# *Topologia Algebrica*

Zitto e studia.

*Parigi 1905*
H. Poincarè

Professore:
*Gilberto Bini*

Scriba:
*Gabriele Bozzola*

# Indice

## Lista dei simboli e abbreviazioni

| **Simbolo** | **Significato** | **Pagina** |
|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Numeri naturali | 2 |
| $\mathbb{Z}$ | Numeri interi | 2 |
| $\mathcal{R}$ | Anello | 4 |
| $< \cdots >$ | Gruppo generato | 5 |
| $\mathrm{Ker}(f)$ | Nucleo di $f$ | 5 |
| $\mathrm{Im}(f)$ | Immagine $f$ | 5 |
| $X$ | Spazio topologico | 6 |
| $\simeq$ | Spazi omeomorfi | 7 |
| $\xrightarrow{\sim}$ | Omeomorfismo | 11 |
| $\pi_1$ | Gruppo fondamentale | 11 |
| $\Delta_k$ | Simplesso standard | 13 |
| $\sim_{hom}$ | Relazione di omologia | 19 |

# 1 Richimi di algebra e geometria

### 1.0.1 Richiami di algebra

**Definizione 1.0.1** *Un* ***anello*** *è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro*[1]*) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

**Definizione 1.0.2** *Un anello si dice* ***anello commutativo*** *se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.*

**Definizione 1.0.3** *Un* ***campo*** *è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.*

**Definizione 1.0.4** *Sia $\mathcal{R}$ un anello commutativo si definisce l'* ***$\mathcal{R}$-modulo*** *un gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in $\mathcal{R}$ tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

**Osservazione 1.0.5** *Se $\mathcal{R}$ è un campo allora l'$\mathcal{R}$-modulo è uno spazio vettoriale.*

Sostanzialmente la nozione di $\mathcal{R}$-modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

**Osservazione 1.0.6** *Ogni gruppo abeliano $\mathcal{G}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo in modo univoco, cioè $\mathcal{G}$ è un gruppo abeliano se e solo e è uno $\mathbb{Z}$-modulo.*

**Dimostrazione**: Sia $x \in \mathcal{G}$ si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento $n \in \mathbb{Z}$ come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

[1] La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sia uno $\mathbb{Z}$-modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di $\mathbb{Z}$: $nx = (1+1+1+1+\dots)x = x+x+x\dots$, quindi quella definita è l'unica possibile. □

**Definizione 1.0.7** *Un gruppo $\mathcal{G}$ si dice **generato** dai suoi elementi $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$ se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di $x_1, x_2, \dots$. In questo caso si indica $\mathcal{G} = \langle\{x_1, x_2, \dots\}\rangle$.*

**Definizione 1.0.8** *Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.*

**Definizione 1.0.9** *Siano $(X, \cdot)$ e $(Y, \star)$ due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione $f$ tra $X$ e $Y$ che preserva la struttura di gruppo, cioè tale che:*

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

**Osservazione 1.0.10** *Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.*

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

**Definizione 1.0.11** *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{N} \mid \exists k \in M \text{ con } m = \varphi(k) \,\}$$

**Osservazione 1.0.12** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *e* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *sono $\mathcal{R}$-sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ che posseggono la struttura di $\mathcal{R}$-modulo.*

Se $M_i$ sono $\mathcal{R}$-moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

**Proposizione 1.0.13** *Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.*

**Dimostrazione**: Se $u \in \mathrm{Im}(\varphi_1)$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ per ipotesi, quindi $u \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. □

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

**Definizione 1.0.14** *Siano $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-modulo e $\mathcal{N}$ un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$ e definito da:*

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

*Dove $\mathcal{M}/\sim$ è l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ equipaggiate con operazioni indotte dall'$\mathcal{R}$-modulo, cioè se $[u], [w] \in \mathcal{M}/\sim$ e $a \in \mathcal{R}$:*

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

*In questo caso gli elementi di* ${}^{\mathcal{M}}\!/\!_{\mathcal{N}}$ *sono le classi di equivalenza* $[m] = \{ m + n \mid n \in \mathcal{N} \}$.

Siccome $\mathrm{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$ {}^{\mathrm{Ker}(\varphi_2)}\!/\!_{\mathrm{Im}(\varphi_1)} $$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.
A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$, dato che l'unica classe di equivalenza presente è $[0]$ significa che $\forall m \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ $\exists n \in \mathrm{Im}(\varphi_2)$ tale che $m - n = 0$, cioè $m$ e $n$ coincidono e quindi $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.
2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni $\varphi$ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.
Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

**Definizione 1.0.15** $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* $\varphi_1$ *e* $\varphi_2$.

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}_\bullet$ non è esatto.
Questo deriva da un problema topologico concreto.

**Definizione 1.0.16** *La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *è detta* ***spazio topologico*** *(generalmente si omette la* $\mathcal{T}$*) se* $\mathcal{T}$ *è una* ***topologia****, cioè se è una collezione di insiemi di* $X$ *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3. $\bigcap_{n\in\{0,1,\ldots,N\}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n \in \{0, 1, \ldots, N\}$

*Gli elementi di* $\mathcal{T}$ *sono detti* ***aperti****.*

**Osservazione 1.0.17** *Se* $\tau$ *è la collezione di tutti i sottoinsiemi di* $X$ *allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la* ***topologia discreta****, invece* $\tau = \{ \emptyset, X \}$ *è una topologia ed è la* ***topologia triviale****. Infine in* $\mathbb{R}^n$ *si definisce la* ***topologia usuale*** *che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo* $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$*. Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in* $\mathbb{R}^n$*.*

**Osservazione 1.0.18** *Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.*

**Osservazione 1.0.19** *Sia $A \subseteq X$ spazio topologico, si può rendere anche $A$ uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di $X$ intersecati con $A$.*

**Osservazione 1.0.20** *Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.*

**Definizione 1.0.21** *Sia $X$ uno spazio topologico l'insieme $\{ A_i \mid A_i \in X \ \forall i \}$ è un **ricoprimento** di $X$ se:*

$$\bigcup_i A_i = X$$

*Se in particolare gli insiemi $A_i$ sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.*

**Definizione 1.0.22** *Un insieme $U$ è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento* finito *di $U$.*

**Definizione 1.0.23** *Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, cioè se è una mappa uno a uno. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo $\simeq$.*

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

### 1.0.2 Richiami sul gruppo fondamentale

**Definizione 1.0.24** *Sia $X$ uno spazio topologico e $x_0$ un suo punto, allora un **laccio** è un arco in $X$ avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto $x_0$. Un laccio $c_{x_0}$ si dice **costante** se $\forall t \in I \ c_{x_0}(t) = x_0$ con $x_0 \in X$.*

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio $X$ come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

**Definizione 1.0.25** *Sia $X$ uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia $(X, x_0)$ è detta **spazio topologico puntato**.*

**Definizione 1.0.26** *Sia $(X, x_0)$ uno spazio topologico puntato e $f : I \to X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0 \ \forall t \in I$, si dice che una funzione continua $g$ è **omotopicamente equivalente** a $f$ ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che;*

