Topologia Algebrica

Zitto e studia.

Parigi 1905
H. Poincarè

Professore:
Gilberto Bini

Scriba:
Gabriele Bozzola

Indice

1 Richimi di algebra e geometria **4**

1.1 Richiami di algebra . . . 4

1.2 Richiami sul gruppo fondamentale . . . 7

1.2.1 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$ . . . 10

2 Omologia Singolare **13**

2.1 Introduzione . . . 13

2.2 Simplessi singolari . . . 13

2.2.1 $H_0(X)$ . . . 20

2.2.2 $H_1(X)$ . . . 22

2.3 Morfismi indotti . . . 27

2.4 Successioni esatte . . . 30

2.4.1 Omomorfismo di connessione . . . 30

2.5 Omologia singolare relativa . . . 33

2.6 Omologia singolare ridotta . . . 36

2.7 Assioni di una teoria omologica . . . 38

2.8 Omologia delle sfere . . . 39

2.8.1 Teoria del grado . . . 42

3 Omologia cellulare **46**

3.1 Complessi CW . . . 46

Lista dei simboli e abbreviazioni

Simbolo	Significato	Pagina
$\mathbb{N}$	Numeri naturali	2
$\mathbb{Z}$	Numeri interi	2
$\mathcal{R}$	Anello	4
$< \cdots >$	Gruppo generato	5
$\mathrm{Ker}(f)$	Nucleo di f	5
$\mathrm{Im}(f)$	Immagine f	5
X	Spazio topologico	6
$\simeq$	Spazi omeomorfi	7
$\sim_H$	Relazione di omotopia	7
$\xrightarrow{\simeq}$	Omeomorfismo	11
π_1	Gruppo fondamentale	11
Δ_k	Simplesso standard	13
$\sim_{hom}$	Relazione di omologia	19

1 Richimi di algebra e geometria

1.1 Richiami di algebra

Definizione 1.1.1 *Un* ***anello*** *è un insieme $\mathcal{R}$ dotato di due operazioni $+$ e $\cdot$ tali che $\mathcal{R}$ sia un gruppo abeliano con l'addizione, sia un monoide con la moltiplicazione (ovvero la moltiplicazione è associativa e possiede un elemento neutro[1]) e goda della proprietà distributiva rispetto all'addizione.*

Definizione 1.1.2 *Un anello si dice* ***anello commutativo*** *se l'operazione di moltiplicazione è commutativa.*

Definizione 1.1.3 *Un* ***campo*** *è un anello commutativo in cui ogni elemento non nullo ammette un inverso moltiplicativo.*

Definizione 1.1.4 *Sia $\mathcal{R}$ un anello commutativo si definisce l'* ***$\mathcal{R}$-modulo*** *un gruppo abeliano $\mathcal{M}$ equipaggiato con un'operazione di moltiplicazione per uno scalare in $\mathcal{R}$ tale che $\forall v, w \in \mathcal{M}$ e $\forall a, b \in \mathcal{R}$ vale che:*

- $a(v + w) = av + aw$
- $(a + b)v = av + bv$
- $(ab)v = a(bv)$

Osservazione 1.1.5 *Se $\mathcal{R}$ è un campo allora l'$\mathcal{R}$-modulo è uno spazio vettoriale.*

Sostanzialmente la nozione di $\mathcal{R}$-modulo generalizza agli anelli il concetto di spazio vettoriale sui campi.

Osservazione 1.1.6 *Ogni gruppo abeliano $\mathcal{G}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo in modo univoco, cioè $\mathcal{G}$ è un gruppo abeliano se e solo e è uno $\mathbb{Z}$-modulo.*

Dimostrazione: Sia $x \in \mathcal{G}$ si definisce l'applicazione di moltiplicazione per un elemento $n \in \mathbb{Z}$ come

$$nx = \begin{cases} \underbrace{x + x + x + \dots}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{-x - x - x - \dots}_{|n| \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

[1] La richiesta di esistenza dell'elemento neutro, cioè dell'unità non è comune a tutti gli autori, chi non la richiede chiama anello unitario la presente definizione di anello.

Si verifica banalmente che questa operazione è ben definita e soddisfa le giuste proprietà perché la coppia $(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ sia uno $\mathbb{Z}$-modulo. A questo punto non è possibile costruire applicazioni diverse che soddisfino le proprietà richieste infatti utilizzando la struttura di anello di $\mathbb{Z}$: $nx = (1+1+1+1+\dots)x = x+x+x\dots$, quindi quella definita è l'unica possibile. $\square$

Definizione 1.1.7 *Un gruppo $\mathcal{G}$ si dice **generato** dai suoi elementi $x_1, x_2, \dots \in \mathcal{G}$ se ogni suo elemento si può scrivere come combinazione lineare a elementi interi di $x_1, x_2, \dots$. In questo caso si indica $\mathcal{G} = \langle\{x_1, x_2, \dots\}\rangle$.*

Definizione 1.1.8 *Un gruppo abeliano si dice **libero** se è generato da un numero finito di elementi linearmente indipendenti, il numero di tali elementi definisce il **rango** del gruppo.*

Definizione 1.1.9 *Siano $(X, \cdot)$ e $(Y, \star)$ due gruppi, un **omomorfismo** è un'applicazione f tra X e Y che preserva la struttura di gruppo, cioè tale che:*

$$\forall u, v \in X \quad f(u \cdot v) = f(u) \star f(v)$$

Osservazione 1.1.10 *Da questa definizione si trova immediatamente che gli omomorfismi si comportano bene nei confronti dell'inverso, cioè $\forall v \in X$ vale che $f(v^{-1}) = f(v)^{-1}$.*

Voglio studiare gli omomorfismi tra $\mathbb{Z}$-moduli.

Definizione 1.1.11 *Sia $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un omomorfismo tra gli $\mathcal{R}$-moduli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, allora si definisce il **nucleo** e l'**immagine** :*

$$\mathrm{Ker}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{M} \mid \varphi(m) = 0 \,\} \qquad \mathrm{Im}(\varphi) := \{\, m \in \mathcal{N} \mid \exists k \in M \text{ con } m = \varphi(k) \,\}$$

Osservazione 1.1.12 *$\mathrm{Ker}(\varphi)$ e $\mathrm{Im}(\varphi)$ sono $\mathcal{R}$-sottomoduli, cioè sono sottoinsiemi di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ che posseggono la struttura di $\mathcal{R}$-modulo.*

Se M_i sono $\mathcal{R}$-moduli posso fare composizioni di omomorfismi, come:

$$\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{M}_3 \text{ o equivalentemente } \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\varphi_2 \circ \varphi_1} \mathcal{M}_3$$

Proposizione 1.1.13 *Se vale $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ allora $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.*

Dimostrazione: Se $u \in \mathrm{Im}(\varphi_1)$ allora $\exists v \in \mathcal{M}_2$ tale che $\varphi_1(v) = u$, ma $\varphi_2(u) = \varphi_2(\varphi_1(v)) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v) = 0$ per ipotesi, quindi $u \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$. $\square$

Mi interessano questi morfismi perché hanno un preciso significato geometrico che sarà chiaro successivamente.

Definizione 1.1.14 *Siano $\mathcal{M}$ un $\mathcal{R}$-modulo e $\mathcal{N}$ un suo sottomodulo, allora il **modulo quoziente** di $\mathcal{M}$ con $\mathcal{N}$ e definito da:*

$$\mathcal{M}/_{\mathcal{N}} := \mathcal{M}/_{\sim} \quad \text{dove } \sim \text{ è definita da: } x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{N}$$

Dove $\mathcal{M}/_{\sim}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ equipaggiate con operazioni indotte dall'$\mathcal{R}$-modulo, cioè se $[u], [w] \in \mathcal{M}/_{\sim}$ e $a \in \mathcal{R}$:

- $[u] + [w] = [u + w]$
- $a[u] = [au]$

In questo caso gli elementi di $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ *sono le classi di equivalenza* $[m] = \{\, m + n \mid n \in \mathcal{N} \,\}$.

Siccome $\mathrm{Im}(\varphi)$ è sottomodulo di $\mathrm{Ker}(\varphi)$ allora posso prendere il quoziente:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$$

Questo è un sottomodulo. Si nota che questo è sensato solo se si impone la condizione $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$, altrimenti non c'è l'inclusione e quindi non è possibile fare l'operazione di quoziente.
A questo punto ci sono due possibilità:

1. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) = 0$, che significa che $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$ in quanto non ci sono elementi di $\mathrm{Ker}(\varphi_2)$ fuori da $\mathrm{Im}(\varphi_1)$, dato che l'unica classe di equivalenza presente è $[0]$ significa che $\forall m \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ $\exists n \in \mathrm{Im}(\varphi_2)$ tale che $m - n = 0$, cioè m e n coincidono e quindi $\mathrm{Ker}(\varphi_2) = \mathrm{Im}(\varphi_1)$.

2. $\mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq 0$, cioè $\exists v \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tale che $v \notin \mathrm{Im}(\varphi_1)$ e quindi $\mathrm{Im}(\varphi_1) \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi_2)$.

Nel primo caso si dice che la successione dei moduli $\mathcal{M}$ e delle applicazioni φ è **esatta** in $\mathcal{M}_2$, nel secondo caso la successione è detta **complesso di moduli**.
Sostanzialmente il modulo quoziente quantifica la non esattezza nel punto $\mathcal{M}_2$ della successione.

Definizione 1.1.15 $H(\mathcal{M}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)/\mathrm{Im}(\varphi_1)$ *è detto* ***modulo di omologia*** *del complesso* $M_\bullet = M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$ *con le applicazioni* φ_1 *e* φ_2.

Per questo $H(\mathcal{M}_\bullet)$ quantifica quanto il complesso $\mathcal{M}_\bullet$ non è esatto.
Questo deriva da un problema topologico concreto.

Definizione 1.1.16 *La coppia* $(X, \mathcal{T})$ *è detta* ***spazio topologico*** *(generalmente si omette la* $\mathcal{T}$*) se* $\mathcal{T}$ *è una* ***topologia****, cioè se è una collezione di insiemi di* X *tali che:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3. $\bigcap_{n\in\{\,0,1,\dots,N\,\}} A_n \in \mathcal{T}$ *se* $A_n \in \mathcal{T}$ $\forall n \in \{\,0, 1, \dots, N\,\}$

Gli elementi di $\mathcal{T}$ *sono detti* ***aperti****.*

Osservazione 1.1.17 *Se* τ *è la collezione di tutti i sottoinsiemi di* X *allora le proprietà sono automaticamente verificate e questa è la* ***topologia discreta****, invece* $\tau = \{\,\emptyset, X\,\}$ *è una topologia ed è la* ***topologia triviale****. Infine in* $\mathbb{R}^n$ *si definisce la* ***topologia usuale*** *che è la topologia in cui gli aperti sono iperintervalli aperti del tipo* $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \cdots \times (a_n, b_n)$. *Si dimostra che se si ammettono intersezioni infinite allora la topologia usuale coincide con la topologia triviale in* $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.1.18 *Uno spazio metrico si può rendere topologico definendo gli insiemi aperti come gli intorni sferici aperti.*

Osservazione 1.1.19 *Sia $A \subseteq X$ spazio topologico, si può rendere anche A uno spazio topologico equipaggiandolo con la **topologia indotta** in cui gli aperti sono gli aperti di X intersecati con A.*

Osservazione 1.1.20 *Uno spazio topologico è **connesso** se si può scrivere come unione disgiunta di due suoi aperti.*

Definizione 1.1.21 *Sia X uno spazio topologico l'insieme $\{ A_i \mid A_i \in X \ \forall i \}$ è un **ricoprimento** di X se:*

$$\bigcup_i A_i = X$$

*Se in particolare gli insiemi A_i sono aperti il ricoprimento è detto **ricoprimento aperto**.*

Definizione 1.1.22 *Un insieme U è detto **compatto** se per ogni suo possibile ricoprimento aperto ne esiste un sottoinsieme che è un ricoprimento* finito *di U.*

Definizione 1.1.23 *Una mappa tra spazi topologici è detta **omeomorfismo** se è continua e ammette inverso continuo, cioè se è una mappa uno a uno. Se due spazi sono omeomorfi si utilizza il simbolo $\simeq$.*

Siccome gli omeomorfismi sono mappe uno a uno due spazi omeomorfi sono essenzialmente identici. La relazione di omeomorfismo costituisce una relazione di equivalenza. Molti degli strumenti sviluppati in questo corso servono a capire se due spazi sono omeomorfi o meno.

1.2 Richiami sul gruppo fondamentale

Definizione 1.2.1 *Sia X uno spazio topologico e x_0 un suo punto, allora un **laccio** è un arco in X avente come punto di partenza e punto di arrivo il punto x_0. Un laccio c_{x_0} si dice **costante** se $\forall t \in I$ $c_{x_0}(t) = x_0$ con $x_0 \in X$.*

Vorrei strutturare l'insieme dei lacci in uno spazio X come un gruppo con l'operazione di giunzione e avente come unità il laccio costante. Questo non si riesce a fare perché non sempre la giunzione di un laccio con il suo inverso è il laccio costante. Per questo si passa al quoziente rispetto la relazione di omotopia.

Definizione 1.2.2 *Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un suo punto, allora la coppia (X, x_0) è detta **spazio topologico puntato**.*

Definizione 1.2.3 *Sia (X, x_0) uno spazio topologico puntato e $f : I \to X$ una mappa continua tale che $f(0) = f(1) = x_0$ $\forall t \in I$, cioè un laccio di base x_0, si dice che una funzione continua g è **omotopicamente equivalente** a f ($g \sim_H f$) se esiste una funzione continua $F \colon I \times I \to X$ tale che:*

- $F(0, x) = f(x) \ \forall x \in I$
- $F(1, x) = g(x) \ \forall x \in I$
- $F(t, 0) = x_0 \ \forall s \in I$
- $F(t, 1) = x_0 \ \forall s \in I$

*La relazione $\sim_H$ è detta **relazione di omotopia tra lacci** e si dimostra essere una relazione di equivalenza.*

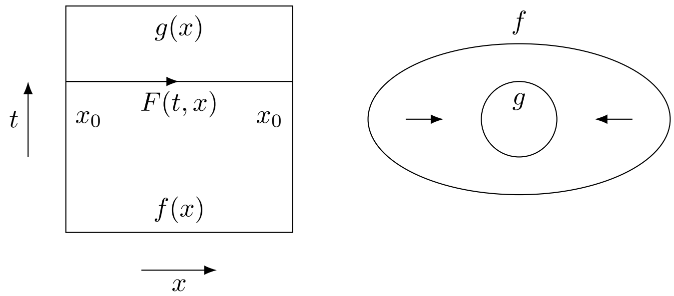


Figura 1.1: Omotopia: deforma f in g in modo continuo.

