Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. Poincarè

Professore:
Gilberto Bini

Scriba:
Gabriele Bozzola

Indice

Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	**Significato**	**Pagina**
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	2
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	2
$\mathcal{R}$	Anello	4
$< \cdots >$	Gruppo generato	5
$\simeq$	Spazi omeomorfi	7
$\xrightarrow{\sim}$	Omeomorfismo	8
π_1	Gruppo fondamentale	8
Δ_k	Simplesso standard	10
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	15

1 Omologia Singolare

1.1 Introduzione

1.1.1 Richiami di algebra

Definizione 1.1.1 *Un **anello** è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro[1]) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

Definizione 1.1.2 *Un anello si dice **anello commutativo** se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.*

Definizione 1.1.3 *Un **campo** è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.*

Definizione 1.1.4 *Sia $\mathcal{R}$ un anello commutativo si definisce l'$\mathcal{R}$-**modulo** un gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in $\mathcal{R}$ tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.1.5 *Se $\mathcal{R}$ è un campo allora l'$\mathcal{R}$-modulo è uno spazio vettoriale.*

Sostanzialmente la nozione di $\mathcal{R}$-modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

Osservazione 1.1.6 *Ogni gruppo abeliano $\mathcal{G}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo in modo univoco, cioè $\mathcal{G}$ è un gruppo abeliano se e solo e è uno $\mathbb{Z}$-modulo.*

Dimostrazione: Sia $x \in \mathcal{G}$ si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento $n \in \mathbb{Z}$ come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

[1] La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sia uno $\mathbb{Z}$-modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di $\mathbb{Z}$: $nx = (1+1+1+1+\dots)x = x+x+x\dots$, quindi quella definita è l'unica possibile. ■

Definizione 1.1.7 *Un gruppo $\mathcal{G}$ si dice* ***generato*** *dai suoi elementi $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$ se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di $x_1, x_2, \dots$. In questo caso si indica $\mathcal{G} =< \{x_1, x_2, \dots\} >$.*

Definizione 1.1.8 *Un gruppo abeliano si dice* ***libero*** *se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il* ***rango*** *del gruppo.*

Definizione 1.1.9 *Siano $(X, \cdot)$ e $(Y, \star)$ due gruppi, un* ***omomorfismo*** *è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè:*

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.1.10 *Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.*

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

Definizione 1.1.11 *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il* ***nucleo*** *e l'****immagine*** *:*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{N} \mid m = \varphi(k), k \in M \,\}$$

Osservazione 1.1.12 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *e* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *sono $\mathcal{R}$-sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ che posseggono la struttura di $\mathcal{R}$-modulo.*

Se M_i sono $\mathcal{R}$-moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

Proposizione 1.1.13 *Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora* $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Dimostrazione: Se $u \in \mathrm{Im}(\varphi_1)$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ per ipotesi, quindi $u \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. ■

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

Definizione 1.1.14 *Siano $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-modulo e $\mathcal{N}$ un suo sottomodulo, allora il* ***modulo quoziente*** *di $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$ e definito da:*

$$\mathcal{M}/_{\mathcal{N}} := \mathcal{M}/_{\sim} \quad \textit{dove } \sim \textit{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove $\mathcal{M}/_{\sim}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ equipaggiate con operazioni indotte dall'$\mathcal{R}$-modulo, cioè se $[u], [w] \in \mathcal{M}/_{\sim}$ e $a \in \mathcal{R}$:

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di $\mathcal{M}/_{\mathcal{N}}$ *sono le classi di equivalenza* $[m] = \{ m + n \mid n \in \mathcal{N} \}$.

Siccome $\mathrm{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_2)/_{\mathrm{Im}(\varphi_1)}$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.
A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$, dato che l'unica classe di equivalenza presente è $[0]$ significa che $\forall m \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)\ \exists n \in \mathrm{Im}(\varphi_2)$ tale che $m - n = 0$, cioè m e n coincidono e quindi $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.
2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(()\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni φ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.
Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

Definizione 1.1.15 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* φ_1 *e* φ_2.

