Esercizi di Topologia Algebrica

Gabriele Bozzola
Matricola: 882709

Gennaio 2017

1 Esercizio 1.1.19 (iv)

Siano X e Y due spazi topologici, dico che X è omotopicamente equivalente a Y se esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una funzione continua $g\colon Y \to X$ tale che $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, dove $\sim$ indica la relazione di omotopia tra due applicazioni continue.

Devo mostrare che la relazione di omotopia tra due spazi topologici è una relazione di equivalenza, cioè, indicando anche questa relazione con $\sim$, soddisfa:

1. Riflessività: $X \sim X$
2. Simmetria: se $X \sim Y$ allora $Y \sim X$
3. Transitività: se $X \sim Y$ e $Y \sim Z$ allora $X \sim Z$

Ma:

1. Devo trovare una funzione continua $f\colon X \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon X \to X$ con $f \circ g \sim 1_X$ e $g \circ f \sim 1_X$. Una possibile scelta per queste funzioni è $f = g = 1_X$ che è tale che $f \circ g = g \circ f = 1_X \sim 1_X$ per la riflessività della relazione di omotopia tra funzioni.
2. Per ipotesi esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$ tale che esiste una seconda funzione continua $g\colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$, devo trovare una funzione continua $\phi\colon Y \to X$ tale che esiste una seconda funzione continua $\gamma\colon X \to Y$ con $\phi \circ \gamma \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi \sim 1_Y$ Una possibile scelta per queste funzioni è $\phi = f$ e $\gamma = g$, infatti queste sono funzioni continue con il giusto dominio e codominio e sono tali che $\phi \circ \gamma = g \circ f \sim 1_X$ e $\gamma \circ \phi = f \circ g \sim 1_Y$.

Per dimostrare il terzo punto è conveniente utilizzare un lemma:

Lemma 1. *La relazione di omotopia tra funzioni si comporta bene rispetto alla composizione, cioè siano X, Y, W, Z spazi topologici, $f, g\colon X \to Y$, $h\colon W \to X$ e $k\colon Y \to Z$ mappe continue, allora $f \circ h \sim g \circ h$ e $k \circ f \sim h \circ g$.*

Dimostrazione. Siccome $f \circ g$ significa che esiste una funzione continua $F\colon X \times I \to Y$ tale che:

$$F(x,0) = f(x)$$
$$F(x,1) = g(x)$$

Definisco $\phi = f \circ h$ e $\gamma = g \circ h$, vale che $\phi, \gamma\colon W \to Y$ sono funzioni continue perché composizioni di funzioni continue. Devo mostrare che:

$$\exists H\colon W \times I \to Y \text{ continua tale che } H(w,0) = \phi(w) \text{ e } H(w,1) = \gamma(w)$$

Una possibile scelta per H è $H = F \circ (h, 1_I)$, questa è continua perché composizione di funzioni continue, inoltre è tale che $H(w,0) = f \circ h(w) = \phi(w)$ e $H(w,1) = g \circ h(w) = \gamma(w)$, e quindi è l'omotopia cercata. □

A questo punto:

3. Per ipotesi so che $X \sim Y$ e $Y \sim Z$, cioè so che:

$$\exists f_1\colon X \to Y \text{ tale che } \exists g_1\colon Y \to X \text{ tale che } f_1 \circ g_1 \sim 1_Y \text{ e } g_1 \circ f_1 \sim 1_X$$
$$\exists f_2\colon Y \to Z \text{ tale che } \exists g_2\colon Z \to Y \text{ tale che } f_2 \circ g_2 \sim 1_Z \text{ e } g_2 \circ f_2 \sim 1_Y$$

Devo mostrare che:

$$\exists f_3\colon X \to Z \text{ tale che } \exists g_2\colon Z \to X \text{ tale che } f_3 \circ g_3 \sim 1_Z \text{ e } g_3 \circ f_3 \sim 1_X$$

Una possibile scelta per f_3 e g_3 è $f_3 = f_2 \circ f_1$ e $g_3 = g_1 \circ g_2$. In questo modo ho $f_3\colon X \to Z$ e $g_3\colon Z \to X$, queste mappe sono continue perché sono composizione di funzioni continue. Perché questa sia una buona scelta deve essere $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Z$ e $g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \sim 1_X$.

Nel primo caso devo mostrare che $f_2 \circ h \sim 1_Z$ con $h = f_1 \circ g_1 \circ g_2 \sim 1_Y \circ g_2 = g_2$ per il lemma 1, in quanto $f_1 \circ g_1 \sim 1_Y$ per ipotesi. Siccome $h \sim g_2$ e $f_2 \circ g_2 \sim 1_Z$ per il medesimo lemma $f_2 \circ h \sim 1_Z$. La seconda relazione è analoga. □

2 Esercizio 1.1.19 (v)

Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti quindi esiste una funzione continua $f\colon X \to Y$, detta *relazione di omotopia* tale che esista una seconda funzione continua $g\colon Y \to X$ con $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$. Sia $h\colon X \to Y$ una funzione continua con $h \sim f$, devo mostrare che h è una relazione di omotopia, cioè esiste una funzione continua $k\colon Y \to X$ tale che $h \circ k \sim 1_Y$ e $k \circ h \sim 1_X$. Una possibile scelta per questa funzione k è la funzione g stessa. Questa è continua e per il lemma 1 vale che $h \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ h \sim 1_X$ in quanto per ipotesi $f \circ g \sim 1_Y$ e $g \circ f \sim 1_X$ e $f \sim h$. □