- $F(0, x) = f(x) \ \forall x \in I$

- $F(1, x) = g(x)\ \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0\ \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0\ \forall s \in I$

*La relazione $\sim_H$ è detta* ***relazione di omotopia*** *e si dimostra essere una relazione di equivalenza.*

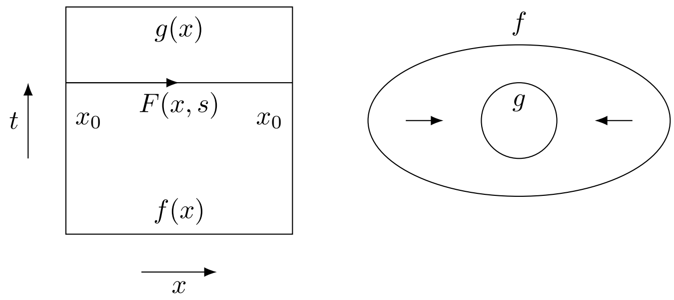



Figura 1.1: Omotopia: deforma $f$ in $g$ in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{\, f : I \to X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \,\}/_{\sim_H}$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale** , tale operazione è: Siano $[f], [g] \in \pi_i(X, x_0)$ si definisce $[f][g] = [f \star g]$, dove l'operazione $\star$ è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $1 = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0\ \forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove $\bar{f}$ è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

  $$\exists f : X \to Y, g : Y \to X\ | f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

  allora $\pi_1(X, x_o) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

  **Osservazione 1.0.27** *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se $X$ è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

  **Proposizione 1.0.28** *Se uno spazio tologico $X$ è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati $(X, x_0)$ sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da $x_0$.*

  Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

**Definizione 1.0.29** *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

**Osservazione 1.0.30** *Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio $\mathcal{S}^2$.*

- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma\colon I &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

  Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$ e $\pi_1(\mathcal{S}^1) \to \mathbb{Z}$ con $[\sigma] \mapsto 1$. Ogni elemento è multiplo di $\sigma$ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio: $V_0 := \mathcal{S}^2 \quad V_g := P_{\frac{4g}{N}}$ con $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$ e $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con $k$ lati e con idenfiticazioni. Nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente $-1$ quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha $aba^{-1}b^{-1}$.

In genrale si ha $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ si ha un toro, per $g = 2$ un bitoro, …. $g$ è detto **genere** .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ < a_1 b_1 \dots \Pi_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 > & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

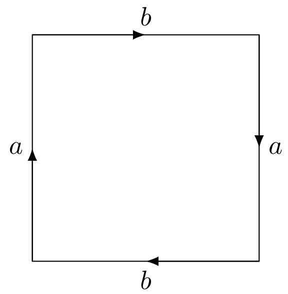



Figura 1.2: Toro piatto, o anche toro di Clifford

Dove $[,]$ è il commutatore, cioè esattamente $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Solo per $g = 0$ o $g = 1$ si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) = {}^{\pi_1(X)}\!\big/_{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = {}^{\pi_1(X)}\!\big/_{\pi_1'(X)}$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\mathrm{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ per $g \geq 2$. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

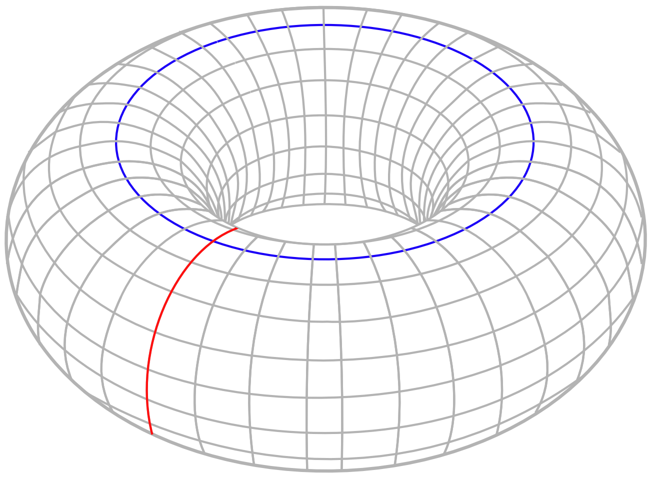


Figura 1.3: Generatori di un toro

L'abelianizzato è uno $\mathbb{Z}$-modulo.

### 1.0.3 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

**Definizione 1.0.31** *Un* ***arco*** *in uno spazio topologico $X$ tra i punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ è una funzione continua da $I = [0, 1]$ a $X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y_0$. Si dice che l'arco parte* *da $x_0$ e finisce in $y_0$.*

**Definizione 1.0.32** *Uno spazio topologico $X$ è* ***connesso per archi*** *se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco che parte da $x$ e termina in $y$.*

**Definizione 1.0.33** *Uno spazio topologico $X$ si dice* ***connesso per archi*** *se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale $x$ e punto finale $y$.*

**Proposizione 1.0.34** *Se $f : X \to Y$ è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se $X$ è connesso per archi allora $Y$ è connesso per archi. Questo vale in particolare se $f$ è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

**Dimostrazione**: Siano $y_0, y_1$ due punti di $Y$. La funzione $f$ è suriettiva, e dunque esistono $x_0$ e $x_1$ in $X$ tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Dato che $X$ è connesso, esiste un cammino $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo $\alpha$ con $f$: $f \circ \alpha : [0, 1] \to X \to Y$ è un cammino continuo che parte da $y_0$ e arriva a $y_1$. $\square$

Si sa inoltre che:

**Proposizione 1.0.35** *$\mathbb{R}^n$ è connesso per archi $\forall n \in \mathbb{N}$.*

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta togliere un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso per archi mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

**Proposizione 1.0.36** *Se $f : X \to Y$ è omeomorfismo tra spazi topologici allora $f|_U : U \to f(U)$ è omeomorfismo per ogni $U \subseteq X$.*

Nel caso considerato $U = x_0$, siccome ho trovato un $U$ per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo $f$ non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

**Dimostrazione**: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omeomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$, se $f$ omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{ f(p) \}$. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa $\vec{x} \mapsto \left( ||\vec{x}||, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right)$ (dopo aver fatto una traslazione di $p$ nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{ f(p) \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi se esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ significherebbe che $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$, $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ che è assurdo. $\square$

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

**Definizione 1.0.37** *Si definisce il* ***gruppo fondamentale*** *di uno spazio topologico $X$ connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) = {\{\, g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \,\}}\big/_{\sim}$$

*e $\sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ tale che $G(z,0) = g_1(z), G(z,1) = g_2(z), G(1,t) = x_o$ con $G$ continua. In questo vedo $\mathcal{S}^1$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta (il punto $1$ è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso $\mathcal{S}^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$).*

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti $g$ è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di arrivo necessariamente coincidono dato che $g$ è definito su $\mathcal{S}^1$. Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

**Dimostrazione**: Come nel caso precedente suppongo esiste $f$ omeomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$, tolgo $q$ da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^n$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. □

