Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

Esercizio 1.1.19 (iv)

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una funzione continua $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove $\sim$ indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con $\sim$, soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f\colon X \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon X \to X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.

2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi\colon Y \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $\gamma\colon X \to Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$ Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g\colon X \to Y$, $h\colon W \to X$ e $k\colon Y \to Z$ mappe continue, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim h \circ g$.*

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\exists f_1 \colon X \to Y \text{ tale che } \exists g_1 \colon Y \to X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X$$
$$\exists f_2 \colon Y \to Z \text{ tale che } \exists g_2 \colon Z \to Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y$$

   Devo mostrare che:

$$\exists f_3 \colon X \to Z \text{ tale che } \exists g_2 \colon Z \to X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

   Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3 \colon X \to Z$ e $g_3 \colon Z \to X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$ e $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$.

   Nel primo caso devo mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$ con $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$ per il lemma 1, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi. Siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$. La seconda relazione è analoga. □

Esercizio 1.1.19 (v)

Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti quindi esiste una funzione continua $f \colon X \to Y$, detta *relazione di omotopia* tale che esista una seconda funzione continua $g \colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h \colon X \to Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una relazione di omotopia, cioè esiste una funzione continua $k \colon Y \to X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. □