



# Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905  
H. POINCARÉ

Professore:  
Gilberto Bini  
Scriba:  
Gabriele Bozzola

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di algebra e geometria</b>	<b>5</b>
1.1	Richiami di algebra . . . . .	5
1.2	Richiami sul gruppo fondamentale . . . . .	9
1.2.1	Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$ . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Omologia Singolare</b>	<b>15</b>
2.1	Introduzione . . . . .	15
2.2	Simpletti singolari . . . . .	15
2.2.1	$H_0(X)$ . . . . .	22
2.2.2	$H_1(X)$ . . . . .	24
2.3	Morfismi indotti . . . . .	29
2.4	Successioni esatte . . . . .	32
2.4.1	Omomorfismo di connessione . . . . .	33
2.5	Omologia singolare relativa . . . . .	36
2.6	Omologia singolare ridotta . . . . .	39
2.7	Assiomi di una teoria omologica . . . . .	42
2.8	Omologia delle sfere . . . . .	46
2.8.1	Teoria del grado . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Omologia cellulare</b>	<b>53</b>
3.1	Complessi CW . . . . .	53
3.2	Congettura di Poincaré . . . . .	55

## Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pagina
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	3
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	3
$\mathcal{R}$	Anello	5
$\langle \dots \rangle$	Gruppo generato	6
$\text{Ker}(f)$	Nucleo di $f$	6
$\text{Im}(f)$	Immagine $f$	6
$X$	Spazio topologico	7
$\simeq$	Spazi omeomorfi	8
$\sim_H$	Relazione di omotopia	9
$\xrightarrow{\sim}$	Omeomorfismo	13
$\pi_1$	Gruppo fondamentale	13
$\Delta_k$	Simplesso standard	15
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	21
$\Pi$	Somma topologica	43
$\sqcup$	Unione disgiunta	53

# 1 Richiami di algebra e geometria

## 1.1 Richiami di algebra

**Definizione 1.1.1** Un **anello** è un insieme  $\mathcal{R}$  dotato di due operazioni  $+$  e  $\cdot$  tali che  $\mathcal{R}$  sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro<sup>1</sup>) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

**Definizione 1.1.2** Un anello si dice **anello commutativo** se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.

**Definizione 1.1.3** Un **campo** è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.

**Definizione 1.1.4** Sia  $\mathcal{R}$  un anello commutativo si definisce l' **$\mathcal{R}$ -modulo** un gruppo abeliano  $\mathcal{M}$  equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in  $\mathcal{R}$  tale che  $\forall v, w \in \mathcal{M}$  e  $\forall a, b \in \mathcal{R}$  vale che:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

**Osservazione 1.1.5** Se  $\mathcal{R}$  è un campo allora l' $\mathcal{R}$ -modulo è uno spazio vettoriale.

Sostanzialmente la nozione di  $\mathcal{R}$ -modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

**Osservazione 1.1.6** Ogni gruppo abeliano  $\mathcal{G}$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo in modo univoco, cioè  $\mathcal{G}$  è un gruppo abeliano se e solo è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo.

**Dimostrazione:** Sia  $x \in \mathcal{G}$  si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento  $n \in \mathbb{Z}$  come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia  $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$  sia uno  $\mathbb{Z}$ -modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di  $\mathbb{Z}$ :  $nx = (1 + 1 + 1 + 1 + \dots)x = x + x + x + \dots$ , quindi quella definita è l'unica possibile.  $\square$

**Definizione 1.1.7** Un gruppo  $\mathcal{G}$  si dice **generato** dai suoi elementi  $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$  se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di  $x_1, x_2, \dots$ . In questo caso si indica  $\mathcal{G} = \langle \{x_1, x_2, \dots\} \rangle$ .

**Definizione 1.1.8** Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.

**Definizione 1.1.9** Siano  $(X, \cdot)$  e  $(Y, \star)$  due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione  $f$  tra  $X$  e  $Y$  che preserva la struttura di gruppo, cioè tale che:

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

**Osservazione 1.1.10** Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè  $\forall v \in X$  vale che  $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$ .

**Teorema 1.1.11 (Teorema fondamentale degli omomorfismi)** Sia  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:

$$\mathcal{G}_1 / \text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$$

Voglio studiare gli omomorfismi tra  $\mathbb{Z}$ -moduli.

**Definizione 1.1.12** Sia  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un omomorfismo tra gli  $\mathcal{R}$ -moduli  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :

$$\text{Ker}(\varphi) := \{ m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \} \quad \text{Im}(\varphi) := \{ m \in \mathcal{N} \mid \exists k \in \mathcal{M} \text{ con } m = \varphi(k) \}$$

**Osservazione 1.1.13**  $\text{Ker}(\varphi)$  e  $\text{Im}(\varphi)$  sono  $\mathcal{R}$ -sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  che posseggono la struttura di  $\mathcal{R}$ -modulo.

Se  $\mathcal{M}_i$  sono  $\mathcal{R}$ -moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

**Proposizione 1.1.14** Se vale  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$  allora  $\text{Im}(\varphi_1) \subseteq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

**Dimostrazione:** Se  $u \in \text{Im}(\varphi_1)$  allora  $\exists v \in \mathcal{M}_2$  tale che  $\varphi_1(v) = u$ , ma  $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$  per ipotesi, quindi  $u \in \text{Ker}(\varphi_2)$ .  $\square$

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

**Definizione 1.1.15** Siano  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -modulo e  $\mathcal{N}$  un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di  $\mathcal{M}$  con  $\mathcal{N}$  è definito da:

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove  $\mathcal{M}/\sim$  è l'insieme delle classi di equivalenza di  $\sim$  equipaggiate con operazioni indotte dall' $\mathcal{R}$ -modulo, cioè se  $[u], [w] \in \mathcal{M}/\sim$  e  $a \in \mathcal{R}$ :

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di  $\mathcal{M}/\mathcal{N}$  sono le classi di equivalenza  $[m] = \{m + n \mid n \in \mathcal{N}\}$ .

**Proposizione 1.1.16** Si dimostra che:

- Se uno spazio è connesso o connesso per archi allora anche tutti i suoi quozienti lo sono.
- Se uno spazio è compatto anche tutti i suoi quozienti lo sono.

Inoltre ovviamente la mappa di proiezione al quoziente è suriettiva.

Siccome  $\text{Im}(\varphi)$  è sottomodulo di  $\text{Ker}(\varphi)$  allora posso prendere il quoziente:

$$\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ , altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.

A questo punto ci sono due possibilità:

1.  $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) = 0$ , che significa che  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$  in quanto non ci sono elementi di  $\text{Ker}(\varphi_2)$  fuori da  $\text{Im}(\varphi_1)$ , dato che l'unica classe di equivalenza presente è  $[0]$  significa che  $\forall m \in \text{Ker}(\varphi_1) \exists n \in \text{Im}(\varphi_2)$  tale che  $m - n = 0$ , cioè  $m$  e  $n$  coincidono e quindi  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$ .
2.  $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) \neq 0$ , cioè  $\exists v \in \text{Ker}(\varphi_2)$  tale che  $v \notin \text{Im}(\varphi_1)$  e quindi  $\text{Im}(\varphi_1) \subsetneq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli  $\mathcal{M}$  e delle applicazioni  $\varphi$  è **esatta** in  $\mathcal{M}_2$ , nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto  $\mathcal{M}_2$  della successione.

**Definizione 1.1.17**  $H(\mathcal{M}_\bullet) = \text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$  è detto **modulo di omologia** del complesso  $\mathcal{M}_\bullet = \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_3$  con le applicazioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Per questo  $H(\mathcal{M}_\bullet)$  quantifica quanto il complesso  $\mathcal{M}_\bullet$  non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

**Definizione 1.1.18** La coppia  $(X, \mathcal{T})$  è detta **spazio topologico** (generalmente si omette la  $\mathcal{T}$ ) se  $\mathcal{T}$  è una **topologia**, cioè se è una collezione di insiemi di  $X$  tali che:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \mathbb{N}$
3.  $\bigcap_{n \in \{0, 1, \dots, N\}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  sono detti **aperti**.

**Osservazione 1.1.19** Se  $\tau$  è la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $X$  allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la **topologia discreta**, invece  $\tau = \{\emptyset, X\}$  è una topologia ed è la **topologia triviale**. Infine in  $\mathbb{R}^n$  si definisce la **topologia usuale** che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$ . Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 1.1.20** Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.

**Osservazione 1.1.21** Sia  $A \subseteq X$  spazio topologico, si può rendere anche  $A$  uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di  $X$  intersecati con  $A$ .

**Osservazione 1.1.22** Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.

**Definizione 1.1.23** Sia  $X$  uno spazio topologico l'insieme  $\{A_i \mid A_i \in \mathcal{T} \forall i\}$  è un **ricoprimento** di  $X$  se:

$$\bigcup_i A_i = X$$

Se in particolare gli insiemi  $A_i$  sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.

**Definizione 1.1.24** Un insieme  $U$  è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento finito di  $U$ .

**Definizione 1.1.25** Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, cioè se è una mappa uno a uno. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo  $\simeq$ .

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.



## 1.2 Richiami sul gruppo fondamentale

**Definizione 1.2.1** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0$  un suo punto, allora un **laccio** è un arco in  $X$  avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto  $x_0$ . Un laccio  $c_{x_0}$  si dice **costante** se  $\forall t \in I \ c_{x_0}(t) = x_0$  con  $x_0 \in X$ .

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio  $X$  come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

**Definizione 1.2.2** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$  un suo punto, allora la coppia  $(X, x_0)$  è detta **spazio topologico puntato**.

**Definizione 1.2.3** Sia  $(X, x_0)$  uno spazio topologico puntato e  $f : I \rightarrow X$  una mappa continua tale che  $f(0) = f(1) = x_0 \ \forall t \in I$ , cioè un laccio di base  $x_0$ , si dice che una funzione continua  $g$  è **omotopicamente equivalente** a  $f$  ( $g \sim_H f$ ) se esiste una funzione continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che:

- $F(0, x) = f(x) \ \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \ \forall x \in I$
- $F(t, 0) = x_0 \ \forall t \in I$
- $F(t, 1) = x_0 \ \forall t \in I$

La relazione  $\sim_H$  è detta **relazione di omotopia tra lacci** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.

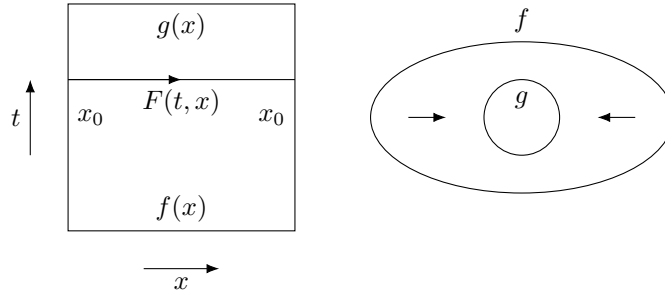


Figura 1.1: Omotopia: deforma  $f$  in  $g$  in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua, } f(0) = f(1) = x_0 \} / \sim_H$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è noto come **gruppo fondamentale**, e i suoi elementi si indicano con la usuale notazione di classe di equivalenza. Si vogliono definire le operazioni di gruppo: siano  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ , si definisce  $[f][g] := [f \star g]$ , dove l'operazione  $\star$  è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cioè è un cammino di base  $x_0$  percorso a velocità doppia, metà del tempo percorso su  $f$  l'altra metà su  $g$ . L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante  $1_{\pi_1(X, x_0)} = [C_{x_0}]$  con  $C_{x_0}(t) = x_0 \forall t$ . L'inverso di un elemento invece è  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  dove  $\bar{f}$  è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da  $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ , in questo modo  $\bar{f}(0) = f(1)$  e  $\bar{f}(1) = f(0)$ .

Alcune proprietà del gruppo fondamentale:

- $\pi_1(X, x_0)$  è invariante omotopico, cioè se  $X \sim_H Y$ , cioè se

$$\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

allora  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$ . Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

**Osservazione 1.2.4** *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se  $X$  è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che  $\pi_1(X, x_0) \cong 1$ , cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

**Proposizione 1.2.5** *Se uno spazio topologico  $X$  è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati  $(X, x_0)$  sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da  $x_0$ .*

Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

**Definizione 1.2.6** *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

**Osservazione 1.2.7** *Tutti gli spazi contraibili sono semplicemente connessi, ma non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio  $S^2$ .*

- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Questa è tale che  $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$  quindi  $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$  e:

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto 1\end{aligned}$$

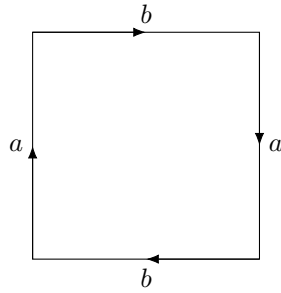
Ogni elemento è multiplo di  $\sigma$  e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti con segno del cammino su sé stesso.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

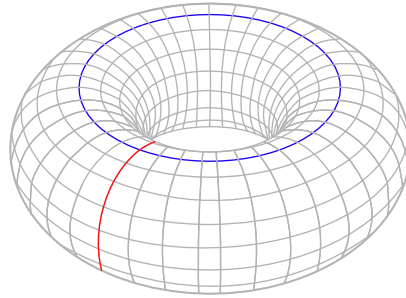
**Esempio 1.2.8** Si definisce:

$$V_g = \begin{cases} \mathcal{S}^2 & \text{se } g = 0 \\ P_{\frac{4g}{N}} & \text{se } g \geq 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con  $P_{\frac{k}{N}}$  poligono con  $k$  lati e con identificazioni a coppie, come ad esempio nel caso  $g = 1$  si ottiene un toro piatto identificando lati opposti di un quadrato. Si usano simboli combinatori



(a) Toro piatto, o anche toro di Clifford



(b) Generatori di un toro

Figura 1.2: Toro

per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente  $-1$  quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha  $aba^{-1}b^{-1}$ . Questo si estende a poligoni con  $4g$  lati e si usa l'identificazione  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ .

Si dimostra che queste sono varietà topologiche, in particolare per  $g = 1$  si ha un toro, per  $g = 2$  un bitoro, ....  $g$  è detto **genere**.

**Definizione 1.2.9** Una **varietà topologica**  $\mathcal{M}$  è uno spazio topologico che localmente sembra uno spazio reale  $n$ -dimensionale, cioè tale che esiste un intorno  $n$  detto **dimensione** tale ogni punto in  $\mathcal{M}$  possiede un intorno che è omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ \langle a_1 b_1 \dots \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

Dove  $[\cdot, \cdot]$  è il commutatore, cioè esattamente  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Solo per  $g = 0$  o  $g = 1$  si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\text{Ab}(\pi_1(X)) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = \pi_1(X) / \pi_1'(X)$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che  $\text{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  per  $g \geq 2$ , infatti il gruppo è generato su  $2g$  generatori  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$  e poi si impone la relazione di identificazione e i commutatori diventano tutti banali. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura.

### 1.2.1 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

**Definizione 1.2.10** Un arco in uno spazio topologico  $X$  tra i punti  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in X$  è una funzione continua da  $I = [0, 1]$  a  $X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = y_0$ . Si dice che l'arco parte da  $x_0$  e finisce in  $y_0$ .

**Definizione 1.2.11** Uno spazio topologico  $X$  è **connesso per archi** se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  esiste un arco che parte da  $x$  e termina in  $y$ .

**Definizione 1.2.12** Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso per archi** se  $\forall x, y \in X$  esiste un arco con punto iniziale  $x$  e punto finale  $y$ .

**Proposizione 1.2.13** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se  $X$  è connesso per archi allora  $Y$  è connesso per archi. Questo vale in particolare se  $f$  è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.

**Dimostrazione:** Siano  $y_0, y_1$  due punti di  $Y$ . La funzione  $f$  è suriettiva, e dunque esistono  $x_0$  e  $x_1$  in  $X$  tali che  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$ . Dato che  $X$  è connesso, esiste un cammino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ . Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo  $\alpha$  con  $f$ :  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow X \rightarrow Y$  è un cammino continuo che parte da  $y_0$  e arriva a  $y_1$ .  $\square$

Si sa inoltre che:

**Proposizione 1.2.14**  $\mathbb{R}^n$  è connesso per archi  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

È noto che  $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 2$ , infatti basta togliere un punto a  $\mathbb{R}$  che diventa sconnesso per archi mentre  $\mathbb{R}^N$  rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

**Proposizione 1.2.15** Se  $f : X \rightarrow Y$  è omeomorfismo tra spazi topologici allora  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  è omeomorfismo per ogni  $U \subseteq X$ .

Nel caso considerato  $U = x_0$ , siccome ho trovato un  $U$  per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo  $f$  non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che  $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 3$ , infatti:

**Dimostrazione:** Per assurdo  $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$  è un omeomorfismo con  $n \geq 3$ , tolgo un punto da  $\mathbb{R}^2$ , se  $f$  omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè  $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{f(p)\}$ . Ma  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$  con la mappa  $\vec{x} \mapsto \left( \|\vec{x}\|, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)$  (dopo aver fatto una traslazione di  $p$  nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente  $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ . Quindi se esiste un omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^n$  significherebbe che  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ , ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi:  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$  ma  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e  $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$ ,  $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$  perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$  che è assurdo.  $\square$

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

**Definizione 1.2.16** Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico  $X$  connesso per archi attorno al punto  $x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^1 \rightarrow X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \} / \sim$$

$e \sim$  è la relazione di omotopia:  $g_1 \sim g_2$  se  $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \rightarrow X$  tale che  $G(z, 0) = g_1(z)$ ,  $G(z, 1) = g_2(z)$ ,  $G(1, t) = x_0$  con  $G$  continua. In questo vedo  $\mathcal{S}^1$  come sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  con la topologia indotta (il punto 1 è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso  $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ ).

