Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. Poincarè

Professore:
Gilberto Bini

Scriba:
Gabriele Bozzola

Indice

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 1: 29 Settembre

Agomenti: General introduction. Homology of a complex. Singular homology.

1 Introduzione

1.1 Richiami di algebra

Definitione 1.1 *Un* ***anello*** *è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro[1]) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

Definitione 1.2 *Un anello si dice* ***anello commutativo*** *se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.*

Definitione 1.3 *Un* ***campo*** *è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.*

Definitione 1.4 *Sia $\mathcal{R}$ un anello commutativo si definisce l'* ***$\mathcal{R}$-modulo*** *un gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in $\mathcal{R}$ tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.5 *Se $\mathcal{R}$ è un campo allora l'$\mathcal{R}$-modulo è uno spazio vettoriale.*

Sostanzialmente la nozione di $\mathcal{R}$-modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

Osservazione 1.6 *Ogni gruppo abeliano $\mathcal{G}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo in modo univoco, cioè $\mathcal{G}$ è un gruppo abeliano se e solo e è uno $\mathbb{Z}$-modulo.*

Dimostrazione: Sia $x \in \mathcal{G}$ si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento $n \in \mathbb{Z}$ come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{x + x + x + \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

[1] La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verfica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfta le giuste proprietà perchè la coppia $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sia uno $\mathbb{Z}$-modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di $\mathbb{Z}$: $nx = (1+1+1+1+\dots)x = x+x+x\dots,$ quindi quella definita è l'unica possibile. ∎

Definitione 1.7 *Siano $(X, \cdot)$ e $(Y, \star)$ due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè:*

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.8 *Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.*

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

Definitione 1.9 *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :*

$$\operatorname{Ker}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \operatorname{Im}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\}$$

Osservazione 1.10 $\operatorname{Ker}(\varphi)$ *e* $\operatorname{Im}(\varphi)$ *sono $\mathcal{R}$-sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ che posseggono la struttura di $\mathcal{R}$-modulo.*

Se M_i sono $\mathcal{R}$-moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

Proposizione 1.11 *Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora* $\operatorname{Im}(\varphi_1) \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi_2)$.

Dimostrazione: Se $u \in \operatorname{Im}(\varphi_2)$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ per ipotesi, quindi $u \in \operatorname{Ker}(\varphi_2)$. ∎

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

Definitione 1.12 *Siano $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-modulo e $\mathcal{N}$ un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$ e definito da:*

$$\mathcal{M}/_{\mathcal{N}} := \mathcal{M}/_{\sim} \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove $\mathcal{M}/_{\sim}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ equipaggiate con operazioni indotte dall'$\mathcal{R}$-modulo, cioè se $[u], [w] \in \mathcal{M}/_{\sim}$ e $a \in \mathcal{R}$:

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di ${}^{\mathcal{M}}\!/_{\mathcal{N}}$ *sono le classi di equivalenza* $[m] = \{\, m + n \mid n \in \mathcal{N} \,\}$.

Siccome $\mathrm{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$^{\mathrm{Ker}(\varphi_2)}\!/_{\mathrm{Im}(\varphi_1)}$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.

A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$, dato che l'unica classe di equivalenza presente è $[0]$ significa che $\forall m \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)\ \exists n \in \mathrm{Im}(\varphi_2)$ tale che $m - n = 0$, cioè m e n coincidono e quindi $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.

2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(()\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni φ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattazza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

Definitione 1.13 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* φ_1 *e* φ_2.

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}_\bullet$ non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definitione 1.14 *La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *è detta* ***spazio topologico*** *(generalmente si omette la* $\mathcal{T}$*) se* $\mathcal{T}$ *è una topologia, cioè se è una collezione di insiemi di* X *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $A \cap B \in \mathcal{T}$ *se* $A, B \in \mathcal{T}$

Gli elementi di $\mathcal{T}$ *sono detti aperti.*

Definitione 1.15 *Una mappa tra spazi topologici è detta* ***omeomorfismo*** *se è continua e ammette inverso continuo, cioè se è una mappa uno a uno. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo* $\simeq$.