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

**Definizione 1.0.38** *Si definiscono i* ***gruppi di omotopia superiore*** *di uno spazio topologico $X$ attorno al punto $x_0$ per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = {\{\, g : \mathcal{S}^k \to X \mid g \text{ continua},\ g(p_0) = x_0 \,\}}\big/_{\sim}$$

*Con $p_0 \in \mathcal{S}^k$ e $\sim$ relazione di omotopia.*

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m \quad (m > 2)$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5. $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$

**Definizione 1.0.39** *Sia $A \subseteq X$ con $X$ spazio topologico $i : A \to X$ si definisce mappa di* ***inclusione*** *e si scrive $i : A \hookrightarrow X$ se $\forall a \in A$ vale che $i(a) = a$.*

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via…Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

[2]Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

# 2 Omologia Singolare

## 2.1 Introduzione

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

### 2.1.1 Simplessi singolari

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare
- Omologia persistente[1]
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Associerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base $\mathbb{Z}$, che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

**Definizione 2.1.1** *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il* ***simplesso standard*** $\Delta_k$ *l'insieme:*

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \; 0 \leq x_i \leq 1 \textit{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

**Osservazione 2.1.2** *Alcuni esempi sono:*

- $\Delta_0$ *è un punto.*
- $\Delta_1$ *è un segmento, che è omeomorfo a* $[0, 1]$.
- $\Delta_2$ *è un triangolo*
- $\Delta_3$ *è un tetraedro*
- …

[1]Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.

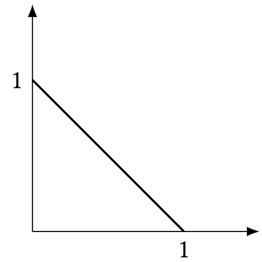
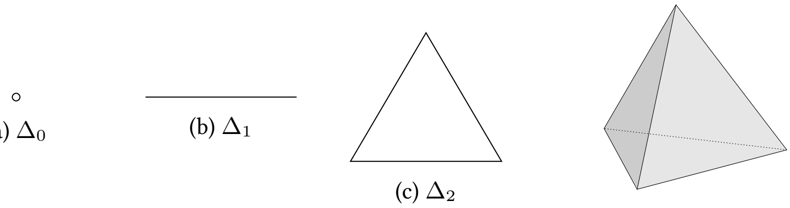



Figura 2.1: 1-Simplesso standard



(a) $\Delta_0$ (b) $\Delta_1$ (c) $\Delta_2$ (d) $\Delta_3$

Figura 2.2: Simplessi standard

**Definizione 2.1.3** *Dato uno spazio topologico $X$ si definisce il **$k$-simplesso singolare** in $X$ come un'applicazione continua $\sigma : \Delta_k \to X$.*

Spesso conviene identificare il $k$-simplesso con la sua immagine in $X$. In questo modo uno 0-simplesso è un punto in $X$, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome non c'è relazione tra la dimensione dello spazio di partenza e lo spazio di arrivo (ad esempio la curva di Peano) il simplesso può deformare, ed è per questo che è detto singolare.

**Esempio 2.1.4** *Un esempio di $k$-simplesso singolare in cui è particolarmente evidente la possibilità di fare l'identificazione è la mappa identità: $\mathbb{I} : \Delta_k \to \Delta_k$.*

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S_\bullet$ è il compesso ($S$ sta per singolare), cioè:

$$\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k(X) \to S_{k-1}(X) \to \cdots \to S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi: } \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k - \text{simplessi singolari di } X\}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star g = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Inoltre $\forall k < 0$ si pone $S_k(X) = 0$. Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate $k$-**catene singolari**. $S_k(X)$ è generato da tutte le possibili applicazioni continue da $\Delta_k$ a $X$, cioè:

$$S_k(X) =< \{ \, g \mid g \text{ } k\text{-simplesso singolare in } X \, \} >$$

Si nota che le catene sono somme formali di mappe e non sono esse stesse mappe.

Ad esempio se $k = 0$ allora $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$, identifico l'applicazione con il punto in $X$ sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \; p_i \in X \}$$

**Osservazione 2.1.5** *Quando è possibile faccio un abuso di notazione e identifico la mappa con la sua immagine nello spazio topologico.*

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari $S_k$, queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove $\alpha$ è un **arco**.

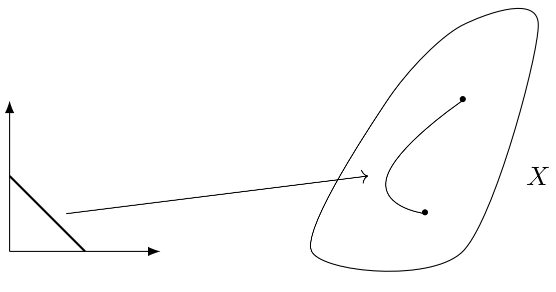



Figura 2.3: 1-Simplesso singolare

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simplesso è uno 0-simplesso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

**Definizione 2.1.6** *Sia $\Delta_k$ un $k$-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore* ***faccia*** *come la mappa ${F_i}^k : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di $\Delta_k$.*

L'operatore faccia prende un $k$-simplesso standard e lo immerge in un qualche senso in un simplesso più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso $k = 0$),

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i\,\}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

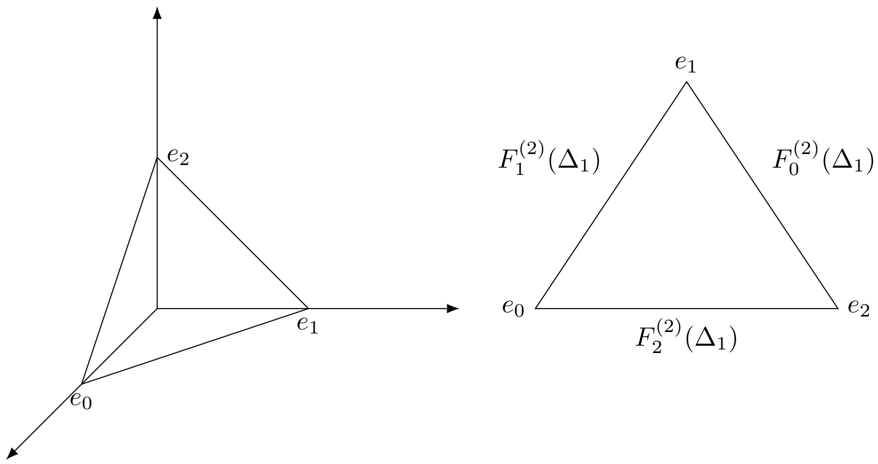



Figura 2.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia $i$-esimo è quello che non contiene il vertice $i$-esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplesso.

In generale se $\Delta_k$ è un simplesso standard definisco la base canonica (si noti che la base canonica è ordinata):

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del simplesso, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} {F_i}^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ {F_i}^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

**Esercizio 1** *Dimostrare che se* $[\cdot, \cdot]$ *indica l'inviluppo convesso allora:*

1. *Per* $j > i$ *vale che* ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$.

