Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

Esercizio 1.1.19 (iv)

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una funzione continua $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove $\sim$ indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con $\sim$, soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f\colon X \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon X \to X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.
2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi\colon Y \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $\gamma\colon X \to Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$ Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g\colon X \to Y$, $h\colon W \to X$ e $k\colon Y \to Z$ mappe continue, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim h \circ g$.*

Dimostrazione. Siccome $f \circ g$ significa che esiste una funzione continua $F\colon X \times I \to Y$ tale che:

$$F(x,0) = f(x)$$
$$F(x,1) = g(x)$$

Definisco $\phi = f \circ h$ e $\gamma = g \circ h$, vale che $\phi, \gamma\colon W \to Y$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue. Devo mostrare che:

$$\exists H\colon W \times I \to Y \text{ continua tale che } H(w,0) = \phi(w) \text{ e } H(w,1) = \gamma(w)$$

Una possibile scelta per H è $H = F \circ (h, 1_I)$, questa è continua perché composizione di funzioni continue, inoltre è tale che $H(w,0) = f \circ h(w) = \phi(w)$ e $H(w,1) = g \circ h(w) = \gamma(w)$, e quindi è l'omotopia cercata. □

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\exists f_1\colon X \to Y \text{ tale che } \exists g_1\colon Y \to X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X$$
$$\exists f_2\colon Y \to Z \text{ tale che } \exists g_2\colon Z \to Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y$$

Devo mostrare che:

$$\exists f_3\colon X \to Z \text{ tale che } \exists g_2\colon Z \to X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3\colon X \to Z$ e $g_3\colon Z \to X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$ e $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$.

Nel primo caso devo mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$ con $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$ per il lemma 1, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi. Siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$. La seconda relazione è analoga. □

Esercizio 1.1.19 (v)

Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti quindi esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$, detta *relazione di omotopia* tale che esista una seconda funzione continua $g\colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h\colon X \to Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una relazione di omotopia, cioè esiste una funzione continua $k\colon Y \to X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. □

Esercizio 1.1.19 (vii)

Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to X$, $g\colon Y \to Y$ funzioni continue tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano equivalenze omotopiche, devo mostrare che questo implica che f e g stesse siano equivalenze omotopiche, cioè che:

$$\exists \phi\colon Y \to X \text{ continua tale che } f \circ \phi \sim 1_Y \text{ e } \phi \circ f \sim 1_X$$
$$\exists \gamma\colon X \to Y \text{ continua tale che } g \circ \gamma \sim 1_X \text{ e } \gamma \circ g \sim 1_Y$$

Siccome $f \circ g$ e $g \circ f$ sono equivalenze omotopiche vale che:

$$\exists h\colon Y \to Y \text{ continua tale che } f \circ g \circ h \sim 1_Y \text{ e } h \circ f \circ g \sim 1_Y$$
$$\exists k\colon X \to X \text{ continua tale che } g \circ f \circ k \sim 1_X \text{ e } k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Affermo che $k \circ g \circ f \circ g \circ h \sim k \circ g$ questo è vero siccome $k \circ g\colon Y \to X$ è continua e siccome $f \circ g \circ h \sim 1_Y$ posso utilizzare il lemma 1. Ma per il medesimo lemma e per il fatto che $k \circ g \circ f \sim 1_X$ deriva che $g \circ h \sim k \circ g$.

Una possibile scelta per ϕ è $\phi = g \circ h$, infatti utilizzando il fatto che $f \circ g$ è equivalenza omotopica:

$$f \circ \phi = f \circ g \circ h \sim 1_Y$$

Inoltre utilizzando l'osservazione appena fatta e il lemma 1:

$$g \circ h \circ f \sim k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Anche in questo caso ho utilizzato il fatto che $g \circ f$ è equivalenza omotopica.

Si può utilizzare un ragionamento analogo per γ. □

Esercizio 1.2.33 (xii)

Per assurdo $\mathcal{S}^1$ e $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 2$ sono omotopicamente equivalenti, questo implica che i loro gruppi fondamentali sono isomorfi, indipendentemente dal punto base in quanto gli spazi sono connessi per archi. Ma $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 0$ per $n \geq 2$, quindi siccome i gruppi fondamentali non sono isomorfi gli spazi non possono essere omotopicamente equivalenti.

Esercizio 1.2.33 (xiii)

Per assurdo esiste una funzione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ con $n > 2$ che sia omeomorfismo.