# *Topologia Algebrica*

Zitto e studia.

*Parigi 1905*
H. Poincarè

Professore:
*Gilberto Bini*

Scriba:
*Gabriele Bozzola*

| **Topologia Algebrica** | **2016/2017** |
|---|---|

Lezione 1: 29 Settembre

Agomenti: General introduction. Homology of a complex. Singular homology.

# 1.1 Introduzione

## 1.1.1 Richiami di geometria

**Definitione 1.1** *Un **anello** è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

**Definitione 1.2** *Sia $\mathcal{R}$ un anello si definisce l' **$\mathcal{R}$-modulo** il gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di somma tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Sia $\mathcal{R}$ un anello si può definire su questo anello un modulo $\mathcal{M}$, nel caso Ker sia un campo allora $\mathcal{M}$ è uno spazio vettoriale, se invece $\mathcal{R}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo allora $\mathcal{M}$ è un gruppo abeliano

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

**Definitione 1.3** *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine**:*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) = \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\}$$

**Osservazione 1.4** $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *e* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *sono $\mathcal{R}$-sottomoduli.*

Posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_1 \longrightarrow & \mathcal{M}_2 \longrightarrow & \mathcal{M}_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \end{array}$$

Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

**Dimostrazione:** Se $u \in \mathrm{Im}\varphi_2$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ quindi $u \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. ■

Siccome $\mathrm{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_2)\big/\mathrm{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo. A questo punto ci sono due possibilità:

- $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$.
- $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni $\varphi$ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattazza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

**Definitione 1.5** $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* $\varphi_1$ *e* $\varphi_2$*.*

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}.$ non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

### 1.1.2 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta che tolgo un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso anche togliendogli un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

**Dimostrazione:** Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \overset{\to}{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$:

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\, p \,\} \overset{\to}{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{\, f(p) \,\}$$

Ma: $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, p \,\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa che manda $\underline{x} \mapsto \left(||\underline{x}||, \frac{x}{||\underline{x}||}\right)$. Ma quindi il gruppo fondamentale deve essere isomorfo: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = \{\, 1 \,\}$ quindi non possono essere isomorfi. ■

Ho quindi dedotto proprietà geometriche a partire da considerazioni algebriche.

**Definitione 1.6** *Si definisce il* ***gruppo fondamentale*** *di uno spazio topologico* $X$ *connesso per archi attorno al punto* $x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) = \{\, g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \,\}\big/\sim$$

*e* $\sim$ *è la relazione di omotopia:* $g_1 \sim g_2$ *se* $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ *tale che* $G(z, 0) = g_1(z), G(z, 1) = g_2(z), G(1, t) = x_o$*.*

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

**Dimostrazione:** Come nel caso precedente tolgo $q$ da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^3$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è posisbile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

**Definitione 1.7** *Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico $X$ attorno al punto $x_0$ per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = {\left\{ g : \mathcal{S}^k \to X \mid g(p_0) = x_0, p_o \in \mathcal{S}^k \right\}}\big/_{\sim}$$

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq 1$

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via...

### 1.1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. Ci sono varie possibilità:

- Omologia simpliciale
- Omologia cellulare
- Omologia singolare
- Omologia persistente[1]

Ma cosa è l'omologia?

**Definitione 1.8** *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il **simplesso standard** $\Delta_k$ l'insieme:*

$$\Delta_k = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \quad 0 \leq x_i \leq 1 \ \ e \ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \right\}$$

**Osservazione 1.9** *Alcuni esempi sono:*

- $\Delta_0$ *è un punto.*

[1] Questa ha numerose applicazioni pratiche.

- $\Delta_1$ *è un segmento omeomorfo a* $[0,1]$. *[FIGURA]*

**Definitione 1.10** *Dato uno spazio topologico $X$ si definisce il **$k$-simplesso singolare** in $X$ come un'applicazione continua $g : \Delta_k \to X$.*

Spesso conviene identificare il $k$-simplesso con la sua immagine in $X$. In quesot modo uno 0-simplesso è un punto in $X$, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplesso deforma è detto singolare.

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S.$ è il compesso, cioè: $\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k() \to S_{k-1} \to \cdots \to S_0(X)$, dove

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k - \text{simplessi singolari di } X\}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate **$k$-catene singolari**.

Ad esempio: Se $k = 0$ $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ p_i \in X \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari $S_k$, queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove $\alpha$ è un arco, ovvero una funzione da un intervallo $I = [0,1]$ a $X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $y_0$.

[FIGURA]

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco.

**Definitione 1.11** *Sia $\Delta_k$ un $k$-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore **faccia** come la mappa ${F_i}^k$ da $\Delta_{k-1}$ a $\Delta_k$ tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di $\Delta_k$.*

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1,0,0)$ $e_1 = (0,1,0)$ $e_2 = (0,0,1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.