*2. Per $j \leq i$ vale che ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, \hat{e}_{i+1}, \ldots, e_k]$.*

*Dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.*

**Definizione 2.1.7** *L'**inviluppo convesso** di un insieme $U$ in $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo insieme convesso che contiene $U$.*

**Definizione 2.1.8** *Un insieme in $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.*

**Definizione 2.1.9** *Dato un $k$-simplesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} : \Delta_{k-1} \to X$ come la restrizione di $\sigma$ sulla faccia $i$-esima del simplesso, cioè $\sigma^{(i)} = \sigma \circ {F_i}^k$, si definisce quindi il **bordo** come la mappa:*

$$\begin{aligned} \partial \colon \Sigma_k(X) &\to \Sigma_{k-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma^{(i)} \end{aligned}$$

*Dove $\Sigma_k(X)$ indica lo spazio dei $k$-simplessi singolari di $X$.*

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle facce.

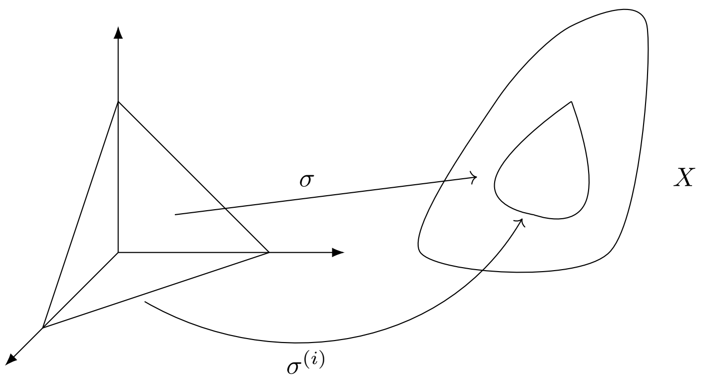



Figura 2.5: Azione di $\sigma$ e $\sigma^{(i)}$

**Esempio 2.1.10 ($k = 1$)** *Per $k = 1$ vale che $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$, infatti:*

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \sigma \circ {F_0}^1 = \sigma(1) = p_1 \\ \sigma^1 &= \sigma \circ {F_1}^1 = \sigma(0) = p_0 \end{aligned}$$

*Il bordo è la somma con i segni alternati: $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$. Tecnicamente il bordo è una mappa quindi sarebbe più corretto scrivere $\partial_1 \sigma = \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)}$ dove l'azione di queste due mappe è quella di mandare un estremo dell'intervallo $[0, 1]$ in $p_0$ o $p_1$.*

Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ estendendolo per linearità $\partial_k \left( \sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$ (infatti si è definita l'azione sui generatori $g$).

Devo mostrare che $\partial_k$ è un omomorfismo e che soddisfa $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

**Dimostrazione**:

$$\begin{aligned}\partial_k \left( \sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left( \sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left( \sum_g n_g g \right) + \partial_k \left( \sum_g m_g g \right)\end{aligned}$$

Dove si è usato che la mappa di bordo è lineare. □

Quindi il complesso è costituito da:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ (spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$). <u>SISTEMARE</u>
**Dimostrazione**: Se $\sigma$ è un $k$-complesso singolare, cioè $\sigma : \Delta_k \to X$ continua:

$$\begin{aligned}\partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma = \partial_k \left( \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) &= \\ = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^{k} (-)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_j^k &= \\ = \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k &=\end{aligned}$$

Rinominando nella seconda sommatoria …

$$\begin{aligned}= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k &= \\ = 0 &\end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio.

**Esercizio 2** *Verificare che fa veramente zero.*

Si nota che è di importanza cruciale il fatto che si è definito il bordo con i segni alternati. □

Sia $X$ uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare $H_k(X)$, cioè il $k$-esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso $(S_\bullet(X), \partial)$ con:

$$S_k(X) = \{ \sum_g n_g g \mid g \text{ simplesso singolare, } n_g \in \mathbb{Z} \}$$

E $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ applicazione di bordo con $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^{k}(-)^i g^{(i)}$ con $g : \Delta_k \to X$, e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di $S$, dove $g^{(i)} = g \circ {F_i}^k$.

Siccome $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre $\partial_k \circ \partial_{k-1}$ è la mappa nulla dalle catene singolari di $S_k(X)$ a quelle di $S_{k-2}(X)$, in questo modo $(S_\bullet(X), \partial)$ è un complesso di gruppi abeliani. Posso quindi calcolare l'omologia di $(S_\bullet(X), \partial)$ come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = {}^{\mathrm{Ker}(\partial_k)}\big/_{\mathrm{Im}(\partial_{k+1})}$$

Vale che $\mathrm{Ker}(\partial_k) = \{\, c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \,\}$, cioè le $k$-catene con bordo nullo, questi sono chiamati $k$-cicli.

**Definizione 2.1.11** *Sia $(S_\bullet(X), \partial)$ un complesso di moduli, gli elementi di* $\mathrm{Ker}(\partial)$ *sono detti $k$-**cicli**. Un $k$-ciclo è quindi una $k$-catena con bordo nullo:*

$$c \textit{ ciclo } \Leftrightarrow \partial c = 0$$

*L'insieme dei $k$-cicli è indicato con $Z_k(X)$, cioè: $Z_k(X) = \mathrm{Ker}(\partial)$.*

Si pone invece $B_k(X)$ come l'insieme dei bordi, cioè le $k$-catene singolari che sono immagini di $k+1$-catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{\, \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \,\}$$

Per definizione si ha quindi che $H_k(X) = {}^{Z_k(X)}\big/_{B_k(X)}$, cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di $H_k(X)$ sono classi di equivalenza tali che se $[c] \in H_k(X)$ con $\partial c = 0$, e $c_1 \in [c]$ allora $c_1 - c \in B_k(X)$ e $\partial c_1 = 0$ quindi esiste $b$ tale che $c_1 - c = \partial b$. Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

**Definizione 2.1.12** *Due elementi $a, b$ si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.*

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

**Osservazione 2.1.13** *Vale che $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$, cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.*

Scopo del corso è studiare $H_k(X)$ e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

**Proposizione 2.1.14** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0 \cong \mathbb{Z}$, cioè è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 1. In effetti $H_0(X)$* conta *le componenti connesse per archi in $X$ e quindi dà informazioni di natura geometrica.*

**Dimostrazione**: Dalla definizione di gruppo di omologia: $H_0(X) = {}^{Z_0(X)}\!\big/_{B_0(X)}$. Ma $Z_0(X) = \{\, c \in S_o(X) \mid \partial_0 c = 0 \,\}$ e $S_0(X) = \{\, \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X \,\}$. Sia $c \in S_0(X)$ allora $c = \sum n_i p_i$, e vale che $\partial_0(c) = \sum n_i \partial_0(p_i) = 0$, infatti $\partial_0 : S_0(X) \to S_{-1}(X)$, ma per $k < 0$ $S_k = 0$ per definizione. Quindi per ora ho che:

$$Z_0(X) = \operatorname{Ker}(\partial_0) = S_0(X) \;\Rightarrow\; H_0(X) = {}^{S_0(X)}\!\big/_{B_0(X)}$$

Per definizione $B_0(X) = \{\, x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x \,\}$. Sia $p_0 \in X$, allora $q \sim_{hom} p_0$ se e solo se $\exists \alpha \in S_1(X)$ tale che $q - p_0 = \partial_1 \alpha$. Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, infatti essendo $X$ connesso per archi esiste un arco $\alpha$ che connette $q$ e $p_0$, ma per definizione gli archi sono applicazioni continue da $\Delta_1$ a $X$ che hanno come bordo $q - p_0$. Esiste quindi un'unica classe di equivalenza che è la classe di equivalenza di un punto. Per questo il gruppo è omomorfo a $\mathbb{Z}$.

