

# Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905  
H. POINCARÉ

Professore:  
Gilberto Bini  
Scriba:  
Gabriele Bozzola

# Indice

<b>1</b>	<b>Omologia Singolare</b>	<b>4</b>
1.1	Introduzione . . . . .	4
1.1.1	Richiami di algebra . . . . .	4
1.1.2	Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$ . . . . .	7
1.1.3	Omologia . . . . .	9
1.1.4	Richiami sul gruppo fondamentale . . . . .	17
1.2	Omologia delle sfere . . . . .	25
1.2.1	Teoria del grado . . . . .	28

## Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pagina
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	2
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	2
$\mathcal{R}$	Anello	4
$\langle \dots \rangle$	Gruppo generato	5
$\simeq$	Spazi omeomorfi	7
$\xrightarrow{\sim}$	Omeomorfismo	8
$\pi_1$	Gruppo fondamentale	8
$\Delta_k$	Simpleso standard	10
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	15

# 1 Omologia Singolare

## 1.1 Introduzione

### 1.1.1 Richiami di algebra

**Definizione 1.1.1** Un **anello** è un insieme  $\mathcal{R}$  dotato di due operazioni  $+$  e  $\cdot$  tali che  $\mathcal{R}$  sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro<sup>1</sup>) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.

**Definizione 1.1.2** Un anello si dice **anello commutativo** se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.

**Definizione 1.1.3** Un **campo** è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.

**Definizione 1.1.4** Sia  $\mathcal{R}$  un anello commutativo si definisce l' **$\mathcal{R}$ -modulo** un gruppo abeliano  $\mathcal{M}$  equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in  $\mathcal{R}$  tale che  $\forall v, w \in \mathcal{M}$  e  $\forall a, b \in \mathcal{R}$  vale che:

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

**Osservazione 1.1.5** Se  $\mathcal{R}$  è un campo allora l' $\mathcal{R}$ -modulo è uno spazio vettoriale.

Sostanzialmente la nozione di  $\mathcal{R}$ -modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

**Osservazione 1.1.6** Ogni gruppo abeliano  $\mathcal{G}$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo in modo univoco, cioè  $\mathcal{G}$  è un gruppo abeliano se e solo se è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo.

**Dimostrazione:** Sia  $x \in \mathcal{G}$  si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento  $n \in \mathbb{Z}$  come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia  $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$  sia uno  $\mathbb{Z}$ -modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di  $\mathbb{Z}$ :  $nx = (1 + 1 + 1 + 1 + \dots)x = x + x + x \dots$ , quindi quella definita è l'unica possibile. ■

**Definizione 1.1.7** Un gruppo  $\mathcal{G}$  si dice **generato** dai suoi elementi  $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$  se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di  $x_1, x_2, \dots$ . In questo caso si indica  $\mathcal{G} = \langle \{x_1, x_2, \dots\} \rangle$ .

**Definizione 1.1.8** Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.

**Definizione 1.1.9** Siano  $(X, \cdot)$  e  $(Y, \star)$  due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione  $f$  tra  $X$  e  $Y$  che preserva la struttura di gruppo, cioè:

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

**Osservazione 1.1.10** Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè  $\forall v \in X$  vale che  $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$ .

Voglio studiare gli omomorfismi tra  $\mathbb{Z}$ -moduli.

**Definizione 1.1.11** Sia  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  un omomorfismo tra gli  $\mathcal{R}$ -moduli  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$ , allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine**:

$$\text{Ker}(\varphi) := \{m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0\} \quad \text{Im}(\varphi) := \{m \in \mathcal{N} \mid m = \varphi(k), k \in \mathcal{M}\}$$

**Osservazione 1.1.12**  $\text{Ker}(\varphi)$  e  $\text{Im}(\varphi)$  sono  $\mathcal{R}$ -sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  che posseggono la struttura di  $\mathcal{R}$ -modulo.

Se  $\mathcal{M}_i$  sono  $\mathcal{R}$ -moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

**Proposizione 1.1.13** Se vale  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$  allora  $\text{Im}(\varphi_1) \subseteq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

**Dimostrazione:** Se  $u \in \text{Im}(\varphi_1)$  allora  $\exists v \in \mathcal{M}_2$  tale che  $\varphi_1(v) = u$ , ma  $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$  per ipotesi, quindi  $u \in \text{Ker}(\varphi_2)$ . ■

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

**Definizione 1.1.14** Siano  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}$ -modulo e  $\mathcal{N}$  un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di  $\mathcal{M}$  con  $\mathcal{N}$  è definito da:

$$\mathcal{M}/\mathcal{N} := \mathcal{M}/\sim \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove  $\mathcal{M}/\sim$  è l'insieme delle classi di equivalenza di  $\sim$  equipaggiate con operazioni indotte dall' $\mathcal{R}$ -modulo, cioè se  $[u], [w] \in \mathcal{M}/\sim$  e  $a \in \mathcal{R}$ :

## 1 Omologia Singolare

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di  $\mathcal{M}/\mathcal{N}$  sono le classi di equivalenza  $[m] = \{m + n \mid n \in \mathcal{N}\}$ .

Siccome  $\text{Im}(\varphi)$  è sottomodulo di  $\text{Ker}(\varphi)$  allora posso prendere il quoziente:

$$\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione  $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ , altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.

A questo punto ci sono due possibilità:

1.  $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) = 0$ , che significa che  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$  in quanto non ci sono elementi di  $\text{Ker}(\varphi_2)$  fuori da  $\text{Im}(\varphi_1)$ , dato che l'unica classe di equivalenza presente è  $[0]$  significa che  $\forall m \in \text{Ker}(\varphi_1) \exists n \in \text{Im}(\varphi_2)$  tale che  $m - n = 0$ , cioè  $m$  e  $n$  coincidono e quindi  $\text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$ .
2.  $\text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1) \neq 0$ , cioè  $\exists v \in \text{Ker}(\varphi_2)$  tale che  $v \notin \text{Im}(\varphi_1)$  e quindi  $\text{Im}(\varphi_1) \subsetneq \text{Ker}(\varphi_2)$ .

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli  $\mathcal{M}$  e delle applicazioni  $\varphi$  è **esatta** in  $\mathcal{M}_2$ , nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.

Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto  $\mathcal{M}_2$  della successione.

**Definizione 1.1.15**  $H(\mathcal{M}_\bullet) = \text{Ker}(\varphi_2)/\text{Im}(\varphi_1)$  è detto **modulo di omologia** del complesso  $\mathcal{M}_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$  con le applicazioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Per questo  $H(\mathcal{M}_\bullet)$  quantifica quanto il complesso  $\mathcal{M}_\bullet$  non è esatto.

Questo deriva da un problema topologico concreto.

**Definizione 1.1.16** La coppia  $(X, \mathcal{T})$  è detta **spazio topologico** (generalmente si omette la  $\mathcal{T}$ ) se  $\mathcal{T}$  è una **topologia**, cioè se è una collezione di insiemi di  $X$  tali che:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2.  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \mathbb{N}$
3.  $\bigcap_{n \in \{0, 1, \dots, N\}} A_n \in \mathcal{T}$  se  $A_n \in \mathcal{T} \forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$

Gli elementi di  $\mathcal{T}$  sono detti **aperti**.