Si definisce l'insieme;

$$\pi_1(X, x_0) = {\{ f : I \to X \mid f \text{ continua}, f(0) = f(1) = x_0 \}}\big/_{\sim_H}$$

Questo insieme può essere equipaggiato con un'operazione di somma facendolo diventare un gruppo, questo è noto come **gruppo fondamentale**, e i suoi elementi si indicano con la usuale notazione di classe di equivalenza. Si vogliono definire le operazioni di gruppo: siano $[f], [g] \in \pi_i(X, x_0)$, si definisce $[f][g] := [f \star g]$, dove l'operazione $\star$ è il **cammino composto**, o **giunzione**, definita da:

$$(f \star g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Cioè è un cammino di base x_0 percorso a velocità doppia, metà del tempo percorso su f l'altra metà su g. L'elemento neutro di questa operazione è il cammino costante $1_{\pi_1(X,x_0)} = [C_{x_0}]$ con $C_{x_0}(t) = x_0 \ \forall t$. L'inverso di un elemento invece è $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ dove $\bar{f}$ è il cammino percorso in verso opposto, cioè definito da $\bar{f}(t) = f(1-t)$, in questo modo $\bar{f}(0) = f(1)$ e $\bar{f}(1) = f(0)$.

Alcune proprietà del gruppo fondamentale:

- $\pi_1(X, x_0)$ è invariante omotopico, cioè se $X \sim_H Y$, cioè se

  $$\exists f : X \to Y, g : Y \to X \mid f \circ g \sim_H 1_Y \text{ e } g \circ f \sim_H 1_X$$

  allora $\pi_1(X, x_o) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$. Questo in particolare porta alla seguente utile osservazione:

Osservazione 1.2.4 *Se due spazi topologici puntati hanno gruppi fondamentali non isomorfi allora non possono essere omotopicamente equivalenti.*

- Se X è **contraibile** (cioè è omotopo ad un punto) allora vale che $\pi_1(X, x_0) \cong 1$, cioè il gruppo fondamentale è banale.
- Si dimostra che:

  Proposizione 1.2.5 *Se uno spazio tologico X è connesso per archi allora tutti i gruppi fondamentali degli spazi puntati (X, x_0) sono isomorfi, cioè si può omettere la dipendenza da x_0.*

  Questo intuitivamente è vero perché se gli spazi sono connessi per archi allora esistono cammini che collegano qualunque coppia di punti.

Definizione 1.2.6 *Uno spazio topologico connesso per archi si dice* ***semplicemente connesso*** *se il suo gruppo fondamentale è banale.*

Osservazione 1.2.7 *Tutti gli spazi contraibili sono semplicemente connessi, ma non tutti gli spazi semplicemente connessi sono contraibili, come ad esempio $\mathcal{S}^2$.*

- $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, infatti si può costruire la mappa:

  $$\begin{aligned} \sigma\colon I &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

  Questa è tale che $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ quindi $[\sigma] \in \pi_1(\mathcal{S}^1)$ e:

  $$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{S}^1) &\to \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto 1 \end{aligned}$$

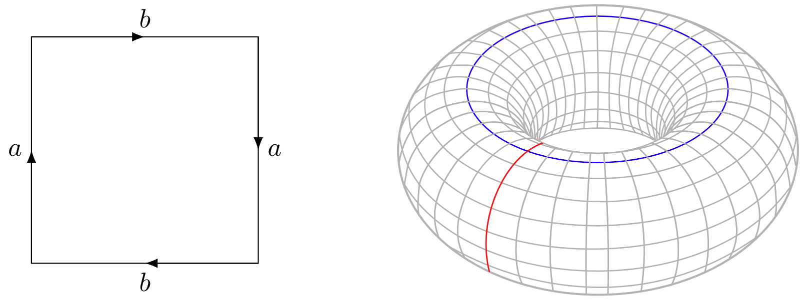
  Ogni elemento è multiplo di σ e il fattore di proporzionalità conta il numero di avvolgimenti con segno del cammino su sé stesso.

- $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$
- Il gruppo fondamentale si calcola o partendo da gruppi omotopi oppure utilizzando il **teorema di Seifert–van Kampen**, il quale fornisce un metodo algoritmico per il calcolo.

Esempio 1.2.8 *Si definisce:*

$$V_g = \begin{cases} \mathcal{S}^2 & \text{se } g = 0 \\ P_{\frac{4g}{N}} & \text{se } g \geq 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con $P_{\frac{k}{N}}$ poligono con k lati e con identificazioni a coppie, come ad esempio nel caso $g = 1$ si ottiene un toro piatto identificando lati opposti di un quadrato. Si usano simboli combinatori



(a) Toro piatto, o anche toro di Clifford

(b) Generatori di un toro

Figura 1.2: Toro

per descrivere l'identificazione: si definisce un verso di percorrenza, si assegnano delle lettere a ciascun lato e si scrivono in ordine tali lettere, aggiungendo un esponente -1 *quando il verso di percorrenza è opposto. In questo caso quindi si ha* $aba^{-1}b^{-1}$. *Questo si estende a poligoni con* $4g$ *lati e si usa l'identificazione* $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$.

Si dimostra che queste sono varietà differenziabili, in particolare per $g = 1$ *si ha un toro, per* $g = 2$ *un bitoro, ...* g *è detto* ***genere*** .

Si trova con il teorema di Seifert-Van Kampen che:

$$\pi_1(V_g) \cong \begin{cases} 1 & \text{se } g = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } g = 1 \\ \langle a_1b_1 \dots \Pi_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \rangle & \text{se } g > 1 \end{cases}$$

Dove $[,]$ *è il commutatore, cioè esattamente* $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$. *Solo per* $g = 0$ *o* $g = 1$ *si ottengono dei gruppi abeliani, ma io vorrei averlo sempre abeliano, quindi lo abelianizzo.*

$$\mathrm{Ab}\left(\pi_1(X)\right) = {}^{\pi_1(X)}\big/_{[\pi_1(X), \pi_1(X)]} = {}^{\pi_1(X)}\big/_{\pi_1'(X)}$$

Chiaramente questo gruppo è abeliano e si calcola facilmente che $\mathrm{Ab}\left(\pi_1(V_g)\right) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ *per* $g \geq 2$, *infatti il gruppo è generato su* $2g$ *generatori* $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$ *e poi si impone la relazione di identificazione e i commutatori diventano tutti banali. Si vedono facilmente anche i generatori, ad esempio per un toro sono riportati in figura.*

1.2.1 Omomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^N$

Definizione 1.2.9 *Un* ***arco*** *in uno spazio topologico* X *tra i punti* $x_0 \in X$ *e* $y_0 \in X$ *è una funzione continua da* $I = [0, 1]$ *a* X *tale che* $\alpha(0) = x_0$ *e* $\alpha(1) = y_0$. *Si dice che l'arco parte da* x_0 *e finisce in* y_0.

Definizione 1.2.10 *Uno spazio topologico* X *è* ***connesso per archi*** *se per ogni coppia di punti* $x, y \in X$ *esiste un arco che parte da* x *e termina in* y.

Definizione 1.2.11 *Uno spazio topologico X si dice* ***connesso per archi*** *se $\forall x, y \in X$ esiste un arco con punto iniziale x e punto finale y.*

Proposizione 1.2.12 *Se $f : X \to Y$ è una mappa continua suriettiva tra spazi topologici e se X è connesso per archi allora Y è connesso per archi. Questo vale in particolare se f è un omeomorfismo, cioè la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi.*

Dimostrazione: Siano y_0, y_1 due punti di Y. La funzione f è suriettiva, e dunque esistono x_0 e x_1 in X tali che $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. Dato che X è connesso, esiste un cammino $\alpha : [0, 1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Ma la composizione di funzioni continue è continua, e quindi il cammino ottenuto componendo α con f: $f \circ \alpha : [0, 1] \to X \to Y$ è un cammino continuo che parte da y_0 e arriva a y_1. □

Si sa inoltre che:

Proposizione 1.2.13 *$\mathbb{R}^n$ è connesso per archi $\forall n \in \mathbb{N}$.*

È noto che $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 2$, infatti basta togliere un punto a $\mathbb{R}$ che diventa sconnesso per archi mentre $\mathbb{R}^N$ rimane connesso per archi anche togliendogli un punto. In questa dimostrazione ho utilizzato il seguente risultato fondamentale:

Proposizione 1.2.14 *Se $f : X \to Y$ è omeomorfismo tra spazi topologici allora $f|_U : U \to f(U)$ è omeomorfismo per ogni $U \subseteq X$.*

Nel caso considerato $U = x_0$, siccome ho trovato un U per cui la funzione ristretta non è omeomorfismo f non può essere omeomorfismo. Infatti l'immagine di un punto rimane un punto.

Tuttavia vale anche che $\mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}^N$ per $n \geq 3$, infatti:

Dimostrazione: Per assurdo $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N$ è un omeomorfismo con $n \geq 3$, tolgo un punto da $\mathbb{R}^2$, se f omeomorfismo anche la restrizione deve essere omeomorfismo, cioè $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f : \mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^N \setminus \{ f(p) \}$. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{ p \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$ con la mappa $\vec{x} \mapsto \left(||\vec{x}||, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right)$ (dopo aver fatto una traslazione di p nell'origine, operazione che è certamente un omeomorfismo). In pratica sto dicendo che il piano senza un punto è omeomorfo ad un cilindro infinito. Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{ f(p) \} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi se esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ significherebbe che $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma quindi i gruppi fondamentali dovrebbero essere isomorfi: $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) \simeq \pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1})$ ma $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ infatti il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$, $\pi_1(\mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ dato che i lacci omotopicamente distinti sono quelli che avvolgono il buco un numero differente di volte. Analogamente $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ perché le sfere sono contraibili. Trovo quindi che dovrebbero essere isomorfi $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 1$ che è assurdo. □

Ho quindi dedotto proprietà topologiche a partire da considerazioni algebriche (con il gruppo fondamentale). Il gruppo fondamentale è un invariante algebrico per problemi topologici.

Definizione 1.2.15 *Si definisce il* ***gruppo fondamentale*** *di uno spazio topologico X connesso per archi attorno al punto $x_0 \in X$*

$$\pi_1(X, x_0) = {\{ g : \mathcal{S}^1 \to X \mid g \text{ continua}, g(1) = x_0 \}}\big/_{\sim}$$

e $\sim$ è la relazione di omotopia: $g_1 \sim g_2$ se $\exists G : \mathcal{S}^1 \times I \to X$ tale che $G(z, 0) = g_1(z), G(z, 1) = g_2(z), G(1, t) = x_o$ con G continua. In questo vedo $\mathcal{S}^1$ come sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con la topologia indotta (il punto 1 è un punto della circonferenza vedendola come insieme nello spazio complesso $\mathcal{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$).

Sostanzialmente il gruppo fondamentale è l'insieme dei lacci quozientato rispetto alla relazione di omotopia. Infatti g è un laccio dato che è un arco e il punto di partenza e il punto di arrivo necessariamente coincidono dato che g è definito su $\mathcal{S}^1$. Questo perché l'insieme dei lacci non è strutturabile come gruppo in quanto il laccio costante non è l'unità.

Ora voglio mostrare per assurdo che non esiste omomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione: Come nel caso precedente suppongo esiste f omeomorfismo tra $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^n$, tolgo q da $\mathbb{R}^3$ e $f(q)$ da $\mathbb{R}^n$, quindi ottengo l'omomorfismo tra $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^2 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, ma i gruppi fondamentali associati sono banali, quindi sono isomorfi, e non è possibile replicare il ragionamento utilizzato sopra. □

Poincaré introdusse i gruppi di omotopia superiore.

Definizione 1.2.16 *Si definiscono i* ***gruppi di omotopia superiore*** *di uno spazio topologico X attorno al punto x_0 per $k \geq 2$:*

$$\pi_k(X)(X, x_0) = \{ g : \mathcal{S}^k \to X \mid g \text{ continua},\ g(p_0) = x_0 \} /_{\sim}$$

Con $p_0 \in \mathcal{S}^k$ e $\sim$ relazione di omotopia.

Studiare i gruppi di omotopia superiore è un problema aperto della topologia moderna. Tuttavia si sa che:

1. $\pi_k(\mathcal{S}^m) = 1 \quad \text{per} \quad 1 \leq k < m \quad (m > 2)$
2. $\pi_m(\mathcal{S}^m) \simeq \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad k = m$
3. $\pi_1(\mathcal{S}^2) = 1$
4. $\pi_2(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$
5. $\pi_3(\mathcal{S}^2) \simeq \mathbb{Z}$[2]

Definizione 1.2.17 *Sia $A \subseteq X$ con X spazio topologico $i : A \to X$ si definisce mappa di* ***inclusione*** *e si scrive $i : A \hookrightarrow X$ se $\forall a \in A$ vale che $i(a) = a$.*

Anche se non so calcolare i gruppi di omotopia superiore non vorrei buttarli via…Vorrei degli invarianti algebrici per problemi topologici, come i gruppi di omotopia.

[2]Questo da origine alla fibrazione di Hopf che ha molte applicazioni in fisica.

2 Omologia Singolare

2.1 Introduzione

Inizio definendo l'omologia singolare, che è la più generale.

2.2 Simplessi singolari

Uso la teoria dell'omologia che mi permette di semplificare i problemi. La teoria dell'omologia serve ad associare agli spazi topologici degli oggetti algebrici meno complicati dei gruppi di omotopia. Ci sono varie possibilità:

- Omologia singolare
- Omologia cellulare
- Omologia persistente[1]
- Omologia simpliciale

Ma cosa è l'omologia? Assocerò ad ogni spazio topologico (anche patologico) gruppi abeliani e omomorfismi a partire da applicazioni continue tra due spazi topologici. In tutto questo lavoro sempre con anello di base $\mathbb{Z}$, che quindi rimane sottinteso a meno di scriverlo esplicitamente.

Definizione 2.2.1 *In $\mathbb{R}^{k+1}$ si definisce il **simplesso standard** Δ_k l'insieme:*

$$\Delta_k = \{ (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \forall i \; 0 \leq x_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1 \}$$

*Le coordinate x_i sono dette **coordinate baricentrali**.*

Osservazione 2.2.2 *Alcuni esempi sono:*

- Δ_0 *è un punto.*
- Δ_1 *è un segmento, che è omeomorfo a* $[0, 1]$.
- Δ_2 *è un triangolo*
- Δ_3 *è un tetraedro*
- $\dots$

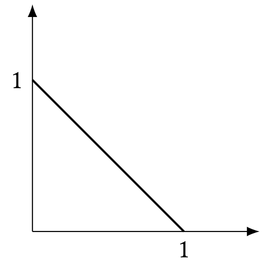
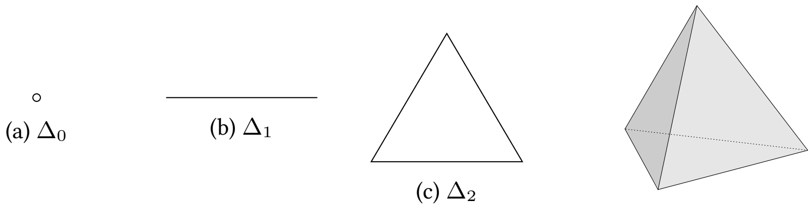


Figura 2.1: 1-Simplesso standard



(a) Δ_0 (b) Δ_1 (c) Δ_2 (d) Δ_3

Figura 2.2: Simplessi standard

Definizione 2.2.3 *Dato uno spazio topologico X si definisce il k-**simplesso singolare** in X come un'applicazione continua $\sigma : \Delta_k \to X$.*

Spesso conviene identificare il k-simplesso con la sua immagine in X. In questo modo uno 0-simplesso è un punto in X, mentre un 1-simplesso singolare potrebbe essere sia un segmento che un punto (se la mappa è costante). Siccome non c'è relazione tra la dimensione dello spazio di partenza e lo spazio di arrivo (ad esempio la curva di Peano) il simplesso può deformare, ed è per questo che è detto singolare.