**Definizione 2.1.15** *Si definisce inoltre la mappa* **grado** *come l'applicazione che manda una catena in $S_0(X)$ nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg\colon S_0(X) &\to \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

**Teorema 2.1.16 (Teorema fondamentale degli omomorfismi)** *Sia $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:*

$$ {}^{\mathcal{G}_1}\!\big/_{\operatorname{Ker}(f)} \cong \operatorname{Im}(f)$$

**Proposizione 2.1.17** *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1. $\deg$ *è un omomorfismo di gruppi abeliani*
2. $\deg$ *è suriettivo*
3. $\operatorname{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

*Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema fondamentale di isomorfismo:*

$$ {}^{S_0(X)}\!\big/_{B_0(X)} \cong \operatorname{Im}(\deg)$$

*Ma* $\deg$ *è suriettiva, quindi* $\operatorname{Im}(\deg) = \mathbb{Z}$*, perciò:*

$$H_0(X) = {}^{S_0(X)}\!\big/_{B_0(X)} \cong \mathbb{Z}$$

*Dimostro quindi questa proposizione.*
***Dimostrazione:***

1. *Sia* $c_1 = \sum n_i p_i$ *e* $c_2 = \sum m_i q_i$*, bisogna mostrare che:*
$$\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$
*ma:*
$$c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$$
*dove* $r_i$ *è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene. Quindi:*
$$\deg(c_1 + c_2) = \sum (n_i + m_i) = \sum n_i + \sum m_i = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$
*Alternativamente in modo più semplice si può osservare l'azione di* deg *sui generatori di* $S_0(X)$*, che è unico e viene mandato dalla mappa grado in* $1$*, quindi si estende per linearità.*

2. *La mappa è suriettiva, basta prendere un punto* $p \in X$ *e la controimmagine di* $m \in \mathbb{Z}$ *è* $\deg^{-1}(m) = mp$

3. *SISTEMARE Mostro che* $\mathrm{Ker}(\deg) = B_0(X)$*. Sia* $c \in \mathrm{Ker}(\deg)$ *cioè tale che* $\deg(c) = 0$*, se* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $\sum n_i = 0$*, bisogna mostrare che* $c \in B_0(X)$*, cioè che* $\exists b \in S_1(X)$ *con* $\partial_1 b = c$*. Considerato* $p_0$ *e altri punti* $p_i$*, ci sono archi* $\lambda_i s$ *che li uniscono a* $p_0$*.* $b$ *si può costruire in questo modo.*

   *Siano* $\lambda_i : [0,1] \to X$ *con* $\lambda_i(0) = p_0$ *e* $\lambda_i(1) = p_i$ *considero* $c - \partial\left(\sum n_1 \lambda_i\right) = c - \sum n_i \partial \lambda_i = c - \sum n_i (p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i = \sum n_i p_0 = 0$*. Siccome per ipotesi* $p_0 \in \mathrm{Ker}(\deg)$ *e* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$ *quindi* $\sum n_i \lambda_i = b$ *da cui* $\mathrm{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$*. Mi rimane da mostrare che* $B_0(X) \subseteq \mathrm{Ker}(\deg)$*, infatti ora mostro che se* $c \in B_0(X)$ *allora* $\deg(c) = 0$*.* $c = \partial b$ *ma se* $\lambda_i$ *sono gli archi* $b = \sum m_i \lambda_i$ *quindi* $\partial b = \sum n_i \partial \lambda_i$ *ma* $\partial \lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$ *e l'azione dell'opertaore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi*
$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial \lambda_i) = 0$$

□

Per questo $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe $[p]$ $\forall p \in X$ (con $X$ connesso per archi). □

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:
$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$
Dove $N_c$ è il numero di componenti connesse per archi di $X$ con $N_c < +\infty$, in pratica $H_0(X)$ è generato da un insieme formato da un punto per ogni componente connessa per archi.

Cosa si può dire invece su $H_1(X)$?

Sia $X$ spazio topologico e $x_0 \in X$, allora alla coppia $(X, x_0)$ si associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata: $\mathrm{Ab}(\pi_1(X,x_0)) = {}^{\pi_1(X,x_0)}\big/_{\pi_i(X,x_0)'}$ dove $'$ indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X,x_0)' = [\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)] = \langle \{\, [g,h] \mid g,h \in \pi_1(X,x_0) \,\} \rangle$$

Se $X$ è connesso per archi allora $\mathrm{Ab}(\pi_1(X,x_0)) \cong H_1(X)$, quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare anche il primo gruppo di omologia, che quindi è sostanzialmente formato dai lacci (modulo omotopia) che commutano tra loro.

**Osservazione 2.1.18** *Sia $X$ uno spazio topologico connesso per archi, $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \to \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to \mathcal{G}$ omomorfismo di gruppi abeliani.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\
\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] &
\end{tikzcd}$$

*$P$ è la proiezione sul quoziente. $\varphi'$ esiste perchè in $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ c'è tutto quello che sta nel nucleo. $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$. Allora $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$, devo mostrare che $\varphi(c) = \varphi(d)$. Siccome $\mathcal{G}$ è abeliano $p(c) \sim p(d)$, e quindi $c = d[x,y]$ per cui: $\varphi(c) = \varphi(d[x,y])$, siccome $\varphi$ è omomorfismo:*

$$\varphi(d[x,y]) = \varphi(d)\varphi([x,y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

*dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Per questo $\varphi'$ è ben definito.*

Questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.

Voglio dimostrare che $\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$, in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen posso ottenere tante informazioni su $H_1(X)$. Per ora so che $H_1(X)$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo. Se costruisco $\varphi : \pi_1(X) \to H_1(X)$ ottengo gratuitamente la mappa da $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ a $H_1(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\
\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] &
\end{tikzcd}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè $\exists \psi : H_1(X) \to A_1(X)$ tale che $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$ e $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\mathrm{Ab}(\pi_1(X))}$. Provo a costruire $\varphi$.

