Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. Poincarè

Professore:
Gilberto Bini

Scriba:
Gabriele Bozzola

Indice

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 1: 29 Settembre

Agomenti: General introduction. Homology of a complex. Singular homology.

1 Introduzione

1.1 Richiami di geometria

Definitione 1.1 *Un **anello** è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

Definitione 1.2 *Sia $\mathcal{R}$ un anello commutativo*[1] *si definisce l' $\mathcal{R}$**-modulo** il gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di somma tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.3 *Se $\mathcal{R}$ è un campo allora l'$\mathcal{R}$-modulo è uno spazio vettoriale.*

Osservazione 1.4 *Ogni gruppo abeliano è uno $\mathbb{Z}$-modulo in modo univoco.*

Definitione 1.5 *Siano $(X, \cdot)$ e $(Y, \star)$ due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè:*

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.6 *Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.*

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

Definitione 1.7 *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\}$$

[1] Si può rilassare questa ipotesi e costruire moduli destri e sinistri.

Osservazione 1.8 Ker(φ) *e* Im(φ) *sono* $\mathcal{R}$*-sottomoduli.*

Posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3$$

Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Dimostrazione: Se $u \in \mathrm{Im}\varphi_2$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ quindi $u \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. ■

Definitione 1.9 *Siano* $\mathcal{M}$ *un* $\mathcal{R}$*-modulo e* $\mathcal{N}$ *un suo sottomodulo, allora il* ***modulo quozionete*** *di* $\mathcal{M}$ *con* $\mathcal{N}$ *e definito da:*

$$\mathcal{M}/_{\mathcal{N}} := \mathcal{M}/_{\sim} \quad \text{dove} \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Siccome Im(φ) è sottomodulo di Ker(φ) allora posso prendere il quoziente:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_2)/_{\mathrm{Im}(\varphi_1)}$$

Questo è un sottomodulo.

A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$.

2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni φ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli** .

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattazza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

Definitione 1.10 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* φ_1 *e* φ_2*.*

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}.$ non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definitione 1.11 *La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *è detta* ***spazio topologico*** *(generalmente si omette la* $\mathcal{T}$*) se* $\mathcal{T}$ *è una topologia, cioè se è una collezione di insiemi di* X *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $A \cap B \in \mathcal{T}$ *se* $A, B \in \mathcal{T}$

1.2 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta che tolgo un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso anche togliendogli un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$:

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{ f(p) \}$$

Ma: $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa che manda $\underline{x} \mapsto \left(||\underline{x}||, \frac{\underline{x}}{||\underline{x}||} \right)$. Ma quindi il gruppo fondamentale deve essere isomorfo: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = \{ 1 \}$ quindi non possono essere isomorfi. ■
Ho quindi dedotto proprietà geometriche a partire da considerazioni algebriche.

Definitione 1.12 *Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \}}\big/_{\sim}$$

e $\sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ tale che $G(z,0) = g_1(z), G(z,1) = g_2(z), G(1,t) = x_o$.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione: Come nel caso precedente tolgo q da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^3$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è posisbile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definitione 1.13 *Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^k \to X \mid g(p_0) = x_0, p_o \in \mathcal{S}^k \}}\big/_{\sim}$$

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq 1$

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via. . .

1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. Ci sono varie possibilità:

- Omologia simpliciale
- Omologia cellulare
- Omologia singolare
- Omologia persistente[1]

Ma cosa è l'omologia?

Definitione 1.14 *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il **simplesso standard** Δ_k l'insieme:*

$$\Delta_k = \{\, (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \quad 0 \le x_i \le 1 \ e \ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \,\}$$

Osservazione 1.15 *Alcuni esempi sono:*

- *Δ_0 è un punto.*
- *Δ_1 è un segmento omeomorfo a $[0, 1]$.*

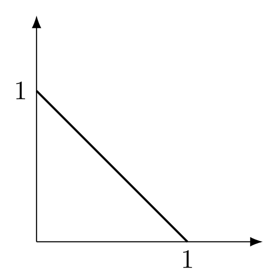

Figura 1: 1-Simplesso standard

Definitione 1.16 *Dato uno spazio topologico X si definisce il **k-simplesso singolare** in X come un'applicazione continua $g : \Delta_k \to X$.*

Spesso conviene identificare il k-simplesso con la sua immagine in X. In quesot modo uno 0-simplesso è un punto in X, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplesso deforma è detto singolare.