Esempio 2.2.4 *Un esempio di k-simplesso singolare in cui è particolarmente evidente la possibilità di fare l'identificazione è la mappa identità: $\mathbb{I} : \Delta_k \to \Delta_k$.*

Voglio costruire un complesso di gruppi abeliani e definire l'omologia singolare come l'omologia di tale complesso.

$S_\bullet$ è il compesso (S sta per singolare), cioè:

$$\cdots \to S_{k+1}(X) \to S_k(X) \to S_{k-1}(X) \to \cdots \to S_0(X)$$

Dove:

$$S_k(X) = \{\text{combinazioni lineari finite a coefficienti interi:} \\ \sum_g n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z}, g\ k - \text{simplessi singolari di } X\}$$

[1]Questa ha numerose applicazioni pratiche, come la ricostruzione di immagini.

$S_k(X)$ è un gruppo abeliano con l'operazione somma definita naturalmente:

$$\sum_g n_g g + \sum_h n_h h = \sum_g n_g g + \sum_g n_g^\star g = \sum_g (n_g + n_g^\star) g$$

Inoltre $\forall k < 0$ si pone $S_k(X) = 0$. Un elemento generico di $S_k(X)$ è una somma formale finita (cioè con un numero finito di coefficienti non nulli) su tutti i possibili k-simplessi singolari in X.

Esempio 2.2.5

$$(n_1 g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3) + (m_1 g_1 + m_4 g_4) = (n_1 + m_1) g_1 + n_2 g_2 + 2n_3 g_3 + m_4 g_4$$

Questa è una somma con tutte le giuste proprietà. Lo zero è la catena con tutti i coefficienti nulli, mentre l'inverso è la catena con i coefficienti opposti. Queste catene sono chiamate k-**catene singolari**. $S_k(X)$ è generato da tutte le possibili applicazioni continue da Δ_k a X, cioè:

$$S_k(X) = \langle \{ \, g \mid g \ k\text{-simplesso singolare in } X \, \} \rangle$$

Si nota che le catene sono somme formali di mappe e non sono esse stesse mappe.

Esempio 2.2.6 ($k = 0$) *Se $k = 0$ allora $S_0(X)$ sono catene di punti ($g_0 : \Delta_0 \to X$, identifico l'applicazione con il punto in X sapendo che l'immagine di un punto è un punto)*

$$S_0(X) = \{ \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \ p_i \in X \, \}$$

Osservazione 2.2.7 *Quando è possibile faccio un abuso di notazione e identifico la mappa con la sua immagine nello spazio topologico.*

Ora devo introdurre le applicazioni tra i vari S_k, queste applicazioni saranno il bordo. Definisco $h : \Delta_1 \to X$ in modo tale che $h(\Delta) = \alpha$ dove α è un **arco**.

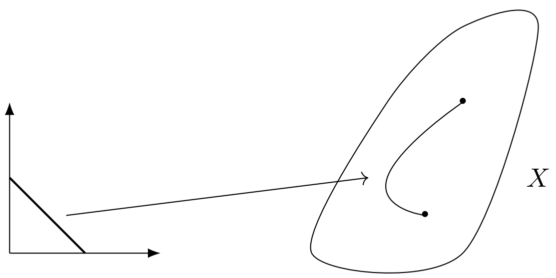


Figura 2.3: 1-Simplesso singolare

Posso ottenere una 0-catena prendendo i punti estremi dell'arco, infatti il bordo di un 1-simplesso è uno 0-simplesso. L'idea è quindi ottenere simplessi di ordine più piccolo prendendo il bordo dei simplessi.

Definizione 2.2.8 *Sia Δ_k un k-simplesso standard con $k \geq 0$ si definisce l'operatore* ***faccia*** *come la mappa ${F_i}^k : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ tale che ${F_i}^k(\Delta_{k-1})$ è una faccia di Δ_k.*

L'operatore faccia prende un k-simplesso standard e lo immerge in un qualche senso in un simplesso più grande, ad esempio manda un punto in uno degli estremi di un segmento (nel caso $k = 0$),

Esempio 2.2.9 ($k = 2$) *Per $k = 2$ vale che:*

$$\Delta_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ 0 \leq x_i \leq 1\ \forall i \,\}$$

Si definisce la base $e_0 = (1, 0, 0)$ $e_1 = (0, 1, 0)$ $e_2 = (0, 0, 1)$, voglio vedere il bordo del triangolo come facce.

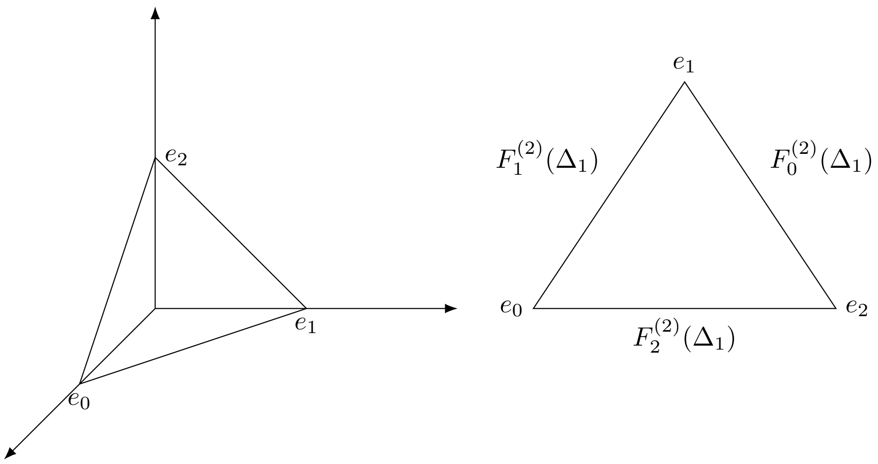


Figura 2.4: Azione dell'operatore faccia

Il segmento faccia i-esimo è quello che non contiene il vertice i-esimo, cioè *dimentico* un punto e gli altri punti diventano vertici del simplesso.

In generale se Δ_k è un simplesso standard definisco la base canonica (si noti che la base canonica è ordinata):

$$\begin{gathered} e_0 = (1, 0, 0, \dots) \\ e_1 = (0, 1, 0, \dots) \\ e_2 = (0, 0, 1, \dots) \\ \dots \end{gathered}$$

Questi sono i vertici del simplesso, definisco l'azione dell'operatore faccia come:

$$\begin{cases} {F_i}^k(e_j) = e_{j+1} & \text{se } j \geq i \\ {F_i}^k(e_j) = e_j & \text{se } j < i \end{cases}$$

Se fosse un tetraedro dimenticando punti ottengo triangoli e dimenticando triangoli ottengo punti, come è giusto.

Esercizio 1 *Dimostrare che se* $[\cdot, \cdot]$ *indica l'inviluppo convesso allora:*

1. *Per* $j > i$ *vale che* ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^{k} = [e_0, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, e_k]$.
2. *Per* $j \leq i$ *vale che* ${F_i}^{k+1} \circ {F_i}^{k} = [e_0, \ldots, \hat{e}_j, \ldots, \hat{e}_{i+1}, \ldots, e_k]$.

dove i cappucci indicano che quell'elemento è omesso.

Definizione 2.2.10 *L'**inviluppo convesso** di un insieme* U *in* $\mathbb{R}^n$ *è il più piccolo insieme convesso che contiene* U.

Definizione 2.2.11 *Un insieme in* $\mathbb{R}^n$ *si dice **convesso** se contiene il segmento che unisce ogni coppia di punti dell'insieme.*

Definizione 2.2.12 *Dato un* k*-simplesso singolare* $\sigma : \Delta_k \to X$ *si definisce la mappa* $\sigma^{(i)} : \Delta_{k-1} \to X$ *come la restrizione di* σ *sulla faccia* i*-esima del simplesso, cioè* $\sigma^{(i)} = \sigma \circ {F_i}^{k}$*, si definisce quindi il **bordo** come la mappa:*

$$\begin{aligned} \partial \colon \Sigma_k(X) &\to \Sigma_{k-1}(X) \\ \sigma &\mapsto \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma^{(i)} \end{aligned}$$

dove $\Sigma_k(X)$ *indica lo spazio dei* k*-simplessi singolari di* X.

Il bordo sostanzialmente corrisponde alla somma alterna delle facce.

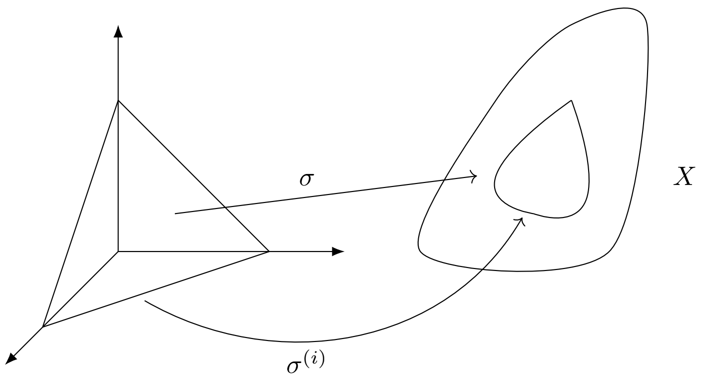


Figura 2.5: Azione di σ e $\sigma^{(i)}$

Esempio 2.2.13 ($k = 1$) *Per $k = 1$ vale che $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$, infatti:*

$$\sigma^0 = \sigma \circ {F_0}^1 = \sigma(1) = p_1$$
$$\sigma^1 = \sigma \circ {F_1}^1 = \sigma(0) = p_0$$

Il bordo è la somma con i segni alternati: $\partial_1 \sigma = p_1 - p_0$. Tecnicamente il bordo è una mappa quindi sarebbe più corretto scrivere $\partial_1 \sigma = \sigma^{(1)} - \sigma^{(0)}$ dove l'azione di queste due mappe è quella di mandare un estremo dell'intervallo $[0, 1]$ in p_0 o p_1.

Allora si definisce l'operatore bordo sul complesso delle catene $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ estendendolo per linearità $\partial_k \left(\sum_g n_g g \right) = \sum_g n_g \partial_k g$ (infatti si è definita l'azione sui generatori g).

Devo mostrare che ∂_k è un omomorfismo e che soddisfa $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$. Comincio con il fatto che è un omomorfismo.

Dimostrazione:

$$\partial_k \left(\sum_g n_g g + \sum_g m_g g \right) = \partial_k \left(\sum_g (m_g + n_g) g \right) = \sum_g (m_g + n_g) \partial_k g =$$
$$= \sum_g n_g \partial_k g + \sum_g m_g \partial_k g = \partial_k \left(\sum_g n_g g \right) + \partial_k \left(\sum_g m_g g \right)$$

Dove si è usato che la mappa di bordo è lineare. □

Quindi il complesso è costituito da:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Devo verificare che $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ (spesso come notazione si pone $\partial^2 = 0$). <u>SISTEMARE</u>

Dimostrazione: Se σ è un k-complesso singolare, cioè $\sigma : \Delta_k \to X$ continua:

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} \sigma = \partial_k \left(\sum_{j=0}^{k+1} (-)^j (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) \right) = \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \partial_k (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{k+1} (-)^j \sum_{i=0}^{k} (-)^i (\sigma \circ {F_j}^{k+1}) \circ {F_i}^k = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-)^{j+i} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_j}^k =$$
$$= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_i}^k + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ F_i^k =$$

Rinominando nella seconda sommatoria …

$$= \sum_{0 \le i < j \le k+1} (-)^{i+j} \sigma \circ {F_j}^{k+1} \circ {F_i}^k + \sum_{0 \le j < i \le k} (-)^{i+j} \sigma \circ F_{i+1}^{k+1} \circ {F_j}^k =$$
$$= 0$$

Dove nel penultimo passaggio si sono utilizzate le identità lasciate da dimostrare come esercizio, e nell'ultimo si è rinominato nel secondo termine $i + 1$ con i.

Esercizio 2 *Verificare che fa veramente zero.*

Si nota che è di importanza cruciale il fatto che si è definito il bordo con i segni alternati. □

Sia X uno spazio topologico, voglio definire l'omologia singolare $H_k(X)$, cioè il k-esimo gruppo di omologia singolare. Costruisco il complesso $(S_\bullet(X), \partial)$ con:

$$S_k(X) = \{ \sum_g n_g g \mid g \text{ simplesso singolare}, n_g \in \mathbb{Z} \}$$

E $\partial_k : S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ applicazione di bordo con $\partial_k(g) = \sum_{i=0}^k (-)^i g^{(i)}$ con $g : \Delta_k \to X$, e poi lo estendo per linearità su tutti gli elementi di S, dove $g^{(i)} = g \circ {F_i}^k$.

Siccome $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ si ha il complesso

$$\dots \xrightarrow{\partial_{k+1}} S_k(X) \xrightarrow{\partial_k} S_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots$$

Inoltre $\partial_k \circ \partial_{k-1}$ è la mappa nulla dalle catene singolari di $S_k(X)$ a quelle di $S_{k-2}(X)$, in questo modo $(S_\bullet(X), \partial)$ è un complesso di gruppi abeliani. Posso quindi calcolare l'omologia di $(S_\bullet(X), \partial)$ come l'avevo definita in precedenza:

$$H_k(S_\bullet(X)) = {}^{\mathrm{Ker}(\partial_k)}\big/_{\mathrm{Im}(\partial_{k+1})}$$

Vale che $\mathrm{Ker}(\partial_k) = \{ c \in S_k(X) \mid \partial_k(c) = 0 \}$, cioè le k-catene con bordo nullo, questi sono chiamati k-cicli.

Definizione 2.2.14 *Sia $(S_\bullet(X), \partial)$ un complesso di moduli, gli elementi di $\mathrm{Ker}(\partial)$ sono detti k-**cicli**. Un k-ciclo è quindi una k-catena con bordo nullo:*

$$c \textit{ ciclo } \Leftrightarrow \partial c = 0$$

L'insieme dei k-cicli è indicato con $Z_k(X)$, cioè: $Z_k(X) = \mathrm{Ker}(\partial)$.

Si pone invece $B_k(X)$ come l'insieme dei bordi, cioè le k-catene singolari che sono immagini di $k+1$-catene, cioè esplicitamente:

$$B_k(X) = \{ \eta \in S_k(X) \mid \exists b \in S_{k+1}(X), \partial b = \eta \}$$

Per definizione si ha quindi che $H_k(X) = {}^{Z_k(X)}\big/_{B_k(X)}$, cioè il gruppo di omologia è formato dai cicli modulo i bordi.