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\to H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Usando il seguente risultato:

**Lemma 2.1.19** *Se $f \sim_H g$ allora $f \sim_{hom} g$.*

**Dimostrazione**: Siccome $f \sim_H g$ allora $\exists F$ continua tale $F : I \times I \to X$ tale che $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ e $F(t, 0) = x_0$ in quanto è un laccio. [FIGURA] Voglio mostrare che è il bordo di un 2-simplesso. Faccio l'equivalenza $I \times I /_{0xI} \simeq \Delta_2$. [FIGURA] E questo è omeomorfo a un 2-simplesso standard. Siccome rimane costante su $x_0$ questa mappa induce $F'$:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"] & X \\ I \times I /_{0 \times I} \simeq \Delta_2 \arrow[ur, "F'"] & \end{tikzcd}$$

Calcolo il bordo: $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$ dove $K$ è il cammino costante per definizione di omotopia. Se $K$ fosse il bordo di qualcosa avrei finito ($\partial w = f - g$). Prendo il 2-simplesso standard $K$ costante e uguale a $x_0$ (è la stessa costante di $K$):

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)}$$

ma questi sono uguali perché sono costanti, quindi $\partial K = K^{(2)} = k$, cioè $k$ è un bordo, quindi:

$$\partial F' = \partial K - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial K = f - g \Rightarrow \partial(F' - K) = f - g$$

$F' - K$ è 2-simplesso singolare, lo chiamo $\sigma$: $\partial \sigma = f - g$. $f$ e $g$ sono omologhi e $\sigma$ è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia. □ Se $X$ è uno spazio topologico connesso per archi sono in grado di costruire

$$\varphi : \pi_1(X) \to H_!(X)$$
$$[f]_H \mapsto [f]_{hom}$$

Nel far ciò non ho utilizzato l'ipotesi di connessione per archi. Ora voglio costruire $\varphi'$ : $\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ e lo faccio ancora senza l'ipotesi di connessione per archi. Mostro che $\varphi'$ è omomorfismo, per far ciò basta che mostro che $\varphi$ lo è. **Dimostrazione**: Siano $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$ voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H[g]_h) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è verso se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{hom} + [g]_{hom}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{hom} = [f + g]_{hom}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti:

$$\exists T : \Delta_2 \to X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

[FIGURA, ROBA]

□

Al momento la situazione è che ho $\varphi : H_1(X, xo) \to H_1(X)$ omomorfismo di gruppi ben definito anche con $X$ non necessariamente connesso per archi, e dato che $H_1(X)$ è abeliano ho $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$.

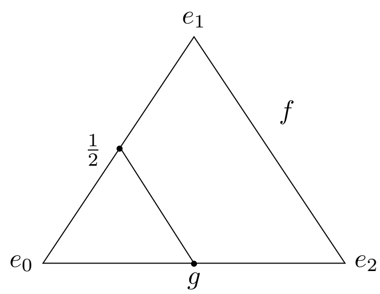



Figura 2.6: Costruzione dell'omomorfismo, deve avere valori costanti su rette parallele

**Proposizione 2.1.20** *Se $X$ è connesso per archi allora la mappa $\varphi'$ : $\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ è un isomorfismo.*

**Dimostrazione**: *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* Per dimostrare che $\varphi'$ è isomorfismo o dimostro che è iniettiva e suriettiva o che ammette un inverso. Procedo con la seconda possibilità: mostro che $\exists \psi \colon H_1(X) \to \mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ tale che $\psi$ è inverso di $\varphi'$. Considero un arco $f \colon \Delta_1 \to X$ con $f(0), f(1) \in X$. Siccome lo spazio è connesso per

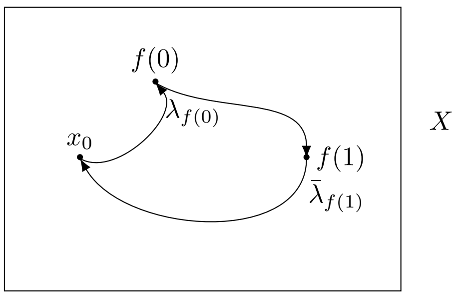



Figura 2.7: Dimostrazione della proposizione

archi esiste un cammino da $x_0$ a $f(0)$, cioè una funzione $\lambda_{f(0)} \colon I \to X$ tale che $\lambda_{f(0)} = x_0$ e $\lambda_{f(1)} = f(0)$. Lo stesso vale per $x_0$ e $f(1)$. Questi archi sono orientati partendo da $x_0$, posso considerare il cammino con verso opposto $\bar{\lambda}_{f(1)}$ e quindi costruire il laccio di base $x_0$: $\lambda_{f(0)} \star f \star \bar{\lambda}_{f(1)} =: \tilde{f}$. Vale che $\psi(f) = [\![\tilde{f}]\!]$. Bisogna mostrare che:

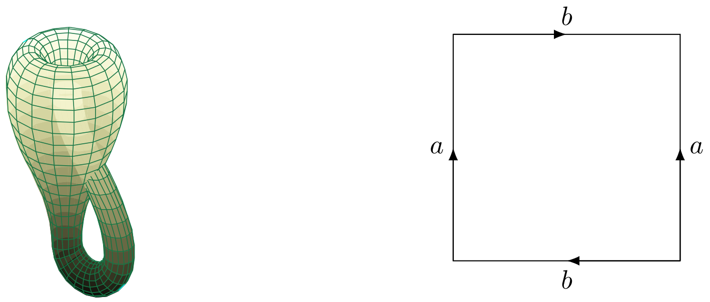
1. $\psi$ è ben definito, cioè se $f \sim g$ allora $\psi(f) = \psi(g)$ e che $\psi$ non dipende dalla scelta del cammino.
2. $\psi$ è omomorfismo di gruppi
3. $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$
4. $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\mathrm{Ab}(\pi_1(X))}$

*Lo studente interessato può verificare queste asserzioni.*

**Esercizio 3** *Verificarli.*

Una volta verificati si trova quindi che $H_1(X) \cong \mathrm{Ab}(\pi_1(X))$. $\square$ Alcuni esempi:

- $H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ con $g \geq 0$
- $H_1(\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}^k$ con $\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{S}^1$ bouquet, cioè $k$ circonferenze incollate in un punto.
- $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ (è un toro tappato)
- $H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}_2$ dove $U_1$ è il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = {\mathbb{R}^3 \setminus \{\,0\,\}}/{\sim}$ con $\vec{x} \sim \vec{y}$ se $\vec{x} = a\vec{y}$ con $a \in \mathbb{R}$
- $H_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ dove $U_2$ è la bottiglia di Klein. Infatti $\pi_1(U_2)] \{\, a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \,\}$ per ableliannizzarlo bisogna porre $aba^{-1}b = 1$ e $aba^{-1}b^{-1} = 1$ cioè $b^2 = 1$ e $a$ libero: $\mathrm{Ab}(\pi_1(U_2)) = \{\, \underset{\mathbb{Z}}{a}, \underset{\mathbb{Z}_2}{b} \mid aba^{-1}b = 1 \,\}$ .