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}_\bullet$ non è esatto.
Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definizione 1.1.16 *La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *è detta* ***spazio topologico*** *(generalmente si omette la* $\mathcal{T}$*) se* $\mathcal{T}$ *è una* ***topologia****, cioè se è una collezione di insiemi di* X *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\bigcap_{n\in\{0,1,\dots,N\}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}\ \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$

Gli elementi di $\mathcal{T}$ *sono detti* ***aperti****.*

Osservazione 1.1.17 *Se* τ *è la collezione di tutti i sottoinsiemi di* X *allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la* ***topologia discreta****, invece* $\tau = \{ \emptyset, X \}$ *è una topologia ed è la* ***topologia triviale****. Infine in* $\mathbb{R}^n$ *si definisce la* ***topologia usuale*** *che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo* $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$*. Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in* $\mathbb{R}^n$*.*

Osservazione 1.1.18 *Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.*

Osservazione 1.1.19 *Sia $A \subseteq X$ spazio topologico, si può rendere anche A uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di X intersecati con A.*

Osservazione 1.1.20 *Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.*

Definizione 1.1.21 *Sia X uno spazio topologico l'insieme $\{ A_i \mid A_i \in X \ \forall i \}$ è un **ricoprimento** di X se:*

$$\bigcup_i A_i = X$$

*Se in particolare gli insiemi A_i sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.*

Definizione 1.1.22 *Un insieme U è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento* finito *di U.*

Definizione 1.1.23 *Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, [cioè se è una mappa uno a uno]. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo $\simeq$.*

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

1.1.2 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

Definizione 1.1.24 *Un **arco** in uno spazio topologico X tra i punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ è una funzione continua da $I = [0,1]$ a X tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y_0$. Si dice che l'arco parte da x_0 e finisce in y_0.*

Definizione 1.1.25 *Uno spazio topologico X è **connesso per archi** se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un arco che parte da x e termina in y.*

Definizione 1.1.26 *Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale x e punto finale y.*

Proposizione 1.1.27 *Se $f : X \to Y$ è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se X è connesso per archi allora Y è connesso per archi. Questo vale in particolare se f è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

Dimostrazione: Siano y_0, y_1 due punti di Y. La funzione f è suriettiva, e dunque esistono x_0 e x_1 in X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Dato che X è connesso, esiste un cammino $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo α con f: $f \circ \alpha : [0,1] \to X \to Y$ è un cammino continuo che parte da y_0 e arriva a y_1. ■

Si sa inoltre che:

Proposizione 1.1.28 $\mathbb{R}^n$ *è connesso per archi* $\forall n \in \mathbb{N}$.

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta togliere un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso per archi mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

Proposizione 1.1.29 *Se $f : X \to Y$ è omeomorfismo tra spazi topologici allora $f|_U : U \to f(U)$ è omeomorfismo per ogni $U \subseteq X$.*

Nel caso considerato $U = x_0$, siccome ho trovato un U per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo f non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omeomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$, se f omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{ f(p) \}$. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa $\vec{x} \mapsto \left(||\vec{x}||, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right)$ (dopo aver fatto una traslazione di p nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{ f(p) \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi se esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ significherebbe che $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$, $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ che è assurdo. ■

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

Definizione 1.1.30 *Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \}}/_{\sim}$$

e $\sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ tale che $G(z,0) = g_1(z), G(z,1) = g_2(z), G(1,t) = x_o$ con G continua. In questo vedo $\mathcal{S}^1$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta (il punto 1 è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$).

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti g è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di arrivo necessariamente coincidono dato che g è definito su $\mathcal{S}^1$. Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione: Come nel caso precedente suppongo esiste f omeomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$, tolgo q da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^n$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definizione 1.1.31 *Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = {\left\{ g : \mathcal{S}^k \to X \mid g \text{ continua},\ g(p_0) = x_0 \right\}}\big/_{\sim}$$

Con $p_0 \in \mathcal{S}^k$ e $\sim$ relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m \quad (m > 2)$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5. $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$[2]

Definizione 1.1.32 *Sia $A \subseteq X$ con X spazio topologico $i : A \to X$ si definisce mappa di **inclusione** e si scrive $i : A \hookrightarrow X$ se $\forall a \in A$ vale che $i(a) = a$.*

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via... Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

1.1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare

[2]Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

- Omologia persistente[3]
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Assocerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base $\mathbb{Z}$, che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

Definizione 1.1.33 *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il **simplesso standard** Δ_k l'insieme:*

$$\Delta_k = \{\, (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \; 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \,\}$$

Osservazione 1.1.34 *Alcuni esempi sono:*

- Δ_0 *è un punto.*
- Δ_1 *è un segmento, che è omeomorfo a* $[0, 1]$.

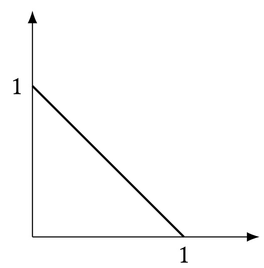

Figura 1.1: 1-Simplesso standard

- Δ_2 *è un triangolo*
- Δ_3 *è un tetraedro*
- $\dots$

Definizione 1.1.35 *Dato uno spazio topologico X si definisce il **k-simplesso singolare** in X come un'applicazione continua $\sigma : \Delta_k \to X$.*

Spesso conviene identificare il k-simplesso con la sua immagine in X. In quesot modo uno 0-simplesso è un punto in X, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplesso potrebbe deformare è detto singolare.