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti  $g$  è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di arrivo necessariamente coincidono dato che  $g$  è definito su  $\mathcal{S}^1$ . Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^N$ .

**Dimostrazione:** Come nel caso precedente suppongo esiste  $f$  omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$ , tolgo  $q$  da  $\mathbb{R}^3$  e  $f(q)$  da  $\mathbb{R}^n$ , quindi ottengo l'omomorfismo tra  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ , ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra.  $\square$

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

**Definizione 1.2.17** Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico  $X$  attorno al punto  $x_0$  per  $k \geq 2$ :

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \rightarrow X \mid g \text{ continua}, g(p_0) = x_0 \} / \sim$$

Con  $p_0 \in \mathcal{S}^k$  e  $\sim$  relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1.  $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1$  per  $1 \leq k < m$  ( $m > 2$ )
2.  $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z}$  per  $k = m$
3.  $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4.  $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5.  $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$

**Definizione 1.2.18** Sia  $A \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico  $i : A \rightarrow X$  si definisce mappa di **inclusione** e si scrive  $i : A \hookrightarrow X$  se  $\forall a \in A$  vale che  $i(a) = a$ .

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via... Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

---

<sup>2</sup>Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

## 2 Omologia Singolare

### 2.1 Introduzione

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

### 2.2 Simplessi singolari

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare
- Omologia persistente<sup>1</sup>
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Assocerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base  $\mathbb{Z}$ , che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

**Definizione 2.2.1** In  $\mathbb{R}^{k+1}$  si definisce il **simpleso standard**  $\Delta_k$  l'insieme:

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

Le coordinate  $x_i$  sono dette **coordinate baricentricali**.

**Osservazione 2.2.2** Alcuni esempi sono:

- $\Delta_0$  è un punto.
- $\Delta_1$  è un segmento, che è omeomorfo a  $[0, 1]$ .
- $\Delta_2$  è un triangolo
- $\Delta_3$  è un tetraedro
- ...

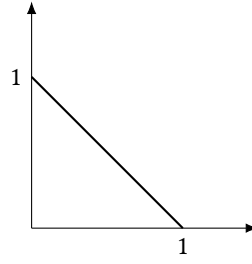


Figura 2.1: 1-Simplesso standard

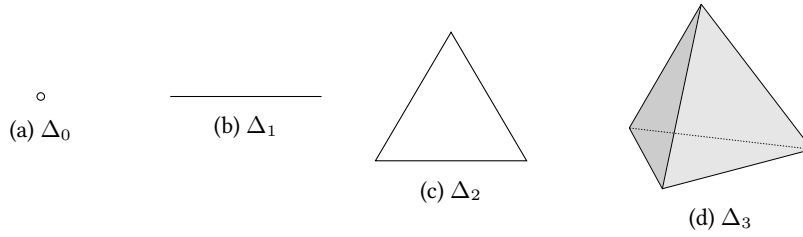


Figura 2.2: Simplesse standard

**Definizione 2.2.3** Dato uno spazio topologico  $X$  si definisce il  $k$ -**simplesso singolare** in  $X$  come un'applicazione continua  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ .

Spesso conviene identificare il  $k$ -simplesso con la sua immagine in  $X$ . In questo modo uno 0-simplesso è un punto in  $X$ , mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome non c'è relazione tra la dimensione dello spazio di partenza e lo spazio di arrivo (ad esempio la curva di Peano) il simplex può deformare, ed è per questo che è detto singolare.

**Esempio 2.2.4** Un esempio di  $k$ -simplesso singolare in cui è particolarmente evidente la possibilità di fare l'identificazione è la mappa identità:  $\mathbb{I} : \Delta_k \rightarrow \Delta_k$ .

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S_\bullet$  è il complesso ( $S$  sta per singolare), cioè:

$$\cdots \rightarrow S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \left\{ \text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \right. \\ \left. \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g \text{ } k\text{-simplessi singolari di } X \right\}$$

<sup>1</sup>Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.



## 2 Omologia Singolare

$S_k(X)$  è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^* g = \sum_g (n_g + n_g^*) g$$

Inoltre  $\forall k < 0$  si pone  $S_k(X) = 0$ . Un elemento generico di  $S_k(X)$  è una somma formale finita (cioè con un numero finito di coefficienti non nulli) su tutti i possibili  $k$ -simplessi singolari in  $X$ .

### Esempio 2.2.5

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate  **$k$ -catene singolari**.  $S_k(X)$  è generato da tutte le possibili applicazioni continue da  $\Delta_k$  a  $X$ , cioè:

$$S_k(X) = \langle \{ g \mid g \text{ } k\text{-simplesso singolare in } X \} \rangle$$

Si nota che le catene sono somme formali di mappe e non sono esse stesse mappe.

**Esempio 2.2.6** ( $k = 0$ ) Se  $k = 0$  allora  $S_0(X)$  sono catene di punti ( $g_0 : \Delta_0 \rightarrow X$ , identifico l'applicazione con il punto in  $X$  sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \}$$

**Osservazione 2.2.7** Quando è possibile faccio un abuso di notazione e identifico la mappa con la sua immagine nello spazio topologico.

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari  $S_k$ , queste applicazioni saranno il bordo. Definisco  $h : \Delta_1 \rightarrow X$  in modo tale che  $h(\Delta) = \alpha$  dove  $\alpha$  è un **arco**.

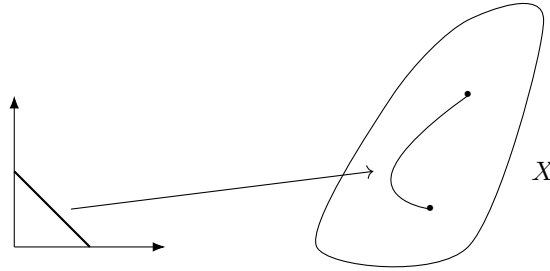


Figura 2.3: 1-Simplesso singolare

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simplesso è uno 0-simplesso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

**Definizione 2.2.8** Sia  $\Delta_k$  un  $k$ -simpleso standard con  $k \geq 0$  si definisce l'operatore **faccia** come la mappa  $F_i^k : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$  tale che  $F_i^k(\Delta_{k-1})$  è una faccia di  $\Delta_k$ .

L'operatore faccia prende un  $k$ -simpleso standard e lo immerge in un qualche senso in un semplice più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso  $k = 0$ ),

**Esempio 2.2.9** ( $k = 2$ ) Per  $k = 2$  vale che:

$$\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \}$$

Si definisce la base  $e_0 = (1, 0, 0)$   $e_1 = (0, 1, 0)$   $e_2 = (0, 0, 1)$ , voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

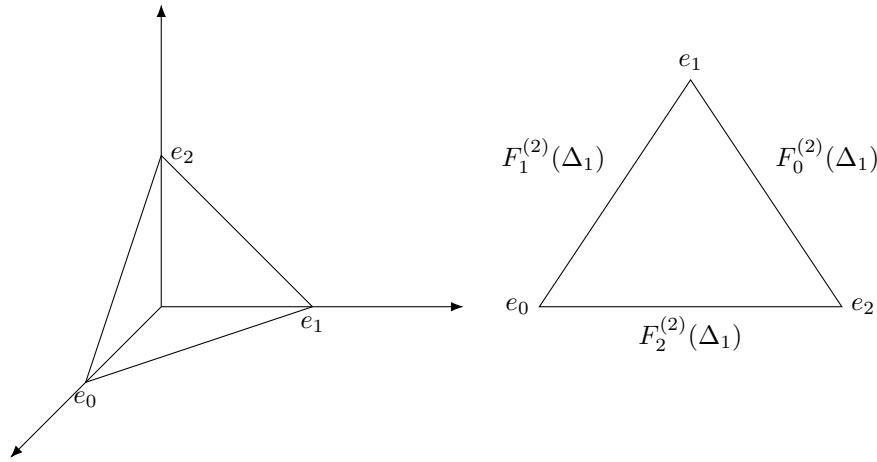


Figura 2.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia  $i$ -esimo è quello che non contiene il vertice  $i$ -esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del semplice.

In generale se  $\Delta_k$  è un semplice standard definisco la base canonica (si noti che la base canonica è ordinata):

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del semplice, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} F_i^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ F_i^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

## 2 Omologia Singolare

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

**Esercizio 1** Dimostrare che se  $[\cdot, \cdot]$  indica l'involuppo convesso allora:

1. Per  $j > i$  vale che  $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$ .
2. Per  $j \leq i$  vale che  $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$ .

dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.

**Definizione 2.2.10** L'involuppo convesso di un insieme  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  è il più piccolo insieme convesso che contiene  $U$ .

**Definizione 2.2.11** Un insieme in  $\mathbb{R}^n$  si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.

**Definizione 2.2.12** Dato un  $k$ -simplex singolare  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  si definisce la mappa  $\sigma^{(i)} : \Delta_{k-1} \rightarrow X$  come la restrizione di  $\sigma$  sulla faccia  $i$ -esima del simplex, cioè  $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^k$ , si definisce quindi il **bordo** come la mappa:

$$\partial : \Sigma_k(X) \rightarrow \Sigma_{k-1}(X)$$

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$$

dove  $\Sigma_k(X)$  indica lo spazio dei  $k$ -simplessi singolari di  $X$ .

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle facce.

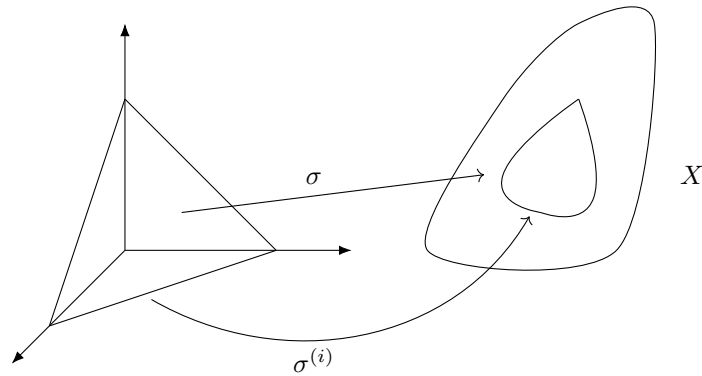


Figura 2.5: Azione di  $\sigma$  e  $\sigma^{(i)}$

## 2 Omologia Singolare

**Esempio 2.2.13** ( $k = 1$ ) Per  $k = 1$  vale che  $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ , infatti:

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \sigma \circ F_0^1 = \sigma(1) = p_1 \\ \sigma^1 &= \sigma \circ F_1^1 = \sigma(0) = p_0\end{aligned}$$

Il bordo è la somma con i segni alternati:  $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ . Tecnicamente il bordo è una mappa quindi sarebbe più corretto scrivere  $\partial_1 \sigma = \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)}$  dove l'azione di queste due mappe è quella di mandare un estremo dell'intervallo  $[0, 1]$  in  $p_0$  o  $p_1$ .

Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  estendendolo per linearità  $\partial_k \left( \sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$  (infatti si è definita l'azione sui generatori  $g$ ).

Devo mostrare che  $\partial_k$  è un omomorfismo e che soddisfa  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ . Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}\partial_k \left( \sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left( \sum_g (n_g + m_g) g \right) = \sum_g (n_g + m_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left( \sum_g n_g g \right) + \partial_k \left( \sum_g m_g g \right)\end{aligned}$$

Dove si è usato che la mappa di bordo è lineare. □

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$  (spesso come notazione si pone  $\partial^2 = 0$ ). SISTEMARE

**Dimostrazione:** Se  $\sigma$  è un  $k$ -complesso singolare, cioè  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  continua:

$$\begin{aligned}\partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \left( \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^k (-)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k =\end{aligned}$$

Rinominando nella seconda sommatoria ...

$$\begin{aligned}&= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k = \\ &= 0\end{aligned}$$

Dove nel penultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio, e nell'ultimo si è rinominato nel secondo termine  $i + 1$  con  $i$ .

## 2 Omologia Singolare

**Esercizio 2** Verificare che fa veramente zero.

Si nota che è di importanza cruciale il fatto che si è definito il bordo con i segni alternati.  $\square$

Sia  $X$  uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare  $H_k(X)$ , cioè il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso  $(S_\bullet(X), \partial)$  con:

$$S_k(X) = \left\{ \sum_g n_g g \mid g \text{ semplice singolare, } n_g \in \mathbb{Z} \right\}$$

E  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  applicazione di bordo con  $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i g^{(i)}$  con  $g : \Delta_k \rightarrow X$ , e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di  $S$ , dove  $g^{(i)} = g \circ F_i^k$ .

Siccome  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre  $\partial_k \circ \partial_{k-1}$  è la mappa nulla dalle catene singolari di  $S_k(X)$  a quelle di  $S_{k-2}(X)$ , in questo modo  $(S_\bullet(X), \partial)$  è un complesso di gruppi abeliani. Posso quindi calcolare l'omologia di  $(S_\bullet(X), \partial)$  come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

Vale che  $\text{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$ , cioè le  $k$ -catene con bordo nullo, questi sono chiamati  $k$ -cicli.

**Definizione 2.2.14** Sia  $(S_\bullet(X), \partial)$  un complesso di moduli, gli elementi di  $\text{Ker}(\partial)$  sono detti  **$k$ -cicli**. Un  $k$ -ciclo è quindi una  $k$ -catena con bordo nullo:

$$c \text{ ciclo} \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei  $k$ -cicli è indicato con  $Z_k(X)$ , cioè:  $Z_k(X) = \text{Ker}(\partial)$ .

Si pone invece  $B_k(X)$  come l'insieme dei bordi, cioè le  $k$ -catene singolari che sono immagini di  $k+1$ -catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che  $H_k(X) = Z_k(X) / B_k(X)$ , cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di  $H_k(X)$  sono classi di equivalenza tali che se  $[c] \in H_k(X)$  con  $\partial c = 0$ , e  $c_1 \in [c]$  allora  $c_1 - c \in B_k(X)$  e  $\partial c_1 = 0$  quindi esiste  $b$  tale che  $c_1 - c = \partial b$ . Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

**Definizione 2.2.15** Due elementi  $a, b$  si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.

$$a \sim_{\text{hom}} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

## 2 Omologia Singolare

**Osservazione 2.2.16** Vale che  $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$ , cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che  $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$  e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.

$\partial_k c$  è il bordo di un  $k$ -ciclo, se  $\partial_k c = 0$  significa che il ciclo non ha bordo, inoltre se  $c = \partial_{k+1} b$  allora  $c$  è bordo di qualcosa:  $c$  è un bordo che non ha bordo. Questo tipo di oggetti è di interesse centrale.

Scopo del corso è studiare  $H_k(X)$  e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

### 2.2.1 $H_0(X)$

**Proposizione 2.2.17** Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, allora  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ , cioè è un  $\mathbb{Z}$ -modulo libero di rango 1. In effetti  $H_0(X)$  conta le componenti connesse per archi in  $X$  e quindi dà informazioni di natura geometrica.

**Dimostrazione:** Calcolo  $H_0$  a partire dalla definizione di omologia:

$$H_0(X) = Z_0(X) / B_0(X)$$

Ho il complesso:

$$\dots \longrightarrow S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Quindi  $Z_0 = \text{Ker}(\partial_0) = S_0(X)$  in quanto ogni elemento di  $S_0(X)$  viene mandato in 0.

Quindi per ora ho che:

$$Z_0(X) = \text{Ker}(\partial_0) = S_0(X) \Rightarrow H_0(X) = S_0(X) / B_0(X)$$

Per definizione  $B_0(X) = \text{Im}(\partial_1) = \{x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x\}$ . Ma  $S_0(X)$  è il gruppo libero generato dagli 0-simplessi singolari, che sono mappe  $\Delta_0 \rightarrow X$ , e siccome  $\Delta_0$  è un punto si possono identificare con i punti di  $X$ , perciò si può immaginare formalmente  $S_0(X)$  come il gruppo libero generato dai punti di  $X$ .  $B_0(X)$  è l'insieme delle coppie di punti di  $X$  che sono bordo di un 1-simplex singolare, il quale è una mappa  $\Delta_1 \cong I \rightarrow X$ , cioè è un arco. Siccome lo spazio è connesso per archi ogni coppia di punti è bordo di qualcosa, fissando un punto  $x \in X$  sostanzialmente  $B_0(X)$  lo si può immaginare con  $X$  e quindi  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  in quanto quoziente tra un gruppo libero generato da un insieme di punti e l'insieme di punti stessi. Sostanzialmente esiste un'unica classe di equivalenza che è la classe di equivalenza di un punto, in quanto ogni coppia di punti è omologa essendo collegata da un arco.

□

La mappa che realizza questo omomorfismo è nota come grado.

**Definizione 2.2.18** Si definisce la mappa **grado** come l'applicazione che manda una catena in  $S_0(X)$  nella somma dei suoi coefficienti:

$$\begin{aligned} \deg: S_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

**Proposizione 2.2.19** La mappa grado gode di alcune proprietà:

1.  $\deg$  è un omomorfismo di gruppi abeliani
2.  $\deg$  è suriettivo
3.  $\text{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema fondamentale di isomorfismo:

$$S_0(X) / B_0(X) \cong \text{Im}(\deg)$$

Ma  $\deg$  è suriettiva, quindi  $\text{Im}(\deg) = \mathbb{Z}$ , perciò:

$$H_0(X) = S_0(X) / B_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

Dimostro quindi questa proposizione.