**Osservazione 1.1.17** Se  $\tau$  è la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $X$  allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la **topologia discreta**, invece  $\tau = \{\emptyset, X\}$  è una topologia ed è la **topologia triviale**. Infine in  $\mathbb{R}^n$  si definisce la **topologia usuale** che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$ . Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 1.1.18** Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.

**Osservazione 1.1.19** Sia  $A \subseteq X$  spazio topologico, si può rendere anche  $A$  uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di  $X$  intersecati con  $A$ .

**Osservazione 1.1.20** Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.

**Definizione 1.1.21** Sia  $X$  uno spazio topologico l'insieme  $\{A_i \mid A_i \in X \forall i\}$  è un **ricoprimento** di  $X$  se:

$$\bigcup_i A_i = X$$

Se in particolare gli insiemi  $A_i$  sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.

**Definizione 1.1.22** Un insieme  $U$  è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento finito di  $U$ .

**Definizione 1.1.23** Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, [cioè se è una mappa uno a uno]. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo  $\simeq$ .

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

### 1.1.2 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

**Definizione 1.1.24** Un **arco** in uno spazio topologico  $X$  tra i punti  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in X$  è una funzione continua da  $I = [0, 1]$  a  $X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = y_0$ . Si dice che l'arco parte da  $x_0$  e finisce in  $y_0$ .

**Definizione 1.1.25** Uno spazio topologico  $X$  è **connesso per archi** se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  esiste un arco che parte da  $x$  e termina in  $y$ .

**Definizione 1.1.26** Uno spazio topologico  $X$  si dice **connesso per archi** se  $\forall x, y \in X$  esiste un arco con punto iniziale  $x$  e punto finale  $y$ .

**Proposizione 1.1.27** Se  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se  $X$  è connesso per archi allora  $Y$  è connesso per archi. Questo vale in particolare se  $f$  è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.

**Dimostrazione:** Siano  $y_0, y_1$  due punti di  $Y$ . La funzione  $f$  è suriettiva, e dunque esistono  $x_0$  e  $x_1$  in  $X$  tali che  $f(x_0) = y_0$  e  $f(x_1) = y_1$ . Dato che  $X$  è connesso, esiste un cammino  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x_0$  e  $\alpha(1) = x_1$ . Ma la composizione di funzioni continue è

## 1 Omologia Singolare

continua, e quindi il cammino ottenuto componendo  $\alpha$  con  $f$ :  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow X \rightarrow Y$  è un cammino continuo che parte da  $y_0$  e arriva a  $y_1$ . ■

Si sa inoltre che:

**Proposizione 1.1.28**  $\mathbb{R}^n$  è connesso per archi  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

È noto che  $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 2$ , infatti basta togliere un punto a  $\mathbb{R}$  che diventa sconnesso per archi mentre  $\mathbb{R}^N$  rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

**Proposizione 1.1.29** Se  $f : X \rightarrow Y$  è omeomorfismo tra spazi topologici allora  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  è omeomorfismo per ogni  $U \subseteq X$ .

Nel caso considerato  $U = x_0$ , siccome ho trovato un  $U$  per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo  $f$  non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che  $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$  per  $n \geq 3$ , infatti:

**Dimostrazione:** Per assurdo  $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$  è un omeomorfismo con  $n \geq 3$ , tolgo un punto da  $\mathbb{R}^2$ , se  $f$  omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè  $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{f(p)\}$ . Ma  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$  con la mappa  $\vec{x} \mapsto \left( \|\vec{x}\|, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)$  (dopo aver fatto una traslazione di  $p$  nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente  $\mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ . Quindi se esiste un omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^n$  significherebbe che  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ , ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi:  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$  ma  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e  $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$ ,  $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$  perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$  e  $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$  che è assurdo. ■

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

**Definizione 1.1.30** Si definisce il **gruppo fondamentale** di uno spazio topologico  $X$  connesso per archi attorno al punto  $x_0 \in X$

$$\pi_1(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^1 \rightarrow X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \} / \sim$$

e  $\sim$  è la relazione di omotopia:  $g_1 \sim g_2$  se  $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \rightarrow X$  tale che  $G(z, 0) = g_1(z)$ ,  $G(z, 1) = g_2(z)$ ,  $G(1, t) = x_0$  con  $G$  continua. In questo vedo  $\mathcal{S}^1$  come sottospazio di  $\mathbb{R}^2$  con la topologia indotta (il punto 1 è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso  $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ ).

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti  $g$  è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di



## 1 Omologia Singolare

arrivo necessariamente coincidono dato che  $g$  è definito su  $\mathcal{S}^1$ . Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^N$ .

**Dimostrazione:** Come nel caso precedente suppongo esiste  $f$  omeomorfismo tra  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^n$ , tolgo  $q$  da  $\mathbb{R}^3$  e  $f(q)$  da  $\mathbb{R}^n$ , quindi ottengo l'omomorfismo tra  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$ , ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. ■

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

**Definizione 1.1.31** Si definiscono i **gruppi di omotopia superiore** di uno spazio topologico  $X$  attorno al punto  $x_0$  per  $k \geq 2$ :

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \rightarrow X \mid g \text{ continua, } g(p_0) = x_0 \} / \sim$$

Con  $p_0 \in \mathcal{S}^k$  e  $\sim$  relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1.  $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1$  per  $1 \leq k < m$  ( $m > 2$ )
2.  $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z}$  per  $k = m$
3.  $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4.  $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5.  $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$

**Definizione 1.1.32** Sia  $A \subseteq X$  con  $X$  spazio topologico  $i : A \rightarrow X$  si definisce mappa di **inclusione** e si scrive  $i : A \hookrightarrow X$  se  $\forall a \in A$  vale che  $i(a) = a$ .

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via... Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

### 1.1.3 Omologia

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare

---

<sup>2</sup>Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

## 1 Omologia Singolare

- Omologia persistente<sup>3</sup>
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Assocerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base  $\mathbb{Z}$ , che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

**Definizione 1.1.33** In  $\mathbb{R}^{k+1}$  si definisce il **simplexso standard**  $\Delta_k$  l'insieme:

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \ 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

**Osservazione 1.1.34** Alcuni esempi sono:

- $\Delta_0$  è un punto.
- $\Delta_1$  è un segmento, che è omeomorfo a  $[0, 1]$ .

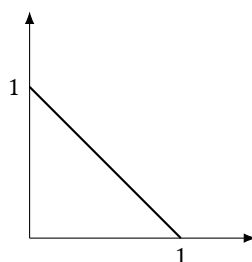


Figura 1.1: 1-Simplexso standard

- $\Delta_2$  è un triangolo
- $\Delta_3$  è un tetraedro
- ...

**Definizione 1.1.35** Dato uno spazio topologico  $X$  si definisce il  **$k$ -simplexso singolare** in  $X$  come un'applicazione continua  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ .

Spesso conviene identificare il  $k$ -simplexso con la sua immagine in  $X$ . In questo modo uno 0-simplexso è un punto in  $X$ , mentre un 1-simplexso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome il simplexso potrebbe deformare è detto singolare.

---

<sup>3</sup>Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.