[3] Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.

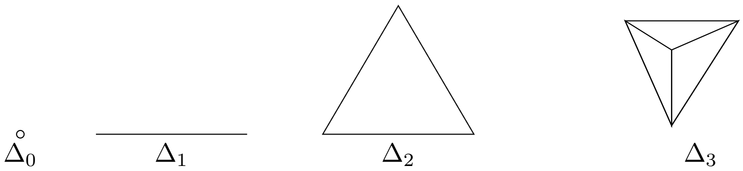

Figura 1.2: Simplessi standard

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S_\bullet$ è il compesso (S sta per singolare), cioè:

$$\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k(X) \to S_{k-1}(X) \to \cdots \to S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k-\text{ simplessi singolari di } X\}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star g = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate k-**catene singolari**. $S_k(X)$ è generato da tutte le possibili applicazioni continue da Δ_k a X, cioe:

$$S_k(X) =< \{\ g \mid g\ k\text{-simplesso singolare in } X\ \} >$$

Ad esempio se $k = 0$ allora $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$, identifico l'applicazione con il punto in X sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{\ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ p_i \in X\ \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k, queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un **arco**.

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simplesso è uno 0-simplesso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

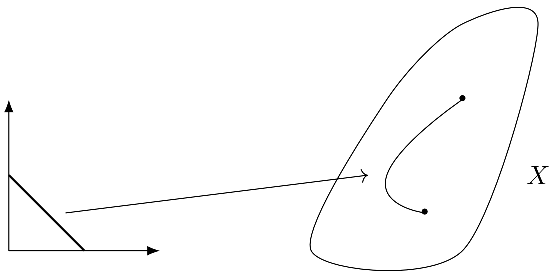

Figura 1.3: 1-Simplesso singolare

Definizione 1.1.36 *Sia Δ_k un k-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore* ***faccia*** *come la mappa ${F_i}^k : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k.*

L'operatore faccia prende un k-simplesso standard e lo immerge in un qualche senso in un simplesso più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso $k = 0$),

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

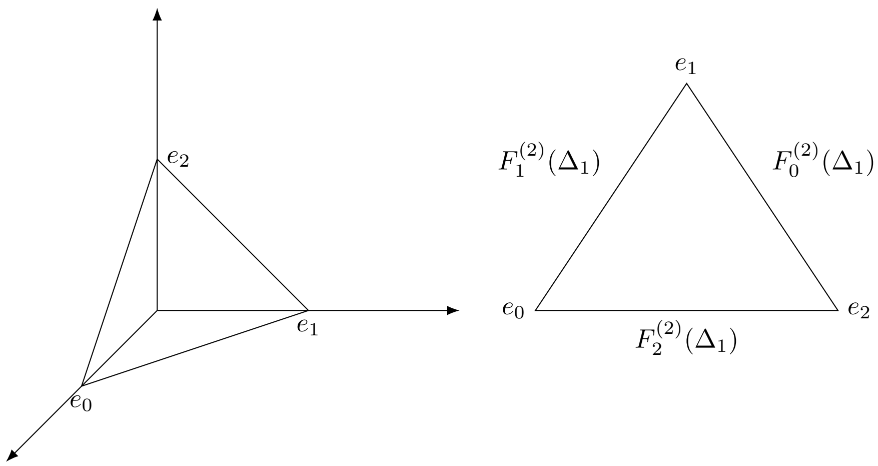

Figura 1.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia i-esimo è quello che non contiene il vertice i-esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplesso.

In generale se Δ_k è un simplesso standard definisco la base standard:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1,0,0,\dots) \\ e_1 &= (0,1,0,\dots) \\ e_2 &= (0,0,1,\dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del simplesso, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} {F_i}^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ {F_i}^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

Esercizio 1 *Dimostrare che se $[\cdot,\cdot]$ indica l'inviluppo convesso allora:*

1. *Per $j > i$ vale che ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$.*
2. *Per $j \leq i$ vale che ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$.*

Dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.

Definizione 1.1.37 *L'**inviluppo convesso** di un insieme U in $\mathbb{R}^n$ è il più piccolo insieme convesso che contiene U.*

Definizione 1.1.38 *Un insieme in $\mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.*

Definizione 1.1.39 *Dato un k-simplesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} = \sigma \circ {F_i}^k$, si definisce quindi il **bordo** di σ come $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma^{(i)}$.*

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle faccie.