Siccome gli omomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

1.2 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

Definitione 1.16 *Un* ***arco*** *in uno spazio topologico X tra i punti $x_0 \in X$ e $y_0 \in X$ è una funzione continua da $I = [0,1]$ a X tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y_0$. Si dice che l'arco parte da x_0 e finisce in y_0.*

Definitione 1.17 *Uno spazio topologico X è* ***connesso per archi*** *se per ogni coppia di punto $x, y \in X$ esiste un arco che parte da x e termina in y.*

Proposizione 1.18 *Se $f : X \to Y$ è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se X è connesso per archi allora Y è connesso per archi. Questo vale in particolare se f è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

Dimostrazione: Siano y_0, y_1 due punti di Y. La funzione f è suriettiva, e dunque esistono x_0 e x_1 in X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Dato che X è connesso, esiste un cammino $\alpha : [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo α con f: $f \circ \alpha : [0,1] \to X \to Y$ è un cammino continuo che parte da y_0 e arriva a y_1. ∎

Si sa inoltre che:

Proposizione 1.19 *$\mathbb{R}^n$ è connesso per archi $\forall n \in \mathbb{N}$.*

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta togliere un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso per archi mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

Proposizione 1.20 *Se $f : X \to Y$ è omeomorfismo tra spazi topologici allora $f|_U : U \to f(U)$ è omeomorfismo per ogni $U \subseteq X$.*

Nel caso considerato $U = x_0$, siccome ho trovato un U per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo f non può essere omeomorfismo. Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$:

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{ f(p) \}$$

Ma: $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa che manda $\underline{x} \mapsto \left(||\underline{x}||, \frac{\underline{x}}{||\underline{x}||} \right)$. Ma quindi il gruppo fondamentale deve essere isomorfo: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = \{ 1 \}$ quindi non possono essere isomorfi. ∎

Ho quindi dedotto proprietà geometriche a partire da considerazioni algebriche.

Definitione 1.21 *Si definisce il* ***gruppo fondamentale*** *di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \}}\big/_{\sim}$$

e $\sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ tale che $G(z,0) = g_1(z), G(z,1) = g_2(z), G(1,t) = x_o$.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione: Come nel caso precedente tolgo q da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^3$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è posisbile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definitione 1.22 *Si definiscono i* ***gruppi di omotopia superiore*** *di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^k \to X \mid g(p_0) = x_0, p_o \in \mathcal{S}^k \}}\big/_{\sim}$$

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq 1$

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via...

1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. Ci sono varie possibilità:

- Omologia simpliciale
- Omologia cellulare
- Omologia singolare
- Omologia persistente[2]

Ma cosa è l'omologia?

Definitione 1.23 *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il* ***simplesso standard*** *Δ_k l'insieme:*

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \quad 0 \leq x_i \leq 1 \ e \ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

[2]Questa ha numerose applicazioni pratiche.

Osservazione 1.24 *Alcuni esempi sono:*

- Δ_0 *è un punto.*
- Δ_1 *è un segmento omeomorfo a* $[0, 1]$.

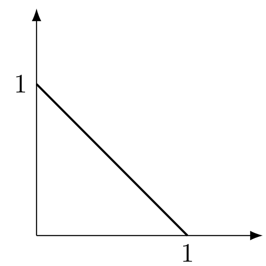

Figura 1: 1-Simplesso standard

Definitione 1.25 *Dato uno spazio topologico* X *si definisce il* k***-simplesso singolare*** *in* X *come un'applicazione continua* $g : \Delta_k \to X$*.*

Spesso conviene identificare il k-simplesso con la sua immagine in X. In quesot modo uno 0-simplesso è un punto in X, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplesso deforma è detto singolare.

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S.$ è il compesso, cioè: $\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k() \to S_{k-1} \to \cdots \to S_0(X)$, dove

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:}\\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k - \text{simplessi singolari di } X\}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate k**-catene singolari**.

Ad esempio: Se $k = 0$ $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ p_i \in X \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k, queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un **arco**.

Definitione 1.26 *Uno spazio topologico X si dice* ***connesso per archi*** *se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale x e punto finale y.*

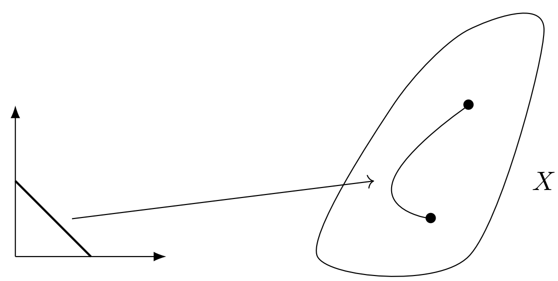

Figura 2: 1-Simplesso singolare

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco.