**Dimostrazione:**

1. Sia  $c_1 = \sum n_i p_i$  e  $c_2 = \sum m_i q_i$ , bisogna mostrare che:

$$\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

ma:

$$c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$$

dove  $r_i$  è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene. Quindi:

$$\deg(c_1 + c_2) = \sum (n_i + m_i) = \sum n_i + \sum m_i = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

Alternativamente in modo più semplice si può osservare l'azione di  $\deg$  sui generatori di  $S_0(X)$ , che è unico e viene mandato dalla mappa grado in 1, quindi si estende per linearità.

2. La mappa è suriettiva, è sufficiente prendere un punto  $p \in X$  e la controimmagine di  $m \in \mathbb{Z}$  è  $\deg^{-1}(m) = mp$
3. Mostro che  $\text{Ker}(\deg) = B_0(X)$ , e lo faccio mostrando che  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$  e che  $\text{Ker}(\deg) \supseteq B_0(X)$ .

Inizio con  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$ : sia  $c \in \text{Ker}(\deg)$  cioè tale che  $\deg(c) = 0$ , se  $c = \sum n_i p_i$  allora  $\sum n_i = 0$ , voglio mostrare che  $c \in B_0(X)$ , cioè che  $\exists b \in S_1(X)$  con  $\partial_1 b = c$ .

## 2 Omologia Singolare

Fissato  $p_0$  considero i  $p_i$ , ci sono archi  $\lambda_i$  che li uniscono a  $p_0$ .  $b$  si può costruire in questo modo: siano  $\lambda_i : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\lambda_i(0) = p_0$  e  $\lambda_i(1) = p_i$  allora:

$$\begin{aligned} c - \partial \left( \sum n_i \lambda_i \right) &= c - \sum n_i \partial \lambda_i = c - \sum n_i (p_i - p_0) = \\ &= c - \sum n_i p_i + \sum n_i p_0 = p_0 \sum n_i = 0 \end{aligned}$$

In cui si è usato che per ipotesi  $c \in \text{Ker}(\text{deg})$  quindi  $\sum n_i = 0$  e che  $c = \sum n_i p_i$ . Ma quindi  $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$  e definendo  $\sum n_i \lambda_i = b$  si è trovato l'elemento  $b$ , per cui  $\text{Ker}(\text{deg}) \subseteq B_0(X)$ .

Mi rimane da mostrare che  $B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\text{deg})$ : mostro che se  $c \in B_0(X)$  allora  $c \in \text{Ker}(\text{deg})$ , cioè,  $\text{deg}(c) = 0$ . Siccome  $c \in B_0(X)$  esiste  $b \in S_1(X)$  tale che  $c = \partial b$ , ma  $S_1(X)$  è lo spazio generato dagli 1-simplex singolari, cioè dagli archi, quindi chiamando  $\lambda_i$  gli archi si può scrivere  $b = \sum m_i \lambda_i$ . A questo punto:

$$\text{deg}(c) = \text{deg}(\partial b) = \sum n_i \text{deg}(\partial \lambda_i) = 0$$

In quando  $\partial \lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$  e l'azione dell'operatore grado è quella di sommare i coefficienti, che sono opposti.

Siccome  $\text{Ker}(\text{deg}) = B_0(X)$  in particolare gli spazi sono isomorfi.

Per questo si può utilizzare il primo teorema dell'isomorfismo. □

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove  $N_c$  è il numero di componenti connesse per archi di  $X$  con  $N_c < +\infty$ , in pratica  $H_0(X)$  è generato da un insieme formato da un punto per ogni componente connessa per archi.

### 2.2.2 $H_1(X)$

Cosa si può dire invece su  $H_1(X)$ ?

Sia  $X$  spazio topologico e  $x_0 \in X$ , allora alla coppia  $(X, x_0)$  si associa il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x_0)$ . In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata:  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0) / \pi_1(X, x_0)'$  dove  $'$  indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \langle \{ [g, h] \mid g, h \in \pi_1(X, x_0) \} \rangle$$

Se  $X$  è connesso per archi allora mostrerò che  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$ , quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare anche il primo gruppo di omologia, che quindi è sostanzialmente formato dai lacci (modulo omotopia) che commutano tra loro.



## 2 Omologia Singolare

**Osservazione 2.2.20** Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi e  $\mathcal{G}$  un gruppo abeliano se esiste un omomorfismo di gruppi  $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{G}$  allora esiste  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{G}$  omomorfismo di gruppi abeliani.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \searrow \varphi' & \uparrow \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

dove  $P$  è la proiezione sul quoziente.

**Dimostrazione:**  $\varphi'$  è definita da  $\varphi'(P(c)) = \varphi(c)$ , ma bisogna controllare se questa è ben definita, cioè se prendendo rappresentanti equivalenti si ottengono le stesse immagini, cioè se con  $c \sim_H d$ :

$$\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) = \varphi(c) \quad \text{e} \quad \varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$$

implica  $\varphi(c) = \varphi(d)$ . Se  $c \sim_H d$  allora  $P(c) = P(d)$ , e quindi  $c = d[x, y]$  per opportuni  $x$  e  $y$ , in quanto gli elementi in  $\text{Ab}(\pi_1(X))$  differiscono per commutatori. Applicando  $\varphi$ :  $\varphi(c) = \varphi(d[x, y])$ , siccome  $\varphi$  è omomorfismo:

$$\varphi(d[x, y]) = \varphi(d)\varphi([x, y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Si nota che questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.  $\square$

Per dimostrare che  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$  mi serve prima un lemma:

**Lemma 2.2.21** Se  $f \sim_H g$  allora  $f \sim_{hom} g$ , cioè se  $f$  e  $g$  sono lacci che definiscono lo stesso elemento nel gruppo fondamentale allora differiscono per un bordo.

**Dimostrazione:** Siccome  $f \sim_H g$  allora  $\exists F$  continua tale  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che  $F(0, x) = f(x)$ ,  $F(1, x) = g(x)$  e  $F(t, 0) = F(t, 1) = x_0$ .

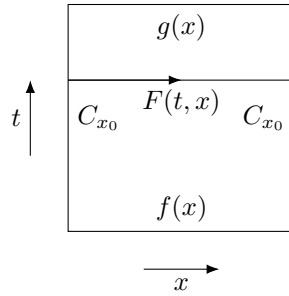


Figura 2.6: Omotopia: deforma  $f$  in  $g$  in modo continuo.

## 2 Omologia Singolare

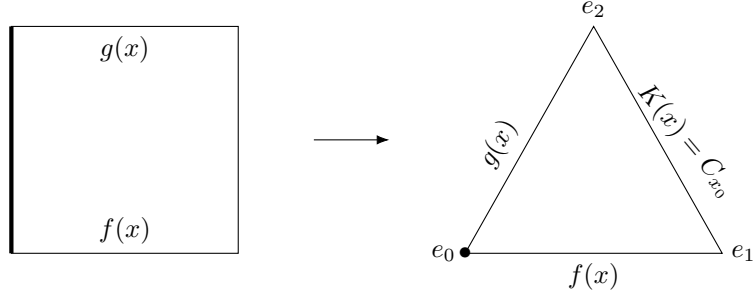


Figura 2.7: La relazione di equivalenza fa passare da un quadrato a un triangolo in quanto fa collassare un intervallo nel punto  $e_0$

Voglio mostrare che  $f - g$  è bordo di un 2-simplesso. Identificando tutti i punti di un uno dei due intervalli con l'equivalenza  $I \times I / \{0\} \times I$  si ottiene qualcosa che è omeomorfo a  $\Delta_2$ ,  $F$  sullo spigolo  $\{0\} \times I$  assume sempre lo stesso valore.

Siccome  $F$  rimane costante sul sottospazio su cui su quozienta, dove vale sempre  $x_0$ ,  $F$  induce  $F': \Delta_2 \rightarrow X$  continua in cui  $e_0$  viene mandato in  $x_0$ :

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow P & \nearrow F' & \\ I \times I / 0 \times I \simeq \Delta_2 & & \end{array}$$

Calcolo il bordo:  $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$  dove  $K$  è il cammino costante per definizione di omotopia, cioè è  $C_{x_0}$ . Se  $K$  fosse il bordo di qualcosa avrei finito ( $\partial w = f - g$ ). Ma  $K$  è il 2-simplesso singolare costante uguale a  $x_0$ , cioè  $K: \Delta_2 \rightarrow \{x_0\}$ , quindi il suo bordo:

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)} = K^{(2)}$$

in quanto tutti i tre termini sono uguali a  $k: \Delta_1 \rightarrow \{x_0\}$ , quindi  $\partial K = K^{(2)} = k$ , cioè  $k$  è un bordo, perciò:

$$\partial F' = \partial k - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial k = f - g \Rightarrow \partial(F' - k) = f - g$$

$F' - k$  è 2-simplesso singolare, lo chiamo  $\sigma$  ed è tale che  $\partial \sigma = f - g$ , quindi  $f$  e  $g$  sono omologhi e  $\sigma$  è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia.  $\square$

**Proposizione 2.2.22** *Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi allora  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$ , cioè si può passare dall'equivalenza omologica a quella omotopica, e in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen si possono ottenere tante informazioni su  $H_1(X)$ .*

**Dimostrazione:** Per dimostrare che  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$  trovo un isomorfismo di gruppi abeliani tra  $\pi_1(X)$  a  $H_1(X)$ , infatti se costruisco  $\varphi: \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi ottengo gratuitamente la mappa da  $\text{Ab}(\pi_1(X))$  a  $H_1(X)$  per l'osservazione

## 2 Omologia Singolare

precedente.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & H_1(X) \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè  $\exists \psi : H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$  tale che  $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$  e  $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\text{Ab}(\pi_1(X))}$ .

Per il lemma appena dimostrato una possibile costruzione di  $\varphi$  è:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{\text{hom}} = \llbracket f \rrbracket \end{aligned}$$

In tutto ciò non ho ancora utilizzato la connessione per archi.

Mostro che  $\varphi$  è omomorfismo, in questo modo anche  $\varphi'$  lo è.

Siano  $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$  voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H [g]_H) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è vero se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{\text{hom}} + [g]_{\text{hom}}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{\text{hom}} = [f]_{\text{hom}} + [g]_{\text{hom}}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti, cioè se differiscono per un bordo, ovvero se:

$$\exists T : \Delta_2 \rightarrow X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

Cioè:

$$\partial T = T^{(0)} - T^{(1)} + T^{(2)} = f + g - f \star g$$

Una possibile costruzione parte tracciando la retta che congiunge due punti medi di due segmenti, quindi si richiede che  $T$  abbia valori costanti sulle rette parallele.

Al momento la situazione è che ho  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi ben definito anche con  $X$  non necessariamente connesso per archi, e dato che  $H_1(X)$  è abeliano ho  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi abeliani.

La conclusione della dimostrazione è nota come **teorema di Hurewicz**.  $\square$

**Teorema 2.2.23 (Teorema di Hurewicz)** Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi allora  $\varphi : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  è un isomorfismo, quindi  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$ .

**Dimostrazione:** *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* Per dimostrare che  $\varphi'$  è isomorfismo o dimostro che è iniettiva e suriettiva o che ammette un inverso. Procedo con la seconda possibilità: mostro che  $\exists \psi : H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$  tale che  $\psi$  è inverso di  $\varphi'$ .

## 2 Omologia Singolare

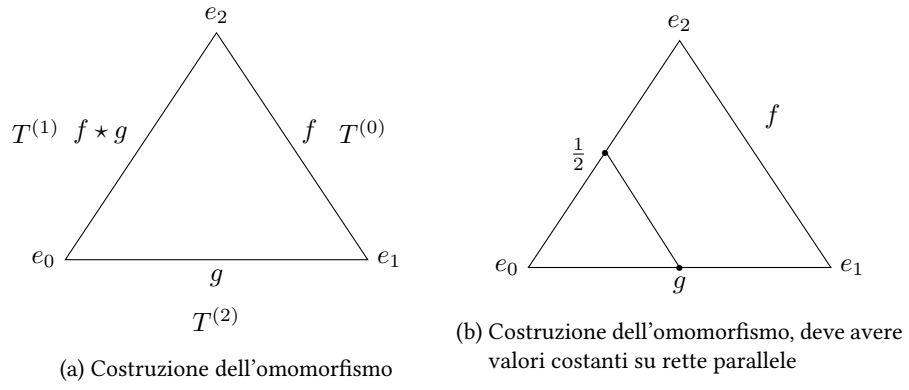


Figura 2.8: Costruzione dell'omomorfismo

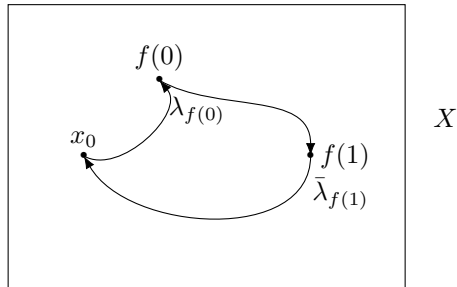


Figura 2.9: Dimostrazione della proposizione

## 2 Omologia Singolare

Considero un arco  $f: \Delta_1 \rightarrow X$  con  $f(0), f(1) \in X$ . Siccome lo spazio è connesso per archi esiste un cammino da  $x_0$  a  $f(0)$ , cioè una funzione  $\lambda_{f(0)}: I \rightarrow X$  tale che  $\lambda_{f(0)} = x_0$  e  $\lambda_{f(1)} = f(0)$ . Lo stesso vale per  $x_0$  e  $f(1)$ . Questi archi sono orientati partendo da  $x_0$ , posso considerare il cammino con verso opposto  $\bar{\lambda}_{f(1)}$  e quindi costruire il laccio di base  $x_0$ :  $\lambda_{f(0)} \star f \star \bar{\lambda}_{f(1)} =: \tilde{f}$ . Vale che  $\psi(f) = \llbracket \tilde{f} \rrbracket$ , dove  $\llbracket \tilde{f} \rrbracket = P \left( [\tilde{f}]_H \right)$ . Bisogna mostrare che:

1.  $\psi$  è ben definito, cioè se  $f \sim_{hom} g$  allora  $\psi(f) = \psi(g)$  e che  $\psi$  non dipende dalla scelta del cammino.
2.  $\psi$  è omomorfismo di gruppi
3.  $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$
4.  $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{Ab(\pi_1(X))}$

Lo studente interessato può verificare queste asserzioni.

**Esercizio 3** Verificarli.

Una volta verificati si trova in particolare che  $H_1(X) \cong Ab(\pi_1(X))$ . □

**Esempio 2.2.24**

- $H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  con  $g \geq 0$
- $H_1(\bigvee_{i=1}^k S^1) \cong \mathbb{Z}^k$  con  $\bigvee_{i=1}^k S^1$  bouquet, cioè  $k$  circonferenze incollate in un punto.
- $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$  (è un toro tappato)
- $H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}_2$  dove  $U_1$  è il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$  con  $\vec{x} \sim \vec{y}$  se  $\vec{x} = a\vec{y}$  con  $a \in \mathbb{R}$
- $H_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  dove  $U_2$  è la bottiglia di Klein. Infatti  $\pi_1(U_2) = \{a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\}$  per abeliannizzarlo bisogna porre  $aba^{-1}b = 1$  e  $aba^{-1}b^{-1} = 1$  cioè  $b^2 = 1$  e  $a$  libero:  $Ab(\pi_1(U_2)) = \{a, b \mid aba^{-1}b = 1\}$ .

