismo):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \} &\to \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \\ \vec{x} &\mapsto \left(||\vec{x}||, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right) \end{aligned}$$

Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{ f(p) \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi siccome per ipotesi esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, e questo implica che i gruppi fondamentali sono isomorfi. Siccome il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e vale che:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}) &= 1 \\ \pi_1(\mathcal{S}^1) &= \mathbb{Z} \\ \pi_1(\mathcal{S}^n) &= 1 \end{aligned}$$

allora $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$, ma questi gruppi non sono isomorfi, e quindi ho trovato l'assurdo. $\square$

7 Esercizio 1.5.19 (vii)

Testo

Mostra che ogni mappa $\mathcal{S}^1 \to X$ è omotopa a zero se e solo se $\pi_1(X, x_0)$ è banale in ogni punto $x_0 \in X$.

Soluzione

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X sul punto base $x_0 \in X$ è:

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f\colon \mathcal{S}^1 \to X \text{ continua} \mid f(1) = x_0 \} / \sim$$

Dove $\sim$ è la relazione di equivalenza omotopica. Una funzione si dice omotopa a zero quando è omotopa ad una funzione costante.

Se il gruppo fondamentale è banale $\forall x_0 \in X$ singifica che il suo unico elemento è la classe di equivalenza del laccio costante [1], per cui considerata la generica funzione $g\colon \mathcal{S}^1 \to X$ continua, questa è necessariamente nella stessa classe di equivalenza di [1] in $\pi_1(X, g(1))$ e ciò singifica che è omotopa ad un cammino costante, quindi omotopa a zero.

Mostro il viceversa. Fisso $x_0 \in X$ e considero tutte le funzioni continue $h\colon \mathcal{S}^1 \to X$ tali che $h(1) = x_0$, per ipotesi questi lacci sono omotopi a zero, quindi sono tutti equivalenti al laccio costante $C_{h(1)}$. Per questo motivo il gruppo fondamentale $\pi_1(X, h(1))$ contiene la sola classe di equivalenza del laccio costante, ed è quindi banale. $\square$

8 Esercizio 1.9 (7)

Testo

Considera le mappe $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\pm x_1, \ldots, \pm x_{n+1})$ da $\mathcal{S}^n$ a $\mathcal{S}^n$ e inseriscile in classi di equivalenza rispetto omotopia. Quante classi ci sono?

Soluzione

Per risolvere velocemente questo esercizio sono utili alcuni lemmi:

Lemma 2. *Sia ρ_i la riflessione rispetto al piano $x_i = 0$:*

$$\begin{aligned} \rho_i \colon \mathcal{S}^n &\to \mathcal{S}^n \\ (x_1 \ldots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

allora il suo grado è -1, cioè $\deg \rho_i = -1 \ \forall i \in \{ 1, \ldots, n+1 \}$.

Dimostrazione. In dimensione $n+1$ ci sono $n+1$ diverse riflessioni, tuttavia ciascuna di queste può essere ricondotta a una riflessione di riferimento scambiando due opportunamente due coordinate, ma questa operazione è un omeomorfismo tra sfere in quanto è continua e ammette inverso continuo, e quindi è sufficiente dimostrare che una riflessione in $\mathcal{S}^n$ ha grado -1 per dimostrare che anche tutte le altre hanno grado -1.

Tale dimostrazione è per induzione, per $n = 1$:

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0, -x_1) \end{aligned}$$

Considero il generatore σ:

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))) \end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned} (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))) = (\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t))) = \\ = (\cos(2\pi(1-t)), \sin(2\pi(1-t)))) \end{aligned}$$

Quindi $\rho \circ \sigma = \bar{\sigma} = -\sigma$ e quindi il grado è -1.

Suppongo che il risultato sia vero per $\mathcal{S}^{n-1}$ mostro che è vero anche per $\mathcal{S}^n$. Indico con $\rho^{(k)}$ la riflessione in generica dimensione k. L'omologia di dischi e sfere è nota, e si sa che:

$$\tilde{H}_p(\mathcal{S}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n)$$

Siccome ρ induce una mappa $\rho_\star$ a livello di omologia:

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[r, "\rho_\star^{(n)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) & H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Ma vale anche che $H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$, quindi il diagramma diventa:

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[r, "\rho_\star^{(n)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \arrow[r, "\rho_\star^{(n-1)}"] & H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{tikzcd}$$

Quindi il grado di $\rho^{(n)}$ è -1 in quanto per ipotesi induttiva il grado di $\rho^{(n-1)}$ è -1. $\square$

Lemma 3. *Siano $f, g\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ due mappe continue allora* $\deg(f \circ g) = \deg f \, \deg g$.