Esplicitamente gli elementi di $H_k(X)$ sono classi di equivalenza tali che se $[c] \in H_k(X)$ con $\partial c = 0$, e $c_1 \in [c]$ allora $c_1 - c \in B_k(X)$ e $\partial c_1 = 0$ quindi esiste b tale che $c_1 - c = \partial b$. Cioè due elementi stanno nella stessa classe di equivalenza se differiscono per un bordo:

Definizione 2.2.15 *Due elementi a, b si dicono **omologhi** se differiscono per un bordo.*

$$a \sim_{hom} b \Leftrightarrow \exists c \mid \partial_k c = a - b$$

Osservazione 2.2.16 *Vale che $H_k(X) = 0 \Leftrightarrow B_k(X) = Z_k(X)$, cioè se ogni ciclo è un bordo, come si è già osservato. In generale si ha che $B_k(X) \subseteq Z_k(X)$ e possono esserci cicli che non sono immagini di bordi.*

$\partial_k c$ è il bordo di un k-ciclo, se $\partial_k c = 0$ significa che il ciclo non ha bordo, inoltre se $c = \partial_{k+1} b$ allora c è bordo di qualcosa: c è un bordo che non ha bordo. Questo tipo di oggetti è di interesse centrale.

Scopo del corso è studiare $H_k(X)$ e capire se si possono determinare a meno di isomorfismi. In alcuni casi è possibile calcolare esplicitamente tutti i gruppi di omologia (come nel caso dell'omologia cellulare).

2.2.1 $H_0(X)$

Proposizione 2.2.17 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi, allora $H_0 \cong \mathbb{Z}$, cioè è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero di rango 1. In effetti $H_0(X)$* conta *le componenti connesse per archi in X e quindi dà informazioni di natura geometrica.*

Dimostrazione: Dalla definizione di gruppo di omologia: $H_0(X) = {}^{Z_0(X)}\!/_{B_0(X)}$. Ma $Z_0(X) = \{\, c \in S_o(X) \mid \partial_0 c = 0 \,\}$ e $S_0(X) = \{\, \sum n_i p_i \mid n_i \in \mathbb{N}, p_i \in X \,\}$. Sia $c \in S_0(X)$ allora $c = \sum n_i p_i$, e vale che $\partial_0(c) = \sum n_i \partial_0(p_i) = 0$, infatti $\partial_0 : S_0(X) \to S_{-1}(X)$, ma per $k < 0$ $S_k = 0$ per definizione. Quindi per ora ho che:

$$Z_0(X) = \operatorname{Ker}(\partial_0) = S_0(X) \;\Rightarrow\; H_0(X) = {}^{S_0(X)}\!/_{B_0(X)}$$

Per definizione $B_0(X) = \{\, x \in S_0(X) \mid \exists \alpha \in S_1(X), \partial_1(\alpha) = x \,\}$. Sia $p_0 \in X$, allora $q \sim_{hom} p_0$ se e solo se $\exists \alpha \in S_1(X)$ tale che $q - p_0 = \partial_1 \alpha$. Per questo motivo i punti sono tutti omologhi, infatti essendo X connesso per archi esiste un arco α che connette q e p_0, ma per definizione gli archi sono applicazioni continue da Δ_1 a X che hanno come bordo $q - p_0$. Esiste quindi un'unica classe di equivalenza che è la classe di equivalenza di un punto. Per questo il gruppo è omomorfo a $\mathbb{Z}$.

Definizione 2.2.18 *Si definisce inoltre la mappa* **grado** *come l'applicazione che manda una catena in $S_0(X)$ nella somma dei suoi coefficienti:*

$$\begin{aligned} \deg\colon S_0(X) &\to \mathbb{Z} \\ \sum n_i p_i &\mapsto \sum n_i \end{aligned}$$

Teorema 2.2.19 (Teorema fondamentale degli omomorfismi) *Sia $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ un omomorfismo tra gruppi abeliani, allora vale che:*

$$ {}^{\mathcal{G}_1}\!/_{\operatorname{Ker}(f)} \cong \operatorname{Im}(f)$$

Proposizione 2.2.20 *La mappa grado gode di alcune proprietà:*

1. $\deg$ *è un omomorfismo di gruppi abeliani*

2. deg *è suriettivo*
3. $\mathrm{Ker}(\deg) \cong B_0(X)$

Se dimostro questa proprietà utilizzando il primo teorema fondamentale di isomorfismo:

$$S_0(X)\big/B_0(X) \cong \mathrm{Im}(\deg)$$

Ma deg *è suriettiva, quindi* $\mathrm{Im}(\deg) = \mathbb{Z}$*, perciò:*

$$H_0(X) = S_0(X)\big/B_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

Dimostro quindi questa proposizione.
Dimostrazione*:*

1. *Sia* $c_1 = \sum n_i p_i$ *e* $c_2 = \sum m_i q_i$*, bisogna mostrare che:*

$$\deg(c_1 + c_2) = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

ma:

$$c_1 + c_2 = \sum n_i p_i + \sum m_i q_i = \sum (n_i + m_i) r_i$$

dove r_i *è quello comune tra le catene, oppure è zero se l'elemento è presente in solo uno delle due catene. Quindi:*

$$\deg(c_1 + c_2) = \sum (n_i + m_i) = \sum n_i + \sum m_i = \deg(c_1) + \deg(c_2)$$

Alternativamente in modo più semplice si può osservare l'azione di deg *sui generatori di* $S_0(X)$*, che è unico e viene mandato dalla mappa grado in* 1*, quindi si estende per linearità.*

2. *La mappa è suriettiva, basta prendere un punto* $p \in X$ *e la controimmagine di* $m \in \mathbb{Z}$ *è* $\deg^{-1}(m) = mp$

3. SISTEMARE *Mostro che* $\mathrm{Ker}(\deg) = B_0(X)$*. Sia* $c \in \mathrm{Ker}(\deg)$ *cioè tale che* $\deg(c) = 0$*, se* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $\sum n_i = 0$*, bisogna mostrare che* $c \in B_0(X)$*, cioè che* $\exists b \in S_1(X)$ *con* $\partial_1 b = c$*. Considerato* p_0 *e altri punti* p_i*, ci sono archi* $\lambda_i s$ *che li uniscono a* p_0*.* b *si può costruire in questo modo.*

Siano $\lambda_i : [0,1] \to X$ *con* $\lambda_i(0) = p_0$ *e* $\lambda_i(1) = p_i$ *considero* $c - \partial\left(\sum n_1 \lambda_i\right) = c - \sum n_i \partial\lambda_i = c - \sum n_i(p_i - p_0) = c - \sum n_i p_i = \sum n_i p_0 = 0$*. Siccome per ipotesi* $p_0 \in \mathrm{Ker}(\deg)$ *e* $c = \sum n_i p_i$ *allora* $c = \partial(\sum n_i \lambda_i)$ *quindi* $\sum n_i \lambda_i = b$ *da cui* $\mathrm{Ker}(\deg) \subseteq B_0(X)$*. Mi rimane da mostrare che* $B_0(X) \subseteq \mathrm{Ker}(\deg)$*, infatti ora mostro che se* $c \in B_0(X)$ *allora* $\deg(c) = 0$*.* $c = \partial b$ *ma se* λ_i *sono gli archi* $b = \sum m_i \lambda_i$ *quindi* $\partial b = \sum n_i \partial\lambda_i$ *ma* $\partial\lambda_i = \lambda_i(1) - \lambda_i(0)$ *e l'azione dell'opertaore grado è quella di sommare i coefficienti, quindi*

$$\deg(c) = \deg(\partial b) = \sum n_i \deg(\partial\lambda_i) = 0$$

□

Per questo $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ generato dalla classe $[p]$ $\forall p \in X$ (con X connesso per archi). □

Se ci sono più componenti connesse per archi posso ripetere il ragionamento senza connettere componenti distinte, quindi trovo che:

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}^{N_c}$$

Dove N_c è il numero di componenti connesse per archi di X con $N_c < +\infty$, in pratica $H_0(X)$ è generato da un insieme formato da un punto per ogni componente connessa per archi.

2.2.2 $H_1(X)$

Cosa si può dire invece su $H_1(X)$?

Sia X spazio topologico e $x_0 \in X$, allora alla coppia (X, x_0) si associa il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$. In generale il gruppo fondamentale non è abeliano, allora conviene studiare la versione abelianizzata: $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X, x_0)) = {}^{\pi_1(X, x_0)}\big/_{\pi_i(X, x_0)'}$ dove $'$ indica il **gruppo derivato**, cioè il gruppo generato dai commutatori.

$$\pi_1(X, x_0)' = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = \langle \{\, [g, h] \mid g, h \in \pi_1(X, x_0) \,\} \rangle$$

Se X è connesso per archi allora $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X, x_0)) \cong H_1(X)$, quindi conoscendo il gruppo fondamentale si può calcolare anche il primo gruppo di omologia, che quindi è sostanzialmente formato dai lacci (modulo omotopia) che commutano tra loro.

Osservazione 2.2.21 *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e $\mathcal{G}$ un gruppo abeliano se esiste un omomorfismo di gruppi $\varphi : \pi_1(X) \to \mathcal{G}$ allora esiste $\varphi' : \mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \to \mathcal{G}$ omomorfismo di gruppi abeliani.*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{G} \\
\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] &
\end{tikzcd}$$

dove P è la proiezione sul quoziente.

Dimostrazione: Bisogna mostrare che φ' è ben definito, cioè che se:

$$\varphi'(a) = \varphi'(P(c)) = \varphi(c) \quad \text{e} \quad \varphi'(a) = \varphi'(P(d)) = \varphi(d)$$

allora $\varphi(c) = \varphi(d)$. Se $c \sim_H d$ allora $P(c) = P(d)$, e quindi $c = d[x, y]$, in quanto gli elementi in $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X))$ differiscono per commutatori. Applicando φ: $\varphi(c) = \varphi(d[x, y])$, siccome φ è omomorfismo:

$$\varphi(d[x, y]) = \varphi(d)\varphi([x, y]) = \varphi(d)\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(d)\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(d)$$

dove nell'ultimo passaggio ho utilizzato che il gruppo è abeliano. □

Questa osservazione dipende crucialmente dal fatto che il gruppo è abeliano.

Proposizione 2.2.22 *Se X è uno spazio topologico connesso per archi allora* $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$*, cioè si può passare dall'equivalenza omologica a quella omotopica, e in questo modo per il teorema di Seifert-van Kampen si possono ottenere tante informazioni su $H_1(X)$.*

Dimostrazione: Per dimostrare che $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \cong H_1(X)$ trovo un isomorfismo di gruppi abeliani. Per ora so che $H_1(X)$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo. Se costruisco $\varphi\colon \pi_1(X) \to H_1(X)$ omomorfismo di gruppi ottengo gratuitamente la mappa da $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X))$ a $H_1(X)$ per l'osservazione precedente.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "P"] & H_1(X) \\
\mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \arrow[ur, "\varphi'"] &
\end{tikzcd}$$

Poi dovrò mostrare che questa mappa è invertibile, cioè $\exists \psi : H_1(X) \to A_1(X)$ tale che $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$ e $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\mathrm{Ab}(\pi_1(X))}$. $\square$

Provo a costruire φ.

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\to H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Usando il seguente risultato:

Lemma 2.2.23 *Se $f \sim_H g$ allora $f \sim_{hom} g$, cioè se f e g sono lacci che definiscono lo stesso elemento nel gruppo fondamentale allora differiscono per un bordo.*

Dimostrazione: Siccome $f \sim_H g$ allora $\exists F$ continua tale $F : I \times I \to X$ tale che $F(0, x) = f(x)$, $F(1, x) = g(x)$ e $F(t, 0) = F(t, 1) = x_0$.

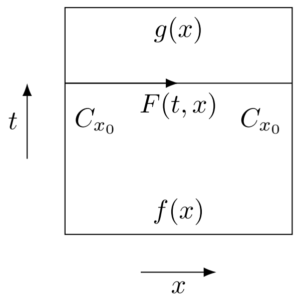


Figura 2.6: Omotopia: deforma f in g in modo continuo.

Voglio mostrare che $f - g$ bordo di un 2-simplesso. Identificando tutti i punti di un uno dei due intervalli con l'equivalenza ${}^{I \times I}/_{\{0\} \times I}$ si ottiene qualcosa che è omeomorfo a Δ_2.

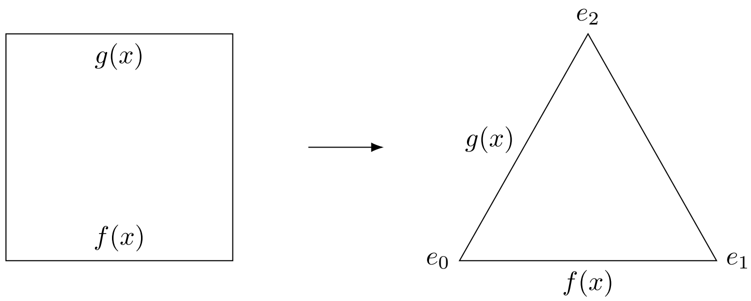


Figura 2.7: La relazione di equivalenza fa passare da un quadrato a un triangolo in quanto fa collassare un intervallo nel punto 0

SISTEMARE Siccome rimane costante sul sottospazio su cui su quozienta, cioè su x_0, F induce $F'\colon \Delta_2 \to X$ continua:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"] & X \\ I \times I /_{0 \times I} \simeq \Delta_2 \arrow[ur, "F'"] & \end{tikzcd}$$

Calcolo il bordo: $\partial F' = F'^{(0)} - F'^{(1)} + F'^{(2)} = K - g + f$ dove K è il cammino costante per definizione di omotopia. Se K fosse il bordo di qualcosa avrei finito ($\partial w = f - g$). Prendo il 2-simplesso standard K costante e uguale a x_0 (è la stessa costante di K):

$$\partial K = K^{(0)} - K^{(1)} + K^{(2)}$$

ma questi sono uguali perché sono costanti, quindi $\partial K = K^{(2)} = k$, cioè k è un bordo, quindi:

$$\partial F' = \partial K - F'^{(1)} + F'^{(2)} \Rightarrow \partial F' - \partial K = f - g \Rightarrow \partial(F' - K) = f - g$$

$F' - K$ è 2-simplesso singolare, lo chiamo σ: $\partial\sigma = f - g$, quindi f e g sono omologhi e σ è il 2-simplesso singolare che realizza l'omologia. $\square$

Se X è uno spazio topologico connesso per archi sono in grado di costruire senza utilizzare l'ipotesi di connessione per archi:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(X) &\to H_1(X) \\ [f]_H &\mapsto [f]_{hom} \end{aligned}$$

Ora voglio costruire $\varphi'\colon \mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ e lo faccio ancora senza l'ipotesi di connessione per archi. Mostro che φ' è omomorfismo, per far ciò basta che mostro che φ lo è.