## 2.3 Morfismi indotti

Sia  $g: X \rightarrow Y$  mappa continua tra spazi topologici, allora  $g$  induce un'applicazione tra  $H_k(X)$  e  $H_k(Y)$ . Infatti, considero  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$   $k$ -simpleso singolare, posso considerare la composizione con  $g$  definendo  $g': \Delta_k \rightarrow Y$  con  $g' = g \circ \sigma$ :

$$g': \Delta_k \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{g} Y$$

Siccome sia  $g$  che  $\sigma$  sono continue allora  $g'$  è continua, quindi è un  $k$ -simpleso singolare in  $Y$ . Si definisce  $g_\#$  come l'estensione di  $g'$  su tutte le  $k$ -catene per linearità:

$$g_\#: S_k(X) \rightarrow S_k(Y)$$

$$\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma \mapsto \sum_{\sigma} n_{\sigma} g' = \sum_{\sigma} n_{\sigma} (g \circ \sigma)$$

## 2 Omologia Singolare

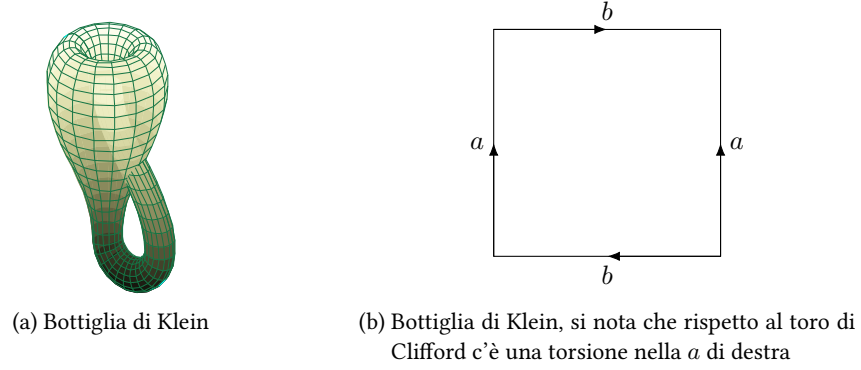


Figura 2.10: Bottiglia di Klein

Questa mappa è ben definita ed è lineare quindi  $g_{\#}$  è un omomorfismo di gruppi abeliani che manda  $k$ -catene in  $S_k(X)$  in  $k$ -catene in  $S_k(Y)$ . Ora voglio ottenere un'applicazione a livello di omologia singolare, quindi definisco  $g_{\star}$ .

$$\begin{aligned} g_{\star}: H_k(X) &\rightarrow H_k(Y) \\ [c] &\mapsto [g_{\#}(c)] \end{aligned}$$

Si dice che  $g$  è **covariante** perché va da  $X$  a  $Y$ , cioè rispetta il verso della applicazione  $g$ . Devo verificare se questa applicazione è ben definita, cioè non se dipende dalla scelta del rappresentante della classe. Considero  $d \in S_k(X)$  tale che  $\partial d = 0$ , suppongo che  $d \sim_{hom} c$ , questo vale se e solo se  $[d] = [c]$  con  $\partial c = 0$ , mi chiedo è vero che  $g_{\star}([d]) = g_{\star}([c])$ ? Devo cioè mostrare che  $g_{\#}(d) \sim_{hom} g_{\#}(c)$ , ma questo è vero se e solo se  $\exists \tau \in S_{k+1}(Y)$  tale che  $g_{\#}(d) - g_{\#}(c) = \partial \tau$ . Siccome  $g_{\#}$  è omomorfismo allora deve essere  $g_{\#}(d - c) = \partial \tau$ , ma  $d$  e  $c$  sono omologhi per ipotesi, quindi:

$$\exists u \in S_{k+1}(X) \mid \partial u = d - c$$

Quindi  $g_{\#}(\partial u) = g_{\#}(d - c)$ , e questo implica che  $[g_{\#}(d)] = [g_{\#}(c)]$ , infatti trovo  $\tau$  a partire da  $u$ :

$$\begin{aligned} g_{\#}(\partial u) &= g_{\#} \left( \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i u^{(i)} \right) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g_{\#}(u^{(i)}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g \circ u^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i g \circ (u \circ F_i^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (g \circ u) \circ F_i^{k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (g \circ u)^{(i)} = \partial (g \circ u) \end{aligned}$$

Ma quindi  $g_{\#}(\partial u) = \partial(g_{\#}(u))$  cioè:

$$g_{\#}(d - c) = g_{\#}(\partial u) = \partial(g_{\#}(u)) = \partial \tau \quad \text{con } \tau = g_{\#}(u)$$

## 2 Omologia Singolare

Quindi  $g_*$  è ben definita ed è omomorfismo in quanto è il passaggio a quoziente di omomorfismi. Noto in particolare che ho mostrato che  $g_\# \circ \partial = \partial \circ g_\#$  in quanto l'ho mostrato sui generatori.

**Esempio 2.3.1** Sia  $j: \mathcal{S}^1 \rightarrow \mathcal{S}^2$  l'immersione di un equatore in una sfera allora  $j_*: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^2)$  è una mappa costante in quanto  $\mathcal{S}^2$  ha gruppo fondamentale banale quindi  $H_1(\mathcal{S}^2)$  è banale. Si nota che  $j$  era iniettiva, ma  $j_*$  è costante quindi non è più iniettiva.

**Esempio 2.3.2** Se considero  $\mathcal{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$\begin{aligned} f: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z &\rightarrow z^4 \end{aligned}$$

Come è fatta  $f_*: H_1(\mathcal{S}^1) \rightarrow H_1(\mathcal{S}^1)$ ? Si sa che  $H_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  in quanto il gruppo fondamentale di  $\mathcal{S}^1$  è  $\mathbb{Z}$  che è già abeliano. C'è quindi un solo generatore, che posso prendere il semplice singolare:

$$\begin{aligned} \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\rightarrow e^{2\pi it} \end{aligned}$$

Cioè in pratica  $[\sigma] \rightarrow 1$ , il laccio si avvolge su sè stesso una volta.

$$\begin{aligned} f_*: H_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [f_\#(\sigma)] = [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta_1 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{S}^1$$

Con:

$$t \xrightarrow{\sigma} e^{2\pi it} \xrightarrow{f} e^{8\pi it}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f \circ \sigma: \Delta_1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto e^{8\pi it} \end{aligned}$$

Sostanzialmente  $f \circ \sigma$  è un cammino in  $\mathcal{S}^1$  ed è quindi potenza di  $\sigma$ , che è l'unico generatore:

$$f \circ \sigma = \sigma^4 = \sigma * \sigma * \sigma * \sigma$$

Cioè avvolgo il laccio quattro volte, quindi:

$$\begin{aligned} f_*: H_1(\mathcal{S}^1) &\rightarrow H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma^4] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} f_*: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

$f_*$  è iniettivo ma non suriettivo (non tutti gli interi sono multipli di 4)

## 2 Omologia Singolare

**Osservazione 2.3.3** Siano  $X$  spazio topologico:  $\mathbb{I}_X: X \rightarrow X$  allora:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_X)_\star: H_k(X) &\rightarrow H_k(X) \\ [c] &\mapsto [(\mathbb{I}_X)_\#(c)] = [c] \end{aligned}$$

Quindi  $(\mathbb{I}_X)_\star$  è proprio l'identità a livello di gruppi di omologia, cioè:

$$(\mathbb{I}_X)_\star = \mathbb{I}_{H_k(X)}$$

**Osservazione 2.3.4** Siano  $X, Y, Z$  spazi topologici e  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  funzioni continue, allora  $g \circ f: X \rightarrow Z$  è continua, si ha quindi:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

E:

$$H_k(X) \xrightarrow{f_\star} H_k(Y) \xrightarrow{g_\star} H_k(Z)$$

Sono ben definite  $g_\star \circ f_\star: H_k(X) \rightarrow H_k(Z)$  e  $(g \circ f)_\star: H_k(X) \rightarrow H_k(Z)$ , vale che  $g_\star \circ f_\star = (g \circ f)_\star$ , infatti se  $\sigma$  è simpleso singolare (poi basta estendere per linearità):

$$\begin{aligned} (g \circ f)_\star([\sigma]) &= [(g \circ f)_\#(\sigma)] = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = \\ &= [g_\#(f \circ \sigma)] = [g_\# \circ f_\#(\sigma)] = (g_\star \circ f_\star)([\sigma]) \end{aligned}$$

Quindi sulla categoria degli spazi topologici questo fornisce un funtore covariante, in quanto questa associazione si comporta bene rispetto all'identità e alla composizione.

## 2.4 Successioni esatte

Considero due complessi  $(C_\bullet, \partial)$  e  $(C'_\bullet, \partial')$ , considero l'omomorfismo di  $\mathbb{Z}$ -moduli  $F: (C_\bullet, \partial) \rightarrow (C'_\bullet, \partial')$  tale che  $\forall k$  si formi un diagramma commutativo, cioè valga  $F \circ \partial = \partial' \circ F$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \dots \\ & & \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow F \\ \dots & \xrightarrow{\partial'} & C'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_k & \xrightarrow{\partial'} & C'_{k-1} \xrightarrow{\partial'} \dots \end{array}$$

Tutti i quadrati che si formano devono essere commutativi. Si pone questa richiesta di commutatività in quanto considerando  $f: X \rightarrow Y$  e quindi  $F = f_\#: (S_\bullet(X), \partial) \rightarrow (S_\bullet(Y), \partial')$  la condizione di commutatività è  $f_\# \circ \partial = \partial' \circ f_\#$  che è proprio quella che ho utilizzato prima per mostrare che l'applicazione è ben definita a livello di omologia (avevo usato  $g_\# \circ \partial = \partial \circ g_\#$ ). Una funzione  $F$  fatta in questo modo è detta **mappa tra complessi**.

**Definizione 2.4.1** Si definisce una **successione esatta corta** di gruppi la successione:

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$$



## 2 Omologia Singolare

con  $\alpha$  omomorfismo iniettivo,  $\beta$  omomorfismo suriettivo e  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ . Si nota che richiedere queste condizioni su  $\alpha$  e  $\beta$  è equivalente a scrivere la successione esatta come:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

Infatti indicando le mappe sottointese con  $i: 0 \rightarrow A$  e  $j: C \rightarrow 0$  allora per l'esattezza vale che  $\text{Ker}(\alpha) = \text{Im}(i) = 0$  in quanto  $i$  è omomorfismo, ma  $\text{Ker}(\alpha) = 0$  significa che  $\alpha$  è iniettivo, inoltre  $\text{Ker}(j) = \text{Im}(\beta) = C$ , quindi  $\beta$  è suriettivo.

**Definizione 2.4.2** Si definisce una **successione esatta corta** di complessi la successione:

$$0 \longrightarrow A_{\bullet} \xrightarrow{\alpha} B_{\bullet} \xrightarrow{\beta} C_{\bullet} \longrightarrow 0$$

con  $(A_{\bullet}, \partial^A)$ ,  $(B_{\bullet}, \partial^B)$  e  $(C_{\bullet}, \partial^C)$  complessi, e  $\alpha$  mappa tra complessi iniettiva,  $\beta$  mappa tra complessi suriettiva e deve valere che  $\forall k$  sia  $C_k \cong B_k / A_k$ .

In modo più esteso questo significa:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & A_{k+1} & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & B_{k+1} & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_{k+1} & \longrightarrow & C_k & \longrightarrow & C_{k-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Le colonne sono successioni esatte corte di  $Z$ -moduli, quindi l'immagine di  $\alpha$  è uguale al nucleo e la mappa è iniettiva perciò la prima riga è formata da zero (infatti se è iniettiva il nucleo è zero), similmente siccome la mappa  $\beta$  è suriettiva quindi l'ultima riga è formata da zero. Inoltre tutti i quadrati sono commutativi.

### 2.4.1 Omomorfismo di connessione

A partire da una successione esatta corta posso passare all'omologia, se passo brutalmente all'omologia non ottengo una successione esatta, ma c'è il modo per indurre una successione esatta lunga:

**Teorema 2.4.3** Una successione esatta corta di complessi induce una successione esatta lunga tale che sia fatta così:

$$\dots \longrightarrow H_p(A_{\bullet}) \xrightarrow{\alpha_*} H_p(B_{\bullet}) \xrightarrow{\beta_*} H_p(C_{\bullet}) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A_{\bullet}) \xrightarrow{\alpha_*} \dots$$

## 2 Omologia Singolare

Esatta significa che  $\forall p$ :

$$\text{Im}(\alpha_*) = \text{Ker}(\beta_*)$$

$$\text{Im}(\beta_*) = \text{Ker}(\delta)$$

$$\text{Im}(\delta) = \text{Ker}(\alpha_*)$$

$\delta$  è detto **omomorfismo di connessione** in quanto cambia il grado dell'omologia.

La scrittura estesa della successione è:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \dots & & \dots & & \dots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \dots & \longrightarrow & H_{p+1}(C_{k+1}) & \longrightarrow & H_{p+1}(C_k) & \longrightarrow & H_{p+1}(C_{k-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_p(A_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(A_k) & \longrightarrow & H_p(A_{k-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_p(B_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(B_k) & \longrightarrow & H_p(B_{k-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_p(C_{k+1}) & \longrightarrow & H_p(C_k) & \longrightarrow & H_p(C_{k-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_{p-1}(A_{k+1}) & \longrightarrow & H_{p-1}(A_k) & \longrightarrow & H_{p-1}(A_{k-1}) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

**Dimostrazione:** Per dimostrare il teorema bisogna:

1. Dimostrare che  $\alpha_*$  e  $\beta_*$  sono ben definite
2. Costruire l'omomorfismo di connessione e verificare che è effettivamente un omomorfismo
3. Mostare che la successione è esatta, cioè che

$$\text{Im}(\alpha_*) = \text{Ker}(\beta_*)$$

$$\text{Im}(\beta_*) = \text{Ker}(\delta)$$

$$\text{Im}(\delta) = \text{Ker}(\alpha_*)$$

*Sketch of proof, la dimostrazione è lunga e noiosa.*

Per costruire l'omomorfismo di connessione devo trovare un elemento in  $A_{k-1}$  a partire da uno in  $C_k$ . Sia  $c \in C_k$  un ciclo, quindi tale che  $\partial c = 0$ , siccome  $\beta_k$  è suriettiva  $\exists b \in B_k$  tale che  $\beta_k(b) = c$ , voglio recuperare un elemento  $a \in A_{k-1}$ , in questo modo posso definire

## 2 Omologia Singolare

l'azione dell'omomorfismo di connessione con  $\delta: \llbracket c \rrbracket \mapsto \llbracket a \rrbracket$ .

$$\begin{array}{ccc} & a \in A_{k-1} & \\ & \downarrow \alpha_{k-1} & \\ b \in B_k & \xrightarrow{\partial} & B_{k-1} \\ \downarrow \beta_k & & \downarrow \beta_{k-1} \\ c \in C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} \end{array}$$

Prendo il bordo per passare a  $B_{k-1}$  ( $\partial b \in B_{k-1}$ ), poi applico  $\beta_{k-1}$  e usando la commutatività  $\beta_{k-1} \circ \partial = \partial \circ \beta_k$ :

$$\beta_{k-1}(\partial b) = \partial \beta_k(b) = \partial c = 0$$

Quindi  $\beta_{k-1}(b) = 0$ , e quindi  $\partial b \in \text{Ker}(\beta_{k-1})$ , ma le colonne sono esatte quindi  $\partial b \in \text{Im}(\alpha_{k-1}) = \text{Ker}(\beta_{k-1})$ , perciò  $\exists a \in A_{k-1}$  tale che  $\alpha_{k-1}(a) = \partial b$ , quindi a partire da  $c \in C_k$  ho associato un elemento  $a \in A_{k-1}$ . Per scendere a livello di omologia  $a$  deve essere un ciclo, cioè  $\partial a = 0$ , per verificarlo applico  $\alpha_{k-2}$  a  $\partial a$  e uso la commutatività:

$$\alpha_{k-2}(\partial a) = \partial \alpha_{k-1}(a) = \partial \partial b = 0$$

Ma  $\alpha_{k-2}$  è iniettiva, quindi  $\partial a = 0$ . Sono partito da un  $k$ -ciclo in  $C_k$  e ho trovato un  $k-1$ -ciclo in  $A_{k-1}$ , che è quello che mi proponevo di fare.

Ci sono un paio di dettagli da verificare:

1. È univoca la scelta dell'elemento  $b$ ? Se non lo è ci sono problemi?
2. Se prendo in  $C_k$  un elemento  $c'$  che è omologo a  $c$  è sicuro che trovo un  $a'$  che è omologo ad  $a$ ?

Se queste due problematiche non sono verificate l'applicazione a livello di non è ben definita. Verifico che comunque scelga una controimmagine di  $\beta_k$  si ottiene in  $A_{k-1}$  un elemento omologo ad  $a$ : suppongo di aver scelto la controimmagine  $b' \in B_k$  e quindi valga  $\beta_k(b') = \beta_k(b) = c$ , allora:

$$\beta_k(b' - b) = 0 \iff b' - b \in \text{Ker}(\beta_k) = \text{Im}(\alpha_k)$$

Quindi esiste  $a_0 \in A_k$  tale che  $\alpha_k(a_0) = b' - b$ , prendendo il bordo:

$$\partial(b' - b) = \partial(\alpha_k(a_0)) \Rightarrow \partial b' - \partial b = (\partial \circ \alpha_k)(a_0) = \alpha_{k-1}(\partial a_0)$$

Ma per come costruisco l'omomorfismo di connessione  $\partial b = \alpha_{k-1}(a)$ , e analogamente  $\partial b' = \alpha_{k-1}(a')$ :

$$\alpha_{k-1}(a') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial a_0) \Rightarrow \alpha_{k-1}(a' - a - \partial a_0) = 0$$

Ma  $\alpha_{k-1}$  è iniettivo quindi  $a' - a - \partial a_0 = 0$ , e perciò  $a' \sim_{hom} a$ , in quanto  $a$  e  $a'$  differiscono per un bordo.

## 2 Omologia Singolare

Per quanto riguarda la seconda questione considero  $c'' \sim_{hom} c$  in  $C_k$  allora mostro che  $a'' \sim_{hom} a$  in  $A_{k-1}$ , e così facendo mostro che l'applicazione è ben definita.

$$c'' \sim_{hom} c \iff \exists c_0 \in C_{k+1} \mid c'' - c = \partial c_0$$

Ma per la suriettività  $\exists b, b''$  tale che  $c = \beta_k(b)$ ,  $c'' = \beta_k(b'')$  e  $c_0 = \beta_{k+1}(c_0)$ , quindi:

$$\beta_k(b'') - \beta_k(b) = \partial c_0 \Rightarrow \beta_k(b'' - b) = \partial c_0 \Rightarrow \beta_k(b'' - b) = \partial(\beta_{k+1}(b_0)) = \beta_k(\partial b_0)$$

Quindi:

$$\beta_k(b'' - b - \partial b_0) = 0 \Rightarrow b'' - b - \partial b_0 \in \text{Ker}(\beta_k) = \text{Im}(\alpha_k)$$

Perciò  $\exists \tilde{a} \in A_k$  tale che  $b'' - b - \partial b_0 = \alpha_k(\tilde{a})$ , e applicando il bordo si ottiene  $\partial b'' - \partial b - \partial \alpha_k(\tilde{a}) = 0$ , quindi dalla definizione dell'omomorfismo di connessione e dalla commutatività:

$$\partial b'' - \partial b = \partial \alpha_k(\tilde{a}) \Rightarrow \alpha_{k-1}(a'') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial \tilde{a})$$

Ma  $\alpha_{k-1}$  è omomorfismo iniettivo quindi  $a'' - a - \partial \tilde{a} = 0$  cioè  $a'' - a = \partial \tilde{a}$ , quindi siccome  $a''$  e  $a$  differiscono per un bordo sono omologhi.