Per $k = 1$ $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ infatti $\sigma^0 = \sigma \circ {F_0}^1 = \sigma(1) = p_1$ e $\sigma^0 = \sigma \circ {F_1}^1 = \sigma(0) = p_0$.[4]

QUI SISTEMARE Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ estendendolo per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$ (infatti si è definita l'azione sui generatori g).

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo e che soddisfa $\partial^2 = 0$. Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) = \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g =$$
$$= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right)$$

[4] Tecnicamente si intende $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$ e $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$.

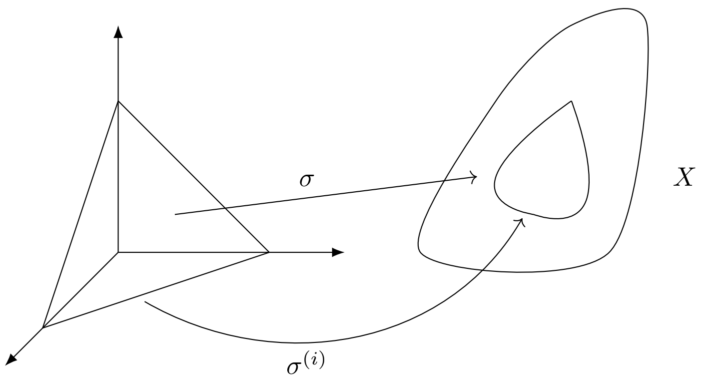

Figura 1.5: Azione di σ

■

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$.
Dimostrazione: Se σ è un k-complesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$:

$$\begin{aligned}
\partial_k \circ \partial_{k+1}\sigma = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) & = \\
= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^{k} (-)^i (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) \circ F_i^{\,k} = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_j^{\,k} & = \\
= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^{\,k} + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^{k} & = \\
= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^{\,k} + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^{\,k} & = \\
= 0 &
\end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio.

Esercizio 2 *Verificare che fa veramente zero.*

■

Sia X uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare $H_k(X)$, cioè il k-esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso $(S_\bullet(X), \partial)$ con:

$$S_k(X) = \{ \sum_g n_g g \mid g \text{ simplesso singolare}, n_g \in \mathbb{Z} \}$$

E $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ applicazione di bordo con $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^k (-)^i g^{(i)}$ con $g : \Delta_k \to X$, e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di S, dove $g^{(i)} = g \circ {F_i}^k$.

Siccome $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre $\partial_k \circ \partial_{k-1}$ è la mappa nulla dalle catene singolari di $S_k(X)$ a quelle di $S_{k-2}(X)$.

$(S_\bullet(X), \partial)$ è un complesso di gruppi abeliani o $\mathbb{Z}$-moduli liberi. Posso quindi calcolare l'omologia di $(S_\bullet(X), \partial)$ come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = {}^{\operatorname{Ker}(\partial_k)}\!\big/_{\operatorname{Im}(\partial_{k+1})}$$

Vale che $\operatorname{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$, cioè le k-catene con bordo nullo, questi sono chiamati k-cicli.

Definizione 1.1.40 *Sia $(S_\bullet(X), \partial)$ un complesso di moduli, gli elementi di $\operatorname{Ker}(\partial)$ sono detti k-**cicli**. Un k-ciclo è quindi una k-catene con bordo nullo:*

$$c \textit{ ciclo } \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei k-cicli è indicato con $Z_k(X)$, cioè: $Z_k(X) = \operatorname{Ker}(\partial)$.

Si pone invece $B_k(X)$ come l'insieme dei bordi, cioè le k-catene singolari che sono immagini di $k+1$-catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che $H_k(X) = {}^{Z_k(X)}\!\big/_{B_k(X)}$, cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di $H_k(X)$ sono classi di equivalenza tali che se $[c] \in H_k(X)$ con $\partial c = 0$, e $c_1 \in [c]$ allora $c_1 - c \in B_k(X)$ e $\partial c_1 = 0$ quindi esiste b tale che $c_1 - c = \partial b$. Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

Definizione 1.1.41 *Due elementi a, b si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.*

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

Osservazione 1.1.42 *Vale che $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$, cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.*

Scopo del corso è studiare $H_k(X)$ e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

Proposizione 1.1.43 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0 \cong \mathbb{Z}$, cioè è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 1. In effetti $H_0(X)$* conta *le componenti connesse per archi in X e quindi dà informazioni di natura geometrica.*