## 1 Omologia Singolare

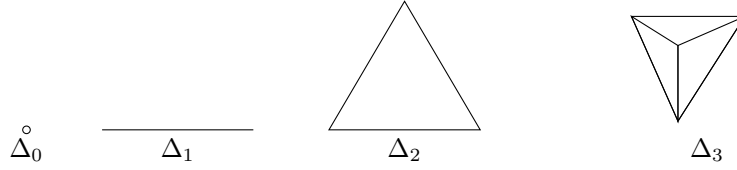


Figura 1.2: Simplessi standard

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S_\bullet$  è il complesso ( $S$  sta per singolare), cioè:

$$\cdots \rightarrow S_{k+1}(X) \rightarrow S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \{ \text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g \text{ } k\text{-simplessi singolari di } X \}$$

$S_k(X)$  è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^* g = \sum_g (n_g + n_g^*) g$$

Ad esempio:

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate  **$k$ -catene singolari**.  $S_k(X)$  è generato da tutte le possibili applicazioni continue da  $\Delta_k$  a  $X$ , cioè:

$$S_k(X) = \langle \{ g \mid g \text{ } k\text{-simpleso singolare in } X \} \rangle$$

Ad esempio se  $k = 0$  allora  $S_0(X)$  sono catene di punti ( $g_0 : \Delta_0 \rightarrow X$ , identifico l'applicazione con il punto in  $X$  sapendo che l'immagine di un punto è un punto)

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, p_i \in X \}$$

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari  $S_k$ , queste applicazioni saranno il bordo.

Definisco  $h : \Delta_1 \rightarrow X$  in modo tale che  $h(\Delta) = \alpha$  dove  $\alpha$  è un **arco**.

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simpleso è uno 0-simpleso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

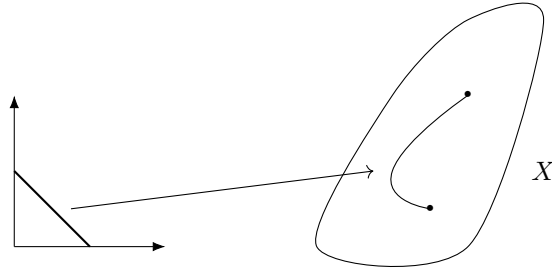


Figura 1.3: 1-Simplesso singolare

**Definizione 1.1.36** Sia  $\Delta_k$  un  $k$ -simplesso standard con  $k \geq 0$  si definisce l'operatore **faccia** come la mappa  $F_i^k : \Delta_{k-1} \rightarrow \Delta_k$  tale che  $F_i^k(\Delta_{k-1})$  è una faccia di  $\Delta_k$ .

L'operatore faccia prende un  $k$ -simplesso standard e lo immerge in un qualche senso in un simplex più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso  $k = 0$ ),

Ad esempio per  $k = 2$   $\Delta_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 0 \leq x_i \leq 1 \forall i \}$ , si definisce la base  $e_0 = (1, 0, 0)$   $e_1 = (0, 1, 0)$   $e_2 = (0, 0, 1)$ , voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

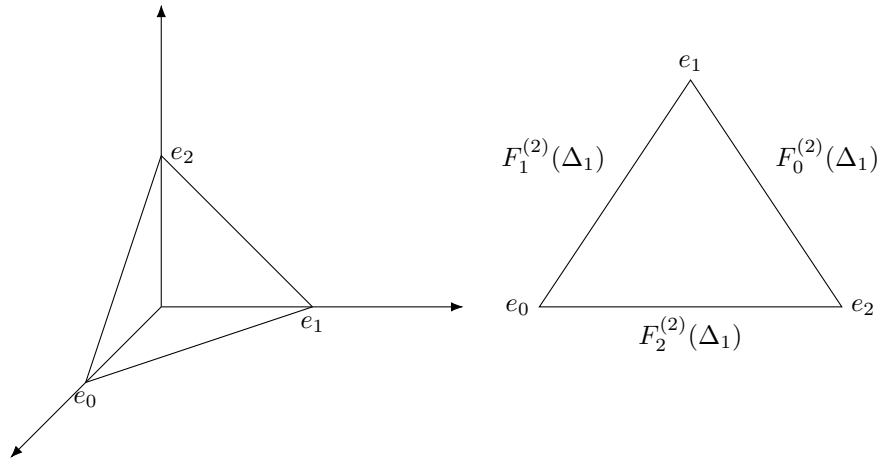


Figura 1.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia  $i$ -esimo è quello che non contiene il vertice  $i$ -esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplex.

## 1 Omologia Singolare

In generale se  $\Delta_k$  è un simpleso standard definisco la base standard:

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 &= (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 &= (0, 0, 1, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Questi sono i vertici del simpleso, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} F_i^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ F_i^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

**Esercizio 1** Dimostrare che se  $[\cdot, \cdot]$  indica l'involuppo convesso allora:

1. Per  $j > i$  vale che  $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]$ .
2. Per  $j \leq i$  vale che  $F_i^{k+1} \circ F_i^k = [e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, \hat{e}_{i+1}, \dots, e_k]$ .

Dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.

**Definizione 1.1.37** L'involuppo convesso di un insieme  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  è il più piccolo insieme convesso che contiene  $U$ .

**Definizione 1.1.38** Un insieme in  $\mathbb{R}^n$  si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.

**Definizione 1.1.39** Dato un  $k$ -simpleso singolare  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$  si definisce la mappa  $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^k$ , si definisce quindi il **bordo** di  $\sigma$  come  $\partial_k \sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma^{(i)}$ .

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle faccie.

Per  $k = 1$   $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$  infatti  $\sigma^0 = \sigma \circ F_0^1 = \sigma(1) = p_1$  e  $\sigma^1 = \sigma \circ F_1^1 = \sigma(0) = p_0$ .<sup>4</sup>

QUI SISTEMARE Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  estendendolo per linearità  $\partial_k \left( \sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$  (infatti si è definita l'azione sui generatori  $g$ ).

Devo mostrare che  $\partial_k$  è un omomorfismo e che soddisfa  $\partial^2 = 0$ . Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} \partial_k \left( \sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) &= \partial_k \left( \sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g = \\ &= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left( \sum_g n_g g \right) + \partial_k \left( \sum_g m_g g \right) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Tecnicamente si intende  $p_0 = \partial_1 \sigma^{(0)}(1)$  e  $p_1 = \partial_0 \sigma^{(1)}(1)$ .

## 1 Omologia Singolare

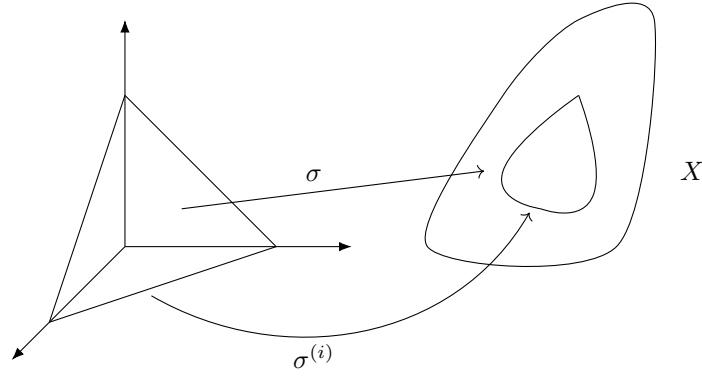


Figura 1.5: Azione di  $\sigma$

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che  $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ . Spesso come notazione si pone  $\partial^2 = 0$ .