Dimostrazione. Il grado è definito dall'azione delle mappe indotte da f e g su $H_n(\mathcal{S}^n)$:

$$\begin{aligned} f_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg f \, \alpha \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} g_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg g \, \alpha \end{aligned}$$

Per la funtorialità:

$$(f \circ g)_\star(\alpha) = (f_\star \circ g_\star)(\alpha) = f_\star(g_\star(\alpha)) = f_\star(\deg g \, \alpha)$$

Siccome $f_\star$ è omomorfismo:

$$f_\star(\deg g \, \alpha) = \deg g f_\star(\alpha) = \deg g \, \deg f$$

Ma per definizione:

$$(f \circ g)_\star(\alpha) = \deg(f \circ g)\alpha$$

Da cui $\deg(f \circ g) = \deg f \, \deg g$. $\square$

Lemma 4. *Siano $f, g\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ due mappe continue, se* $\deg f = \deg g$ *allora $f \sim g$, cioe se due applicazioni hanno le stesso grado allora sono omotope.*

Utilizzando questi lemmi diventa semplice classificare tutte le mappe della forma:

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (\pm x_1, \ldots, \pm x_{n+1})$$

Per rappresentare tutto questo insieme si può scrivere:

$$r^{i_1 \cdots i_{n+1}} \colon (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto ((-)^{i_1} x_1, \ldots, (-)^{i_{n+1}} x_{n+1}) \text{ con } i_j \in \{ 0, 1 \} \ \forall j \in \{ 1, \ldots, n \}$$

L'insieme di queste applicazioni forma un gruppo discreto finito generato dalle riflessioni ρ_i, e la generica mappa si può scrivere come:

$$r^{i_1 \cdots i_{n+1}} = \rho_{n+1}^{i_{n+1}} \circ \cdots \circ \rho_1^{i_1} \text{ con } i_j \in \{ 0, 1 \} \ \forall j \in \{ 1, \ldots, n \}$$

Utilizzando il lemma 3 si ha che:

$$\deg r^{i_1 \cdots i_{n+1}} = \prod_{j}^{n+1} i_j = \pm 1$$

Quindi per il lemma 4 tutte le funzioni $r^{i_1 \cdots i_{n+1}}$ si ripartiscono in due classi di equivalenza, una con rappresentante l'identità, l'altra con rappresentante la mappa antipodale. □

9 Esercizio 1.9 (21)

Testo

Sia $q_1(z) = z^n$ e $q_2(z) = \bar{z}$. Calcola il grado di $q_1, q_2 \colon \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$.

Soluzione

Sia:

$$\begin{aligned} q_1 \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

Questa induce una mappa sul gruppo $H_1(\mathcal{S}^1)$, il quale è noto essere gruppo libero generato di rango 1. Un suo generatore è dato dalla classe del simplesso singolare:

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Ma quindi:

$$\begin{aligned} q_1 \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

E quindi $q_1(\sigma) = \sigma \star \sigma \star \sigma \cdots = \sigma^n$, cioè sui gruppi di omologia:

$$\begin{aligned} (q_1)_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 &\mapsto n \end{aligned}$$

Per questo il grado della mappa è n. Sia:

$$\begin{aligned} q_2 \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Dove $\bar{z}$ indica il cammino inverso. Allora considerando lo stesso generatore:

$$\begin{aligned} q_2 \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i(1-t)} = \mathrm{e}^{-2\pi i t} \end{aligned}$$

Quindi a livello di gruppi di omologia:

$$\begin{aligned} (q_2)_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 &\mapsto -1 \end{aligned}$$

E quindi il grado è -1. □

10 Esercizio 4.2.27 (v)

Testo

Calcola il grado di ogni riflessione in un piano, cioè $r \colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ definita da:

$$\rho_0 \colon (x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_0, \dots, x_{n+1})$$

Più in generale calcola il grado di una mappa $f_k \colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ del tipo:

$$f_k \colon (x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto (-x_0, \dots, -x_k, \dots, x_{n+1})$$

Soluzione

Il grado delle riflessioni è già stato calcolato nell'esercizio 8. Utilizzando i risultati di tale esercizio e le medesima notazione, la funzione f_k si può scrivere come $f_k = \rho_k \circ \cdots \circ \rho_1$, quindi usando il lemma 3:

$$\deg f_k = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

□