Dimostrazione: Dalla definizione di gruppo di omologia: $H_0(X) = {}^{Z_0(X)}/_{B_0(X)}$. Ma $Z_0(X) = \{\, c \in S_o(X) \mid \partial_0 c = 0 \,\}$ e $S_0(X) = \{\, \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X \,\}$. Tecnicamente uno 0-simplesso singolare è una mappa $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$ tale che manda $\Delta_0 = 1$ in $\sigma_0(1) = p_0$ e per questo è naturale l'identificazione con i punti immagine dello spazio topologico. Sia $c \in S_0(X)$ allora $c = \sum n_i p_i$, e vale che $\partial_0(c) = \sum n_1 \partial_0(p) = 0$, infatti per definizione $\partial_0 : S_0(X) \to S_{-1}(X)$, ma $S_{-1}(X)$ in ogni complesso è banale, cioè $S_{-1}(X) \cong 0$. Quindi per ora ho che:

$$H_0(X) = {}^{S_0(X)}/_{B_0(X)}$$

Per definizione $B_0(X) = \{\, x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x \,\}$, α è una catena. Sia $p_0 \in X$, allora $q \sim_{hom} p$ se e solo se $\exists \alpha \in S_1(X)$ tale che $q - p_0 = \partial_1 \alpha$. Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, essendo X connesso per archi esiste un arco che connette q e p_0, infatti per definizione gli archi sono applicaizoni dall'intervallo a X che hanno come bordo $q - p_0$. Esiste quindi un'unica classe di equivalenza.

Definizione 1.1.44 *Si definisce inoltre la mappa* **grado** *come l'applicazione che manda una catena in $S_0(X)$ nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg : & S_0(X) && \to \mathbb{Z} \\ & \sum n_i p_i && \mapsto \sum n_1 \end{aligned}$$

Teorema 1.1.45 (Teorema fondamentale degli omomorfismi) *Sia $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:*

$$ {}^{\mathcal{G}_1}/_{\mathrm{Ker}(f)} = \mathrm{Im}(f)$$

Proposizione 1.1.46 *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1. *deg è un omomorfismo di gruppi abeliani*
2. *deg è suriettivo*
3. $\mathrm{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema degli omomorfismi . . .

Dimostro quindi questa proposizione. ***Dimostrazione****: Sia $c_1 = \sum n_i p_i$ e $c_2 = \sum m_i q_i$, devo mostrare che $\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$, cioè che $c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$ dove r_i è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene.*

La mappa è suriettiva, basta prendere un punto: $m \in \mathbb{Z}$ *e* $\deg^{-1}(m) = mp$

Mostro che $\mathrm{Ker}(\deg) = B_0(X)$*. Prendo* c *tale che* $\deg(c) = 0$*, ma* $c = \sum n_i p_i$ *quindi* $\sum n_i = 0$*, allora* $c \in B_0(X)$*? Se* $Eb \in S_1(X)$ *con* $\partial_1 b = c$*. Prendo* p_0 *e altri punti* $p_1, p_2, p_3, \ldots$*, ci sono archi* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ *che li uniscono a* p_0*.Provo a costruire* b *in questo modo. Siano* $\lambda_i : [0,1] \to X$ *con* $\lambda_i(0) = p_i$ *e* $\lambda_i(1) = p_i$ *considero* $c - \partial\left(\sum n_1 \lambda_i\right) = c - \sum n_i \partial\lambda_i = c - \sum n_i(p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i = \sum n_i p_0 = 0$*. Siccome per ipotesi* $p_o \in \mathrm{Ker}(\deg)$ *e* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$ *quindi* $\sum n_i \lambda_i = b$ *da cui* $\mathrm{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$*. Mi rimane da mostrare che* $B_0(X) \subseteq \mathrm{Ker}(\deg)$*, infatti ora mostro che se* $c \in B_0(X)$ *allora* $\deg(c) = 0.c = \partial b$ *ma se* λ_i *sono gli archi* $b = \sum m_i \lambda_i$ *quindi* $\partial b = \sum n_i \partial \lambda_i$ *ma* $\partial\lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$ *e l'azione dell'opertaore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi*

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial\lambda_i) = 0$$

■

Per questo $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe $[p]$ $\forall p \in X$ (con X connesso per archi). ■

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove N_c è il numero di componenti connesse per archi di X con $N_c < +\infty$.

Cosa si può dire invece su $H_1(X)$?

Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$, allora alla coppia (X, x_0) si associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata: $\mathrm{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = {}^{\pi_1(X, x_0)}\!/_{\pi_i(X, x_0)'}$ dove $'$ indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai comutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Se X è connesso per archi allora $\mathrm{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$, quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare il primo gruppo di omologia.