Dimostrazione: Siano $[f]_H, [g]_H \in \pi_1(X)$ voglio fare vedere che:

$$\varphi([f]_H[g]_H) = \varphi([f]_H) + \varphi([g]_H)$$

Questo è verso se e solo se:

$$\varphi([f \star g]_H) = [f]_{hom} + [g]_{hom}$$

Che è vera se e solo se:

$$[f \star g]_{hom} = [f + g]_{hom}$$

Questo è vero se e solo se i due rappresentati sono equivalenti:

$$\exists T : \Delta_2 \to X \text{ 2-simplesso singolare tale che } \partial T = f + g - f \star g$$

Cioè:

$$\partial T = T^{(0)} - T^{(1)} + T^{(2)} = f + g - f \star g$$

Una possibile costruzione parte tracciando la retta che congiunge due punti medi di due

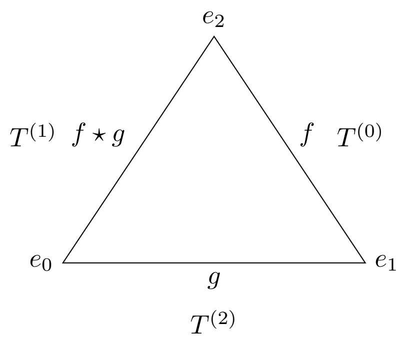


Figura 2.8: Costruzione dell'omomorfismo

segmenti, quindi si richiede che T abbia valori costanti sulle rette parallele.

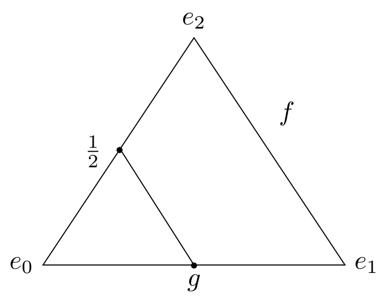


Figura 2.9: Costruzione dell'omomorfismo, deve avere valori costanti su rette parallele

Quindi è un omomorfismo. □

Al momento la situazione è che ho $\varphi : H_1(X, x_0) \to H_1(X)$ omomorfismo di gruppi ben definito anche con X non necessariamente connesso per archi, e dato che $H_1(X)$ è abeliano ho $\varphi' : \mathrm{Ab}\,(\pi_1(X)) \to H_1(X)$.

Proposizione 2.2.24 *Se X è connesso per archi allora la mappa $\varphi' :: \mathrm{Ab}(\pi_1(X)) \to H_1(X)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione: *Sketch of proof, la dimostrazione completa è piuttosto noiosa.* Per dimostrare che φ' è isomorfismo o dimostro che è iniettiva e suriettiva o che ammette un inverso. Procedo con la seconda possibilità: mostro che $\exists \psi \colon H_1(X) \to \mathrm{Ab}(\pi_1(X))$ tale che ψ è inverso di φ'. Considero un arco $f \colon \Delta_1 \to X$ con $f(0), f(1) \in X$. Siccome lo spazio è connesso per

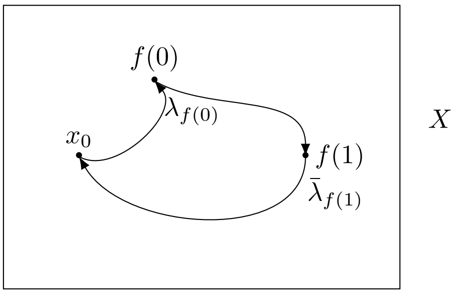


Figura 2.10: Dimostrazione della proposizione

archi esiste un cammino da x_0 a $f(0)$, cioè una funzione $\lambda_{f(0)} \colon I \to X$ tale che $\lambda_{f(0)} = x_0$ e $\lambda_{f(1)} = f(0)$. Lo stesso vale per x_0 e $f(1)$. Questi archi sono orientati partendo da x_0, posso considerare il cammino con verso opposto $\bar{\lambda}_{f(1)}$ e quindi costruire il laccio di base x_0: $\lambda_{f(0)} \star f \star \bar{\lambda}_{f(1)} =: \tilde{f}$. Vale che $\psi(f) = [\![\tilde{f}]\!]$, dove $[\![\tilde{f}]\!] = P\left([\tilde{f}]_H\right)$. Bisogna mostrare che:

1. ψ è ben definito, cioè se $f \sim_{hom} g$ allora $\psi(f) = \psi(g)$ e che ψ non dipende dalla scelta del cammino.
2. ψ è omomorfismo di gruppi
3. $\varphi' \circ \psi = \mathbb{I}_{H_1(X)}$
4. $\psi \circ \varphi' = \mathbb{I}_{\mathrm{Ab}(\pi_1(X))}$

Lo studente interessato può verificare queste asserzioni.

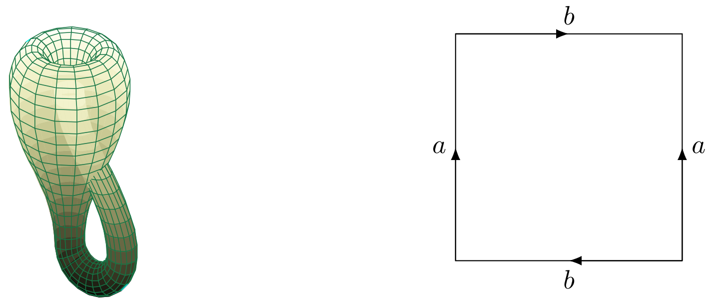
Esercizio 3 *Verificarli.*

Una volta verificati si trova quindi che $H_1(X) \cong \mathrm{Ab}(\pi_1(X))$. □

Esempio 2.2.25

- *$H_1(V_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ con $g \geq 0$*
- *$H_1(\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}^k$ con $\bigvee_{i=1}^{k} \mathcal{S}^1$ bouquet, cioè k circonferenze incollate in un punto.*
- *$H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ (è un toro tappato)*

- *$H_1(U_1) \cong \mathbb{Z}_2$ dove U_1 è il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = {}^{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}/_{\sim}$ con $\vec{x} \sim \vec{y}$ se $\vec{x} = a\vec{y}$ con $a \in \mathbb{R}$*
- *$H_1(U_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ dove U_2 è la bottiglia di Klein. Infatti $\pi_1(U_2)]\ \{ a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \}$ per ableliannizzarlo bisogna porre $aba^{-1}b = 1$ e $aba^{-1}b^{-1} = 1$ cioè $b^2 = 1$ e a libero:* $\mathrm{Ab}\,(\pi_1(U_2)) = \{ \underset{\mathbb{Z}}{a}, \underset{\mathbb{Z}_2}{b} \mid aba^{-1}b = 1 \}$.



(a) Bottiglia di Klein

(b) Bottiglia di Klein, si nota che rispetto al toro di Clifford c'è una torsione nella a di destra

Figura 2.11: Bottiglia di Klein

2.3 Morfismi indotti

So calcolare $H_0(X)$ e $H_1(X)$ se voglio calcolare gli altri $H_k(X)$? Prima guardo come si comportano i gruppi sotto l'azione di applicazioni continue: Sia $g\colon X \to Y$ mappa continua tra spazi topologici, g induce un'applicazione tra $H_k(X)$ e $H_k(Y)$? Considero $\sigma\colon \Delta_k \to X$ k-simplesso singolare, posso considerare la composizione con g:

$$\Delta_k \xrightarrow{\ \sigma\ } X \xrightarrow{\ g\ } Y$$

Cioè: $g'\colon \Delta_k \to Y$ con $g' = g \circ \sigma$. Siccome sia g che σ sono continue allora g' è continua, quindi è un k-simplesso singolare in Y. Si definisce $g_\sharp$:

$$\begin{aligned} g_\sharp\colon S_k(X) &\to S_k(Y) \\ \sum_\sigma n_\sigma \sigma &\mapsto \sum_\sigma n_\sigma g' = \sum_\sigma n_\sigma (g \circ \sigma) \end{aligned}$$

Questa mappa è ben definita ed è lineare quindi $g_\sharp$ è un omomorfismo di gruppi abeliani che manda k-catene in $S_k(X)$ in k-catene in $S_k(Y)$. Ora voglio ottenere un'applicazione a livello di omologia singolare, quindi definisco $g_\star$.

$$\begin{aligned} g_\star\colon H_k(X) &\to H_k(Y) \\ [c] &\mapsto [g_\sharp(c)] \end{aligned}$$

Si dice che g è **covariante** perché va da X a Y, cioè rispetta il verso della applicazione g. Devo verificare se questa applicazione è ben definita, cioè non dipende dalla scelta del rappresentate della classe. Considero $d \in S_k(X)$ tale che $\partial d = 0$, suppongo che $d \sim_{hom} c$, questo vale se e solo se $[d] = [c]$ con $\partial c = 0$, mi chiedo è vero che $g_\star([d]) = g_\star([c])$? Devo cioè mostrare che $g_\sharp(d) \sim_{hom} g_\sharp(c)$, ma questo è vero se e solo se $\exists \tau \in S_{k+1}(Y)$ tale che $g_\sharp(d) - g_\sharp(c) = \partial\tau$. Siccome $g_\sharp$ è omomorfismo allora deve essere $g_\sharp(d-c) = \partial\tau$, ma d e c sono omologhi per ipotesi, quindi:

$$\exists u \in S_{k+1}(X) \mid \partial u = d - c$$

Quindi $g_\sharp(\partial u) = g_\sharp(d-c)$, e questo implica che $[g_\sharp(d)] = [g_\sharp(c)]$, infatti trovo τ a partire da u:

$$\begin{aligned} g_\sharp(\partial u) &= g_\sharp\left(\sum_{i=0}^{k+1}(-)^i u^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{k+1}(-)^i g_\sharp(u^{(i)}) = \sum_{i=0}^{k+1}(-)^i g \circ u^{(i)} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1}(-)^i g \circ \left(u \circ F_i^{k+1}\right) = \sum_{i=0}^{k+1}(-)^i \left(g \circ u\right) \circ F_i^{k+1} = \\ &= \sum_{i=0}^{k+1}(-)^i \left(g \circ u\right)^{(i)} = \partial\left(g \circ u\right) \end{aligned}$$

Ma quindi $g_\sharp(\partial u) = \partial(g_\sharp(u))$ cioè:

$$g_\sharp(d-c) = g_\sharp(\partial u) = \partial(g_\sharp(u)) = \partial\tau \quad \text{con } \tau = g_\sharp(u)$$

Quindi $g_\star$ è ben definita ed è omomorfismo in quanto è il passaggio a quoziente di omomorfismi.

Esempio 2.3.1 *Sia $j\colon \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^2$ l'immersione di un equatore in una sfera, che cosa è $j_\star\colon H_1(\mathcal{S}^1) \to H_1(\mathcal{S}^2)$? $j_\star$ è una mappa costante in quanto $\mathcal{S}^2$ ha gruppo fondamentale banale quindi $H_1(\mathcal{S}^2)$ è banale. Si nota che j era iniettiva, ma $j_\star$ è costante quindi non è più iniettiva.*

Esempio 2.3.2 *Se considero $\mathcal{S}^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$*

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\to z^4 \end{aligned}$$

Come è fatta $f_\star\colon H_1(\mathcal{S}^1) \to H_1(\mathcal{S}^1)$? Si sa che $H_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, quindi, sia

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\to e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Cioè in pratica $[\sigma] \to 1$, il laccio si avvolge su sè stesso una volta.

$$\begin{aligned} f_\star\colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [f_\sharp(\sigma)] = [f \circ \sigma] \end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta_1 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S}^1 \xrightarrow{f} \mathcal{S}^1$$

Con:

$$t \xrightarrow{\sigma} \mathrm{e}^{2\pi i t} \xrightarrow{f} \mathrm{e}^{8\pi i t}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{8\pi i t} \end{aligned}$$

Sostanzialmente $f \circ \sigma$ è un cammino in $\mathcal{S}^1$ ed è quindi potenza di σ, che è l'unico generatore:

$$f \circ \sigma = \sigma^4 = \sigma \star \sigma \star \sigma \star \sigma$$

Cioè avvolgo il laccio quattro volte, quindi:

$$\begin{aligned} f_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma^4] \end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned} f_\star \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 1 &\mapsto 4 \end{aligned}$$

$f_\star$ è iniettivo ma non suriettivo (non tutti gli interi sono multipli di 4)

Osservazione 2.3.3 *Siano X spazio topologico: $\mathbb{I}_X : X \to X$ allora:*

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_X)_\star : H_k(X) &\to H_k(X) \\ [c] &\mapsto [(\mathbb{I}_X)_\star(c)] = [c] \end{aligned}$$

Quindi $(\mathbb{I}_X)_\star$ è proprio l'identità a livello di gruppi di omologia, cioè:

$$(\mathbb{I}_X)_\star = \mathbb{I}_{H_k(X)}$$

Osservazione 2.3.4 *Siano X, Y, Z spazi topologici e $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ funzioni continue, allora $g \circ f \colon X \to Z$ è continua, si ha quindi:*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

E:

$$H_k(X) \xrightarrow{f_\star} H_k(Y) \xrightarrow{g_\star} H_k(Z)$$

Sono ben definite $g_\star \circ f_\star \colon H_k(X) \to H_k(Z)$ e $(g \circ f)_\star : H_k(X) \to H_k(Z)$, vale che $g_\star \circ f_\star = (g \circ f)_\star$, infatti se σ è simplesso singolare (poi basta estendere per linearlità):

$$\begin{aligned} (g \circ f)_\star([\sigma]) &= [(g \circ f)_\sharp(\sigma)] = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = \\ &= [g_\sharp(f \circ \sigma)] = [g_\sharp \circ f_\sharp(\sigma)] = (g_\star \circ f_\star)([\sigma]) \end{aligned}$$

Quindi sulla categoria degli spazi topologici questo fornisce un funtore covariante. Si veda più avanti cosa significa tutto ciò.

2.4 Successioni esatte

Considero due complessi $(C_\bullet, \partial)$ e $(C'_\bullet, \partial')$, considero l'omomorfismo di $\mathbb{Z}$-moduli $F\colon (C_\bullet, \partial) \to (C'_\bullet, \partial')$ tale che $\forall k$ si formi un diagramma commutativo, cioè valga $F \circ \partial = \partial' \circ F$

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "\partial"] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "F"] & C_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "F"] & C_{k-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "F"] & \dots \\
\dots \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'"] & C'_k \arrow[r, "\partial'"] & C'_{k-1} \arrow[r, "\partial'"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Tutti i quadrati che si formano devono essere commutativi. Si pone questa richiesta di commutatività in quanto considerando $f\colon X \to Y$ e quindi $F = f_\sharp\colon (S_\bullet(X), \partial) \to (S_\bullet(Y), \partial')$ la condizione di commutatività è $f_\sharp \circ \partial = \partial' \circ f_\sharp$ che è proprio quella che ho utilizzato prima per mostrare che l'applicazione è ben definita a livello di omologia (avevo usato $g_\sharp \circ \partial = \partial \circ g_\sharp$). Una funzione F fatta in questo modo è detta **mappa tra complessi**.

Definizione 2.4.1 *Si definisce una **successione esatta corta** di complessi la successione:*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\alpha} B_\bullet \xrightarrow{\beta} C_\bullet \longrightarrow 0$$

con $(A_\bullet, \partial^A)$, $(B_\bullet, \partial^B)$ e $(C_\bullet, \partial^C)$ complessi, e α mappa tra complessi iniettiva, β mappa tra complessi suriettivo e deve valere che $\forall k$ sia $C_k \cong {}^{B_k}\big/_{A_k}$.