Si può quindi definire  $\delta$  su  $\llbracket c \rrbracket \in H_p(C_k)$ :

$$\delta(\llbracket c \rrbracket) = \llbracket \alpha \circ \partial \circ \beta^{-1}(c) \rrbracket$$

Questa è ben definita. □

### 2.5 Omologia singolare relativa

Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A$  sottospazio generico di  $X$  (anche improprio), cioè  $A \hookrightarrow X$ . Vorrei definire l'omologia singolare di  $X$  tenendo presente la presenza di  $A$ , cioè  $H_k(X, A)$ , il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare della coppia  $(X, A)$ . Sia  $S_k(A)$  lo spazio delle  $k$ -catene, cioè lo spazio generato dai semplici singolari in  $A$ , la mappa di inclusione  $i: A \rightarrow X$  induce una mappa  $i_\#: S_k(A) \rightarrow S_k(X)$ . Questa mappa è sicuramente iniettiva (basta vedere le catene di  $A$  come catene di  $X$ ). A questo punto la successione

$$0 \xrightarrow{h} S_k(A) \xrightarrow{i_\#} S_k(X) \xrightarrow{\beta} S_k(X)/S_k(A) \xrightarrow{k} 0$$

è esatta infatti  $h$  iniettiva e  $k$  suriettiva,  $\text{Im}(h) = \text{Ker}(i_\#) = 0$ ,  $\text{Ker}(k) = \text{Im}(\beta) = S_k(X)/S_k(A)$  e  $\text{Ker}(\beta) = \text{Im}(i_\#)$  in quanto il nucleo della proiezione su un sottospazio è il sottospazio stesso. Pongo come notazione  $S_k(X)/S_k(A) = S_k(X, A)$ , in questo modo la successione diventa:

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_\#} S_k(X) \xrightarrow{\beta} S_k(X, A) \longrightarrow 0$$

## 2 Omologia Singolare

A partire da questa successione posso costruire una successione esatta corta di complessi:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(A) & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X) & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X, A) & \longrightarrow & S_k(X, A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

I quadrati sono commutativi quindi questa successione esatta corta di complessi ne induce una esatta lunga. Si ottiene quindi:

$$\dots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{\alpha_*} H_k(B) \xrightarrow{\beta_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(A) \longrightarrow \dots$$

Si definisce quindi in questo modo l'**omologia singolare della coppia**  $H_k(X, A)$ .

**Definizione 2.5.1 (Prima definizione)** Si dice che una successione esatta corta di  $\mathcal{R}$ -moduli:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

**spezsa** se esiste un endomorfismo continuo  $\varphi: B \rightarrow B$  idempotente (cioè tale che  $\varphi^2 = \varphi$ ) e tale che  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$  oppure  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$

Sia  $B = A \oplus C$  con  $A, C$   $\mathbb{Z}$ -moduli, in quello che segue il ruolo di  $A$  e  $C$  può essere scambiato. A questi moduli sono associate la mappa di inclusione e di passaggio al quoziente:

$$\begin{aligned}
 i: A &\rightarrow A \oplus C \\
 a &\mapsto (a, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j: A \oplus C &\rightarrow C \\
 (a, c) &\mapsto c
 \end{aligned}$$

La mappa  $i$  è iniettiva perchè è un'inclusione, mentre  $j$  è suriettiva perchè è un passaggio al quoziente, si può quindi costruire la successione esatta corta:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B = A \oplus C \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

Ma esiste anche l'inclusione  $s: C \rightarrow B$  e quindi ho;

$$\begin{aligned}
 C &\xrightarrow{s} A \oplus C \xrightarrow{j} C \\
 c &\longmapsto (0, c) \longmapsto c
 \end{aligned}$$

## 2 Omologia Singolare

Vale che  $j \circ s = \mathbb{I}_C$ . Se  $B$  è proprio somma diretta di  $A$  e  $C$  posso sempre fare questa costruzione, ma nelle successioni esatte generiche non è così. Una successione spezza quando ha un comportamento come questo, e la mappa  $s$  tale che  $j \circ s = \mathbb{I}_C$  è detta **sezione dell'omomorfismo**  $j: B \rightarrow C$ .

**Definizione 2.5.2 (Seconda definizione)** Si dice che la successione esatta di  $\mathbb{Z}$ -moduli

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

**spezza** se esiste una sezione da  $B$  a  $C$  o da  $B$  ad  $A$ , cioè:

$$\exists s: C \rightarrow B \text{ omomorfismo continuo tale che } \beta \circ s = \mathbb{I}_C$$

oppure

$$\exists s': B \rightarrow A \text{ omomorfismo continuo tale che } s' \circ \alpha = \mathbb{I}_A$$

Questo è equivalente a dire che  $B = A \oplus s(C)$ , infatti vale l'osservazione

**Osservazione 2.5.3** Se la successione  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  spezza allora  $B \cong A \oplus s(C)$  con  $s$  sezione. Il viceversa l'ho già dimostrato, infatti se  $B$  si scrive come somma diretta la sezione è banale.

**Dimostrazione:** Per dimostrare che  $B \cong A \oplus s(C)$  per prima cosa mostro che l'intersezione tra  $A$  e  $s(C)$  è vuota.

Vale che  $A \hookrightarrow B$  in quanto  $\alpha$  è iniettiva e quindi  $\alpha(A) \cong A$ , inoltre  $s(C) \subseteq B$  in quanto per ipotesi  $s: C \rightarrow B$ . Sia  $x \in \alpha(A) \cap s(C)$ , mostro che  $x = 0$ . Siccome  $x \in \alpha(A)$  allora esiste  $a \in A$  tale che  $x = \alpha(a)$  e siccome  $x \in s(C)$  allora esiste  $k \in C$  tale che  $x = s(k)$ , naturalmente  $\alpha(a) = s(k)$ . Applicando  $\beta$  si ottiene  $(\beta \circ \alpha)(a) = (\beta \circ s)(k)$ , ma  $\beta \circ \alpha = 0$  in quanto la successione è esatta, quindi  $(\beta \circ s)(k) = 0$ . Ma  $s$  è sezione quindi  $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$ , quindi  $k = 0$ , ma siccome  $s$  è omomorfismo allora  $s(k) = 0$ , perciò  $x = s(k) = 0$ .

A questo punto bisogna dimostrare che ogni elemento di  $B$  si scrive come somma di un elemento di  $\alpha(A)$  e di un elemento di  $s(C)$ .

Sia  $b \in B$  allora  $\beta(b) \in C$ , ci sono due possibilità:

1. Se  $\beta(b) = 0$  significa  $b \in \text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ , quindi  $b \in \text{Im}(\alpha)$ , cioè  $\exists a \in A$  tale che  $b = \alpha(a)$  e quindi si scrive come elemento di  $A$  sommato a zero.
2. Se  $\beta(b) = c \neq 0$  allora  $b - s(t) \in B$ , mostro che  $b - s(t) \in \text{Ker}(\beta)$  e quindi posso usare lo stesso ragionamento di prima.

$$\beta(b - s(t)) = \beta(b) - \beta(s(t)) = c - c = 0 \Rightarrow \beta(b - s(t)) \in \text{Ker}(\beta) = \text{Im}(\alpha)$$

Quindi esiste  $a' \in A$  tale che  $\alpha(a') = b - s(t)$  e quindi vale che  $b = s(t) + \alpha(a')$

Siccome l'intersezione tra  $A$  e  $s(C)$  è vuota e ogni elemento di  $B$  si può scrivere come somma di un elemento di  $A$  e di uno di  $s(C)$  allora  $B$  è somma diretta di  $A$  e  $s(C)$ .  $\square$

## 2 Omologia Singolare

**Esempio 2.5.4 (Successione non spezzante)** Considero la successione:

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Questa successione è esatta ma non spezza, infatti se spezzasse esisterebbe una sezione:

$$s: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}$$

Ma questa non può esistere per questioni di immagini.

**Proposizione 2.5.5** Le due definizioni di successione che spezza sono equivalenti, cioè se  $\exists s: C \rightarrow B$  tale che  $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$  allora  $\exists \varphi: B \rightarrow B$  tale che sia idempotente e che  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\beta)$

**Dimostrazione:** Una possibile costruzione è  $\varphi = s \circ \beta$ , infatti:

$$\varphi^2 = s \circ \beta \circ s \circ \beta = s \circ \mathbb{I}_C \circ \beta = s \circ \beta = \varphi$$

Quindi  $\varphi$  è idempotente. Siccome  $s$  omomorfismo  $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(s \circ \beta)$ , mostro che  $\text{Ker}(s \circ \beta) \subseteq \text{Ker}(\beta)$ :

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(s \circ \beta) = \{ b \in B \mid (s \circ \beta)(b) = 0 \}$$

Quindi  $s(\beta(b)) = 0$  cioè  $\beta \circ s \circ \beta(b) = 0$  quindi  $\beta(b) = 0$  che significa che  $b \in \text{Ker}(\beta)$ . Ma quindi  $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(s \circ \beta) \subseteq \text{Ker}(\beta)$  allora  $\text{Ker}(s \circ \beta) = \text{Ker}(\beta)$ . Rimane da mostrare il viceversa.

**Esercizio 4** Mostrare che se esiste l'endomorfismo  $\varphi$  allora si può costruire una sezione.

Lo studente interessato può verificare queste asserzioni.  $\square$

## 2.6 Omologia singolare ridotta

Fin ora ho parlato di omologia singolare  $H_k(X)$ , omologia singolare relativa  $H_k(X, A)$ , ora introduco l'omologia singolare ridotta.

**Definizione 2.6.1** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $A = \{x_0 \in X\}$ , è ben definita l'omologia relativa  $H_k(X, A)$ , si definisce questa come **omologia singolare ridotta**  $\tilde{H}_k(X)$ . L'omologia singolare ridotta è l'omologia relativa ad un punto.

Per costruire l'omologia singolare ridotta servono le  $k$ -catene in  $X$  e le  $k$ -catene in  $\{x_0\}$

$$0 \longrightarrow S_k(\{x_0\}) \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow S_k(X)/S_k(\{x_0\}) = S_k(X, \{x_0\}) \longrightarrow \dots$$

In  $S_k$   $\sigma: \Delta_k \rightarrow \{x_0\}$  è simpleso sono le applicazioni costanti dal  $k$ -simpleso standard in  $\{x_0\}$ . Quindi  $S_k(\{x_0\}) = \langle \sigma_k \rangle$   $\sigma_k$  è l'unica mappa che c'è.

## 2 Omologia Singolare

**Lemma 2.6.2 (Omologia di un punto)** Sia  $X = \{x_0\}$  con  $x_0 \in X$ , allora:

$$H_k(\{x_0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

**Dimostrazione:** Il generico  $k$ -simpleso singolare in  $X$  è una mappa continua  $\sigma_k: \Delta_k \rightarrow \{x_0\}$ , quindi fissato  $k$  esiste un solo simpleso singolare, che è la mappa costante dal simpleso standard a  $x_0$ . Il generico  $S_k(X)$  quindi è il gruppo libero generato da questo simpleso singolare, cioè  $S_k(X) = \langle \sigma_k \rangle$ . A questo punto fissato  $k$  si può computare semplicemente il bordo di  $\sigma_k$ :

$$\partial\sigma_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_k^{(i)} \text{ con } \sigma_k^{(i)}: \Delta_{k-1} \xrightarrow{F_k^i} \Delta_k \xrightarrow{\sigma_k} \{x_0\} \text{ cioè } \sigma_k^{(i)} = \sigma_{k-1}$$

Fissato  $k$  nella sommatoria che calcola il bordo tutte le quantità sono uguali, quindi la somma a segni alterni è nulla oppure è uguale a  $\sigma_{k-1}$  a seconda della parità di  $k$ .

$$\partial\sigma_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ \sigma_{k-1} & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

A questo punto si può calcolare facilmente il nucleo e l'immagine dell'operatore bordo:

$$\text{Ker}(\partial_k) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ S_k(X) & k \geq 2 \text{ pari} \end{cases}$$

E:

$$\text{Im}(\partial_{k+1}) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ S_k(X) & k \geq 2 \text{ pari} \end{cases}$$

Infatti, se  $k \geq 2$  ed è pari:

$$\begin{aligned} \partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto \sigma_{k-1} \end{aligned}$$

quindi solo lo 0 è mandato in 0, mentre se è dispari:

$$\begin{aligned} \partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto 0 \end{aligned}$$

quindi tutto viene mandato in 0 Invece per  $k$  pari:

$$\begin{aligned} \partial_{k+1}: S_{k+1}(\{x_0\}) &\rightarrow S_k(\{x_0\}) \\ \sigma_{k+1} &\mapsto \sigma_k \end{aligned}$$

quindi l'immagine è il generatore, cioè tutto  $S_k(X)$ , mentre per  $k \geq 2$  pari:

$$\begin{aligned} \partial_k: S_k(\{x_0\}) &\rightarrow S_{k-1}(\{x_0\}) \\ \sigma_k &\mapsto 0 \end{aligned}$$



## 2 Omologia Singolare

Quindi l'immagine è solo 0.

A questo punto se  $k \geq 2$   $\text{Im}(\partial_{k+1}) = \text{Ker}(\partial_k)$ , quindi:

$$H_k(X) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1}) \cong 0$$

Invece se  $k = 0$  vale che  $\text{Ker}(\partial_0) = S_0(X)$ , mentre  $\text{Im}(\partial_1) = 0$  quindi:

$$\text{Ker}(\partial_0) / \text{Im}(\partial_1) \cong S_0(X)$$

□

**Proposizione 2.6.3** *Vale che:*

$$\tilde{H}_k(X) \cong \begin{cases} H_0(X) / \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ H_k(X) & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

**Dimostrazione:** Per dimostrarlo uso la successione esatta lunga in omologia relativa:

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(\{x_0\}) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_k(\{x_0\}) \longrightarrow \dots$$

Nel caso  $k \geq 1$  sicuramente  $k+1 > 0$  e il complesso quindi è:

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow 0$$

$\psi$  è iniettiva quindi  $\text{Ker}(\psi) = \text{Im}(0) = 0$ , ma è anche suriettiva, in quanto [MANCA]. Quindi  $\psi$  è isomorfismo e perciò  $H_m(X) \cong \tilde{H}_m(X)$  per  $m \geq 2$ . Mi rimane da calcolare il caso  $k = 1$  e il caso  $k = 0$ . [MANCA MANCA MANCA]

Quindi  $\text{Ker}(i_*) = 0$  da cui  $\text{Im}(j) = \text{Ker}(i_*) = 0$  e perciò  $\varphi$  è iniettiva ma anche suriettiva. Ho quindi la successione:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_1(X) \longrightarrow 0$$

$\varphi$  è isomorfismo quindi  $H_1(X) \cong \tilde{H}_1(X)$ , ma vale anche che:

$$0 \longrightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

Quindi  $H_0(X) / H_0(\{x_0\}) \cong \tilde{H}_0(X)$  infatti  $H_0(X) / \text{Ker}(\tau) \cong \text{Im}(\tau)$  per il teorema fondamentale dell'isomorfismo. E infine  $\text{Im}(\tau) = \tilde{H}_0(X)$  per la suriettività e  $\text{Ker}(\tau) = \mathbb{Z}$  per l'iniettività.

Se voglio mostrare che  $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$  basta che mostro che esiste una sezione, e in molti casi questo è vero. □

**Esempio 2.6.4** Considero ad esempio  $H_k(\mathcal{S}^n)$  con  $n \geq 1$ :

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Fin ora so che:

$$H_1(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

E che  $H_0(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  per  $n \geq 1$ , vorrei calcolare gli altri gruppi di omologia, ma per farlo mi servono altri strumenti.

## 2.7 Assiomi di una teoria omologica

**Definizione 2.7.1 (Teoria omologica secondo Eilenberg e Steenrod)** Una **teoria omologica** sulla categoria di tutte le coppie di spazi topologici e mappe continue è un funtore che assegna ad ogni coppia di spazi  $(X, A)$  un gruppo abeliano  $H_p(X, A)$  e ad ogni applicazione continua  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  un omomorfismo  $f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$  con una trasformazione naturale  $\delta_k: H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A) := H_{k-1}(A, \emptyset)$ , detta **omomorfismo di connessione** tale che siano soddisfatti i seguenti assiomi:

1. (Omotopia): se  $f \sim_H g$  con  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mappe continue, allora  $f_* = g_*$ . Dove  $f \sim_H g$  se esiste una funzione continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tale che  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  e  $F(a, t) \subseteq B \forall a \in A$  e  $\forall t \in I$ .
2. (Esattezza): Per ogni inclusione  $i: A \hookrightarrow X$  e  $j: X \hookrightarrow (X, A)$  la successione:

$$\dots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_*} H_p(X) \xrightarrow{j_*} H_p(X, A) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(A) \longrightarrow \dots$$

è esatta.