1.1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

Definizione 1.1.47 *Sia* X *uno spazio topologico e* x_0 *un suo punto, allora un* ***laccio*** *è un arco in* X *avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto* x_0*. Un laccio* c_{x_0} *si dice* ***costante*** *se* $\forall t \in I$ $c_{x_0}(t) = x_0$ *con* $x_0 \in X$*.*

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio X come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché il laccio costante non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

Definizione 1.1.48 *Sia* X *uno spazio topologico e* $x_0 \in X$ *un suo punto, allora la coppia* (X, x_0) *è detta* ***spazio topologico puntato****.*

Definizione 1.1.49 *Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \to X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0$ $\forall t \in I$, si dice che una funzione continua g è* ***omotopicamente equivalente*** *a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che;*

- $F(0, x) = f(x)$ $\forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x)$ $\forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0$ $\forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0$ $\forall s \in I$

La relazione $\sim_H$ è detta ***relazione di omotopia*** *e si dimostra essere una relazione di equivalenza.*

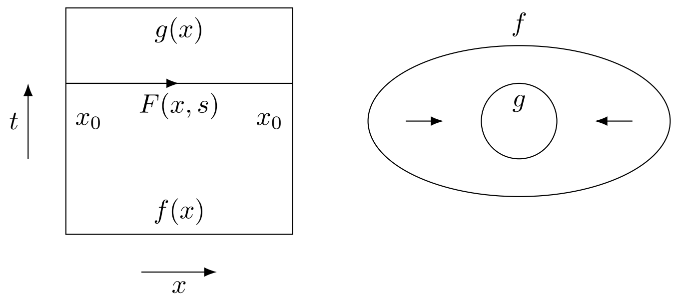

Figura 1.6: Omotopia: deforma f in g in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \to X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \} /_{\sim_H}$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale** , tale operazione è: Siano $[f], [g] \in \pi_i(X, x_0)$ si definisce $[f][g] = [f \star g]$, dove l'operazione $\star$ è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $1 = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0$ $\forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove $\bar{f}$ è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

  $$\exists f : X \to Y, g : Y \to X \; | f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

  allora $\pi_1(X, x_o) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

Osservazione 1.1.50 *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se X è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

  Proposizione 1.1.51 *Se uno spazio tologico X è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati (X, x_0) sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da x_0.*

  Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

Definizione 1.1.52 *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

Osservazione 1.1.53 *Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio $\mathcal{S}^2$.*

- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:
  $$\begin{aligned} \sigma : I &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$
  Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$ e $\pi_1(\mathcal{S}^1) \to \mathbb{Z}$ con $[\sigma] \mapsto 1$. Ogni elemento è multiplo di σ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.
- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio: $V_0 := \mathcal{S}^2 \quad V_g := P_{\frac{4g}{N}}$ con $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$ e $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con k lati e con idenfiticazioni. Nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente -1 quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha $aba^{-1}b^{-1}$.

In genrale si ha $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ si ha un toro, per $g = 2$ un bitoro, …. g è detto **genere** .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ < a_1b_1 \ldots \Pi_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 > & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

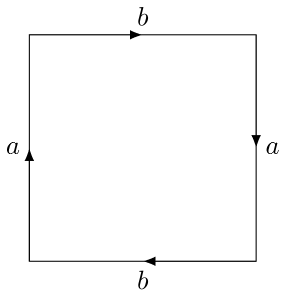

Figura 1.7: Toro piatto, o anche toro di Clifford

Dove $[,]$ è il commutatore, cioè esattamente $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Solo per $g = 0$ o $g = 1$ si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) = {}^{\pi_1(X)}\!/\!{}_{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = {}^{\pi_1(X)}\!/\!{}_{\pi_1'(X)}$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\mathrm{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ per $g \geq 2$. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

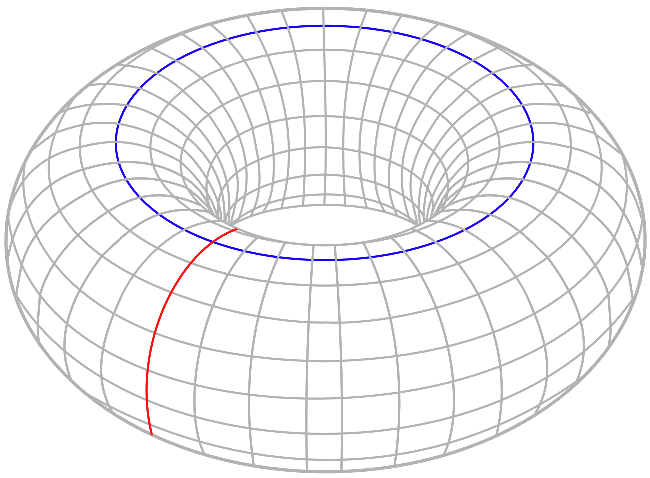

Figura 1.8: Generatori di un toro

L'abelianizzato è uno $\mathbb{Z}$-modulo.