In modo più esteso questo significa:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & A_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & A_k \arrow[r] \arrow[d] & A_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & B_k \arrow[r] \arrow[d] & B_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_k \arrow[r] \arrow[d] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le colonne sono successioni esatte corte di Z-moduli, quindi l'immagine di α è uguale al nucleo e la mappa è iniettiva perciò la prima riga è formata da zero (infatti se è iniettiva il nucleo è zero), similmente siccome la mappa β è suriettiva quindi l'ultima riga è formata da zero. Inoltre tutti i quadrati sono commutativi.

2.4.1 Omomorfismo di connessione

A partire da una successione esatta corta posso passare all'omologia, se passo brutalmente all'omologia non ottengo una successione esatta, ma c'è il modo per indurre una successione esatta lunga:

Teorema 2.4.2 *Esiste una successione esatta lunga tale che sia fatta così:*

$$\dots \longrightarrow H_p(A_\bullet) \xrightarrow{\alpha_\star} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{\beta_\star} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(A_\bullet) \xrightarrow{\alpha_\star} \dots$$

Quindi $\forall p$*:*

$$\mathrm{Im}(\alpha_\star) = \mathrm{Ker}(\beta_\star)$$
$$\mathrm{Im}(\beta_\star) = \mathrm{Ker}(\delta)$$
$$\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\alpha_\star)$$

δ è detto ***omomorfismo di connessione*** *in quanto cambia il grado dell'omologia.*
La scrittura estesa della successione è:

$$\begin{tikzcd}
& \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \dots \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & H_{p+1}(C_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p+1}(C_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p+1}(C_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_p(A_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(A_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_p(B_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(B_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(B_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_p(C_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(C_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_p(C_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_{p-1}(A_{k+1}) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(A_k) \arrow[r] \arrow[d] & H_{p-1}(A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
& \dots & \dots & \dots &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione: Per dimostrare il teorema bisogna:

1. Dimostrare che $\alpha_\star$ e $\beta_\star$ sono ben definite
2. Costruire l'omomorfismo di connessione e verificare che è effettivamente un omomorfismo
3. Mostare che la successione è esatta, cioè che

$$\mathrm{Im}(\alpha_\star) = \mathrm{Ker}(\beta_\star)$$
$$\mathrm{Im}(\beta_\star) = \mathrm{Ker}(\delta)$$
$$\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Ker}(\alpha_\star)$$

Sketch of proof, la dimostrazione è lunga e noiosa.

Sia $c \in C_k$ un ciclo, quindi tale che $\partial c = 0$, siccome β_k è suriettiva $\exists b \in B_k$ tale che $\beta_k(b) = c$, voglio recuperare un elemento in A_{k-a}.

$$\begin{tikzcd}
 & a \in A_{k-1} \arrow[d, "\partial b"] \\
b \in B_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta_k"] & B_{k-1} \arrow[d, "\beta_{k-1}"] \\
c \in B_k \arrow[r, "\partial"] & C_{K-1}
\end{tikzcd}$$

Usando la commutataività:

$$\beta_{k-1}(\partial b) = \partial \beta_k(b) = \partial c = 0$$

Quindi $\beta_{k-1}(b) = 0$, e quindi $\partial b \in \operatorname{Ker}(\beta_{k-1})$, ma le colonne sono esatte quindi $\partial b \in \operatorname{Im}(\alpha_{k-1}) = \operatorname{Ker}(\beta_{k-1})$, perciò $\exists a \in A_{k-1}$ tale che $\alpha_{k-1}(a) = \partial b$, quindi a partire da $c \in C_k$ ho associato un elemento $a \in A_{k-1}$. Per scendere a livello di omologia a deve essere un ciclo, cioè $\partial a = 0$, ma per la commutatività:

$$\alpha_{k-2}(\partial a) = \partial \alpha_{k-1}(a) = \partial \partial b = 0$$

Ma α_{k-2} è iniettiva, quindi $\partial a = 0$. Sono partito da un k-ciclo in C_k e ho trovato un $k-1$-ciclo in A_{k-1}.

Ci sono un paio di dettagli da verificare:

1. È univoca la scelta dell'elemento b? Se non lo è ci sono problemi?
2. Se prendo un elemento c' che è omologo a c è sicuro che trovo un a' che è omologo ad a?

Se queste due cose non sono verificate l'applicazione non è ben definita. Verifico che comunque scelga una controimmagine di β_k si ottiene qualcosa di omologo ad a: suppongo che $\beta_k(b') = \beta_k(b) = c$:

$$\beta_k(b' - b) = 0 \iff b' - b \in \operatorname{Ker}(\beta_k) = \operatorname{Im}(\alpha_k)$$

Quindi esiste $a_0 \in A_k$ tale che $\alpha_k(\alpha_0) = b' - b$, prendendo il bordo:

$$\partial(b' - b) = \partial(\alpha_k(a_0)) \Rightarrow \partial b' - \partial b = (\partial \circ \alpha_k)(a_0) = \alpha_{k-1}(\partial a_0)$$

Quindi:

$$\alpha_{k-1}(a') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial a_0) \Rightarrow \alpha_{k-1}(a' - a - \partial a_0) = 0$$

Ma α_{k-1} è iniettivo quindi $a' - a - \partial a_0 = 0$, e perciò $a' \sim_{hom} a$, in quanto ae a' differiscono per un bordo. Per quanto riguarda la seconda questione considero $c'' \sim_{hom} c$ in C_k allora mostro che $a'' \sim_{hom} a$ in A_{k-1}, e così facendo mostro che l'applicazione è ben definita.

$$c'' \sim_{hom} c \iff \exists c_0 \mid c'' - c = \partial c_0$$

Ma per la suriettività $\exists b, b''$ tale che $c = \beta_k(b)$ e $c'' = \beta_k(b'')$, quindi:

$$\beta_k(b'') - \beta_k(b) = \partial c_0 \Rightarrow \beta_k(b'' - b) = \partial c_0 \overset{\text{commutatività}}{\Rightarrow} \beta_k(b'' - b) = \partial \beta_{k+1}(b_0) = \beta_k(\partial b_0)$$

Quindi:

$$\beta_k(b'' - b - \partial b_0) = 0 \Rightarrow b'' - b - \partial b_0 \in \mathrm{Ker}(\beta_k) = \mathrm{Im}(\alpha_k)$$

Perciò $\exists \tilde{a} \in A_k$ tale che $b'' - b - \partial b_0 = \alpha_k(\tilde{a})$ Apllicando il bordo: $\partial b'' - \partial b - \partial\partial\alpha_k(\tilde{a})$, quindi:

$$\partial b'' - \partial b = \partial \alpha_k(\tilde{a}) \Rightarrow \alpha_{k+1}(a'') - \alpha_{k-1}(a) = \alpha_{k-1}(\partial \tilde{a})$$

Ma α_{k-1} è omomorfismo iniettivo quindi $a'' - a - \partial\tilde{a} = 0$ cioè $a'' - a = \partial \tilde{a}$

Si può quindi definire δ su $[c] \in H_p(C_k)$:

$$\delta([c]) = [\![\alpha \circ \partial \circ \beta^{-1}(c)]\!]$$

Questa è ben definita. □

2.5 Omologia singolare relativa

Sia X uno spazio topologico e A sottospazio generico di X (anche improprio), cioè $A \hookrightarrow X$. Vorrei definrie l'omologia singolare di X tenendo presente la presenza di A, cioè $H_k(X, A)$, il k-esimo gruppo di omologia singolare dellla coppia (X, A). Sia $S_K(A)$ lo spazio delle k-catene che finiscono totalmente in A, la mappa di inclusione $i\colon A \to X$ induce una mappa $i_\sharp\colon s_k(A) \to S_k(X)$. Questa mappa è sicuramente iniettiva (basta vedere le catene di A come catene di X). A questo punto la successione

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_\sharp} S_k(X) \xrightarrow{\beta} {S_k(X)}\big/{S_k(A)} \longrightarrow 0$$

è esatta, e anche la restrizione:

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_\sharp} S_k(X) \xrightarrow{\beta} S_k(X, A) \longrightarrow 0$$

Posso fare:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\dots \arrow[r] & S_{k+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_k(A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & S_{k+1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & S_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & S_{k+1}(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & S_k(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & {} &
\end{tikzcd}$$

I quadrati sono commutativi quindi posso costruisre una successione esatta lunga. Si ottiene quindi:

$$\dots \longrightarrow H_k(A) \xrightarrow{\alpha_\star} H_k(B) \xrightarrow{\beta_\star} H_k(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(A) \longrightarrow \dots$$

$H_k(X, A)$ è l'**omologia singolare della coppia**

Questa è una costruzione geometrica e fornice informazioni su nucleo e conucleo.

Consudero una successione esatta corta di $\mathcal{R}$-moduli:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

Con α iniettiva, β suriettiva e ${}^{B}/_{A} \cong C$, cioè $\mathrm{Im}(\alpha) = A = \mathrm{Ker}(\beta)$ in quanto β è suriettiva.

Definizione 2.5.1 *Si dice che la* ***successione spezza*** *se esiste una funzione continua* $\varphi \colon B \to B$ *idempotente, cioè tale che* $\varphi^2 = \varphi$*, e tale che* $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$.

Esempio 2.5.2 (MANCA ESEMPIO)

Sia $B = A \oplus C$ con A, C $\mathbb{Z}$-moduli, a questi sono associate la mappa di inclusione e di passaggio al quoziente:

$$\begin{aligned} i \colon A &\to A \oplus C \\ a &\mapsto (a, 0) \end{aligned}$$

$$j \colon A \oplus CC$$

Con j quoziente per lo $\mathbb{Z}$-modulo $i(A)$. Ovviamente si possono scegliere i' e j' in cui si scambia il ruolo di A e di C. Si nota che i è iniettiva e j è suriettiva. Ho quindi:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0$$

Ma esiste anche $s \colon C \to B$ e quindi ho;

$$C \xrightarrow{s} A \oplus C \xrightarrow{j} C$$

Con $s \circ j \colon c \mapsto (0, c) \mapsto c$, mi piacerebbe che $s \circ j = \mathbb{I}_C$. La mappa s è detta **sezione dell'omomorfismo** $j \colon B \to C$. Quindi se B è proprio somma diretta ho automaticamente s e s' con s' quoziente. Questo è il prototipo di successione che spezza.

Definizione 2.5.3 *Siano* A, B, C $\mathbb{Z}$*-moduli con* $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0, \mathrm{Im}(\beta) = C$ *e* $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$*, cioe una successione esatta, si dice che la successione*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

spezza *se esiste una sezione da* B *a* C *o da* B *ad* A*, cioè:*

$$\exists s \colon B \to C \text{ tale che } s \circ \beta = \mathbb{I}_C$$
$$\textit{oppure}$$
$$\exists s' \colon B \to A \text{ tale che } \alpha \circ s' = \mathbb{I}_A$$

Questo è equivalente a dire che $B = A \oplus s(C)$, infatti vale l'osservazione

Osservazione 2.5.4 *Se la successione $0 \to A \to B \to C \to 0$ spezza allora $B = A \oplus s(C)$ con s sezione. Il viceversa l'ho già dimostrato.*

Dimostrazione: Vale che $A \hookrightarrow B$ in quanto α è iniettiva e quindi $\alpha(A) \cong A$, inoltre $s(C) \hookrightarrow B$ in quanto $s\colon C \to B$ è la sezione. Sia $x \in \alpha(A) \cap s(C)$, cioè $x \in \alpha(A)$ e $x \in s(C)$ allora esiste $a \in A$ tale che $x = \alpha(a)$ ed esiste $k \in C$ tale che $x = s(k)$, vale che $\alpha(a) = s(k)$. Applicando $\beta\colon B \to C$ si ottiene $(\beta \circ \alpha)(a) = (\beta \circ s)(k)$, ma $\beta \circ \alpha = 0$ in quanto $\mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$, quindi $(\beta \circ s)(k) = 0$. Ma s è sezione quindi $\beta \circ s = \mathbb{I}_C$, da cui $k = 0$. s è omomorfismo quindi $s(k) = 0$, perciò $x = 0$.

Ogni elemento di Bsi scrive come somma di elemento di $\alpha(A)$ e di un elemento di $s(C)$. Sia $b \in B$ applicando β si ottiene $\beta(b) \in C$, ci sono due possibilità:

1. $\beta(b) = 0$ quindi $b \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$, quindi $b \in \mathrm{Im}(a)$, cioè $\exists \alpha \in A$ tale che $b = \alpha(a)$ e quindi si scrive come elemento di A sommato a zero.

2. $\beta(b) = c \neq 0$. Vorrei scrivre $b = x + y$ con $x \in \alpha(A)$ e $y \in s(C)$. Considero $s(t)$ con $s(t) \in B$, allora $b - s(t) \in B$, allora mostro che $b - s(t) \in \mathrm{Ker}(\beta)$ e quindi posso usare lo stesso ragionamento di prima.

   $$\beta(b - s(t)) = \beta(b) - \beta(s(t)) = t - t = 0 \Rightarrow \beta(b - s(t)) \in \mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Im}(\alpha)$$

   Quindi esiste $a' \in A$ tale che $\alpha(a') = b - s(t)$ e quindi $b = s(t) + \alpha(a')$

□

Esempio 2.5.5 *Considero la successione:*

$$0 \longrightarrow n\mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

Questa successione è esatta ma non spezza, infatti se spezzasse esisterebbe una sezione:

$$s\colon \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$$

Ma questa non può esistere per queztioni di immagini.

Proposizione 2.5.6 *Le due definizioni di successione che spezza sono equivalenti, cioè se $\exists s\colon C \to B$ tale che $s \circ \beta = \mathbb{I}_C$ allora $\exists \varphi\colon B \to B$ tale che sia idempotente e che $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\beta)$*

Dimostrazione: Una possibile costruzione è $\varphi = s \circ \beta \neq \mathbb{I}_C$, infatti:

$$\varphi^2 = s \circ \beta \circ s \circ \beta = s \circ \mathbb{I}_C \circ \beta = s \circ \beta = \varphi$$

Quindi φ è idempotente. Inoltre:

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(s \circ \beta) = \{\, b \in B \mid (s \circ \beta)(b) = 0 \,\}$$

Quindi $s(\beta(b)) = 0$ cioè $\beta \circ s \circ \beta(b) = 0$ quindi $\beta(b) = 0$ che significa che $b \in \mathrm{Ker}(\beta)$. Deve essere $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\beta)$. Siccome $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}(s \circ \beta) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$ allora $\mathrm{Ker}(s \circ \beta) = \mathrm{Ker}(\beta)$. Rimane da mostrare il viceversa. □

2.6 Omologia singolare ridotta

Fin ora ho parlato di omologia singolare $H_k(X)$, omologia singolare relativa $H_k(X, A)$, ora introduco l'omologia singolare ridotta.

Definizione 2.6.1 *Sia X uno spazio topologico e $A = \{ x_0 \in X \}$, è ben definita l'omologia relativa $H_k(X, A)$, si definisce questa come* ***omologia singolare ridotta*** *$\tilde{H}_k(X)$. L'omologia singolare ridotta è l'omologia relativa ad un punto.*

Per costruire l'omologia singolare ridotta servono le k-catene in X e le k-catene in $\{ x_0 \}$

$$0 \longrightarrow S_k(\{ x_0 \}) \longrightarrow S_k(X) \longrightarrow {}^{S_k(X)}\!/\!_{S_k(\{ x_0 \})} = S_k(X, \{ x_0 \}) \longrightarrow \dots$$

In S_k $\sigma \colon \Delta_k \to \{ x_0 \}$ è simplesso sono le applicazioni costanti dal k-simplesso standard in $\{ x_0 \}$. Quindi $S_k(\{ x_0 \}) = \langle \sigma_k \rangle$ σ_k è l'unica mappa che c'è.

