

Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

Esercizio 1.1.19 (iv)

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ tale che esiste una funzione continua $g: Y \rightarrow X$ tale che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove \sim indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con \sim , soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f: X \rightarrow X$ tale che esiste una seconda funzione continua $g: X \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.
2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$ tale che esiste una seconda funzione continua $g: Y \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi: Y \rightarrow X$ tale che esiste una seconda funzione continua $\gamma: X \rightarrow Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$. Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g: X \rightarrow Y$, $h: W \rightarrow X$ e $k: Y \rightarrow Z$ mappe continue, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim k \circ g$.*

Dimostrazione. Siccome $f \circ g$ significa che esiste una funzione continua $F: X \times I \rightarrow Y$ tale che:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x) \\ F(x, 1) &= g(x) \end{aligned}$$

Definisco $\phi = f \circ h$ e $\gamma = g \circ h$, vale che $\phi, \gamma: W \rightarrow Y$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue. Devo mostrare che:

$$\exists H: W \times I \rightarrow Y \text{ continua tale che } H(w, 0) = \phi(w) \text{ e } H(w, 1) = \gamma(w)$$

Una possibile scelta per H è $H = F \circ (h, 1_I)$, questa è continua perché composizione di funzioni continue, inoltre è tale che $H(w, 0) = f \circ h(w) = \phi(w)$ e $H(w, 1) = g \circ h(w) = \gamma(w)$, e quindi è l'omotopia cercata. \square

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\begin{aligned} \exists f_1: X \rightarrow Y \text{ tale che } \exists g_1: Y \rightarrow X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X \\ \exists f_2: Y \rightarrow Z \text{ tale che } \exists g_2: Z \rightarrow Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y \end{aligned}$$

Devo mostrare che:

$$\exists f_3: X \rightarrow Z \text{ tale che } \exists g_3: Z \rightarrow X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3: X \rightarrow Z$ e $g_3: Z \rightarrow X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$ e $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$.

Nel primo caso devo mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$ con $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$ per il lemma 1, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi. Siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$. La seconda relazione è analoga. \square

Esercizio 1.1.19 (v)

Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti quindi esiste una funzione continua $f: X \rightarrow Y$, detta *relazione di omotopia* tale che esista una seconda funzione continua $g: Y \rightarrow X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h: X \rightarrow Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una relazione di omotopia, cioè esiste una funzione continua $k: Y \rightarrow X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. \square

Esercizio 1.1.19 (vii)

Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow X, g: Y \rightarrow Y$ funzioni continue tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano equivalenze omotopiche, devo mostrare che questo implica che f e g stesse siano equivalenze omotopiche, cioè che:

$$\begin{aligned}\exists \phi: Y \rightarrow X \text{ continua tale che } f \circ \phi \sim 1_Y \text{ e } \phi \circ f \sim 1_X \\ \exists \gamma: X \rightarrow Y \text{ continua tale che } g \circ \gamma \sim 1_X \text{ e } \gamma \circ g \sim 1_Y\end{aligned}$$

Siccome $f \circ g$ e $g \circ f$ sono equivalenze omotopiche vale che:

$$\begin{aligned}\exists h: Y \rightarrow Y \text{ continua tale che } f \circ g \circ h \sim 1_Y \text{ e } h \circ f \circ g \sim 1_Y \\ \exists k: X \rightarrow X \text{ continua tale che } g \circ f \circ k \sim 1_X \text{ e } k \circ g \circ f \sim 1_X\end{aligned}$$

Affermo che $k \circ g \circ f \circ g \circ h \sim k \circ g$ questo è vero siccome $k \circ g: Y \rightarrow X$ è continua e siccome $f \circ g \circ h \sim 1_Y$ posso utilizzare il lemma 1. Ma per il medesimo lemma e per il fatto che $k \circ g \circ f \sim 1_X$ deriva che $g \circ h \sim k \circ g$.

Una possibile scelta per ϕ è $\phi = g \circ h$, infatti utilizzando il fatto che $f \circ g$ è equivalenza omotopica:

$$f \circ \phi = f \circ g \circ h \sim 1_Y$$

Inoltre utilizzando l'osservazione appena fatta e il lemma 1:

$$g \circ h \circ f \sim k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Anche in questo caso ho utilizzato il fatto che $g \circ f$ è equivalenza omotopica.

Si può utilizzare un ragionamento analogo per γ . □

Esercizio 1.2.33 (v)

Esercizio 1.2.33 (xii)

Per assurdo \mathcal{S}^1 e \mathcal{S}^n con $n \geq 2$ sono omotopicamente equivalenti, questo implica che i loro gruppi fondamentali sono isomorfi, indipendentemente dal punto base in quanto gli spazi sono connessi per archi. Ma $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 0$ per $n \geq 2$, quindi siccome i gruppi fondamentali non sono isomorfi gli spazi non possono essere omotopicamente equivalenti. □

Esercizio 1.2.33 (xiii)

Per assurdo esiste una funzione continua $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n > 2$ che sia omeomorfismo. Tolgo un punto p da \mathbb{R}^2 , se f omeomorfismo anche la restrizione \tilde{f} di f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ è omeomorfismo. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, infatti una mappa che realizza esplicitamente questo

omeomorfismo è, dopo aver portato p in 0 (una traslazione è un omeomorfismo):

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \\ \vec{x} &\mapsto \left(\|\vec{x}\|, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)\end{aligned}$$

Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi siccome per ipotesi esiste un omeomorfismo tra \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^n allora $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, e questo implica che i gruppi fondamentali sono isomorfi. Siccome il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e vale che:

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{R}) &= 0 \\ \pi_1(\mathcal{S}^1) &= \mathbb{Z} \\ \pi_1(\mathcal{S}^n) &= 0\end{aligned}$$

allora $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 0$, ma questi gruppi non sono isomorfi, e quindi ho trovato l'assurdo. \square