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

[1] Questa ha numerose applicazioni pratiche.

$S.$ è il compesso, cioè: $\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k() \to S_{k-1} \to \cdots \to S_0(X)$, dove

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi: } \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k-\text{simplessi singolari di } X\}$$

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate k-**catene singolari**.

Ad esempio: Se $k = 0$ $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$)

$$S_0(X) = \{\ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ p_i \in X\ \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k, queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un **arco**, ovvero una funzione da un intervallo $I = [0, 1]$ a X tale che $\alpha(0) = x_0$ e y_0.

Definitione 1.17 *Uno spazio topologico X si dice **connesso per archi** se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale x e punto finale y.*

[FIGURA]

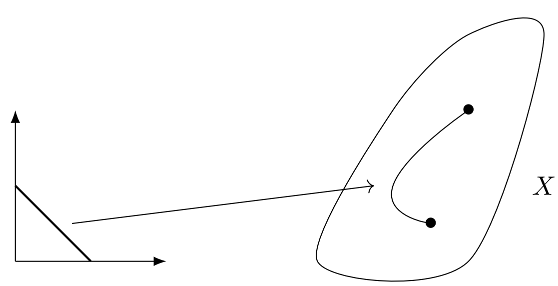

Figura 2: 1-Simplesso singolare

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco.

Definitione 1.18 *Sia Δ_k un k-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore **faccia** come la mappa ${F_i}^k$ da Δ_{k-1} a Δ_k tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k.*

Ad esempio per $k = 2$ $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \le x_i \le 1\ \forall i \}$, si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce. [FIGURA, CONSIDERAZIONI]

Esercizio 1 *Dimostrare che se* $[\cdot, \cdot]$ *indica l'inviluppo convesso allora:*

1. *Per* $j > i$ *vale che* ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_k]$.
2. *Per* $j \le i$ *vale che* ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^k = [e_0, \dots, e_j, \dots, e_{i+1}, \dots, e_k]$.

Dato un k-simplesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$ si definisce la mappa $\sigma^{(i)} = \sigma \circ {F_i}^k$.

[FIGURA]

Definitione 1.19 *Si definisce il* ***bordo*** *di un k-simplesso singolare come* $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma^{(i)}$.

Per $k = 1$ $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$ infatti $\sigma^0 = \sigma \circ {F_0}^1 = \sigma(1) = p_1$ e $\sigma^0 = \sigma \circ {F_1}^1 = \sigma(0) = p_0$.[2]

Allora definisco $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ infatti per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$.

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) = \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g =$$

$$= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right)$$

■

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} =$. Spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$.

[2] Tecnicamente si intende $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$ e $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$.

Dimostrazione: Se σ è un k-complesso singolare $\sigma : \Delta_k \to X$:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1}\sigma = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) \qquad =$$
$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^{k} (-)^i (\sigma \circ F_j^{\,k+1}) \circ F_i^{\,k} = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-)^{j+i} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_j^{\,k} \qquad =$$
$$= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^{\,k} + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^k \qquad =$$
$$= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ F_j^{\,k+1} \circ F_i^{\,k} + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{\,k+1} \circ F_j^{\,k} \qquad =$$
$$= 0$$

■

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 2: 4 Ottobre

Agomenti: Banane

Topologia Algebrica **2016/2017**

Lezione 3: 6 Ottobre

Agomenti: Banane

1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

Definitione 1.20 *Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia (X, x_0) è detta spazio topologico puntato.*