Proposizione 2.6.2 *Vale che:*

$$\tilde{H}_k(X) \cong \begin{cases} {}^{H_0(X)}\!/\!_{\mathbb{Z}} & \textit{se } k = 0 \\ H_k(X) & \textit{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Dimostrazione: Per dimostrarlo uso la succession esatta lunga in omologia relativa:

$$\dots \longrightarrow H_{k+1}(\{ x_0 \}) \longrightarrow H_{k+1}(X) \longrightarrow \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow H_k(\{ x_0 \}) \longrightarrow \dots$$

Vale che:

$$H_k(\{ x_0 \}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

infatti dalla definizione di omologia singolare c'è il complesso:

$$\dots \longrightarrow S_{k+1}(\{ x_0 \}) \xrightarrow{\partial} S_k(\{ x_0 \}) \xrightarrow{\partial} S_{k-1}(\{ x_0 \}) \longrightarrow \dots$$

Che corrisponde alla successione dei generatori:

$$\dots \longrightarrow \langle \sigma_{k+1} \rangle \xrightarrow{\partial} \langle \sigma_k \rangle \xrightarrow{\partial} \langle \sigma_{k-1} \rangle \longrightarrow \dots$$

Ma $\partial \sigma_k = \sum_{i=0}^{k} (-)^i \sigma_k^{(i)}$ con $\sigma_k \colon \Delta_k \to \{ x_0 \}$ e $F_k^i \colon \Delta_{k-1} \to \Delta_k \overset{\sigma_k}{\to} \{ x_0 \}$. Quindi $\forall i$ vale che $F_k^i \circ \sigma_k = \sigma_{k-1}$ in quanto il bordo della costante è costante.

Tutte le quantita sono utuali quindi la somma a segni alterni è nulla oppure è uguale a σ_{k-1}:

$$\partial \sigma_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ dispari} \\ \sigma_{k-1} & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

Conosco il nucleo e l'immagine di questo operatore, quindi posso calcolare l'omologia singolare con la definizione: Se $k \geq 2$ è pari:

$$\begin{aligned} \partial_k \colon S_k(\{ x_0 \}) &\to S_{k-1}(\{ x_0 \}) \\ \sigma_k &\mapsto \sigma_{k-1} \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Ker}(\partial_k) = 0$ infatti [MANCA] quindi $H_k(\{ x_0 \}) = 0$. Se k è dispari:

$$\begin{aligned} \partial_k \colon S_k(\{ x_0 \}) &\to S_{k-1}(\{ x_0 \}) \\ \sigma_k &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Ker}(\partial_{k+1}) = S_k(\{ x_0 \})$ e perciò ${S_k(\{ x_0 \})}/{S_k(\{ x_0 \})} = 0$, in ogni caso si ottiene:

$$H_k(\{ x_0 \}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$$

Nel caso $k \geq 1$ sicuramente $k + 1 > 0$ e il complesso quindi è:

$$0 \longrightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\psi} \tilde{H}_{k+1}(X) \longrightarrow 0$$

ψ è ininiettiva quindi $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(0) = 0$, ma è anche surietta, in quanto [MANCA]. Quindi ψ è isomorfismo e perciò $H_m(X) \cong \tilde{H}_m(X)$ per $m \geq 2$. Mi rimane da calcolare il caso $k = 1$ e il caso $k = 0$. [MANCA MANCA MANCA]

Quindi $\mathrm{Ker}(i_\star) = 0$ da cui $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(i_\star) = 0$ e perciò φ è iniettiva ma anche suriettiva. Ho quindi la successione:

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}_1(X) \longrightarrow 0$$

φ è isomorfismo quindi $H_1(X) \cong \tilde{H}_1(X)$, ma vale anche che:

$$0 \longrightarrow H_0(\{ x_0 \}) \xrightarrow{i_\star} H_0(X) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0$$

Quindi ${H_0(X)}/{H_0(\{ x_0 \})} \cong \tilde{H}_0(X)$ infatti ${H_0(X)}/{\mathrm{Ker}(\tau)} \cong \mathrm{Im}(\tau)$ per il teorema fondamentale dell'isomorfismo. E infine $\mathrm{Im}(\tau) = \tilde{H}_0(X)$ per la suriettività e $\mathrm{Ker}(\tau) = \mathbb{Z}$ per l'iniettività.

Se voglio mostrare che $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ basta che mostro che esiste una sezione, e in molti casi questo è vero. □

Esempio 2.6.3 *Considero ad esempio $H_k(\mathcal{S}^n)$ con $n \geq 1$:*

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{ 0, n \} \\ 0 & \text{se } k \notin \{ 0, n \} \end{cases}$$

Fin ora so che:

$$H_1(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

E che $H_0(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ per $n \geq 1$, vorrei calcolare gli altri gruppi di omologia, ma per farlo mi servono altru strumenti.

2.7 Assioni di una teoria omologica

Definizione 2.7.1 (Teoria omologica secondo Eilenberg e Steenrod) *Una **teoria omologica** sulla categoria di tutte le coppie di spazi topologici e mappe continue è un funtore che assegna ad ogni coppia di spazi (X, A) un gruppo abeliano $H_p(X, A)$ e ad ogni applicazione continua $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ un omomorfismo $f_\star\colon H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ con una trasformazione naturale $\delta_k\colon H_k(X, A) \to H_{k-1}(A) := H_{k-1}(A, \emptyset)$, detta **omomorfismo di connessione** tale che siano soddisfatti i seguenti assioni:*

1. *(Omotopia): se $f \sim_H g$ con $f, g\colon (X, A) \to (Y, B)$ mappe continue, allora $f_\star = g_\star$. Dove $f \sim_H g$ se esiste una funzione continua $F\colon X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ e $F(a, t) \subseteq B\ \forall a \in A$ e $\forall t \in I$.*

2. *(Esattezza): Per ogni inclusione $i\colon A \hookrightarrow X$ e $j\colon X \hookrightarrow (X, A)$ la successione:*

$$\ldots \longrightarrow H_p(A) \xrightarrow{i_\star} H_p(X) \xrightarrow{j_\star} H_p(X, A) \xrightarrow{\delta_p} H_{p-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

   è esatta.

3. *(Dimensione): $H_k(P) = 0\ \forall k \neq 0$ dove P è lo spazio formato da un solo punto.*

4. *(Additività): Se X è la somma topologica di spazi X_α allora $H_p(X) = MANCABIG\oplus H_p(X_\alpha)$*

5. *(Escissione): Se U è un aperto in X tale che $\bar{U} \subset \operatorname{int}(A)$ allora l'inclusione di $(X \setminus U, A \setminus U)$ in (X, A) induce un isomorfismo tra H_k, cioe togliendo un opportuno insieme da (X, A) l'omologia non sente della escissione.*

Per trasformazione naturale si intende che $\forall f\colon (X, A) \to (Y, B)$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(A) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_\star} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f'_\star} \\ H_p(Y, B) & \xrightarrow{\delta} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

dove $f' = f|_A$. Mentre la richiesta che sia funtore significa che se $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ e $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$ sono mappe continue allora $(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star$.

L'omologia singolare relativa soddisfa tutti questi assiomi, a meno di quelli non ancora verificati che sono l'omotopia e l'escissione.

Definizione 2.7.2 *Sia $\{\, X_\alpha \,\}$ una famiglia di spazi topologici, si definisce la **somma topologica** $X = \Pi_\alpha X_\alpha$ come lo spazio topologico formato dall'unione disgiunta di tutti gli X_α equipaggiato con la **topologia dell'unione disgiunta**, ovvero un insieme è aperto se e solo se è aperto rispetto alla topologia di ogni X_α.*

[MANCA TUTTA LE LEZIONE 6]

2.8 Omologia delle sfere

Considero $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 1$, ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{ 0, n \} \\ 0 & \text{se } k \notin \{ 0, n \} \end{cases}$$

Questo risultato ha numerose conseguenze, infatti ho trovato uno strumento più fine del gruppo fondamentale che riesce a distinguere cose diverse.

Corollario 2.8.1 $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ *se e solo se* $n = m$.

Dimostrazione: Se $n = m$ vale che $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^m$ quindi in particolare $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$ con la mappa identità. Assumo $n \neq m$ e senza perdita di generalità pongo $n > m$.

Per assurdo $\mathcal{S}^n \simeq \mathcal{S}^m$, quindi esiste un omomorfismo $F : \mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^m$, quindi esiste anche l'omomorfismo inverso $G : \mathcal{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^n$. Quindi esistono anche:

$$F_\star : H_k\mathcal{S}^n \to H_k(\mathcal{S}^m) \quad \text{e} \quad G_\star : H_k\mathcal{S}^m \to H_k(\mathcal{S}^n)$$

Ma $F \circ G = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}$ e $G \circ F = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^m}$, ma utilizzando la funtorialità si trova quindi che:

$$F_\star \circ G_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^m)} \quad \text{e} \quad G_\star \circ F_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^n)}$$

Da cui si deduce che $F_\star$ e $G_\star$ sono continue e sono inverse. Vale quindi che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong H_k(\mathcal{S}^m) \; \forall k \geq 0$$

Se vale per ogni k in particolare vale per $k = n$, cioè:

$$H_n(\mathcal{S}^n) = H_n(\mathcal{S}^m)$$

Ma $H_n(\mathcal{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ e $H_n(\mathcal{S}^m) \cong 0$ da cui $\mathbb{Z} \cong 0$, che è assurdo. □

Corollario 2.8.2 (Invarianza topologica della dimensione) $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ *se e solo se* $n = m$.

Come si è visto non si riesce a dimostrare questo corollario utilizzano solo il gruppo fondamentale. **Dimostrazione**: Per assurdo esiste un omomorfismo $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ con $n > m > 2$. Con i vincolo imposti su m e n gli spazi sono contraibili, quindi il gruppo fondamentale è in entrambi i casi banale. Togliendo un punto $p \in \mathbb{R}^n$ e $f(p) \in \mathbb{R}^m$, e restringendo f in modo da ottenere l'omomorfismo $f' : \mathbb{R}^n \setminus \{ p \} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m \setminus \{ f(p) \}$. Si sa inoltre che per $s \geq 2$ vale che $\mathbb{R}^s \setminus \{ q \} \simeq \mathcal{S}^{s-1} \times \mathbb{R}$, infatti è sufficiente mandare a 0 il punto q con una traslazione (che è certamente un omomorfismo) e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k \setminus \{ q \} &\to \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R}^+ \quad \simeq \mathcal{S}^{k-1} \times \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto \left(\vec{x}, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right) \end{aligned}$$

Quindi:
$$\mathbb{R}^n \setminus \{\, p \,\} \simeq \mathbb{R}^m \setminus \{\, f(p) \,\} \iff \mathcal{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{S}^{m-1} \times \mathbb{R}$$

Si ha la tentazione di eliminare $\mathbb{R}$ dalla precedente relazione, ma questo non si può fare come mostrano alcuni casi molto patologici. Tuttavia è possibile passare alla omotopia sapendo che $\mathcal{S}^k \times \mathbb{R} \sim \mathcal{S}^k$, da cui $\mathcal{S}^{n-1} \sim \mathcal{S}^{m-1}$. Ma l'omologia è invariante omotopico, cioè $H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_k(\mathcal{S}^{m-1})$, utilizzando il trucco di prima scelgo $k = n-1$ e quindi:

$$H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{m-1}) \iff \mathbb{Z} \cong 0$$

Che è assurdo. □

Corollario 2.8.3 *$\mathcal{S}^{n-1}$ non è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$ per $n \geq 2$*

Dimostrazione: Si ricorda che:

$$\mathcal{D}^n = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| \leq 1 \,\} \quad \mathcal{S}^{n-1} = \partial\mathcal{D}^n = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid ||\vec{x}|| = 1 \,\}$$

Chiaramente esiste $i \colon \mathcal{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathcal{D}^n$.

Definizione 2.8.4 *Uno spazio topologico Y si dice* ***retratto di deformazione*** *di un altro spazio topologico X tale che $Y \hookrightarrow X$ se esiste una funzione continua $r \colon X \to Y$ che inverte a meno di omotopia la mappa di inclusione $i \colon Y \to X$, cioè tale che soddisfa:*

1. *$r \colon X \to Y$ continua*
2. *$i \circ r \sim \mathbb{I}_X$*
3. *$r \circ i = \mathbb{I}_Y$*

Una mappa che soddisfa queste condizioni è detta ***retrazione****.*

Suppongo per assurdo che $\mathcal{S}^{n-1}$ è un retratto di deformazione di $\mathcal{D}^n$, cioè che esiste una retrazione r. Passando all'omologia:

$$\begin{gathered} i_\star \colon H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_k(\mathcal{D}^n) \\ r_\star \colon H_k(\mathcal{D}^n) \to H_k(\mathcal{S}^{n-1}) \\ (i \circ r)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{D}^n})_\star \text{ e } (r \circ i)_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}})_\star \end{gathered}$$

Quindi:
$$i_\star \circ r_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{D}^n)} \text{ e } r_\star \circ i_\star = \mathbb{I}_{H_k(\mathcal{S}^{n-1})} \ \forall k \in \mathbb{N}$$

In particolare considero $k = n-1$:

$$\begin{gathered} i_\star \colon H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1}) \to H_n - 1(\mathcal{D}^n) \\ r_\star \colon H_n - 1(\mathcal{D}^n) \to H_n - 1(\mathcal{S}^{n-1}) \end{gathered}$$

Cioè: $i_\star \colon \mathbb{Z} \to 0$. Considero un generatore α di $H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$, cioè tale che $\langle \alpha \rangle = H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ allora $i_\star(\alpha) = 0$ quindi $r_\star \circ i_\star = 0$, ma $(r \circ i)_\star = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}$ quindi significherebbe $\mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}_\star}(\alpha) = 0$, cioè che $\alpha = 0$, che è assurdo perché $\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$. □

Teorema 2.8.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer) *Ogni funzione continua* $g\colon \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}^n$ *con* $n \geq 2$ *ammette almeno un punto fisso in* $\mathcal{D}^n$*, cioè:*

$$\exists \vec{x_o} \in \mathcal{D}^n \mid g(\vec{x_0}) = \vec{x_0}$$

Dimostrazione: Per assurdo g non ammette punto fisso cioè esisto $\vec{x} \in \mathcal{D}^n$ tale che $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$. Sicuramente tuttavia $g(\vec{x}) \in \mathcal{D}^n$. Considero la retta l passante per $\vec{x}$ e $g(\vec{x})$. Questa retta interseca il bordo di $\mathcal{D}^n$ in due punti $\{ p_1, p_2 \}$:

$$l \cap \partial\mathcal{D}^n = l \cap \mathcal{S}^{n-1} = \{ p_1, p_2 \}$$

Definisco la mappa $r\colon \mathcal{D}^n \to \partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$ tale che associ ad ogni punto del disco il punto di intersezione della retta $l_{\vec{x}}$ che gli sta più vicino (infatti in $\mathbb{R}^n$ è ben definita una nozione di distanza). La retta $l_{\vec{x}}$ è ben definita in quanto per due punti distinti (e per ipotesi $g(\vec{x}) \neq \vec{x}$) passa una e una sola retta.