**Dimostrazione:** Se  $\sigma$  è un  $k$ -complesso singolare  $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$ :

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma &= \partial_k \left( \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j (\sigma \circ F_j^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \partial_k (\sigma \circ F_j^{k+1}) = \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \sum_{i=0}^k (-1)^i (\sigma \circ F_j^{k+1}) \circ F_i^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^{j+i} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_j^{k+1} \circ F_i^k + \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ F_j^k = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio.

**Esercizio 2** Verificare che fa veramente zero.

## 1 Omologia Singolare

Sia  $X$  uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare  $H_k(X)$ , cioè il  $k$ -esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso  $(S_\bullet(X), \partial)$  con:

$$S_k(X) = \left\{ \sum_g n_g g \mid g \text{ semplice singolare, } n_g \in \mathbb{Z} \right\}$$

E  $\partial_k : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$  applicazione di bordo con  $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^k (-1)^i g^{(i)}$  con  $g : \Delta_k \rightarrow X$ , e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di  $S$ , dove  $g^{(i)} = g \circ F_i^k$ .

Siccome  $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$  si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre  $\partial_k \circ \partial_{k-1}$  è la mappa nulla dalle catene singolari di  $S_k(X)$  a quelle di  $S_{k-2}(X)$ .

$(S_\bullet(X), \partial)$  è un complesso di gruppi abeliani o  $\mathbb{Z}$ -moduli liberi. Posso quindi calcolare l'omologia di  $(S_\bullet(X), \partial)$  come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = \text{Ker}(\partial_k) / \text{Im}(\partial_{k+1})$$

Vale che  $\text{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$ , cioè le  $k$ -catene con bordo nullo, questi sono chiamati  $k$ -cicli.

**Definizione 1.1.40** Sia  $(S_\bullet(X), \partial)$  un complesso di moduli, gli elementi di  $\text{Ker}(\partial)$  sono detti  **$k$ -cicli**. Un  $k$ -ciclo è quindi una  $k$ -catene con bordo nullo:

$$c \text{ ciclo} \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei  $k$ -cicli è indicato con  $Z_k(X)$ , cioè:  $Z_k(X) = \text{Ker}(\partial)$ .

Si pone invece  $B_k(X)$  come l'insieme dei bordi, cioè le  $k$ -catene singolari che sono immagini di  $k+1$ -catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che  $H_k(X) = Z_k(X) / B_k(X)$ , cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di  $H_k(X)$  sono classi di equivalenza tali che se  $[c] \in H_k(X)$  con  $\partial c = 0$ , e  $c_1 \in [c]$  allora  $c_1 - c \in B_k(X)$  e  $\partial c_1 = 0$  quindi esiste  $b$  tale che  $c_1 - c = \partial b$ . Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

**Definizione 1.1.41** Due elementi  $a, b$  si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

**Osservazione 1.1.42** Vale che  $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$ , cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che  $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$  e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.

## 1 Omologia Singolare

Scopo del corso è studiare  $H_k(X)$  e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

**Proposizione 1.1.43** *Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi, allora  $H_0 \cong \mathbb{Z}$ , cioè è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo libero di rango 1. In effetti  $H_0(X)$  conta le componenti connesse per archi in  $X$  e quindi dà informazioni di natura geometrica.*

**Dimostrazione:** Dalla definizione di gruppo di omologia:  $H_0(X) = Z_0(X) / B_0(X)$ . Ma  $Z_0(X) = \{c \in S_0(X) \mid \partial_0 c = 0\}$  e  $S_0(X) = \{\sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X\}$ . Tecnicamente uno 0-simplesso singolare è una mappa  $\sigma_0 : \Delta_0 \rightarrow X$  tale che manda  $\Delta_0 = 1$  in  $\sigma_0(1) = p_0$  e per questo è naturale l'identificazione con i punti immagine dello spazio topologico. Sia  $c \in S_0(X)$  allora  $c = \sum n_i p_i$ , e vale che  $\partial_0(c) = \sum n_i \partial_0(p_i) = 0$ , infatti per definizione  $\partial_0 : S_0(X) \rightarrow S_{-1}(X)$ , ma  $S_{-1}(X)$  in ogni complesso è banale, cioè  $S_{-1}(X) \cong 0$ . Quindi per ora ho che:

$$H_0(X) = S_0(X) / B_0(X)$$

Per definizione  $B_0(X) = \{x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x\}$ ,  $\alpha$  è una catena. Sia  $p_0 \in X$ , allora  $q \sim_{hom} p$  se e solo se  $\exists \alpha \in S_1(X)$  tale che  $q - p_0 = \partial_1 \alpha$ . Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, essendo  $X$  connesso per archi esiste un arco che connette  $q$  e  $p_0$ , infatti per definizione gli archi sono applicazioni dall'intervallo a  $X$  che hanno come bordo  $q - p_0$ . Esiste quindi un'unica classe di equivalenza.

**Definizione 1.1.44** *Si definisce inoltre la mappa **grado** come l'applicazione che manda una catena in  $S_0(X)$  nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg : S_0(X) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

**Teorema 1.1.45 (Teorema fondamentale degli omomorfismi)** *Sia  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:*

$$\mathcal{G}_1 / \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$$

**Proposizione 1.1.46** *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1.  $\deg$  è un omomorfismo di gruppi abeliani
2.  $\deg$  è suriettivo
3.  $\text{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

*Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema degli omomorfismi ...*

*Dimostro quindi questa proposizione. **Dimostrazione:** Sia  $c_1 = \sum n_i p_i$  e  $c_2 = \sum m_i q_i$ , devo mostrare che  $\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$ , cioè che  $c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$  dove  $r_i$  è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene.*



## 1 Omologia Singolare

La mappa è suriettiva, basta prendere un punto:  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\deg^{-1}(m) = mp$

Mostro che  $\text{Ker}(\deg) = B_0(X)$ . Prendo  $c$  tale che  $\deg(c) = 0$ , ma  $c = \sum n_i p_i$  quindi  $\sum n_i = 0$ , allora  $c \in B_0(X)$ ? Se  $Eb \in S_1(X)$  con  $\partial_1 b = c$ . Prendo  $p_0$  e altri punti  $p_1, p_2, p_3, \dots$ , ci sono archi  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  che li uniscono a  $p_0$ . Provo a costruire  $b$  in questo modo. Siano  $\lambda_i : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\lambda_i(0) = p_i$  e  $\lambda_i(1) = p_0$  considero  $c - \partial(\sum n_i \lambda_i) = c - \sum n_i \partial \lambda_i = c - \sum n_i (p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i + \sum n_i p_0 = \sum n_i p_0 = 0$ . Siccome per ipotesi  $p_0 \in \text{Ker}(\deg)$  e  $c = \sum n_i p_i$  allora  $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$  quindi  $\sum n_i \lambda_i = b$  da cui  $\text{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$ . Mi rimane da mostrare che  $B_0(X) \subseteq \text{Ker}(\deg)$ , infatti ora mostro che se  $c \in B_0(X)$  allora  $\deg(c) = 0$ .  $c = \partial b$  ma se  $\lambda_i$  sono gli archi  $b = \sum m_i \lambda_i$  quindi  $\partial b = \sum n_i \partial \lambda_i$  ma  $\partial \lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$  e l'azione dell'operatore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial \lambda_i) = 0$$

■

Per questo  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  generato dalla classe  $[p] \forall p \in X$  (con  $X$  connesso per archi). ■

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove  $N_c$  è il numero di componenti connesse per archi di  $X$  con  $N_c < +\infty$ .