3. (Dimensione):  $H_k(P) = 0 \forall k \neq 0$  dove  $P$  è lo spazio formato da un solo punto.
4. (Additività): Se  $X$  è la somma topologica di spazi  $X_\alpha$  allora  $H_p(X) = \bigoplus H_p(X_\alpha)$
5. (Escissione): Se  $U$  è un aperto in  $X$  tale che  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$  allora l'inclusione di  $(X \setminus U, A \setminus U)$  in  $(X, A)$  induce un isomorfismo tra  $H_k$ , cioè togliendo un opportuno insieme da  $(X, A)$  l'omologia non sente della escissione.

Per trasformazione naturale si intende che  $\forall f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f'_* \\ H_p(Y, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

dove  $f' = f|_A$ . Mentre la richiesta che sia funtore significa che se  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  sono mappe continue allora  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

## 2 Omologia Singolare

L'omologia singolare relativa soddisfa tutti questi assiomi, a meno di quelli non ancora verificati che sono l'omotopia e l'escissione.

**Definizione 2.7.2** Sia  $\{X_\alpha\}$  una famiglia di spazi topologici, si definisce la **somma topologica**  $X = \Pi_\alpha X_\alpha$  come lo spazio topologico formato dall'unione disgiunta di tutti gli  $X_\alpha$  equipaggiato con la **topologia dell'unione disgiunta**, ovvero un insieme è aperto se e solo se è aperto rispetto alla topologia di ogni  $X_\alpha$ .

Ho costruito:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(A) & \longrightarrow & S_k(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X) & \longrightarrow & S_k(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X, A) & \longrightarrow & S_k(X, A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

So che ho  $\partial'$  perchè la successione è esatta, devo verificare che  $P \circ \partial = \partial' \circ P$ . Sia  $c \in S_{k+1}(X)$  allora  $p(c) = [c' \in S_{k+1}(X) \text{ tale che } c' - c \in S_{k+1}(A)]$ , e  $\partial'([c]_A) := [\partial c]_A$  così la relazione è soddisfatta.

Devo verificare che è ben definita: Se  $c' \sim_A c$  allora  $c' - c = a \in S_{k+1}(A)$ , prendo il bordo  $\partial c' - \partial c = \partial a \in S_k(A)$ , per definizione  $\partial c \sim_A \partial c$  quindi l'applicazione è ben definita.

L'omologia relativa è l'omologia singolare di  $S_\bullet(X, A)$ , cioè:

$$H_k(X, A) = H_k(S_\bullet(X, A)) = \text{Ker}(S_k(X, A) \rightarrow S_{k-1}) / \text{Im}(S_{k+1}(X, A) \rightarrow S_k)$$

Questo gruppo abeliano (in quanto è quoziente di gruppi abeliani) è detto gruppo di omologia relativa della coppia  $(X, A)$ . Ho fatto un'associazione da una coppia a un gruppo, voglio verificare che questa soddisfa gli assiomi di Eilenberg e Steenrod.

Sia  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  tale che  $f(A) \hookrightarrow B$ , e sia:

$$\begin{aligned}
 f_*: H_k(X, A) &\rightarrow H_k(Y, B) \\
 [c]_A &\mapsto [f_\#(c)]_B
 \end{aligned}$$

Quindi ho;

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(X, A) & \longrightarrow & S_k(X, A) & \longrightarrow & S_{k-1}(X, A) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\
 \dots & \longrightarrow & S_{k+1}(Y, B) & \longrightarrow & S_k(Y, B) & \longrightarrow & S_{k-1}(Y, B) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

## 2 Omologia Singolare

$f_{\#}$  esiste, infatti:

$$\begin{array}{ccc} S_k(X) & \xrightarrow{f} & S_k(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_k(X)/S_k(A) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_k(Y)/S_k(B) \end{array}$$

$f_{\#}$  esiste perchè  $S_k(A) \rightarrow S_k(B)$  per la condizione  $f(A) \hookrightarrow B$ , il resto l'ho già verificato.

Inoltre so che  $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \xrightarrow{g} (Z, C)$ , allora  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$  e  $(X, A) \xrightarrow{\mathbb{I}_X}$  allora  $(\mathbb{I}_X)_{\#} = \mathbb{I}_{H_k(X, A)}$ .

Poi ho  $\delta$  omomorfismo di connessione  $\delta: H_{k+1}(X, A) \rightarrow H_k(X)$ , lo che:

$$0 \longrightarrow S_{\bullet}(A) \longrightarrow S_{\bullet}(X) \longrightarrow S_{\bullet}(X, A) \longrightarrow \dots$$

Esiste una successione lunga in omologia.

$$\dots \longrightarrow H_k(A) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow \dots$$

Mi rimangono da verificare l'invarianza omotopica e l'escissione. Ho già visto che  $H_k(P) = H_k(P, \emptyset) = 0$  per  $k \geq 1$  e  $P$  insieme formato da un solo punto, inoltre so che  $H_k(\coprod_{\alpha} X_{\alpha}) \cong \bigoplus_{\alpha} H_k(X_{\alpha})$

Quindi gli assiomi di Eilenberg e Steenrod non definiscono una teoria vuota ma c'è almeno una teoria a soddisfarli.

In futuro verificherò gli assiomi mancanti.

Sia  $X \neq \emptyset$  spazio topologico e  $p \in X$  punto, allora ho le applicazioni di inclusione  $i$  e la mappa costante  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} i: p &\rightarrow X \\ \epsilon: X &\rightarrow p \end{aligned}$$

Si ha che  $\epsilon \circ i = \mathbb{I}_p$  in quanto  $p \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\epsilon} p$ . Definisco (deriva dagli assiomi ponendo  $k = 0$ )  $\epsilon_{\#} H_0(X) \rightarrow H_0(p)$ ,  $\epsilon_{\#}$  è suriettiva perchè c'è  $i_{\#}: H_0(p) \rightarrow H_0(X)$ :

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\epsilon_{\#}) \longrightarrow H_0(X) \xrightarrow{\epsilon_{\#}} H_0(p) \longrightarrow 0$$

$\quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow$   
 $\quad \quad \quad i_{\#} \quad \quad \quad$

Inoltre per le proprietà funtoriali  $(\epsilon \circ i)_{\#} = (\mathbb{I}_p)_{\#} = \mathbb{I}_{H_0(p)}$  e  $(\epsilon \circ i)_{\#} = \epsilon_{\#} \circ i_{\#}$  quindi  $\epsilon_{\#} \circ i_{\#} = \mathbb{I}_{H_0(p)}$ . La successione spezza quindi  $H_0(X) \cong \text{Ker}(\epsilon_{\#}) \oplus H_0(p)$ . Per qualsiasi teoria omologia che soddisfa gli assiomi di Eilenberg e Steenrod, e quindi in particolare per l'omologia singolare relativa, si ha che  $H_0(X) \cong \text{Ker}(\epsilon_{\#}) \oplus H_0(p)$ .

Generalmente si chiama  $H_0(p)$  il **gruppo dei coefficienti** di una teoria omologica. Nell'omologia singolare relativa questo è  $\mathbb{Z}$ . Inoltre si definisce  $\text{Ker}(\epsilon_{\#}) = \tilde{H}_0(X)$  gruppo di omologia ridotta di ordine zero.

Cosa sono invece gli  $\tilde{H}_k(X)$ ? Vorrei che fossero i gruppi di omologia, così come nel solo nel caso dell'omologia singolare.

**Proposizione 2.7.3** *Infatti è così.*

**Dimostrazione:** Cibiuderer  $F: (X, A) \rightarrow (p, p)$  con:

$$F = \begin{cases} \epsilon_X: X \rightarrow p \\ \epsilon_A: A \rightarrow p \end{cases}$$

Posso fare:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\epsilon_X) \longrightarrow H_k(X) \xrightarrow{\epsilon_*} H_k(p) \longrightarrow 0$$

In generale:

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\epsilon_X) \longrightarrow H_k(X) \xrightarrow{\epsilon_*} H_k(p) \longrightarrow 0$$

Per  $k \geq 1$   $\text{Ker}(\epsilon_X) = H_k(X)$ , mentre per  $k = 0$   $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus H_0(p)$ , quindi:

$$\tilde{H}_k(X) = \text{Ker}(\epsilon_C) = \begin{cases} H_k(X) & \text{per } k \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus H_0(p) & \text{per } k = 0 \end{cases}$$

Questo lo posso fare anche nel caso di una coppia.

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(F_X) \longrightarrow H_k(X, A) \longrightarrow H_k(p, p) \longrightarrow 0$$

E si definisce  $\tilde{H}_k(X, A) = \text{Ker}(F_*)$ . Calcolo  $H_k(P, P)$  con  $P$  spazio formato da un solo punto in  $X$ . So che c'è una successione esatta lunga:

$$\dots \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow H_k(P) \longrightarrow H_k(P, P) \longrightarrow H_{k-1}(P) \longrightarrow \dots$$

La coppia è  $(P, P) = (X, A)$  quindi  $X = P$  e  $A = P$ . Supponendo  $k \geq 2$  la successione diventa:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_k(P, P) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Allora  $H_k(P, P) = 0$ . Mentre se  $k = 1$  allora:

$$\dots \rightarrow H_1(P) \rightarrow H_1(P) \rightarrow H_1(P, P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P, P) \rightarrow 0$$

Cioè:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_1(P, P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P) \rightarrow H_0(P, P) \rightarrow 0$$

Ma quindi:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ \dots \rightarrow 0 & \rightarrow 0 & \rightarrow H_1(P, P) & \longrightarrow & H_0(P) & \rightarrow H_0(P) & \longrightarrow H_0(P, P) \rightarrow 0 \\ & & \searrow & & \nearrow & \searrow & \end{array}$$

E quindi  $H_1(P, P) = H_0(P, P) = 0$ . □

**Corollario 2.7.4** Se  $X$  è uno spazio topologico contraibile allora  $\tilde{H}_k(X) = 0$ .

**Dimostrazione:** Se  $X$  è contraibile allora  $x \sim_H p$  cioè  $\exists f: X \rightarrow P$  e  $\exists g: P \rightarrow X$  continue tali che  $f \circ g \sim_H \mathbb{I}_P$  e  $g \circ f \sim_H \mathbb{I}_X$ , quindi  $f_* \circ g_* = \mathbb{I}_{H_k(P)}$  e  $g_* \circ f_* = \mathbb{I}_{H_k(X)}$  con  $f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(P)$  e  $g_*: H_k(P) \rightarrow H_k(X)$ , quindi  $f_*$  e  $g_*$  sono inversi, cioè:  $(f \circ g)_* = (\mathbb{I}_P)_*$  e  $(g \circ f)_* = (\mathbb{I}_X)_*$  per l'assioma dell'omotopia e per la funtorialità. Quindi:

$$H_k(P) \cong H_k(X) \cong \begin{cases} \tilde{H}_k(X) = 0 & \text{se } k \geq 1 \\ \tilde{H}_0(X) \oplus H_0(X) = H_0(X) & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

□ Un secondo importantissimo corollario è l'omologia delle sfere.

[MANCA SECONDA PARTE]

## 2.8 Omologia delle sfere

Considero  $\mathcal{S}^n$  con  $n \geq 1$ , ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

**Corollario 2.8.1**  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  se e solo se  $n = m$ .

**Dimostrazione:** Se  $n = m$  vale che  $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$  quindi in particolare  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  con la mappa identità. Assumo  $n \neq m$  e senza perdita di generalità pongo  $n > m$ .

Per assurdo  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ , quindi esiste un omomorfismo  $F: \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$ , quindi esiste anche l'omomorfismo inverso  $G: \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$ . Quindi esistono anche:

$$F_*: H_k \mathcal{S}^n \rightarrow H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_*: H_k \mathcal{S}^m \rightarrow H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma  $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$  e  $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$ , ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_* \circ G_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_* \circ F_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che  $F_*$  e  $G_*$  sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \quad \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni  $k$  in particolare vale per  $k = n$ , cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$  da cui  $\mathbb{Z} \cong 0$ , che è assurdo. □

**Corollario 2.8.2 (Invarianza topologica della dimensione)**  $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$  se e solo se  $n = m$ .

## 2 Omologia Singolare

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzando solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione:** Per assurdo esiste un omomorfismo  $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$  con  $n > m > 2$ . Con i vincoli imposti su  $m$  e  $n$  gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $f(p) \in \mathbb{R}^m$ , e restringendo  $f$  in modo da ottenere l'omomorfismo  $f': \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\}$ . Si sa inoltre che per  $s \geq 2$  vale che  $\mathbb{R}^s \setminus \{q\} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$ , infatti è sufficiente mandare a 0 il punto  $q$  con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{q\} &\rightarrow \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left( \vec{x}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare  $\mathbb{R}$  dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che  $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$ , da cui  $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$ . Ma l'omologia è invariante omotopica, cioè  $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$ , utilizzando il trucco di prima scelgo  $k = n - 1$  e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. □

**Corollario 2.8.3**  $\mathcal{S}^{n-1}$  non è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$  per  $n \geq 2$

**Dimostrazione:** Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1 \} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$$

Chiaramente esiste  $i: \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$ .

**Definizione 2.8.4** Uno spazio topologico  $Y$  si dice **retratto di deformazione** di un altro spazio topologico  $X$  tale che  $Y \hookrightarrow X$  se esiste una funzione continua  $r: X \rightarrow Y$  che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione  $i: Y \rightarrow X$ , cioè tale che soddisfa:

1.  $r: X \rightarrow Y$  continua
2.  $i \circ r \sim \mathbb{I}_X$
3.  $r \circ i = \mathbb{I}_Y$

Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.

Suppongo per assurdo che  $\mathcal{S}^{n-1}$  è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$ , cioè che esiste una retrazione  $r$ . Passando all'omologia:

$$\begin{aligned} i_*: H_k(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_k(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \\ (i \circ r)_* &= (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_* \text{ e } (r \circ i)_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_* \end{aligned}$$

## 2 Omologia Singolare

Quindi:

$$i_* \circ r_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero  $k = n - 1$ :

$$\begin{aligned} i_*: H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_{n-1}(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

Cioè:  $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Considero un generatore  $\alpha$  di  $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ , cioè tale che  $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$  allora  $i_*(\alpha) = 0$  quindi  $r_* \circ i_* = 0$ , ma  $(r \circ i)_* = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  quindi significherebbe  $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}(\alpha) = 0$ , cioè che  $\alpha = 0$ , che è assurdo perché  $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$ .  $\square$

**Teorema 2.8.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer)** Ogni funzione continua  $g: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$  con  $n \geq 2$  ammette almeno un punto fisso in  $\mathcal{D}^n$ , cioè:

$$\exists \vec{x}_0 \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

**Dimostrazione:** Per assurdo  $g$  non ammette punto fisso cioè esisto  $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$  tale che  $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$ . Sicuramente tuttavia  $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$ . Considero la retta  $l$  passante per  $\vec{x}$  e  $g(\vec{x})$ . Questa retta interseca il bordo di  $\mathcal{D}^n$  in due punti  $\{p_1, p_2\}$ :

$$l \cap \partial \mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{p_1, p_2\}$$

Definisco la mappa  $r: \mathcal{D}^n \rightarrow \partial \mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$  tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta  $l_{\vec{x}}$  che gli sta più vicino (infatti in  $\mathbb{R}^n$  è ben definita una nozione di distanza). La retta  $l_{\vec{x}}$  è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi  $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$ ) passa una e una sola retta.

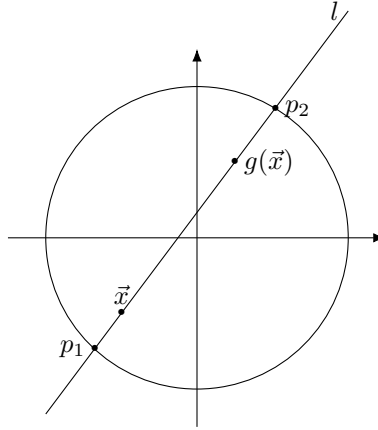


Figura 2.11: Schema per  $n = 2$

**Esercizio 5** Dimostrare che  $r$  è continua.



Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{array}{ccc} i: \mathcal{S}^{n-1} & \rightarrow & \mathcal{D}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array}$$

Se dimostro che  $r$  è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare  $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  e  $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$ . La prima uguaglianza è certamente vera perché se  $\vec{x} \in \partial \mathcal{D}^n$  allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a  $\vec{x}$  stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome  $\mathcal{D}^n$  è convesso è ben definita  $G(t, \vec{x}) = (1-t)\vec{x} + tr(\vec{x})$  con  $t \in [0, 1]$ . Questa è una buona omotopia in quanto  $\forall t, \vec{x}$ :

- $G$  è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{x}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{x}) = r(\vec{x})$

Quindi  $r$  è retrazione ma questo è assurdo. □

### 2.8.1 Teoria del grado

Considero  $H_n(\mathcal{S}^m)$ , so che  $H_n(\mathcal{S}^m) \cong \mathbb{Z}$ , cioè esiste una mappa  $f: \mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathcal{S}^m)$  tale che  $f(1) = \alpha$  con  $\alpha$   $n$ -ciclo che non è un bordo. In questo modo  $H_n(\mathcal{S}^m) = \langle \alpha \rangle$ . Considero  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua con  $n \geq 1$ , so che esiste  $\varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$ . Per  $n = 0$   $\varphi_*$  manda punti in punti, per  $n \geq 1$ : sia  $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$  allora  $c = p\alpha$  con  $p \in \mathbb{Z}$ :

$$\varphi_*(c) = \varphi_*(p\alpha) = \varphi_*\underbrace{(\alpha + \alpha + \alpha + \dots)}_{|p| \text{ volte}} = \underbrace{\varphi_*(\alpha) + \varphi_*(\alpha) + \dots}_{|p| \text{ volte}} = p\varphi_*(\alpha)$$

Ma  $\varphi_*(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$  quindi si deve poter scrivere come multiplo di  $\alpha$ :  $\varphi_*(\alpha) = d\alpha$  da cui:  $\varphi_*(c) = pd\alpha = dc$  con  $d \in \mathbb{Z}$ . Questo numero  $d$  viene fuori dall'immagine di un generatore, ma non dipende dalla scelta del generatore, infatti:

Sia  $\beta$  un altro generatore, siccome  $\alpha$  è un generatore si può scrivere  $\beta = m\alpha$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Pongo come notazione:

$$\varphi_*(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_*(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_*(\beta) = m\varphi_*(\alpha) = md(\alpha)\alpha$$

Da cui  $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$  cioè  $(d(\beta) - d(\alpha))\beta = 0$ , siccome questo vale per ogni  $\alpha$  e  $\beta$  allora  $d(\alpha) = d(\beta)$ .