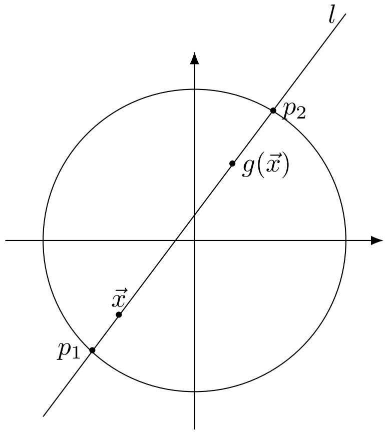


Figura 2.12: Schema per $n = 2$

Esercizio 4 *Dimostrare che* r *è continua.*

Ho una mappa di inclusione naturale:

$$\begin{aligned} i\colon \mathcal{S}^{n-1} &\to \mathcal{D}^n \\ \vec{x} &\mapsto \vec{x} \end{aligned}$$

Se dimostro che r è una retrazione trovo un assurdo per il corollario precedentemente dimostrato. Devo verificare $r \circ i = \mathbb{I}_{\mathcal{S}^{n-1}}$ e $i \circ r \sim \mathbb{I}_{\mathcal{D}^n}$. La prima uguaglianza è certamente vera perché se $\vec{x} \in \partial\mathcal{D}^n$ allora l'intersezione del bordo del disco che gli sta più vicina corrisponde a $\vec{x}$ stesso. Costruisco esplicitamente una relazione di omotopia per mostrare la seconda: Siccome $\mathcal{D}^n$ è convesso è ben definita $G(t, \vec{x}) = (1 - t)\vec{x} + tr(\vec{x})$ con $t \in [0, 1]$. Questa è una buona omotopia in quanto $\forall t, \vec{x}$:

- G è continua
- $G(t, \vec{x}) \in \mathcal{D}^n$
- $G(0, \vec{X}) = \vec{x}$
- $G(1, \vec{X}) = r(\vec{x})$

Quindi r è retrazione ma questo è assurdo. $\square$

2.8.1 Teoria del grado

Considero $H_n(\mathcal{S}^m)$, so che $H_n(\mathcal{S}^m) \cong \mathbb{Z}$, cioè esiste una mappa $f\colon \mathbb{Z} \to H_n(\mathcal{S}^m)$ tale che $f(1) = \alpha$ con α n-ciclo che non è un bordo. In questo modo $H_n(\mathcal{S}^m) = \langle\alpha\rangle$. Considero $\varphi\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ continua con $n \geq 1$, so che esiste $\varphi_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) \to H_n(\mathcal{S}^n)$. Per $n = 0$ $\varphi_\star$ manda punti in punti, per $n \geq 1$: sia $c \in H_n(\mathcal{S}^n)$ allora $c = p\alpha$ con $p \in \mathbb{Z}$:

$$\varphi_\star(c) = \varphi_\star(p\alpha) = \varphi_\star(\underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \dots}_{|p| volte}) = \underbrace{\varphi_\star(\alpha) + \varphi_\star(\alpha) + \dots}_{|p| volte} = p\varphi_\star(\alpha)$$

Ma $\varphi_\star(\alpha) \in H_n(\mathcal{S}^n)$ quindi si deve poter scrivere come multiplo di α: $\varphi_\star(\alpha) = d\alpha$ da cui: $\varphi_\star(c) = pd\alpha = dc$ con $d \in \mathbb{Z}$. Questo numero d viene fuori dall'immagine di un generatore, ma non dipende dalla scelta del generatore, infatti:

Sia β un altro generatore, siccome α è un generatore si può scrivere $\beta = m\alpha$ con $m \in \mathbb{Z}$. Pongo come notazione:

$$\varphi_\star(\beta) = d(\beta)\beta \quad \varphi_\star(\alpha) = d(\alpha)\alpha$$

Allora:

$$d(\beta)\beta = \varphi_\star(\beta) = m\varphi_\star(\alpha) = md(\alpha)\alpha$$

Da cui $d(\beta)\beta = \beta d(\alpha)$ cioè $(d(\beta) - d(\alpha))\,\beta = 0$, siccome questo vale per ogni α e β allora $d(\alpha) = d(\beta)$.

Definizione 2.8.6 *Data un'applicazione $\varphi\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ continua è possibile associargli in modo univoco un numero intero, questo è il **grado**:*

$$\begin{aligned} \varphi_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg(\varphi)\alpha \end{aligned}$$

Con α generatore.

Ad esempio per $n = 1$ e $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^p \end{aligned}$$

Vale che $\deg(\varphi) = p$, infatti prendo un generatore di $\mathcal{S}^1$: [MANCA MANCA MANCA]

Voglio usare la teoria del grado per un'applcazione del teorema della palla pelosa.

Proposizione 2.8.7 *Se $f\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ è la riflessione rispetto all'iperpiano $x_0 = 0$, cioè $f(x_0, x_1, x_2, \dots) = (-x_0, x_1, x_2, \dots)$ allora il grado di f è -1.*

Dimostrazione: La dimostrazione è per induzione. Per $n = 1$ [MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA MANCA] □

Ho $\mathcal{S}^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ spazio topologico con la topologia indotta.

Ho trovato che:

$$H_k(\mathcal{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k \in \{ 0, n \} \\ 0 & \text{se } k \notin \{ 0, n \} \end{cases}$$

Ho che $f\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ induce $f_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) \to H_n(\mathcal{S}^n)$ e ho definito il grado come:

Prendo α tale che $\langle \alpha \rangle = H_n(\mathcal{S}^n)$ con:

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{S}^n) &\to \mathbb{Z} \\ \alpha &\mapsto 1 \end{aligned}$$

e $f_\star(\alpha) = \deg(f)\alpha$. So che il grado è un invariante topologico per le sfere.

Proposizione 2.8.8 *Siano $f, g\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ mappe continue, allora $\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g)$.*

Dimostrazione: Per la funtorialità $(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star$ quindi:

$$(g \circ f)_\star(\alpha) = (g_\star \circ f_\star)(\alpha) \quad \Rightarrow \quad g_\star(f_\star(\alpha)) = g_\star(\deg(f)\alpha) = \deg(f) g_\star(\alpha) = \deg(f)\deg(g)\alpha$$

Quindi:

$$\deg(f)\deg(g)\alpha = (g \circ f)_\star(\alpha) = \deg(g \circ f)\alpha$$

Siccome α è generatore: $\deg(g \circ f) = \deg(f)\deg(g)$. □

Voglio applicare questa proprietà alla composizione di riflessioni. Considero:

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathcal{S}^n &\to \mathcal{S}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, -x_{n-1}) \end{aligned}$$

Questa è la riflessione rispetto al sottospazio $x_{n+1} = 0$ in $\mathbb{R}^{n+1}$, quindi ρ fissa su $\mathcal{S}^n$ l'equatore $\mathcal{S}^n \cap x_{n+1} = 0$. Ho trovato che per $n = 1$ $\deg(\rho) = -1$, ora voglio continuare la dimostrazione per induzione.

Suppongo che il risultato sia vero per $\mathcal{S}^k$ e $\mathcal{S}^n$ con $k < n$ mostro che è vero anche per $\mathcal{S}^n$.

In $\mathcal{S}^n$ ho dei sottoinsiemi naturali:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^n_+ &= \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \geq 0 \} \\ \mathcal{D}^n_- &= \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \leq 0 \} \end{aligned}$$

Vale che $\mathcal{D}^n_+ \cap \mathcal{D}^n_- = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{S}^n \mid x_1 \leq 0 \} = \mathcal{S}^{n-1}$. Ho dimostrato che $\tilde{H}_p(\mathcal{S}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n)$ Lo uso [FIGURA]

Ora dimsotro che $H_n \mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1} \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$. Sia $i\colon \mathcal{S}^{n-1} = \partial\mathcal{D}^n \to \mathcal{D}^n$ mappa di inclusione. Ho $(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})$ coppia, faccio la successione esatta lunga in omologia relativa: [FIGURA] Considero per $p = n$ con $n \geq 2$ $H_p(\mathcal{D}^n) = H_p(\mathcal{D}^{n-1}) = 0$ perchè contraibili. Quindi $H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$ [MANCA MANCA]

Quindi il risultato finale è:

Lemma 2.8.9 *Se $\rho\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ è la riflessione rispetto a $\{ x_{n+1} = 0 \}$ allora $\deg(\rho) = -1$.*

Perchè voglio fare la riflessione? Voglio studiare l'applicazione antipodale che è quella che scambia di segno tutte le componenti:

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (-x, \dots, -x_n) \end{aligned}$$

Questa è continua e vale che $A^2 = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$. Definisco per $n \geq 2$ la restrizione della trasformazione antipodale su $\mathcal{S}^{n-1}$: $a = A|_{\mathcal{S}^{n-1}}$, vale che $a\colon \mathcal{S}^{n-1} \to \mathcal{S}^{n-1}$, infatti $\mathrm{Im}(a) = \mathcal{S}^{n-1}$. Quanto vale $\deg(a)$? Scrivo a come composizione di riflessioni:

$$a = \rho_n \circ \cdots \circ \rho_1$$

Per il lemma appena dimostrato:

$$\deg(a) = \deg(\rho_n \circ \cdots \circ \rho_1) = \deg(\rho_n)\deg(\rho_{n-1}) \dots \deg(\rho_1) = (-)^n$$

Quindi $\deg(a) = (-)^n$ e perciò cambia se n è pari o dispari.

Corollario 2.8.10 *La mappa antipodale non è omotopicamente equivalente all'identità su $\mathcal{S}^n$ su n è pari.*

Dimostrazione: Se le due applicazioni fossero omotope varrebbe che $a_\star = (\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n})_\star$ quindi:

$$\deg(a) = \deg(\mathbb{I}_{\mathcal{S}^n}) = (-)^{n+1} = 1$$

Questo è vero solo se $n+1$ è pari, ma se n è pari $n+1$ non può esserlo. □

Ciò non dimostra che per n pari invece le due applicazioni sono omotope. Questa è una dimostrazione avanzata che richiede i gruppi di omotopia superiori con i quali si dimostra che se due applicazioni definite su $\mathcal{S}^n$ hanno lo stesso grado allora sono omotope.

Corollario 2.8.11 *Sia $f\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ una mappa continua con n pari, allora esiste almeno un punto $\vec{x_0} \in \mathcal{S}^n$ tale che $f(\vec{x_0}) = \pm x_0$.*

Dimostrazione: Per assurdo $f(\vec{x}) \neq \pm\vec{x}\ \forall \vec{x} \in \mathcal{S}^n$. Sia $F\colon \mathcal{S}^n \times I \to \mathcal{S}^n$ con:

$$F(\vec{x}, t) = \frac{tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}}{||tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}||}$$

$\forall \vec{x}, t$ vale che $F(\vec{x}, t) \in \mathcal{S}^n$. La norma al denominatore non è mai nulla per ipotesi, infatti $||tf(\vec{x}) + (1-t)\vec{x}|| = 0$ significa che $tf(\vec{x}) = (1-t)\vec{x}$, quindi se $t = 0$ allora $0 = -\vec{x}$ ma $\vec{x} = 0 \notin \mathcal{S}^n$, se $t \neq 0$ allora $f(\vec{x}) = \left(\frac{t-1}{t}\right)\vec{x}$, ma $\vec{x}, f(\vec{x}) \in \mathcal{S}^n$ quindi $||f(\vec{x})|| = ||\vec{x}|| = 1$ e quindi $1 = \left|\frac{t-1}{t}\right|$, ma $t \in (0,1]$, quindi non è possibile trovare t.

Inoltre $F(\vec{x}, 0) = \vec{x}$ e $F(\vec{x}, 1) = f(\vec{x})$ quindi F è una relazione di omotopia tra f e l'identità.

Mostro che f è anche omotopa all'applicazione antipodale, così per la transitività della relazione di omotopia trovo l'assurdo.

Si definisce $G\colon \mathcal{S}^n \times I \to \mathcal{S}^n$:

$$G(\vec{x},t) = \frac{-t\vec{x} + (1-t)f(\vec{x})}{||-t\vec{x} + (1-t)f(\vec{x})||}$$

Con i medesimi ragionamenti si trova che $\forall \vec{x}, t$ vale che $G(\vec{x},t) \in \mathcal{S}^n$, e inoltre $G(\vec{x},0) = f(\vec{x})$ e $G(\vec{x},1) = -\vec{x}$ quindi G realizza l'omotopia con l'applicazione antipodale. $\square$

3 Omologia cellulare

3.1 Complessi CW

Considero $\mathcal{D}^n$, vale che $\partial\mathcal{D}^n = \mathcal{S}^{n-1}$, considerato lo spazio quoziente $X = {}^{\mathcal{D}^n}\!\big/_{\partial\mathcal{D}^n}$, questo è il quoziente del disco per la relazione di equivalenza che fa collassare il bordo in un punto p. Si trova che $X \simeq \mathcal{S}^n$.

Posso fare questa costruzione:

Indice analitico

$\mathcal{R}$-modulo, 4
$\mathbb{Z}$-modulo libero, 5
k-catene singolari, 15
k-ciclo, 19
k-simplesso singolare, 14

Anello, 4
Anello commutativo, 4
Anello unitario, 4
Arco, 10

Bordo, 17

Cammino composto, 8
Campo, 4
Complesso di moduli, 6
Complesso di moduli esatto, 6
Coordinate baricentrali, 13

Elementi omologhi, 19

Genere, 10
Giunzione
vedi Cammino composto, 8
Grado, 20
Grado di una sfera, 37
Gruppi di omotopia superiore, 12
Gruppo derivato, 22
Gruppo fondamentale, 8, 11
Gruppo generato, 5

Immagine, 5
Inclusione, 12
Insieme compatto, 7
Insieme convesso, 17
Insiemi aperti, 6
Inviluppo convesso, 17

Laccio, 7

Mappa tra complessi, 30
Modulo di omologia, 6
Modulo quoziente, 5

Nucleo, 5

Omeomorfismo, 7
Omologia singolare della coppia
vedi Omologia singolare relativa, 34
Omologia singolare relativa, 34
Omomorfismo, 5
Omomorfismo di connessione, 31
Omotopia
vedi Relazione di omotopia, 8
Operatore faccia, 16

Rango di gruppo abeliano, 5
Relazione di omotopia, 8
Retratto di deformazione, 35
Retrazione, 35
Ricoprimento, 7

Semplicemente connesso, 9
Simplesso standard, 13
Spazio connesso, 7
Spazio connesso per archi, 10, 11
Spazio contraibile, 9
Spazio topologico, 6
Spazio topologico puntato, 7
Successione esatta corta, 30

Teorema del punto fisso, 36
Teorema di Seifert–van Kampen, 9
Teorema fondamentale degli omomorfismi, 20

Topologia, 6
Topologia discreta, 6
Topologia indotta, 7