(a) Bottiglia di Klein

(b) Bottiglia di Klein, si nota che rispetto al toro di Clifford c'è una torsione nella $a$ di destra

Figura 2.8: Bottiglia di Klein

Se $X$ è uno spazio topologico connesso per archi allora esiste:

$$\varphi\colon {\pi_1(X)}/{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

Il problema è costruire

$$\psi\colon H_1(X) \to {\pi_1(X)}/{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

Tale che: $\varphi \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$ e $\psi \circ \varphi = \mathbb{I}_{\pi_1(X)}$ So calcolare $H_0(X)$ e $H_1(X)$ se voglio calcolare gli altri $H_k(X)$? Prima guardo come si comportano i gruppi sotto l'azione di applicazioni continue: Sia $g\colon X \to Y$ mappa continua tra spazi topologici, mi chiedo $g$ induce un'applicazione tra $H_k(X)$ e $H_k(Y)$? Considero $\sigma\colon \Delta_k \to X$ $k$-simplesso singolare, posso considerare la composizione con $g$:

$$\Delta_k \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y$$

Cioè: $g' \colon \Delta_k \to Y$ con $g' = g \circ \sigma$. Siccome sia $g$ che $\sigma$ sono continue allora $g'$ è continua, quindi è un $k$-simplesso singolare in $Y$. Si definisce $g_\sharp \colon S_k(X) \to S_k(Y)$ tale che se $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ allora $c' = \sum n_\sigma (g \circ \sigma)$. Questa mappa è ben definita ed è lineare: $g_\sharp$ è un omomorfismo di gruppi abeliani che manda $k$-catene in $S_k(X)$ in $k$-catene in $S_k(Y)$. Ora voglio ottenere un'applicazione a livello di omologia singolare. Definisco $g_\star \colon H_k(X) \to H_k(Y)$. Si dice che $g$ è **covariante** perché va da $X$ a $Y$. Considero un $k$-ciclo $c$, cioè tale che $\partial c = 0$ definisco

$$g_k([c]) = [g_\sharp(c)]$$

Devo verificare se questa applicazione è ben definita: considero $d \in S_k(X)$ tale che $\partial d = 0$, suppongo che $d \sim c$, questo vale se e solo se $[d] = [c]$, mi chiedo è vero che $g_\star([d]) = g_\star([c])$? Devo cioè mostrare che $g_\sharp(d) \sim g_\sharp(c)$, ma questo è vero se e solo se $\exists \tau \in S_{k+1}(Y)$ tale che $g_\sharp(d) - g_\sharp(c) = \partial \tau$. Siccome $g_\sharp$ è omomorfismo allora deve essere $g_\sharp(d - c) = \partial \tau$, ma $d$ w $c$ sono omologhi per ipotesi, quindi:

$$\exists u \in S_{k+1}(X) \mid \partial u = d - c$$

Quindi $g_\sharp(\partial u) = g_\sharp(d - c)$, e quindi: $[g_\sharp(d)] = [g_\sharp(c)]$ vorrei che questo sia implicato $g_\sharp(\partial u) = g_\sharp(d - c)$. Voglio trovare da $u$ $\tau$.

$$\begin{aligned} g_\sharp(\partial u) &= g_\sharp\left(\sum_{i=0}^{k+1} (-)^i u^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{k+1} (-)^i g_\sharp(u^i) = \sum_{i=0}^{k+1} (-)^i g \circ u^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-)^i g \circ \left(u \circ F_i^{\,k+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1} (-)^i \left(g \circ u\right) \circ F_i^{\,k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-)^i \left(g \circ u\right)^{(i)} = \partial \left(g \circ u\right) \end{aligned}$$

Ma quindi $g_\sharp(\partial u) = \partial(g_\sharp(u))$ cioè:

$$g_\sharp(d - c) = g_\sharp(\partial u) = \partial(g_\sharp(u)) = \partial \tau \quad \text{con} \tau = g_\sharp(u)$$

In conclusione:

$$\begin{aligned} g_\star \colon H_k(X) &\to H_k(Y) \\ [c]_X &\to [g_\sharp(c)]_Y \end{aligned}$$

In particolare $g_\star$ è omomorfismo in quanto è il passaggio a quoziente di omomorfismi.

Esempi:

- Sia $j \colon \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^2$ che cosa è $j_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) \to H_1(\mathcal{S}^2)$? $j_\star$ è una mappa costante in quanto $\mathcal{S}^2$ è contraibile, inoltre $j$ era iniettiva, ma $j_\star$ è costante quindi non è più iniettiva.
- Se considero $\mathcal{S}^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\to z^4 \end{aligned}$$

Come è fatta $f_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) \to H_1(\mathcal{S}^1)$ ? Si sa che $H_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, quindi, sia

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\to \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Cioè in pratica $[\sigma] \to 1$, il laccio si avvolge su sè stesso una volta.

$$\begin{aligned} f_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &[f_\sharp(\sigma)] = [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta_1 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{\partial f} \mathcal{S}^1$$

Con:

$$t \xrightarrow{\sigma} \mathrm{e}^{2\pi i t} \xrightarrow{\partial f} \mathrm{e}^{8\pi i t}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{8\pi i t} \end{aligned}$$

Sostanzialmente $f \circ \sigma$ è un cammino in $\mathcal{S}^1$ ed è quindi potenza di $\sigma$, che è l'unico generatore:

$$f \circ \sigma = \sigma^4 = \sigma \star \sigma \star \sigma \star \sigma$$

Cioè avvolgo il laccio quattro volte, quindi:

$$\begin{aligned} f_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma^4] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} f_\star \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma^4] \end{aligned}$$

$f_\star$ è iniettivo ma non suriettivo (con tutti gli interi sono multipli di 4)

Siano $X, Y$ spazi topologici a partire da

## 2.2 Omologia delle sfere

Considero $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 1$, ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

**Corollario 2.2.1** $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ *se e solo se* $n = m$.

**Dimostrazione**: Se $n = m$ vale che $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$ quindi in particolare $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ con la mappa identità. Assumo $n \neq m$ e senza perdita di generalità pongo $n > m$.

Per assurdo $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$, quindi esiste un omomorfismo $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$, quindi esiste anche l'omomorfismo inverso $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$. Quindi esistono anche:

$$F_\star : H_k\mathcal{S}^n \to H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_\star : H_k\mathcal{S}^m \to H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$ e $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$, ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_\star \circ G_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_\star \circ F_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che $F_\star$ e $G_\star$ sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m)\ \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni $k$ in particolare vale per $k = n$, cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$ da cui $\mathbb{Z} \cong 0$, che è assurdo. □

**Corollario 2.2.2 (Invarianza topologica della dimensione)** $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ *se e solo se* $n = m$.

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzano solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione**: Per assurdo esiste un omomorfismo $f\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ con $n > m > 2$. Con i vincolo imposti su $m$ e $n$ gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto $p \in \mathbb{R}^n$ e $f(p) \in \mathbb{R}^m$, e restringendo $f$ in modo da ottenere l'omomorfismo $f'\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\, p \,\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{\, f(p) \,\}$. Si sa inoltre che per $s \geq 2$ vale che $\mathbb{R}^s \setminus \{\, q \,\} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$, infatti è sufficiente mandare a 0 il punto $q$ con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{\, q \,\} &\to \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \quad \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{\, p \,\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{\, f(p) \,\} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare $\mathbb{R}$ dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$, da cui $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$. Ma l'omologia è invariante omotopico, cioè $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$, utilizzando il trucco di prima scelgo $k = n - 1$ e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. □

**Corollario 2.2.3** *$\mathcal{S}^{n-1}$ non è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$ per $n \geq 2$*

**Dimostrazione**: Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| \leq 1 \,\} \qquad \mathcal{S}^{n-1} = \partial\mathcal{D}^n = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| = 1 \,\}$$

Chiaramente esiste $i\colon \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$.