**Definizione 2.8.6** Data un'applicazione  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua è possibile associargli in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) & \rightarrow & H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha & \mapsto & \deg(\varphi)\alpha \end{array}$$

Con  $\alpha$  generatore.

## 2 Omologia Singolare

Ad esempio per  $n = 1$  e  $p \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{S}^1 &\rightarrow \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^p \end{aligned}$$

Vale che  $\deg(\varphi) = p$ , infatti prendo un generatore di  $\mathcal{S}^1$ : [MANCA MANCA MANCA]

Voglio usare la teoria del grado per un'applicazione del teorema della palla pelosa.

**Proposizione 2.8.7** *Se  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  è la riflessione rispetto all'iperpiano  $x_0 = 0$ , cioè  $f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (-x_0, x_1, x_2, \dots)$  allora il grado di  $f$  è  $-1$ .*

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per induzione. Per  $n = 1$  [MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA]  $\square$

Ho  $\mathcal{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  spazio topologico con la topologia indotta.

Ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Ho che  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  induce  $f_*: H_n(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$  e ho definito il grado come:

Prendo  $\alpha$  tale che  $\langle \alpha \rangle = H_n(\mathcal{S}^n)$  con:

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{S}^n) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto 1 \end{aligned}$$

e  $f_*(\alpha) = \deg(f)\alpha$ . So che il grado è un invariante topologico per le sfere.

**Proposizione 2.8.8** *Siano  $f, g: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  mappe continue, allora  $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$ .*

**Dimostrazione:** Per la funtorialità  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  quindi:

$$(g \circ f)_*(\alpha) = (g_* \circ f_*)(\alpha) \Rightarrow g_*(f_*(\alpha)) = g_*(\deg(f)\alpha) = \deg(f)g_*(\alpha) = \deg(f) \deg(g)\alpha$$

Quindi:

$$\deg(f) \deg(g)\alpha = (g \circ f)_*(\alpha) = \deg(g \circ f)\alpha$$

Siccome  $\alpha$  è generatore:  $\deg(g \circ f) = \deg(f) \deg(g)$ .  $\square$

Voglio applicare questa proprietà alla composizione di riflessioni. Considero:

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{S}^n &\rightarrow \mathcal{S}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, -x_{n+1}) \end{aligned}$$

Questa è la riflessione rispetto al sottospazio  $x_{n+1} = 0$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , quindi  $\rho$  fissa su  $\mathcal{S}^n$  l'equatore  $\mathcal{S}^n \cap x_{n+1} = 0$ . Ho trovato che per  $n = 1$   $\deg(\rho) = -1$ , ora voglio continuare la dimostrazione per induzione.

Suppongo che il risultato sia vero per  $\mathcal{S}^k$  e  $\mathcal{S}^n$  con  $k < n$  mostro che è vero anche per  $\mathcal{S}^n$ .

In  $\mathcal{S}^n$  ho dei sottoinsiemi naturali:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \geq 0\} \\ \mathcal{D}_-^n &= \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \leq 0\} \end{aligned}$$

## 2 Omologia Singolare

Vale che  $\mathcal{D}_+^n \cap \mathcal{D}_-^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \leq 0 \} = \mathcal{S}^{n-1}$ . Ho dimostrato che  $\tilde{H}_p(\mathcal{S}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n)$  Lo uso [FIGURA]

Ora dimostro che  $H_n \mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1} \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ . Sia  $i: \mathcal{S}^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$  mappa di inclusione. Ho  $(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$  coppia, faccio la successione esatta lunga in omologia relativa: [FIGURA] Considero per  $p = n$  con  $n \geq 2$   $H_p(\mathcal{D}^n) = H_p(\mathcal{D}^{n-1}) = 0$  perchè contraibili. Quindi  $H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$  [MANCA MANCA]

Quindi il risultato finale è:

**Lemma 2.8.9** *Se  $\rho: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  è la riflessione rispetto a  $\{x_{n+1} = 0\}$  allora  $\deg(\rho) = -1$ .*

Perchè voglio fare la riflessione? Voglio studiare l'applicazione antipodale che è quella che scambia di segno tutte le componenti:

$$\begin{aligned} A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (-x_1, \dots, -x_n) \end{aligned}$$

Questa è continua e vale che  $A^2 = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$ . Definisco per  $n \geq 2$  la restrizione della trasformazione antipodale su  $\mathcal{S}^{n-1}$ :  $a = A|_{\mathcal{S}^{n-1}}$ , vale che  $a: \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow \mathcal{S}^{n-1}$ , infatti  $\text{Im}(a) = \mathcal{S}^{n-1}$ . Quanto vale  $\deg(a)$ ? Scrivo  $a$  come composizione di riflessioni:

$$a = \rho_n \circ \dots \circ \rho_1$$

Per il lemma appena dimostrato:

$$\deg(a) = \deg(\rho_n \circ \dots \circ \rho_1) = \deg(\rho_n) \deg(\rho_{n-1}) \dots \deg(\rho_1) = (-1)^n$$

Quindi  $\deg(a) = (-1)^n$  e perciò cambia se  $n$  è pari o dispari.

**Corollario 2.8.10** *La mappa antipodale non è omotopicamente equivalente all'identità su  $\mathcal{S}^n$  su  $n$  è pari.*

**Dimostrazione:** Se le due applicazioni fossero omotope varrebbe che  $a_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n})_*$  quindi:

$$\deg(a) = \deg(\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}) = (-1)^{n+1} = 1$$

Questo è vero solo se  $n+1$  è pari, ma se  $n$  è pari  $n+1$  non può esserlo. □

Ciò non dimostra che per  $n$  pari invece le due applicazioni sono omotope. Questa è una dimostrazione avanzata che richiede i gruppi di omotopia superiori con i quali si dimostra che se due applicazioni definite su  $\mathcal{S}^n$  hanno lo stesso grado allora sono omotope.

**Corollario 2.8.11** *Sia  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  una mappa continua con  $n$  pari, allora esiste almeno un punto  $\vec{x}_0 \in \mathcal{S}^n$  tale che  $f(\vec{x}_0) = \pm x_0$ .*

**Dimostrazione:** Per assurdo  $f(\vec{x}) \neq \pm \vec{x} \forall \vec{x} \in \mathcal{S}^n$ . Sia  $F: \mathcal{S}^n \times I \rightarrow \mathcal{S}^n$  con:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}}{\|tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}\|}$$

## 2 Omologia Singolare

$\forall \vec{x}, t$  vale che  $F(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}^n$ . La norma al denominatore non è mai nulla per ipotesi, infatti  $\|tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}\| = 0$  significa che  $tf(\vec{x}) = (1-t)\vec{x}$ , quindi se  $t = 0$  allora  $0 = -\vec{x}$  ma  $\vec{x} = 0 \notin \mathcal{S}^n$ , se  $t \neq 0$  allora  $f(\vec{x}) = \left(\frac{1-t}{t}\right)\vec{x}$ , ma  $\vec{x}, f(\vec{x}) \in \mathcal{S}^n$  quindi  $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| = 1$  e quindi  $1 = \left|\frac{1-t}{t}\right|$ , ma  $t \in (0, 1]$ , quindi non è possibile trovare  $t$ .

Inoltre  $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$  e  $F(\vec{x}, 1) = f(\vec{x})$  quindi  $F$  è una relazione di omotopia tra  $f$  e l'identità.

Mostro che  $f$  è anche omotopa all'applicazione antipodale, così per la transitività della relazione di omotopia trovo l'assurdo.

Si definisce  $G: \mathcal{S}^n \times I \rightarrow \mathcal{S}^n$ :

$$G(\vec{x}, t) = \frac{-t\vec{x} + (1-t)f(\vec{x})}{\| -t\vec{x} + (1-t)f(\vec{x}) \|}$$

Con i medesimi ragionamenti si trova che  $\forall \vec{x}, t$  vale che  $G(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}^n$ , e inoltre  $G(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$  e  $G(\vec{x}, 1) = -\vec{x}$  quindi  $G$  realizza l'omotopia con l'applicazione antipodale.  $\square$

## 3 Omologia cellulare

### 3.1 Complessi CW

Considero  $\mathcal{D}^n$ , vale che  $\partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ , considerato lo spazio quoziente  $X = \mathcal{D}^n / \partial\mathcal{D}^n$ , questo è il quoziente del disco per la relazione di equivalenza che fa collassare il bordo in un punto  $p$ . Si trova che  $X \simeq \mathcal{S}^n$ .

Posso fare questa costruzione: Definisco  $X^{(0)} = P$ , lo spazio formato da un solo punto e  $\varphi: \mathcal{S}^{n-1} \rightarrow X^{(0)}$ , posso definire:

$$X^{(1)} = X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n$$

Dove con  $\cup_{\varphi}$  si intende, con  $X, Y$  spazi topologici:

$$X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n = X^{(0)} \sqcup \mathcal{D}^n / p \sim \varphi(q) \quad \forall q \in \mathcal{S}^{n-1}$$

Questo si generalizza. Considero la proiezione al quoziente  $\pi: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  con  $\mathcal{S}^n = X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n$ .

**Definizione 3.1.1** Si definisce  $X$  un **CW-complesso** di tipo finito, dove  $C$  singifica closure finite e  $W$  weak topology è il dato dei seguenti oggetti topologici:

1. Un insieme finito  $X^{(0)} = \{p_1, \dots, p_n\}$  detto **0-scheletro**
2. Il  **$k$ -scheletro**  $X^{(k)} = X^{(k-1)} \cup_{\varphi} \bigcup_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^k$  con  $\mathcal{D}_{\alpha_1}^k, \dots, \mathcal{D}_{\alpha_j}^k$  numero finito di dischi  $k$ -dimensionali. Gli elementi  $\mathcal{D}_{\alpha}^k$  sono detti **celle** (o cella chiusa), mentre il loro interno è detto cella aperta.  $\psi: \bigcup_{\alpha} \partial\mathcal{D}_{\alpha}^k \rightarrow X^{(k-1)}$  continua fornisce le regole di attaccamento per i dischi.
3. Esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} =: X$

Si dimostra che in generale la cella chiusa non è omeomorfa all'immagine, mentre la cella aperta lo è.

In generale uno spazio ha numerose strutture di CW complesso.

La topologia è detta debole perchè la topologia di unione disgiunta per tutti i  $k$ -scheletri, e questo è la topologia più debole di tutte. In questa topologia un insieme è aperto in  $X$  se e solo se è aperto la sua intersezione con tutti gli  $X^{(i)}$  è aperta.

**Esempio 3.1.2 (Sfere)**  $\mathcal{S}^n$  per  $n \geq 1$  ammette una struttura di CW complesso: sia  $X^{(0)} = \{p\}$  con  $p \in \mathcal{S}^n$  e sia  $\varphi: \partial\mathcal{D}^n \rightarrow \{p\}$  mappa costante, allora  $\mathcal{S}^n = X^{(0)} \cup_{\varphi} \mathcal{D}^n = \mathcal{D}^n / \partial\mathcal{D}^n$ , cioè una 0-cella e una  $n$ -cella.

### 3 Omologia cellulare

Alternativamente una seconda possibile struttura è: considero l'equatore di  $S^n$  che è uno  $S^{n-1}$  su questo attacco due dischi che sono calotta superiore e inferiore.  $X^{(0)} = \{p_1, p_2\}$  e  $X^{(1)} = \mathcal{D}_1^1 \cup \mathcal{D}_2^1$ , quindi le mappe sono:

$$\begin{aligned}\varphi_1: \partial \mathcal{D}_1^1 &\rightarrow X^{(0)} & \text{cioè } \varphi_1: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p_1, p_2\} \\ \varphi_1: \partial \mathcal{D}_2^1 &\rightarrow X^{(0)} & \text{cioè } \varphi_2: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p_1, p_2\}\end{aligned}$$

Quindi deve essere:

$$\varphi_1(1) = p_1 \quad \varphi_1(-1) = p_2 \quad \varphi_2(1) = p_2 \quad \varphi_2(-1) = p_1$$

A questo punto  $X^{(1)} \cup_{\varphi} (\mathcal{D}_1^1 \cup \mathcal{D}_2^1) = S^1$  e si può aggiungere  $\mathcal{D}^2$ , cioè  $X^{(2)} = \mathcal{D}_1^2 \cup \mathcal{D}_2^2$ , ora:

$$\begin{aligned}\psi_1: \partial \mathcal{D}_1^2 &\rightarrow X^{(1)} \\ \psi_1: \partial \mathcal{D}_2^2 &\rightarrow X^{(1)}\end{aligned}$$

Cioè  $\psi_j: S^1 \rightarrow X^{(1)}$ , quindi  $\psi_j: S^1 \rightarrow S^1$  e quindi si può prendere l'identità. Si ottiene così una 2-sfera. A questo punto si può procedere ad libitum.

**Esempio 3.1.3 (Toro)** Considerato un toro  $T = S^1 \times S^1$  una possibile costruzione si basa sul prendere come punti  $p$  i vertici del quadrato dal quale si fanno le identificazioni per ottenere il toro.  $X^{(0)} = \{p\}$ , ho quindi due lacci. Quindi:

$$X^{(1)} = (\mathcal{D}_1^1 \cup \mathcal{D}_2^1) \cup_{\varphi} X^{(0)}$$

Le mappe:

$$\begin{aligned}\varphi_1: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p\} \\ \varphi_2: \{-1, +1\} &\rightarrow \{p\}\end{aligned}$$

La cella è  $X^{(2)} = (\mathcal{D}^2 \cup_{\psi} X^{(1)})$  con  $\psi: S^1 \rightarrow X^{(1)}$  [MANCA IL SECONDO MODO]

**Definizione 3.1.4** Si definisce lo **spazio proiettivo reale**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$  con  $\vec{x} \sim \vec{y}$  se e solo se  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  sono multipli, cioè se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tale che  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ .

Si dimostra che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n / H$  con  $H = \{\mathbb{I}_{S^n}, a_{S^n}\}$ .

Si trova che:

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = S^1 = \mathbb{R} \cup \infty$
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^2$  Ho  $S^2 / H$ , l'emisfero sud della sfera si identifica con quello nord per l'applicazione di antipodalità.  $\varphi = a|_{S^1}$  e  $S^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  e  $S^1 = \partial \mathcal{D}^2$ , quindi:

$$\begin{aligned}\varphi: S^1 &\rightarrow S^1 \\ (x, y) &\mapsto (-x, -y)\end{aligned}$$

### 3 Omologia cellulare

- Se considero  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^3$  con:

$$\varphi: \partial \mathcal{D}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

cioè il passaggio al quoziente:

$$\varphi: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^1 / H$$

**Esempio 3.1.5 (Spazi proiettivi)** Se  $X^{(k)} = \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \cup_{\varphi} \mathcal{D}^{k+1}$  con

$$\varphi: \partial \mathcal{D}^{k+1} \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$$

Cioè:

$$\varphi: \mathcal{S}^k \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$$

Cioè scelgo  $\varphi$  come la proiezione sul quoziente da  $\mathcal{S}^k$  a  $\mathbb{P}^k(\mathbb{R}) = \mathcal{S}^{k+1} / H$ , questo è uno spazio compatto.  $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$  è uno spazio di Hausdorff, voglio mostrare che  $X^{(k+1)} \cong \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ . Cerco un'applicazione continua biunivoca e chiusa  $\Phi: X^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ , cioè un omeomorfismo. Ho il digramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{D}^{k+1} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R}) \\ \downarrow & \nearrow \Phi & \\ X^{(k+1)} & & \end{array}$$

**Esercizio 6** Dimostrare che  $\eta$  è continua e gode di tutte le buone proprietà.

So che  $i: \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$  (è un iperpiano all'infinito), quindi posso usare l'inclusione.

Devo trovare una mappa  $j: \mathcal{D}^{k+1} \rightarrow \mathbb{P}^{k+1}(\mathbb{R})$ .  $i$  è ovvia:  $i([z_0, \dots, z_k]) = [z_0, \dots, z_k, 0]$ , mentre  $j$ :

$$j: [z_0, \dots, z_k] \mapsto \left[ z_0, \dots, z_{k+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^k z_i^2} \right]$$

Siccome  $\sum_{i=1}^k z_i^2 \leq 1$  l'applicazione è ben definita, quindi  $\eta = (i, j)$ .