Cosa si può dire invece su  $H_1(X)$ ?

Sia  $X$  spazio topologico e  $x_0 \in X$ , allora alla coppia  $(X, x_0)$  si associa il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, x_0)$ . In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata:  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) = \pi_1(X, x_0) / \pi_1(X, x_0)'$  dove  $'$  indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Se  $X$  è connesso per archi allora  $\text{Ab}(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$ , quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare il primo gruppo di omologia.

### 1.1.4 Richiami sul gruppo fondamentale

**Definizione 1.1.47** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0$  un suo punto, allora un **laccio** è un arco in  $X$  avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto  $x_0$ . Un laccio  $c_{x_0}$  si dice **costante** se  $\forall t \in I \ c_{x_0}(t) = x_0$  con  $x_0 \in X$ .

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio  $X$  come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché il laccio costante non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

**Definizione 1.1.48** Sia  $X$  uno spazio topologico e  $x_0 \in X$  un suo punto, allora la coppia  $(X, x_0)$  è detta **spazio topologico puntato**.

**Definizione 1.1.49** Sia  $(X, x_0)$  uno spazio topologico puntato e  $f : I \rightarrow X$  una mappa continua tale che  $f(0) = f(1) = x_0 \forall t \in I$ , si dice che una funzione continua  $g$  è **omotopicamente equivalente** a  $f$  ( $g \sim_H f$ ) se esiste una funzione continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che;

- $F(0, x) = f(x) \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \forall x \in I$
- $F(s, 0) = x_0 \forall s \in I$
- $F(s, 1) = x_0 \forall s \in I$

La relazione  $\sim_H$  è detta **relazione di omotopia** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.

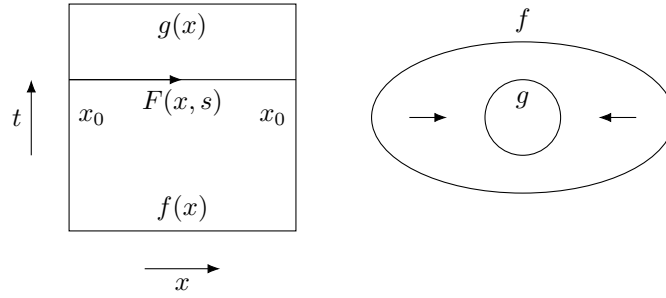


Figura 1.6: Omotopia: deforma  $f$  in  $g$  in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = \{ f : I \rightarrow X \mid f \text{ continua, } f(0) = f(1) = x_0 \} / \sim_H$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è il **gruppo fondamentale**, tale operazione è: Siano  $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$  si definisce  $[f][g] = [f \star g]$ , dove l'operazione  $\star$  è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante  $1 = [C_{x_0}]$  con  $C_{x_0}(t) = x_0 \forall t$ . L'inverso di un elemento invece è  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  dove  $\bar{f}$  è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da  $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ , in questo modo  $\bar{f}(0) = f(1)$  e  $\bar{f}(1) = f(0)$ .

Proprietà:

- $\pi_1(X, x_0)$  è invariante omotopico, cioè se  $X \sim_H Y$ , cioè se

$$\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

allora  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$ . Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

## 1 Omologia Singolare

**Osservazione 1.1.50** Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.

- Se  $X$  è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che  $\pi_1(X, x_0) \cong 1$ , cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

**Proposizione 1.1.51** Se uno spazio topologico  $X$  è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati  $(X, x_0)$  sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da  $x_0$ .

Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

**Definizione 1.1.52** Uno spazio topologico connesso per archi si dice **semplicemente connesso** se il suo gruppo fondamentale è banale.

**Osservazione 1.1.53** Non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio  $S^2$ .

- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ , infatti si può costruire la mappa:

$$\begin{aligned}\sigma : I &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i t}\end{aligned}$$

Questa è tale che  $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$  quindi  $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$  e  $\pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $[\sigma] \mapsto 1$ . Ogni elemento è multiplo di  $\sigma$  e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti del cammino.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert-van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Ad esempio:  $V_0 := S^2$   $V_g := P_{\frac{4g}{N}}$  con  $g \in \mathbb{N}, g \geq 1$  e  $P_{\frac{k}{N}}$  poligono con  $k$  lati e con identificazioni. Nel caso  $g = 1$  si ottiene un toro piatto. Si usano simboli combinatori per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente  $-1$  quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha  $aba^{-1}b^{-1}$ .

In generale si ha  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ .

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per  $g = 1$  si ha un toro, per  $g = 2$  un bitoro, ....  $g$  è detto **genere**.

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ \langle a_1b_1 \dots \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

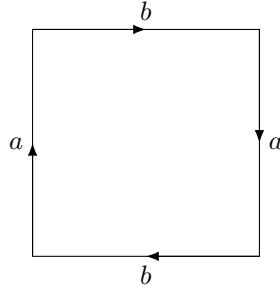


Figura 1.7: Toro piatto, o anche toro di Clifford

Dove  $[\cdot, \cdot]$  è il commutatore, cioè esattamente  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Solo per  $g = 0$  o  $g = 1$  si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.

$$\text{Ab}(\pi_1(X)) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] = \pi_1(X) / \pi'_1(X)$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che  $\text{Ab}(\pi_1(V_g)) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  per  $g \geq 2$ . Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura

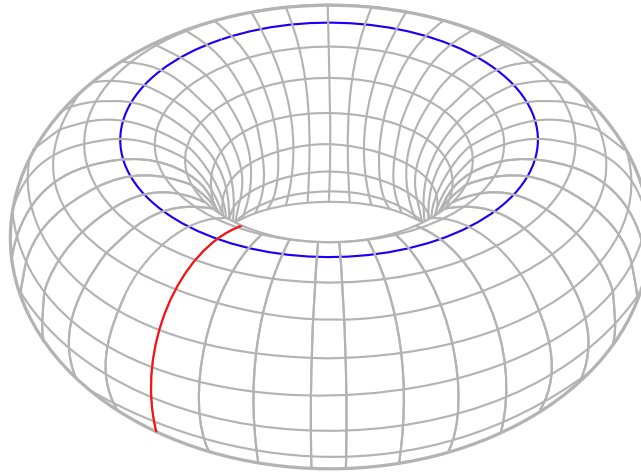


Figura 1.8: Generatori di un toro

L'abelianizzato è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo.