Definitione 1.27 *Sia Δ_k un k-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore* ***faccia*** *come la mappa ${F_i}^k$ da Δ_{k-1} a Δ_k tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k.*

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

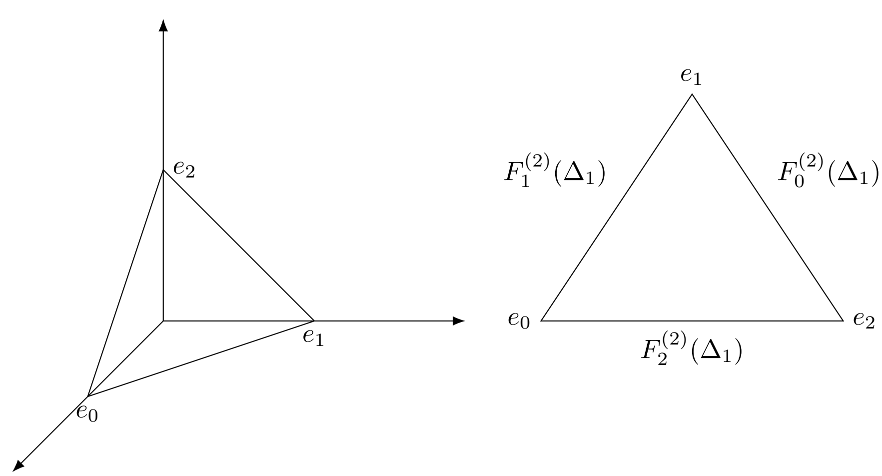

Figura 3: Azione dell'operatore faccia

[FIGURA, CONSIDERAZIONI]

Esercizio 1 *Dimostrare che se $[\cdot,\cdot]$ indica l'inviluppo convesso allora:*

1. *Per $j > i$ vale che ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_k]$.*
2. *Per $j \leq i$ vale che ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, e_j, \dots, e_{i+1}, \dots, e_k]$.*

Dato un k-simplesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} = \sigma \circ {F_i}^k$.

[FIGURA]

Definitione 1.28 *Si definisce il **bordo** di un k-simplesso singolare come $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma^{(i)}$.*

Per $k = 1$ $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ infatti $\sigma^0 = \sigma \circ {F_0}^1 = \sigma(1) = p_1$ e $\sigma^0 = \sigma \circ {F_1}^1 = \sigma(0) = p_0$.[3]

Allora definisco $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ infatti per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$.

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) = \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g =$$

$$= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right)$$

■

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} =$. Spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$.

Dimostrazione: Se σ è un k-complesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) \qquad =$$

$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^{k} (-)^i (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) \circ {F_i}^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-)^{j+i} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_j}^k \qquad =$$

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_i}^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ F_i^k \qquad =$$

$$= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_i}^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ {F_j}^k \qquad =$$

$$= 0$$

[3] Tecnicamente si intende $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$ e $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$.

■

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 2: 4 Ottobre

Agomenti: Banane

Sia X uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare $H_k(X)$, cioè il k-esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso $(S_\bullet(X), \partial)$ con:

$$S_k(X) = \{ \sum_g n_g g \mid g \text{ continua, } n_g \in \mathbb{Z} \}$$

E $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ applicazione di bordo con $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^{k} (-)^i g^{(1)}$ con $g : \Delta_k \to X$, e poi lo estendo per linearità. Si trova che $g^{(1)} = g \circ {F_i}^k$.

Il lemma fondamentale è $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ quindi $S_k \overset{\partial_k}{\to} S_{k-1} \overset{\partial_{k-1}}{\to} S_{k-2}$ è un complesso e $\partial_k \circ \partial_{k-1}$ è la mappa dalle catene di S_k a quelle di S_{k-2}.

$(S_\bullet(X), \partial)$ è un complesso di gruppi abeliani o $\mathbb{Z}$- moduli liberi.

Siccome vale $\partial^2 = 0$ posso calcolare l'omologia di $(S_\bullet(X), \partial_\bullet)$:

$$H_k(S_\bullet(X)) = {}^{\mathrm{Ker}(\partial_k)}\big/_{\mathrm{Im}(\partial_{k+1})}$$

Vale che $\mathrm{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_K(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$, cioè le k-catene con bordo nullo, questi sono chiamati k-cicli.

Definitione 1.29 *Sia $S_\bullet(X)$ un complesso di moduli, gli elementi di* $\mathrm{Ker}(\partial)$ *sono detti k-**ciclo**, i quali sono quindi le k-catene con bordo nullo.*

Come notazione si pone $Z_k(X)$ come il gruppo abeliano dei k-cicli: $Z_k(X) = \mathrm{Ker}(\partial)$.

Si pone invece $B_k(X)$ come l'insieme dei bordi, cioè le k-catene singolari che sono immagini di $k+1$-catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che $H_k(X) = {}^{Z_k(X)}\big/_{B_k(X)}$, cioè il gruppo di omotopia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di $H_k(X)$ sono classi di equivalenza con rappresentante: Sia $[c] \in H_k(X)$ quindi vale che $\partial c = 0$, sia inoltre $c_1 \in [c]$ allora $c_1 - c \in B_k(X)$ e $\partial c_1 = 0$ quindi esiste b tale che $c_1 - c = \partial b$.