## 3.2 Congettura di Poincaré

Ho calcolato l'omologia di una sfera generica:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

In particolare ho  $H_0(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  ed è generato dalla classe di omologia di un punto qualsiasi, mentre  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  è generato dalla classe di omologia di un  $n$ -simpleso singolare  $\tau_n: \Delta_n \rightarrow \mathcal{S}^n$ .

Per  $n = 2$  ho  $\mathcal{S}^2$  è una 2-varietà topologica compatta e connessa il cui gruppo fondamentale è banale e i gruppi di omologia noti.

### 3 Omologia cellulare

**Proposizione 3.2.1** Se  $\mathcal{M}$  è una 2-varietà topologica compatta e connessa tale che  $\forall k \geq 2$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{S}^2)$  allora  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{S}^2$ .

**Dimostrazione:** Esiste un teorema di classificazione delle varietà topologiche di dimensione 2 compatte e connesse, questo dice che  $\mathcal{M} \simeq V_g$  oppure  $\mathcal{M} \simeq U_n$ . Dove:

$$V_g = \begin{cases} \mathcal{S}^2 & \text{se } g = 0 \\ P_{4g}/\sim & \text{se } g \geq 1 \end{cases}$$

Dove  $\sim$  è l'identificazione  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , come ad esempio il toro, mentre:

$$U_n = \begin{cases} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \text{se } n = 0 \\ P_{2g}/\sim & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Con  $\sim$  è l'identificazione  $a_1 a_1 \dots a_n a_n$ , come ad esempio la bottiglia di Klein. Tutti i  $V_g$  non sono omeomorfi tra loro, e similmente gli  $U_n$ , e neppure gli  $U_n$  e i  $V_g$  sono vicendevolmente omeomorfi in quanto i primi sono non orientabili, mentre i secondi sì.

Ho calcolato:

$$H_1(V_g) \cong \begin{cases} H_1(\mathcal{S}^2) & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{se } g \geq 1 \end{cases}$$

$V_g$  con  $g \geq 1$  non hanno lo stesso tipo di omologia di  $\mathcal{S}^2$  perchè  $H_1(V_g)$  è non banale, mentre il gruppo fondamentale di  $\mathcal{S}^2$  lo è. Similmente  $H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ , che non è banale, e  $H_1(U_n) \cong \text{Ab}(\pi_1(U_n))$ , ma per Seifert-van Kampen:

$$\pi_1(U_n) = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \dots a_n^2 = 1 \rangle \Rightarrow \text{Ab}(\pi_1(U_n)) = \langle a_1, \dots, a_n, c = a_1 \dots a_n \mid a_1^2 \dots a_n^2 = 1 \rangle = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{n-1}$$

Dove  $\mathbb{Z}_2$  viene dal fatto che abelianizzando  $a_1^2 \dots a_n^2 = (a_1 \dots a_n)^2 = 1$  quindi  $c = \pm 1$ , mentre  $\mathbb{Z}^{n-1}$  è il gruppo libero generato dai rimanenti. Questo non è banale, quindi l'unico spazio possibile è proprio  $\mathcal{S}^2$ .  $\square$

Cosa si può invece dire su  $\mathcal{S}^3$ ? Vale la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.2** Se  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà topologica compatta e connessa tale che  $\forall k \geq 3$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{S}^3)$  allora non si può concludere che  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{S}^3$ .

**Dimostrazione:** Costruisco un controesempio, noto come **spazio dodecaedrico di Poincaré**, o anche spazio a omologia razionale. Costruisco  $P$  3-varietà topologica compatta e connessa con lo stesso tipo di omologia di una 3-sfera ma non omeomorfa a  $\mathcal{S}^3$  in quanto il gruppo fondamentale è finito non abeliano di ordine 120. Parto da  $\mathcal{S}^3$ , posso scrivere:

$$\mathcal{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \quad \mathcal{S}^3 = \{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \}$$

Infatti  $z_0 = x + iy$  e  $z_1 = t + iw$  quindi  $|z_0|^2 = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$  e  $|z_1|^2 = (t + iw)(t - iw) = t^2 + w^2$  e quindi ottengo:

$$\mathcal{S}^3 = \{ (x, y, t, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + t^2 + w^2 = 1 \}$$



### 3 Omologia cellulare

Così come  $\mathcal{S}^1$  ha una struttura di gruppo  $U(1)$  è possibile strutturare  $\mathcal{S}^3$  come gruppo  $SU(2)$ :

$$SU(2) = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1, AA^\dagger = \mathbb{I}_2 \}$$

Quindi  $SU(2) \subseteq \mathbb{C}^4$ , si dimostra che  $A \in SU(2)$  se e solo se è della forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta^\star \\ \beta & \alpha^\star \end{pmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ e } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Quello che sto dicendo è che i vettori in  $\mathbb{C}^2$   $(\alpha, \beta)$  e  $(-\beta^\star, \alpha^\star)$  sono normalizzati e sono tra di loro ortogonali.

Si costruisce immediatamente la corrispondenza biunivoca tra  $SU(2)$  e  $\mathcal{S}^3$ :

$$\begin{aligned} SU(2) &\leftrightarrow \mathcal{S}^3 \\ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^\star \\ \beta & \alpha^\star \end{pmatrix} &\leftrightarrow (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

In questo modo si può definire un prodotto su  $\mathcal{S}^3$  rappresentando  $x, y, t, w$  come numeri complessi e passando alla controparte matriciale, dove il prodotto è definito naturalmente come prodotto riga per colonna, quindi una volta svolto il prodotto si torna alla notazione a quattro reali. A questo punto è triviale trovare l'identità e l'elemento inverso che permettono di dare a  $\mathcal{S}^3$  la struttura di gruppo.

$SU(2)$  può essere visto come spazio topologico con topologia indotta da  $\mathbb{C}^4$ , in questo senso  $SU(2)$  e  $\mathcal{S}^3$  sono sia isomorfi come gruppi che omeomorfi come spazi topologici.

La costruzione dello spazio dodecaedrico si basa sulle isometrie del dodecaedro  $D_{12}$ , questo è un solido regolare con 12 facce, 30 spigoli e 20 vertici. Il gruppo di isometrie del dodecaedro, cioè:

$$\text{Isom}(D_{12}) = \{ g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid g \text{ regolare e } g(D_{12}) = D_{12} \}$$

Questo gruppo si può vedere come:

$$\text{Isom}(D_{12}) \cong A_5 \times \mathbb{Z}_2$$

Dove  $A_5$  è un sottogruppo di  $\text{Isom}(D_{12})$  ed è il gruppo alterno (cioè il gruppo delle permutazioni pari) su 5 elementi e quindi ha ordine 60. Le 60 trasformazioni che sono in  $A_5$  sono l'identità, 24 rotazioni di  $\frac{2}{5}\pi$  attorno agli assi per i centri di facce opposti, 20 rotazioni di  $\frac{2}{3}\pi$  attorno agli assi per vertici opposti e 15 rotazioni di  $\pi$  attorno agli assi per i punti medi di spigoli opposti.  $\mathbb{Z}_2$  invece è dovuto all'applicazione antipodale che è  $(x, y, z) \mapsto (z, y, z)$ .  $A_5$  è un sottogruppo finito di  $SO(3)$  che sono le rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  attorno a una retta passante per l'origine, cioè:

$$SO(3) = \{ R \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det R = 1, R^T R = \mathbb{I}_3 \}$$

Per passare da  $SO(3)$  a  $\mathcal{S}^3$  utilizzo la **rappresentazione spinoriale** (questo mi permette di passare dal dodecaedro che è tridimensionale alla 3-sfera). Sia  $\rho$  una rappresentazione di  $SU(2)$ , cioè un omomorfismo:

$$\rho: \mathcal{S}^3 = SU(2) \rightarrow GL(V)$$

### 3 Omologia cellulare

Dove  $V$  è uno spazio vettoriale di dimensione 3, quindi  $V \cong \mathbb{R}^3$ , scelgo lo spazio delle matrici antihermitiane a traccia nulla:

$$V = \{ H \in M_2(\mathbb{C}) \mid H + H^\dagger = 0, \operatorname{tr} H = 0 \}$$

Si trova che  $V$  è generato da:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Perchè  $\rho$  sia una rappresentazione dovrei verificare:

1.  $\rho(T)$  lineare
2.  $\rho(T)(H) \in V$
3.  $\rho$  omomorfismo
4.  $\rho(T)$  invertibile

Verifico ad esempo che  $\rho(T)(H) \in V$ :

$$\begin{aligned} THT^\dagger + TH^\dagger T^\dagger = 0 &\iff T(H + H^\dagger)T^\dagger = 0 \iff H \in V \\ \operatorname{tr}(THT^\dagger) &= \operatorname{tr}(THT^{-1}) \stackrel{\text{ciclicità}}{=} \operatorname{tr}(H) = 0 \iff H \in V \end{aligned}$$

Ho quindi  $\rho: \mathcal{S}^3 \rightarrow \operatorname{GL}(V)$ , vorrei cercare di restringere la questione a  $O(V)$  al posto di  $\operatorname{GL}(V)$ .

Per parlare di isometria bisogna prima definire un prodotto scalare definito positivo, e una possibile forma quadratica naturale è in questo caso il determinante, infatti se  $H \in V$  allora:

$$H = \begin{pmatrix} ia & c + ib \\ -c + ib & -ia \end{pmatrix}$$

Con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , infatti  $\det H = a^2 + b^2 + c^2$  che è il consueto prodotto scalare in  $\mathbb{R}^3$ . In questo modo  $V$  diventa uno spazio euclideo con prodotto scalare  $q = \det$ .

Mi chiedo  $\rho(T): V \rightarrow V$  è isometria? Questo è vero se  $q(\rho(T)(H)) = q(H)$  cioè se  $\det(THT^\dagger) = \det H$ , ma per Binet questo equivale a  $\det T \det H \det T^\dagger = \det H$ , utilizzando il fatto che il determinante di una matrice è un numero complesso e quindi commuta questo equivale a  $\det T \det T^\dagger \det H = \det H$ , sempre per Binet  $\det(TT^\dagger) \det H = \det H$ , ma per ipotesi  $TT^\dagger = \mathbb{I}$  quindi effettivamente  $\rho(T)$  è isometria, perciò:

$$\rho: \mathcal{S}^3 \rightarrow O_3(V)$$

**Esercizio 7** Verificare che  $\rho$  è continuo come applicazione tra spazi topologici equipaggiando  $O_3(V)$  con la topologia indotta da  $\mathbb{R}^9$ .

### 3 Omologia cellulare

Essendo  $\rho$  continua manda compatti in compatti e connessi in connessi, quindi  $\rho(\mathcal{S}^3 = \text{SU}(2))$  è connesso in  $\text{O}_3(V)$ . Ma  $\text{O}_3(V)$  non è connesso, e anzi è formato da due componenti connesse, una è  $\text{SO}(3)$ , l'altra è  $\text{SO}(3)$  moltiplicata per una qualunque matrice di determinante  $-1$ . Siccome  $\rho$  è omomorfismo  $\rho(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ , quindi  $\rho(\mathcal{S}^3) = \text{SO}(3)$ , in questo modo rappresento la 3-sfera come rotazioni in  $\mathbb{R}^3$ . Si dimostra che  $\rho$  è suriettiva e  $\text{Ker}(\rho) = \{ (1, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0) \}$  elementi che corrispondono a  $\mathbb{I}$  e  $-\mathbb{I}$ .

Quindi come gruppi:

$$\mathcal{S}^3 / \text{Ker}(\rho) \cong \text{SO}(3)$$

Ad una rotazione in  $\mathbb{R}^3$  corrispondono due punti sulla 3-sfera che sono uno l'antipodale dell'altro.

Ora ho  $A_5 \subseteq \text{SO}(3)$  definisco  $G = \{ T \in \mathcal{S}^3 \mid \rho(T) \in A_5 \}$ , cioè sono tutti i punti della sfera a cui corrispondono le rotazioni in  $A_5$ .  $G$  è un gruppo, infatti se  $T, S \in G$  allora  $\rho(T), \rho(S) \in A_5$  e  $\rho(TS) = \rho(T)\rho(S) \in A_5$  in quanto  $A_5$  gruppo. Inoltre  $\mathbb{I} \in G$  in quanto  $\rho(\mathbb{I}) \in A_5$ .

Definisco  $\varphi = \rho|_G$ , per costruzione  $\varphi: G \rightarrow A$  ed è suriettiva. Inoltre  $\text{Ker}(\varphi) = \{ T \in G \mid \varphi(T) = \mathbb{I} \}$ , ma  $\varphi(T) = \rho(T)$ , quindi  $T = \pm\mathbb{I}$ , cioè  $\text{Ker}(\varphi) = \{ -\mathbb{I}, +\mathbb{I} \}$ . Ho perciò la successione esatta di gruppi:

$$\mathbb{I} \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{I}$$

Quindi  $A = G / \text{Ker}(\varphi)$ .  $G \subseteq \mathcal{S}^3$  e ha ordine 120, inoltre  $\text{Ker}(\varphi)$  è normale in  $G$ . Quello che si trova è  $G \simeq A_5 \times \text{Ker}(\varphi)$ . Questo si verifica formalmente, ma lo si intuisce per il fatto che sostanzialmente  $G$  è formato da  $(A, +\mathbb{I})$  e  $(A, -\mathbb{I})$ .

A questo punto posso definire l'azione del gruppo su  $\mathcal{S}^3$ :

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{S}^3 &\rightarrow \mathcal{S}^3 \\ (g, x) &\rightarrow gx \end{aligned}$$

A questo punto è sensato fare  $\pi: \mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^3 / G$ . □

Vale tuttavia il seguente risultato, dimostrato da Perelman nel 2004, noto come congettura di Poincaré:

**Proposizione 3.2.3 (Congettura di Poincaré)** *Se  $\mathcal{M}$  è una 3-varietà topologica compatta, connessa e semplicemente connessa tale che  $\forall k \geq 3$   $H_k(\mathcal{M}) \cong H_k(\mathcal{S}^3)$  allora  $\mathcal{M} \simeq \mathcal{S}^3$ .*

Questo mostra che il gruppo fondamentale è uno strumento più fine dei gruppi di omologia.

# Indice analitico

- 0-scheletro, 52
- $\mathcal{R}$ -modulo, 4
- $\mathbb{Z}$ -modulo libero, 5
- $k$ -catene singolari, 16
- $k$ -ciclo, 20
- $k$ -scheletro, 52
- $k$ -simplesso singolare, 15
  
- Anello, 4
- Anello commutativo, 4
- Anello unitario, 4
- Arco, 11
  
- Bordo, 18
  
- Cammino composto, 9
- Campo, 4
- Cella, 52
- Complesso di moduli, 6
- Complesso di moduli esatto, 6
- Coordinate baricentrali, 14
- CW-complesso, 52
  
- Dimensione di una varietà topologica, 10
  
- Eilenberg
  - vedi* Teoria omologica, 41
- Elementi omologhi, 20
  
- Genere, 10
- Giunzione
  - vedi* Cammino composto, 9
- Grado, 22
- Grado di una sfera, 48
- Gruppi di omotopia superiore, 12
- Gruppo dei coefficienti, 43
- Gruppo derivato, 23
  
- Gruppo fondamentale, 8, 12
- Gruppo generato, 5
  
- Immagine, 5
- Inclusione, 13
- Insieme compatto, 7
- Insieme convesso, 18
- Insiemi aperti, 7
- Inviluppo convesso, 18
  
- Laccio, 7
  
- Mappa tra complessi, 31
- Modulo di omologia, 6
- Modulo quoziente, 6
  
- Nucleo, 5
  
- Omeomorfismo, 7
- Omologia singolare della coppia
  - vedi* Omologia singolare relativa, 36
- Omologia singolare relativa, 36
- Omologia singolare ridotta, 38
- Omomorfismo, 5
- Omomorfismo di connessione, 33, 41
- Omotopia
  - vedi* Relazione di omotopia, 8
- Operatore faccia, 17
  
- Rango di gruppo abeliano, 5
- Rappresentazione spinoriale di  $SO(3)$ , 56
- Relazione di omotopia, 8
- Retratto di deformazione, 46
- Retrazione, 46
- Ricoprimento, 7
  
- Semplicemente connesso, 9

## *Indice analitico*

Sezione dell'omomorfismo, 37  
Simpleso standard, 14  
Somma topologica, 42  
Spazio a omologia razionale  
    *vedi* Spazio dodecaedrico, 55  
Spazio connesso, 7  
Spazio connesso per archi, 11  
Spazio contraibile, 9  
Spazio dodecaedrico, 55  
Spazio proiettivo reale, 53  
Spazio topologico, 6  
Spazio topologico puntato, 8  
Steendord  
    *vedi* Teoria omologica, 41  
Successione esatta corta, 31, 32  
Successione spezza, 36, 37  
  
Teorema del punto fisso, 47  
Teorema di Hurewicz, 26  
Teorema di Seifert–van Kampen, 10  
Teorema fondamentale degli omomorfismi,  
    5  
Teoria omologica, 41  
Topologia, 6  
Topologia dell'unione disgiunta, 42  
Topologia discreta, 7  
Topologia indotta, 7  
  
Varietà topologica, 10