**Osservazione 1.1.54** Sia  $X$  uno spazio topologico connesso per archi,  $\mathcal{G}$  un gruppo abeliano. Suppongo esista un omomorfismo di gruppi  $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \mathcal{G}$  allora esiste  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow \mathcal{G}$

## 1 Omologia Singolare

omomorfismo di gruppi abeliani.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

$P$  è la proiezione sul quoziente.  $\varphi'$  esiste perchè in  $\text{Ab}(\pi_1(X))$  c'è tutto quello che sta nel nucleo.  $\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) := \varphi(c)$ . Allora  $\varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$ , devo mostrare che  $\varphi(c) = \varphi(d)$ . Siccome  $\mathcal{G}$  è abeliano  $p(c) \sim p(d)$ , e quindi  $c = d[x, y]$  per cui:  $\varphi(c) = \varphi(d[x, y])$ , siccome  $\varphi$  è omomorfismo:

$$\varphi(d[x, y]) = \varphi(d)\varphi([x, y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. Per questo  $\varphi'$  è ben definito.

Questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.

Voglio dimostrare che  $\text{Ab}(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$ , in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen posso ottenere tante informazioni su  $H_1(X)$ . Per ora so che  $H_1(X)$  è uno  $\mathbb{Z}$ -modulo. Se costruisco  $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$  ottengo gratuitamente la mappa da  $\text{Ab}(\pi_1(X))$  a  $H_1(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \downarrow P & \nearrow \varphi' & \\ \text{Ab}(\pi_1(X)) & & \end{array}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè  $\exists \psi : H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$  tale che  $\varphi' \circ \psi = \text{id}_{H_1(X)}$  e  $\psi \circ \varphi' = \text{id}_{\text{Ab}(\pi_1(X))}$ . Provo a costruire  $\psi$ .

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{\text{hom}} \end{aligned}$$

Usando il seguente risultato:

**Lemma 1.1.55** Se  $f \sim_H g$  allora  $f \sim_{\text{hom}} g$ .

**Dimostrazione:** Siccome  $f \sim_H g$  allora  $\exists F$  continua tale  $F : I \times I \rightarrow X$  tale che  $F(0, x) = f(x)$ ,  $F(1, x) = g(x)$  e  $F(t, 0) = x_0$  in quanto è un laccio. [FIGURA] Voglio mostrare che è il bordo di un 2-simplesso. Faccio l'equivalenza  $I \times I / 0 \times I \simeq \Delta_2$ . [FIGURA] E questo è omeomorfo a un 2-simplesso standard. Siccome rimane costante su  $x_0$  questa mappa induce  $F'$ :

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow P & \nearrow F' & \\ I \times I / 0 \times I \simeq \Delta_2 & & \end{array}$$

## 1 Omologia Singolare

Calcolo il bordo:  $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$  dove  $K$  è il cammino costante per definizione di omotopia. Se  $K$  fosse il bordo di qualcosa avrei finito ( $\partial w = f - g$ ). Prendo il 2-simplesso standard  $K$  costante e uguale a  $x_0$  (è la stessa costante di  $K$ ):

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)}$$

ma questi sono uguali perché sono costanti, quindi  $\partial K = K^{(2)} = k$ , cioè  $k$  è un bordo, quindi:

$$\partial F' = \partial K - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial K = f - g \Rightarrow \partial(F' - K) = f - g$$

$F' - K$  è 2-simplesso singolare, lo chiamo  $\sigma$ :  $\partial\sigma = f - g$ .  $f$  e  $g$  sono omologhi e  $\sigma$  è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia. ■

Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi sono in grado di costruire

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\rightarrow H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Nel far ciò non ho utilizzato l'ipotesi di connessione per archi. Ora voglio costruire  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  e lo faccio ancora senza l'ipotesi di connessione per archi. Mostro che  $\varphi'$  è omomorfismo, per far ciò basta che mostro che  $\varphi$  lo è. **Dimostrazione:** Siano  $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$  voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H [g]_H) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è vero se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{hom} + [g]_{hom}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{hom} = [f + g]_{hom}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti:

$$\exists T : \Delta_2 \rightarrow X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

[FIGURA, ROBA] ■

Al momento la situazione è che ho  $\varphi : H_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  omomorfismo di gruppi ben definito anche con  $X$  non necessariamente connesso per archi, e dato che  $H_1(X)$  è abeliano ho  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$ .

**Proposizione 1.156** *Se  $X$  è connesso per archi allora la mappa  $\varphi' : \text{Ab}(\pi_1(X)) \rightarrow H_1(X)$  è un isomorfismo.*

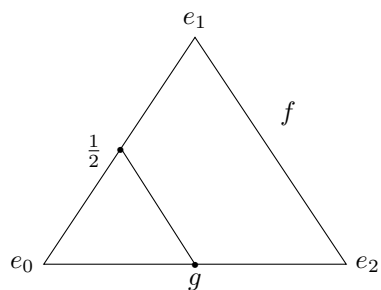


Figura 1.9: Costruzione dell'omomorfismo, deve avere valori costanti su rette parallele

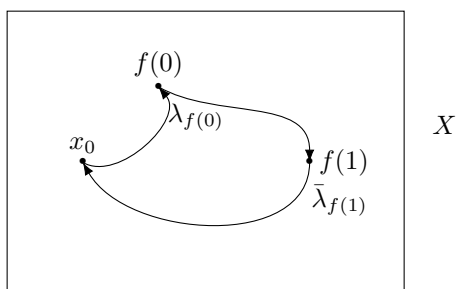


Figura 1.10: Dimostrazione della proposizione

**Dimostrazione:** *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* Per dimostrare che  $\varphi'$  è isomorfismo o dimostro che è iniettiva e suriettiva o che ammette un inverso. Procedo con la seconda possibilità: mostro che  $\exists \psi: H_1(X) \rightarrow \text{Ab}(\pi_1(X))$  tale che  $\psi$  è inverso di  $\varphi'$ . Considero un arco  $f: \Delta_1 \rightarrow X$  con  $f(0), f(1) \in X$ . Siccome lo spazio è connesso per archi esiste un cammino da  $x_0$  a  $f(0)$ , cioè una funzione  $\lambda_{f(0)}: I \rightarrow X$  tale che  $\lambda_{f(0)} = x_0$  e  $\lambda_{f(1)} = f(0)$ . Lo stesso vale per  $x_0$  e  $f(1)$ . Questi archi sono orientati partendo da  $x_0$ , posso considerare il cammino con verso opposto  $\bar{\lambda}_{f(1)}$  e quindi costruire il laccio di base  $x_0$ :  $\lambda_{f(0)} \star f \star \bar{\lambda}_{f(1)} =: \tilde{f}$ . Vale che  $\psi(f) = [\tilde{f}]$ . Bisogna mostrare che:

1.  $\psi$  è ben definito, cioè se  $f \sim g$  allora  $\psi(f) = \psi(g)$  e che  $\psi$  non dipende dalla scelta del cammino.
2.  $\psi$  è omomorfismo di gruppi
3.  $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$
4.  $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\text{Ab}(\pi_1(X))}$

Lo studente interessato può verificare queste asserzioni.