Definitione 1.21 *Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \to X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0 \ \forall t \in I$, si dice che una funzione continua g è **omotopicamente equivalente** a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che;*

- $F(0, x) = f(x) \ \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \ \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0 \ \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0 \ \forall s \in I$

*La relazione $\sim_H$ è detta **relazione di omotopia** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.*

[FIGURA]

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = {\left\{ f : I \to X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \right\}}\big/_{\sim_H}$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale** , tale operazione è: Siano $[f], [g] \in \pi_i(X, x_0)$ si definisce $[f][g] = [f \star g]$, dove l'operazione $\star$ è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $\underline{1} = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0 \ \forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove $\bar{f}$ è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

$$\exists f : X \to Y, g : Y \to X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

allora $\pi_1(X, x_o) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

Osservazione 1.22 *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se X è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.

- Si dimostra che:

Propositione 1.23 *Se uno spazio tologico X è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati (X, x_0) sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da x_0.*

Questo intuitivamente è vero perchè se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

Definitione 1.24 *Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.*

Osservazione 1.25 *Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio $\mathcal{S}^2$.*

- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$ e $\pi_1(\mathcal{S}^1) \to \mathbb{Z}$ con $[\sigma] \mapsto 1$. Ogni elemento è multiplo di σ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$

- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio: $V_0 := \mathcal{S}^2 \quad V_g := P_{\frac{4g}{N}}$ con $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$ e $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con k lati e con idenfiticazioni. Nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza,

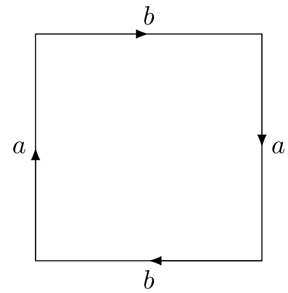

Figura 3: Toro piatto, o anche toro di Clifford

si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente -1 quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha $aba^{-1}b^{-1}$.

In genrale si ha $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ si ha un toro, per $g = 2$ un bitoro, ... g è detto **genere** .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ < a_1b_1 \dots \Pi_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 > & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

Dove $[,]$ è il commutatore, cioè esattamente $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. Solo per $g = 0$ o $g = 1$ si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\mathrm{Ab}(\pi_1(X)) = {}^{\pi_1(X)}\big/_{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = {}^{\pi_1(X)}\big/_{\pi_1'(X)}$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\mathrm{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ per $g \geq 2$. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

L'abelianizzato è uno $\mathbb{Z}$-modulo.

Osservazione 1.26 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \to \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to \mathcal{G}$ omomorfismo di gruppi abeliani.*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\ \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

P è la proiezione sul quoziente. φ' esiste perchè in $\mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ c'è tutto quello che sta nel nucleo. $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$. Allora $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$, devo mostrare che $\varphi(c) = \varphi(d)$. Siccome $\mathcal{G}$ è abeliano.

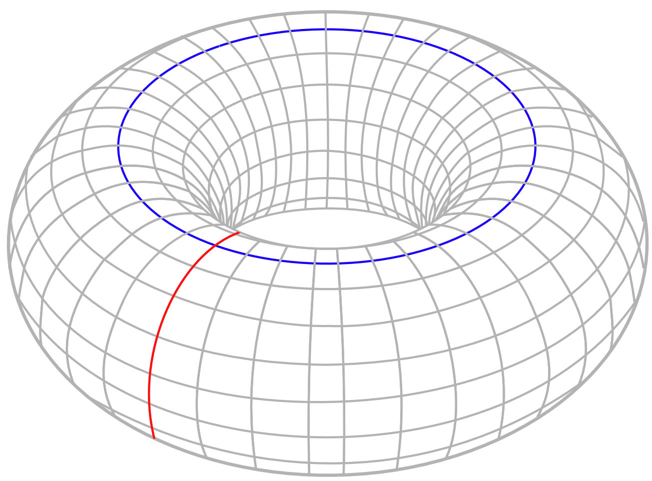

Figura 4: Generatori di un toro

Indice analitico