Definitione 1.30 *Due elementi a, b si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.*

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c$$

Osservazione 1.31 *Vale che $H_k(X) = 1 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$, cioè se ogni ciclo è un bordo. In generale si ha che $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.*

Scopo del corso è studiare $H_k(X)$.

Proposizione 1.32 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0 \cong \mathbb{Z}$, cioè è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 1. In effetti $H_0(X)$* conta *le componenti connesse per archi e quindi da informazioni di natura geometrica.*

Dimostrazione: Dalla definizione di gruppo di omologia: $H_0(X) = {}^{Z_0(X)}\big/_{B_0(X)}$. Ma $Z_0(X) = \{ c \in S_o(X) \mid \partial_0 c = 0 \}$ e $S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X \}$. Tecnicamente uno 0-simplesso è una mappa $\sigma_0 : \Delta_0 \to X$ tale che manda $\Delta_0 = 1$ in $\sigma_0(1) = p_0$ e per questo è naturale l'identificazione con i punti dello spazio topologico. Sia $c \in S_0(X)$ allora $c = \sum n_i p_i$, e vale che $\partial_0(c) = \sum n_1 \partial_0(p) = 0$, infatti per definizione $\partial_0 : S_0(X) \to s_{-1}(X)$, ma $S_{-1}(X)$ in ogni complesso è banale, cioè $S_{-1}(X) \cong 0$. Quindi per ora ho che:

$$H_0(X) = {}^{(}\big/_{S_0}(X))(B_0(X))$$

Per definizione $B_0(X) = \{ x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x \}$, α è una catena. Sia $p_0 \in X$, allora $q \sim_{hom} p$ se e solo se $\exists \alpha \in S_1(X)$ tale che $q - p_0 = \partial_1 \alpha$. Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, essendo X connesso per archi esiste un arco che connette q e p_0, infatti per definizione gli archi sono applicaizoni dall'intervallo a X che hanno come bordo $q - p_0$. Esiste quindi un'unica classe di equivalenza.

Definitione 1.33 *Si definisce inoltre la mappa **grado** come l'applicazione che manda una catena in $S_0(X)$ nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg : S_0(X) &\to \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_1 \end{aligned}$$

Proposizione 1.34 *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1. *deg è un omomorfismo di gruppi abeliani*
2. *deg è suriettivo*
3. $\operatorname{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizando il primo teorema degli omomorfismi ...

Dimostro quindi questa proposizione. **Dimostrazione:** *Sia $c_1 = \sum n_i p_i$ e $c_2 = \sum m_i q_i$, devo mostrare che $\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$, cioè che $c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$ dove r_i è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene.*

La mappa è suriettiva, basta prendere un punto: $m \in \mathbb{Z}$ e $\deg^{-1}(m) = mp$

Mostro che $\operatorname{Ker}(\deg) = B_0(X)$. *Prendo c tale che $\deg(c) = 0$, ma $c = \sum n_i p_i$ quindi $\sum n_i = 0$, allora $c \in B_0(X)$? Se $Eb \in S_1(X)$ con $\partial_1 b = c$. Prendo p_0 e altri punti $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ ci sono archi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ che li uniscono a p_0.Provo a costruire b in questo modo. Siano $\lambda_i : [0,1] \to X$ con $\lambda_i(0) = p_i$*

e $\lambda_i(1) = p_i$ *considero* $c - \partial\left(\sum n_1\lambda_i\right) = c - \sum n_i\partial\lambda_i = c - \sum n_i(p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i = \sum n_i p_0 = 0$. *Siccome per ipotesi* $p_o \in \mathrm{Ker(deg)}$ *e* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $c = \partial(\sum n_i\lambda_i)$ *quindi* $\sum n_i\lambda_i = b$ *da cui* $\mathrm{Ker(deg)} \subseteq B_0(X)$. *Mi rimane da mostrare che* $B_0(X) \subseteq \mathrm{Ker(deg)}$, *infatti ora mostro che se* $c \in B_0(X)$ *allora* $\deg(c) = 0.c = \partial b$ *ma se* λ_i *sono gli archi* $b = \sum m_i\lambda_i$ *quindi* $\partial b = \sum n_i\partial\lambda_i$ *ma* $\partial\lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$ *e l'azione dell'opertaore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi*

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial\lambda_i) = 0$$

■

Per questo $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe $[p]$ $\forall p \in X$ (con X connesso per archi). ■

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove N_c è il numero di componenti connesse per archi di X con $N_c < +\infty$.