**Esercizio 3** Verificarli.

Una volta verificati si trova quindi che  $H_1(X) \cong \text{Ab}(\pi_1(X))$ . ■

Alcuni esempi:

- $H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  con  $g \geq 0$
- $H_1(\bigvee_{i=1}^k S^1) \cong \mathbb{Z}^k$  con  $\bigvee_{i=1}^k S^1$  bouquet, cioè  $k$  circonferenze incollate in un punto.
- $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$  (è un toro tappato)
- $H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}_2$  dove  $U_1$  è il piano proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$  con  $\vec{x} \sim \vec{y}$  se  $\vec{x} = a\vec{y}$  con  $a \in \mathbb{R}$
- $H_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  dove  $U_2$  è la bottiglia di Klein. Infatti  $\pi_1(U_2) = \{a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\}$  per abeliannizzarlo bisogna porre  $aba^{-1}b = 1$  e  $aba^{-1}b^{-1} = 1$  cioè  $b^2 = 1$  e  $a$  libero:  $\text{Ab}(\pi_1(U_2)) = \{a, b \mid aba^{-1}b = 1\}$ .

Se  $X$  è uno spazio topologico connesso per archi allora esiste:

$$\varphi: \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)] \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

Il problema è costruire

$$\psi: H_1(X) \rightarrow \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

Tale che:  $\varphi \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$  e  $\psi \circ \varphi = \mathbb{I}_{\pi_1(X)}$  So calcolare  $H_0(X)$  e  $H_1(X)$  se voglio calcolare gli altri  $H_k(X)$ ? Prima guardo come si comportano i gruppi sotto l'azione di applicazioni continue: Sia  $g: X \rightarrow Y$  mappa continua tra spazi topologici, mi chiedo  $g$  induce un'applicazione tra  $H_k(X)$  e  $H_k(Y)$ ? Considero  $\sigma: \Delta_k \rightarrow X$   $k$ -simplex singolare, posso considerare la composizione con  $g$ :

$$\Delta_k X \xrightarrow{\sigma} \xrightarrow{g} Y$$



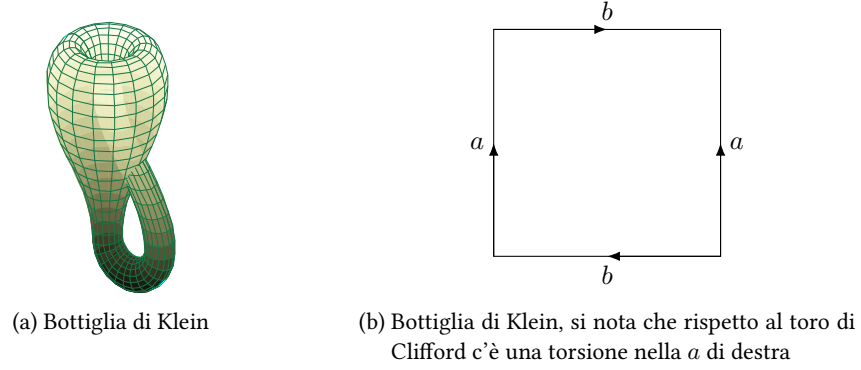


Figura 1.11: Bottiglia di Klein

## 1.2 Omologia delle sfere

Considero  $\mathcal{S}^n$  con  $n \geq 1$ , ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{se } k \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

**Corollario 1.2.1**  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  se e solo se  $n = m$ .

**Dimostrazione:** Se  $n = m$  vale che  $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$  quindi in particolare  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$  con la mappa identità. Assumo  $n \neq m$  e senza perdita di generalità pongo  $n > m$ .

Per assurdo  $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ , quindi esiste un omomorfismo  $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$ , quindi esiste anche l'omomorfismo inverso  $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$ . Quindi esistono anche:

$$F_* : H_k \mathcal{S}^n \rightarrow H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_* : H_k \mathcal{S}^m \rightarrow H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma  $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$  e  $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$ , ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_* \circ G_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_* \circ F_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che  $F_*$  e  $G_*$  sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \quad \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni  $k$  in particolare vale per  $k = n$ , cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma  $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$  da cui  $\mathbb{Z} \cong 0$ , che è assurdo. ■

**Corollario 1.2.2 (Invarianza topologica della dimensione)**  $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$  se e solo se  $n = m$ .

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzando solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione:** Per assurdo esiste un omomorfismo  $f: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$  con  $n > m > 2$ . Con il vincolo imposto su  $m$  e  $n$  gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $f(p) \in \mathbb{R}^m$ , e restringendo  $f$  in modo da ottenere l'omomorfismo  $f': \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\}$ . Si sa inoltre che per  $s \geq 2$  vale che  $\mathbb{R}^s \setminus \{q\} \simeq S^{s-1} \times \mathbb{R}$ , infatti è sufficiente mandare a 0 il punto  $q$  con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{q\} &\rightarrow S^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \simeq S^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left( \vec{x}, \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{f(p)\} \iff S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq S^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare  $\mathbb{R}$  dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che  $S^k \times \mathbb{R} \sim S^k$ , da cui  $S^{n-1} \sim S^{m-1}$ . Ma l'omologia è invariante omotopica, cioè  $H_k(S^{n-1}) \cong H_k(S^{m-1})$ , utilizzando il trucco di prima scelgo  $k = n - 1$  e quindi:

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \cong H_{n-1}(S^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. ■

**Corollario 1.2.3**  $S^{n-1}$  non è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$  per  $n \geq 2$

**Dimostrazione:** Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1 \} \quad S^{n-1} = \partial \mathcal{D}^n = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$$

Chiaramente esiste  $i: S^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$ .

**Definizione 1.2.4** Uno spazio topologico  $Y$  si dice **retrato di deformazione** di un altro spazio topologico  $X$  tale che  $Y \hookrightarrow X$  se esiste una funzione continua  $r: X \rightarrow Y$  che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione  $i: Y \rightarrow X$ , cioè tale che soddisfa:

1.  $r: X \rightarrow Y$  continua
2.  $i \circ r \sim \mathbb{I}_X$
3.  $r \circ i = \mathbb{I}_Y$

Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta **retrazione**.

## 1 Omologia Singolare

Suppongo per assurdo che  $\mathcal{S}^{n-1}$  è un retratto di deformazione di  $\mathcal{D}^n$ , cioè che esiste una retrazione  $r$ . Passando all'omologia:

$$\begin{aligned} i_*: H_k(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_k(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_k(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \\ (i \circ r)_* &= (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_* \text{ e } (r \circ i)_* = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_* \end{aligned}$$

Quindi:

$$i_* \circ r_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_* \circ i_* = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero  $k = n - 1$ :

$$\begin{aligned} i_*: H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{D}^n) \\ r_*: H_{n-1}(\mathcal{D}^n) &\rightarrow H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \end{aligned}$$

Cioè:  $i_*: \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Considero un generatore  $\alpha$  di  $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ , cioè tale che  $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$  allora  $i_*(\alpha) = 0$  quindi  $r_* \circ i_* = 0$ , ma  $(r \circ i)_* = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  quindi significherebbe  $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}(\alpha) = 0$ , cioè che  $\alpha = 0$ , che è assurdo perché  $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$ . ■

**Teorema 1.2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer)** Ogni funzione continua  $g: \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}^n$  con  $n \geq 2$  ammette almeno un punto fisso in  $\mathcal{D}^n$ , cioè:

$$\exists \vec{x}_0 \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$$

**Dimostrazione:** Per assurdo  $g$  non ammette punto fisso cioè esisto  $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$  tale che  $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$ . Sicuramente tuttavia  $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$ . Considero la retta  $l$  passante per  $\vec{x}$  e  $g(\vec{x})$ . Questa retta interseca il bordo di  $\mathcal{D}^n$  in due punti  $\{p_1, p_2\}$ :

$$l \cap \partial \mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{p_1, p_2\}$$

Definisco la mappa  $r: \mathcal{D}^n \rightarrow \partial \mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$  tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta  $l_{\vec{x}}$  che gli sta più vicino (infatti in  $\mathbb{R}^n$  è ben definita una nozione di distanza). La retta  $l_{\vec{x}}$  è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi  $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$ ) passa una e una sola retta.