**Definizione 2.2.4** *Uno spazio topologico $Y$ si dice **retratto di deformazione** di un altro spazio topologico $X$ tale che $Y \hookrightarrow X$ se esiste una funzione continua $r\colon X \to Y$ che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione $i\colon Y \to X$, cioè tale che soddisfa:*

1. *$r\colon X \to Y$ continua*
2. *$i \circ r \sim \mathbb{I}_X$*
3. *$r \circ i = \mathbb{I}_Y$*

*Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.*

Suppongo per assurdo che $\mathcal{S}^{n-1}$ è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$, cioè che esiste una retrazione $r$. Passando all'omologia:

$$i_\star\colon H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_k(\mathcal{D}^n)$$
$$r_\star\colon H_k(\mathcal{D}^n) \to H_k(\mathcal{S}^{n-1})$$
$$(i \circ r)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_\star \text{ e } (r \circ i)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_\star$$

Quindi:

$$i_\star \circ r_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_\star \circ i_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})}\ \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero $k = n - 1$:

$$i_\star\colon H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_n - 1(\mathcal{D}^n)$$
$$r_\star\colon H_n - 1(\mathcal{D}^n) \to H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1})$$

Cioè: $i_\star\colon \mathbb{Z} \to 0$. Considero un generatore $\alpha$ di $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, cioè tale che $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ allora $i_\star(\alpha) = 0$ quindi $r_\star \circ i_\star = 0$, ma $(r \circ i)_\star = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}$ quindi significherebbe $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}(\alpha) = 0$, cioè che $\alpha = 0$, che è assurdo perché $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$. $\square$

**Teorema 2.2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer)** *Ogni funzione continua $g\colon \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}^n$ con $n \geq 2$ ammette almeno un punto fisso in $\mathcal{D}^n$, cioè:*

$$\exists \vec{x_o} \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x_0}) = \vec{x_0}$$

**Dimostrazione**: Per assurdo $g$ non ammette punto fisso cioè esisto $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$ tale che $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$. Sicuramente tuttavia $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$. Considero la retta $l$ passante per $\vec{x}$ e $g(\vec{x})$. Questa retta interseca il bordo di $\mathcal{D}^n$ in due punti $\{\, p_1, p_2 \,\}$:

$$l \cap \partial\mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{\, p_1, p_2 \,\}$$

Definisco la mappa $r\colon \mathcal{D}^n \to \partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta $l_{\vec{x}}$ che gli sta più vicino (infatti in $\mathbb{R}^n$ è ben definita una nozione di distanza). La retta $l_{\vec{x}}$ è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$) passa una e una sola retta.

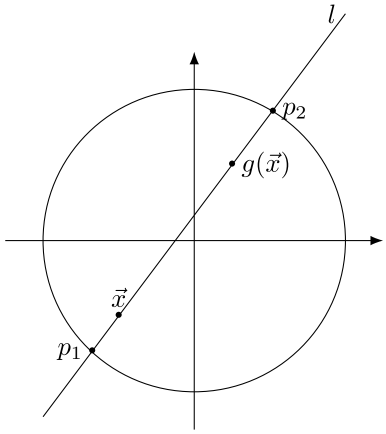



Figura 2.9: Schema per $n = 2$

**Esercizio 4** *Dimostrare che $r$ è continua.*

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{aligned} i\colon \mathcal{S}^{n-1} &\to \mathcal{D}^n \\ \vec{x} &\mapsto \vec{x} \end{aligned}$$

Se dimostro che $r$ è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ e $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$. La prima uguaglianza è certamente vera perché se $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}^n$ allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a $\vec{x}$ stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome $\mathcal{D}^n$ è convesso è ben definita $G(t, \vec{x}) = (1-t)\vec{x} + tr(\vec{x})$ con $t \in [0,1]$. Questa è una buona omotopia in quanto $\forall t, \vec{x}$:

- $G$ è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{X}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{X}) = r(\vec{x})$

Quindi $r$ è retrazione ma questo è assurdo. $\square$

### 2.2.1 Teoria del grado

Considero $H_n(\mathcal{S}^m)$, so che $H_n(\mathcal{S}^m) \cong \mathbb{Z}$, cioè esiste una mappa $f\colon \mathbb{Z} \to H_n(\mathcal{S}^m)$ tale che $f(1) = \alpha$ con $\alpha$ $n$-ciclo che non è un bordo. In questo modo $H_n(\mathcal{S}^m) = \langle \alpha \rangle$. Considero

$\varphi\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ continua con $n \geq 1$, so che esiste $\varphi_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) \to H_n(\mathcal{S}^n)$. Per $n = 0$ $\varphi_\star$ manda punti in punti, per $n \geq 1$: sia $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$ allora $c = p\alpha$ con $p \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_\star(c) = \varphi_\star(p\alpha) = \varphi_\star(\underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \dots}_{|p| volte}) = \underbrace{\varphi_\star(\alpha) + \varphi_\star(\alpha) + \dots}_{|p| volte} = p\varphi_\star(\alpha)$$

Ma $\varphi_\star(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$ quindi si deve poter scrivere come multiplo di $\alpha$: $\varphi_\star(\alpha) = d\alpha$ da cui: $\varphi_\star(c) = pd\alpha = dc$ con $d \in \mathbb{Z}$. Questo numero $d$ viene fuori dall'immagine di un generatore, ma non dipende dalla scelta del generatore, infatti:

Sia $\beta$ un altro generatore, siccome $\alpha$ è un generatore si può scrivere $\beta = m\alpha$ con $m \in \mathbb{Z}$. Pongo come notazione:

$$\varphi_\star(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_\star(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_\star(\beta) = m\varphi_\star(\alpha) = md(\alpha)\alpha$$

Da cui $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$ cioè $(d(\beta) - d(\alpha))\,\beta = 0$, siccome questo vale per ogni $\alpha$ e $\beta$ allora $d(\alpha) = d(\beta)$.

**Definizione 2.2.6** *Data un'applicazione $\varphi\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ continua è possibile associargli in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:*

$$\begin{aligned} \varphi_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg(\varphi)\alpha \end{aligned}$$

*Con $\alpha$ generatore.*

Ad esempio per $n = 1$ e $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^p \end{aligned}$$

Vale che $\deg(\varphi) = p$, infatti prendo un generatore di $\mathcal{S}^1$: [MANCA MANCA MANCA]

Voglio usare la teoria del grado per un'applcazione del teorema della palla pelosa.

**Proposizione 2.2.7** *Se $f\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ è la riflessione rispetto all'iperpiano $x_0 = 0$, cioè $f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (-x_0, x_1, x_2, \dots)$ allora il grado di $f$ è $-1$.*

**Dimostrazione**: La dimostrazione è per induzione. Per $n = 1$ [MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA] □

# Indice analitico