Cosa si può dire invece su $H_1(X)$?

Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$, allora alla coppia (X, x_0) si associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata: $\mathrm{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0) \big/ \pi_i(X, x_0)'$ dove $'$ indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai comutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Se X è connesso per archi allora $\mathrm{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$, quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare il primo gruppo di omologia.

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 3: 6 Ottobre

Agomenti: Banane

1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

Definitione 1.35 *Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia (X, x_0) è detta spazio topologico puntato.*

Definitione 1.36 *Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \to X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0$ $\forall t \in I$, si dice che una funzione continua g è **omotopicamente equivalente** a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che;*

- $F(0, x) = f(x)\ \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x)\ \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0\ \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0\ \forall s \in I$

*La relazione $\sim_H$ è detta **relazione di omotopia** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.*

[FIGURA]

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = {\{\, f : I \to X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \,\}}\big/_{\sim_H}$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale** , tale operazione è: Siano $[f], [g] \in \pi_i(X, x_0)$ si definisce $[f][g] = [f \star g]$, dove l'operazione $\star$ è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $\underline{1} = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0\ \forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove $\bar{f}$ è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

$$\exists f : X \to Y, g : Y \to X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

  allora $\pi_1(X, x_o) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

  Osservazione 1.37 *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se X è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.

- Si dimostra che:

  Proposizione 1.38 *Se uno spazio tologico X è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati (X, x_0) sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da x_0.*

  Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

Definitione 1.39 *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

Osservazione 1.40 *Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio $\mathcal{S}^2$.*

- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

  Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$ e $\pi_1(\mathcal{S}^1) \to \mathbb{Z}$ con $[\sigma] \mapsto 1$. Ogni elemento è multiplo di σ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio: $V_0 := \mathcal{S}^2 \quad V_g := P_{\frac{4g}{N}}$ con $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$ e $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con k lati e con idenfiticazioni. Nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza,

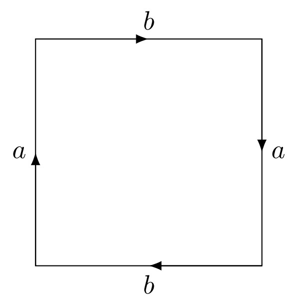

Figura 4: Toro piatto, o anche toro di Clifford

si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente -1 quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha $aba^{-1}b^{-1}$.

In genrale si ha $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ si ha un toro, per $g = 2$ un bitoro, $\dots$. g è detto **genere** .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ < a_1b_1\dots\Pi_{i=1}^g[a_i,b_i] = 1 > & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

Dove $[,]$ è il commutatore, cioè esattamente $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. Solo per $g = 0$ o $g = 1$ si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) = {}^{\pi_1(X)}\big/_{[\pi_1(X),\pi_1(X)]} = {}^{\pi_1(X)}\big/_{\pi_1'(X)}$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\mathrm{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ per $g \geq 2$. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

L'abelianizzato è uno $\mathbb{Z}$-modulo.

Osservazione 1.41 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \to \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to \mathcal{G}$ omomorfismo di gruppi abeliani.*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\ \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

P è la proiezione sul quoziente. φ' esiste perchè in $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ c'è tutto quello che sta nel nucleo. $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$. Allora $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$, devo mostrare che $\varphi(c) = \varphi(d)$. Siccome $\mathcal{G}$ è abeliano.

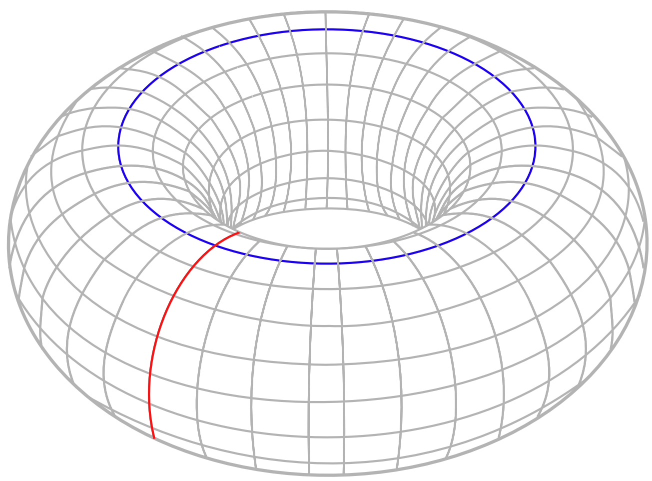

Figura 5: Generatori di un toro

Indice analitico