Osservazione 1.1.54 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \to \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to \mathcal{G}$*

omomorfismo di gruppi abeliani.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\ \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

P è la proiezione sul quoziente. φ' esiste perchè in $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ c'è tutto quello che sta nel nucleo. $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$. Allora $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$, devo mostrare che $\varphi(c) = \varphi(d)$. Siccome $\mathcal{G}$ è abeliano $p(c) \sim p(d)$, e quindi $c = d[x,y]$ per cui: $\varphi(c) = \varphi(d[x,y])$, siccome φ è omomorfismo:

$$\varphi(d[x,y]) = \varphi(d)\varphi([x,y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Per questo φ' è ben definito.

Questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.

Voglio dimostrare che $\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$, in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen posso ottenere tante informazioni su $H_1(X)$. Per ora so che $H_1(X)$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo. Se costruisco $\varphi : \pi_1(X) \to H_1(X)$ ottengo gratuitamente la mappa da $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ a $H_1(X)$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\ \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè $\exists \psi : H_!(X) \to A_1(X)$ tale che $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$ e $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\mathrm{Ab}(\pi_1(X))}$. Provo a costruire φ.

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\to H_!(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Usando il seguente risultato:

Lemma 1.1.55 *Se $f \sim_H g$ allora $f \sim_{hom} g$.*

Dimostrazione: Siccome $f \sim_H g$ allora $\exists F$ continua tale $F : I \times I \to X$ tale che $F(0,x) = f(x)$, $F(1,x) = g(x)$ e $F(t,0) = x_0$ in quanto è un laccio. [FIGURA] Voglio mostrare che è il bordo di un 2-simplesso. Faccio l'equivalenza ${I \times I}/_{0xI} \simeq \Delta_2$. [FIGURA] E questo è omeomorfo a un 2-simplesso standard. Siccome rimane costante su x_0 questa mappa induce F':

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"] & X \\ {I \times I}/_{0 \times I} \simeq \Delta_2 \arrow[ur, "F'"] & \end{tikzcd}$$

Calcolo il bordo: $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$ dove K è il cammino costante per definizione di omotopia. Se K fosse il bordo di qualcosa avrei finito ($\partial w = f - g$). Prendo il 2-simplesso standard K costante e uguale a x_0 (è la stessa costante di K):

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)}$$

ma questi sono uguali perché sono costanti, quindi $\partial K = K^{(2)} = k$, cioè k è un bordo, quindi:

$$\partial F' = \partial K - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial K = f - g \Rightarrow \partial(F' - K) = f - g$$

$F' - K$ è 2-simplesso singolare, lo chiamo σ: $\partial\sigma = f - g$. f e g sono omologhi e σ è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia. ■

Se X è uno spazio topologico connesso per archi sono in grado di costruire

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\to H_!(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Nel far ciò non ho utilizzato l'ipotesi di connessione per archi. Ora voglio costruire $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ e lo faccio ancora senza l'ipotesi di connessione per archi. Mostro che φ' è omomorfismo, per far ciò basta che mostro che φ lo è. **Dimostrazione**: Siano $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$ voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H[g]_h) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è verso se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{hom} + [g]_{hom}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{hom} = [f + g]_{hom}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti:

$$\exists T : \Delta_2 \to X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

[FIGURA, ROBA] ■

Al momento la situazione è che ho $\varphi : H_1(X, xo) \to H_1(X)$ omomorfismo di gruppi ben definito anche con X non necessariamente connesso per archi, e dato che $H_1(X)$ è abeliano ho $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$.

Proposizione 1.1.56 *Se X è connesso per archi allora la mappa $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* [QUI MANCA COMPLETAMENTE QUESTO PEZZO!!!] ■

1.2 Omologia delle sfere

Considero $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 1$, ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

Corollario 1.2.1 $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ *se e solo se* $n = m$.

Dimostrazione: Se $n = m$ vale che $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$ quindi in particolare $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ con la mappa identità. Assumo $n \neq m$ e senza perdita di generalità pongo $n > m$.

Per assurdo $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$, quindi esiste un omomorfismo $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$, quindi esiste anche l'omomorfismo inverso $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$. Quindi esistono anche:

$$F_\star : H_k\mathcal{S}^n \to H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_\star : H_k\mathcal{S}^m \to H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$ e $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$, ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_\star \circ G_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_\star \circ F_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che $F_\star$ e $G_\star$ sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \; \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni k in particolare vale per $k = n$, cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$ da cui $\mathbb{Z} \cong 0$, che è assurdo. ∎

Corollario 1.2.2 (Invarianza topologica della dimensione) $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ *se e solo se* $n = m$.