**Esercizio 4** Dimostrare che  $r$  è continua.

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{array}{ccc} i: \mathcal{S}^{n-1} & \rightarrow & \mathcal{D}^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{array}$$

Se dimostro che  $r$  è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare  $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$  e  $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$ . La prima uguaglianza è certamente vera perché se  $\vec{x} \in \partial \mathcal{D}^n$  allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a  $\vec{x}$  stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome  $\mathcal{D}^n$  è convesso è ben definita  $G(t, \vec{x}) = (1-t)\vec{x} + tr(\vec{x})$  con  $t \in [0, 1]$ . Questa è una buona omotopia in quanto  $\forall t, \vec{x}$ :

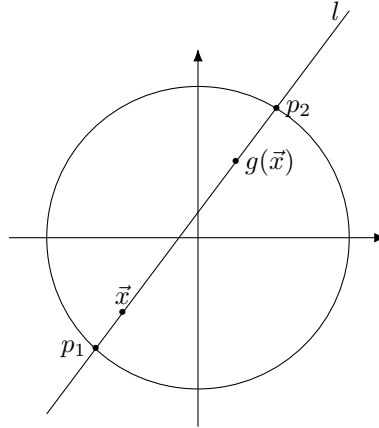


Figura 1.12: Schema per  $n = 2$

- $G$  è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{X}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{X}) = r(\vec{x})$

Quindi  $r$  è retrazione ma questo è assurdo. ■

### 1.2.1 Teoria del grado

Considero  $H_n(\mathcal{S}^m)$ , so che  $H_n(\mathcal{S}^m) \cong \mathbb{Z}$ , cioè esiste una mappa  $f: \mathbb{Z} \rightarrow H_n(\mathcal{S}^m)$  tale che  $f(1) = \alpha$  con  $\alpha$   $n$ -ciclo che non è un bordo. In questo modo  $H_n(\mathcal{S}^m) = \langle \alpha \rangle$ . Considero  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua con  $n \geq 1$ , so che esiste  $\varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) \rightarrow H_n(\mathcal{S}^n)$ . Per  $n = 0$   $\varphi_*$  manda punti in punti, per  $n \geq 1$ : sia  $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$  allora  $c = p\alpha$  con  $p \in \mathbb{Z}$ :

$$\varphi_*(c) = \varphi_*(p\alpha) = \varphi_*\underbrace{(\alpha + \alpha + \alpha + \dots)}_{|p| \text{ volte}} = \underbrace{\varphi_*(\alpha) + \varphi_*(\alpha) + \dots}_{|p| \text{ volte}} = p\varphi_*(\alpha)$$

Ma  $\varphi_*(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$  quindi si deve poter scrivere come multiplo di  $\alpha$ :  $\varphi_*(\alpha) = d\alpha$  da cui:  $\varphi_*(c) = pd\alpha = dc$  con  $d \in \mathbb{Z}$ . Questo numero  $d$  viene fuori dall'immagine di un generatore, ma non dipende dalla scelta del generatore, infatti:

Sia  $\beta$  un altro generatore, siccome  $\alpha$  è un generatore si può scrivere  $\beta = m\alpha$  con  $m \in \mathbb{Z}$ . Pongo come notazione:

$$\varphi_*(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_*(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_*(\beta) = m\varphi_*(\alpha) = md(\alpha)\alpha$$

## 1 Omologia Singolare

Da cui  $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$  cioè  $(d(\beta) - d(\alpha))\beta = 0$ , siccome questo vale per ogni  $\alpha$  e  $\beta$  allora  $d(\alpha) = d(\beta)$ .

**Definizione 1.2.6** Data un'applicazione  $\varphi: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  continua è possibile associargli in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_*: H_n(\mathcal{S}^n) & \rightarrow & H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha & \mapsto & \deg(\varphi)\alpha \end{array}$$

Con  $\alpha$  generatore.

Ad esempio per  $n = 1$  e  $p \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathcal{S}^1 & \rightarrow & \mathcal{S}^1 \\ z & \mapsto & z^p \end{array}$$

Vale che  $\deg(\varphi) = p$ , infatti prendo un generatore di  $\mathcal{S}^1$ : [MANCA MANCA MANCA]

Voglio usare la teoria del grado per un'applicazione del teorema della palla pelosa.

**Proposizione 1.2.7** Se  $f: \mathcal{S}^n \rightarrow \mathcal{S}^n$  è la riflessione rispetto all'iperpiano  $x_0 = 0$ , cioè  $f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (-x_0, x_1, x_2, \dots)$  allora il grado di  $f$  è  $-1$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione è per induzione. Per  $n = 1$  [MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA] ■

# Indice analitico

$\mathcal{R}$ -modulo, 4  
 $\mathbb{Z}$ -modulo libero, 5  
 $k$ -catene singolari, 11  
 $k$ -ciclo, 15  
 $k$ -simplesso singolare, 10

Anello, 4  
Anello commutativo, 4  
Anello unitario, 4  
Arco, 7

Bordo, 13

Cammino composto, 18  
Campo, 4  
Complesso di moduli, 6  
Complesso di moduli esatto, 6

Elementi omologhi, 15

Genere, 19  
Giunzione  
    *vedi* Cammino composto, 18  
Grado, 16  
Grado di una sfera, 29  
Gruppi di omotopia superiore, 9  
Gruppo derivato, 17  
Gruppo fondamentale, 8, 18  
Gruppo generato, 5

Immagine, 5  
Inclusione, 9  
Insieme compatto, 7  
Insieme convesso, 13  
Insiemi aperti, 6  
Inviluppo convesso, 13

Laccio, 17

Modulo di omologia, 6  
Modulo quoziente, 5

Nucleo, 5

Omeomorfismo, 7  
Omomorfismo, 5  
Omotopia  
    *vedi* Relazione di omotopia, 18  
Operatore faccia, 12

Rango di gruppo abeliano, 5  
Relazione di omotopia, 18  
Retratto di deformazione, 26  
Retrazione, 26  
Ricoprimento, 7

Semplicemente connesso, 19  
Simplesso standard, 10  
Spazio connesso, 7  
Spazio connesso per archi, 7  
Spazio contraibile, 19  
Spazio topologico, 6  
Spazio topologico puntato, 17

Teorema del punto fisso, 27  
Teorema di Seifert–van Kampen, 19  
Topologia, 6  
Topologia discreta, 6  
Topologia indotta, 7