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzano solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione**: Per assurdo esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ con $n > m > 2$. Con i vincolo imposti su m e n gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto $p \in \mathbb{R}^n$ e $f(p) \in \mathbb{R}^m$, e restringendo f in modo da ottenere l'omomorfismo $f' : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\}$. Si sa inoltre che per $s \geq 2$ vale che $\mathbb{R}^s \setminus \{q\} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$, infatti è sufficiente mandare a 0 il punto q con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{q\} &\to \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \quad \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{ f(p) \} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare $\mathbb{R}$ dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$, da cui $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$. Ma l'omologia è invariante omotopico, cioè $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$, utilizzando il trucco di prima scelgo $k = n-1$ e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. ■

Corollario 1.2.3 *$\mathcal{S}^{n-1}$ non è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$ per $n \geq 2$*

Dimostrazione: Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| \leq 1 \} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| = 1 \}$$

Chiaramente esiste $i \colon \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$.

Definizione 1.2.4 *Uno spazio topologico Y si dice **retratto di deformazione** di un altro spazio topologico X tale che $Y \hookrightarrow X$ se esiste una funzione continua $r \colon X \to Y$ che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione $i \colon Y \to X$, cioè tale che soddisfa:*

1. *$r \colon X \to Y$ continua*
2. *$i \circ r \sim \mathbb{I}_X$*
3. *$r \circ i = \mathbb{I}_Y$*

*Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.*

Suppongo per assurdo che $\mathcal{S}^{n-1}$ è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$, cioè che esiste una retrazione r. Passando all'omologia:

$$i_\star \colon H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_k(\mathcal{D}^n)$$
$$r_\star \colon H_k(\mathcal{D}^n) \to H_k(\mathcal{S}^{n-1})$$
$$(i \circ r)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_\star \text{ e } (r \circ i)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_\star$$

Quindi:

$$i_\star \circ r_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_\star \circ i_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \; \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero $k = n-1$:

$$i_\star \colon H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_n - 1(\mathcal{D}^n)$$
$$r_\star \colon H_n - 1(\mathcal{D}^n) \to H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1})$$

Cioè: $i_\star \colon \mathbb{Z} \to 0$. Considero un generatore α di $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, cioè tale che $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ allora $i_\star(\alpha) = 0$ quindi $r_\star \circ i_\star = 0$, ma $(r \circ i)_\star = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}$ quindi significherebbe $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}(\alpha) = 0$, cioè che $\alpha = 0$, che è assurdo perché $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$. ■

Teorema 1.2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer) *Ogni funzione continua $g\colon \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}^n$ con $n \geq 2$ ammette almeno un punto fisso in $\mathcal{D}^n$, cioè:*

$$\exists \vec{x_o} \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x_0}) = \vec{x_0}$$

Dimostrazione: Per assurdo g non ammette punto fisso cioè esisto $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$ tale che $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$. Sicuramente tuttavia $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$. Considero la retta l passante per $\vec{x}$ e $g(\vec{x})$. Questa retta interseca il bordo di $\mathcal{D}^n$ in due punti $\{ p_1, p_2 \}$:

$$l \cap \partial\mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{ p_1, p_2 \}$$

Definisco la mappa $r\colon \mathcal{D}^n \to \partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta $l_{\vec{x}}$ che gli sta più vicino (infatti in $\mathbb{R}^n$ è ben definita una nozione di distanza). La retta $l_{\vec{x}}$ è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$) passa una e una sola retta.

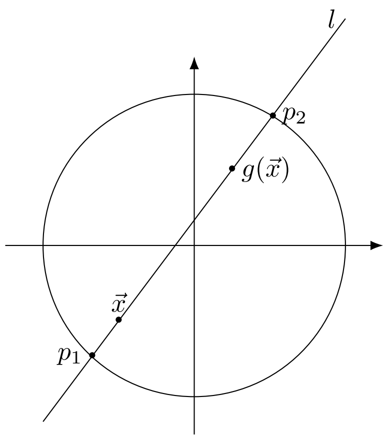

Figura 1.9: Schema per $n = 2$

Esercizio 3 *Dimostrare che r è continua.*

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{aligned} i\colon \mathcal{S}^{n-1} &\to \mathcal{D}^n \\ \vec{x} &\mapsto \vec{x} \end{aligned}$$

Se dimostro che r è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ e $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$. La prima uguaglianza è certamente vera perché se $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}^n$ allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a $\vec{x}$ stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome $\mathcal{D}^n$ è convesso è ben definita $G(t, \vec{x}) = (1-t)\vec{x} + tr(\vec{x})$ con $t \in [0, 1]$. Questa è una buona omotopia in quanto $\forall t, \vec{x}$:

- G è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{X}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{X}) = r(\vec{x})$

Quindi r è retrazione ma questo è assurdo. ∎

Indice analitico