3 Esercizio 1.1.19 (vii)

Siano X, Y spazi topologici e $f\colon X \to X$, $g\colon Y \to Y$ funzioni continue tali che $f \circ g$ e $g \circ f$ siano equivalenze omotopiche, devo mostrare che questo implica che f e g stesse siano equivalenze omotopiche, cioè che:

$$\exists \phi\colon Y \to X \text{ continua tale che } f \circ \phi \sim 1_Y \text{ e } \phi \circ f \sim 1_X$$
$$\exists \gamma\colon X \to Y \text{ continua tale che } g \circ \gamma \sim 1_X \text{ e } \gamma \circ g \sim 1_Y$$

Siccome $f \circ g$ e $g \circ f$ sono equivalenze omotopiche vale che:

$$\exists h\colon Y \to Y \text{ continua tale che } f \circ g \circ h \sim 1_Y \text{ e } h \circ f \circ g \sim 1_Y$$
$$\exists k\colon X \to X \text{ continua tale che } g \circ f \circ k \sim 1_X \text{ e } k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Affermo che $k \circ g \circ f \circ g \circ h \sim k \circ g$ questo è vero siccome $k \circ g\colon Y \to X$ è continua e siccome $f \circ g \circ h \sim 1_Y$ posso utilizzare il lemma 1. Ma per il medesimo lemma e per il fatto che $k \circ g \circ f \sim 1_X$ deriva che $g \circ h \sim k \circ g$.

Una possibile scelta per ϕ è $\phi = g \circ h$, infatti utilizzando il fatto che $f \circ g$ è equivalenza omotopica:

$$f \circ \phi = f \circ g \circ h \sim 1_Y$$

Inoltre utilizzando l'osservazione appena fatta e il lemma 1:

$$g \circ h \circ f \sim k \circ g \circ f \sim 1_X$$

Anche in questo caso ho utilizzato il fatto che $g \circ f$ è equivalenza omotopica.

Si può utilizzare un ragionamento analogo per γ. □

4 Esercizio 1.2.33 (v)

È dato l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} f\colon \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (z_1 z_2, z_2) \end{aligned}$$

Sullo spazio $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$ ogni laccio è omotopo ad un laccio della forma:

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta_1 \times \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \\ (s, t) &\mapsto (\mathrm{e}^{2\pi i n s}, \mathrm{e}^{2\pi i m t}) \end{aligned}$$

Dove $\Delta_1 \simeq [0, 1]$ è l'1-simplesso standard, e in cui sostanzialmente $n, m \in \mathbb{Z}$ contano il numero di avvolgimenti del laccio attorno alle due circonferenze, per questo il gruppo fondamentale è $\pi_1(\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sto cercando quindi la mappa:

$$\begin{aligned} f_\star\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n, m) &\mapsto ? \end{aligned}$$

L'azione di $f_\star$ è definita a partire dai lacci omotopicamente distinti del gruppo fondamentale: $f_\star[\sigma] = [f \circ \sigma]$ quindi:

$$(s,t) \xrightarrow{\sigma} (\mathrm{e}^{2\pi i n s}, \mathrm{e}^{2\pi i m t}) \longrightarrow (\mathrm{e}^{2\pi i n s}\mathrm{e}^{2\pi i m t}, \mathrm{e}^{2\pi i m t})$$

Le classi di equivalenza distinte sono quelle in cui il numero di avvolgimenti del laccio intorno a $\mathcal{S}^1$ è diverso, quindi:

$$\begin{aligned} f_\star \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ (n,m) &\mapsto (n+m, m) \end{aligned}$$

Intuitivamente quello che succede è che f fa ruotare il punto sulla prima $\mathcal{S}^1$ di un angolo pari a quello del punto della seconda $\mathcal{S}^1$ e quindi il numero di avvolgimenti si somma. □

5 Esercizio 1.2.33 (xii)

Per assurdo $\mathcal{S}^1$ e $\mathcal{S}^n$ con $n \geq 2$ sono omotopicamente equivalenti, questo implica che i loro gruppi fondamentali sono isomorfi, indipendentemente dal punto base in quanto gli spazi sono connessi per archi. Ma $\pi_1(\mathcal{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, mentre $\pi_1(\mathcal{S}^n) \cong 0$ per $n \geq 2$, quindi siccome i gruppi fondamentali non sono isomorfi gli spazi non possono essere omotopicamente equivalenti. □

6 Esercizio 1.2.33 (xiii)

Per assurdo esiste una funzione continua $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ con $n > 2$ che sia omeomorfismo. Tolgo un punto p da $\mathbb{R}^2$, se f omeomorfismo anche la restrizione $\tilde{f}$ di f su $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, p \,\}$ è omeomorfismo. Ma $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, p \,\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1$, infatti una mappa che realizza esplicitamente questo omeomorfismo è, dopo aver portato p in 0 (una traslazione è un omeomorfismo):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \setminus \{\, p \,\} &\to \mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \\ \vec{x} &\mapsto \left(||\vec{x}||, \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||} \right) \end{aligned}$$

Analogamente $\mathbb{R}^n \setminus \{\, f(p) \,\} \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$. Quindi siccome per ipotesi esiste un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^n$ allora $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1 \simeq \mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}$, e questo implica che i gruppi fondamentali sono isomorfi. Siccome il gruppo fondamentale di un prodotto è il prodotto dei gruppi fondamentali e vale che:

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{R}) &= 0 \\ \pi_1(\mathcal{S}^1) &= \mathbb{Z} \\ \pi_1(\mathcal{S}^n) &= 0 \end{aligned}$$

allora $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^1) = \mathbb{Z}$ e $\pi_1(\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-1}) = 0$, ma questi gruppi non sono isomorfi, e quindi ho trovato l'assurdo. □

7 Esercizio 1.5.19 (vii)

Il gruppo fondamentale di uno spazio topologico X sul punto base $x_0 \in X$ è:

$$\pi_1(X, x_0) = \{\, f\colon \mathcal{S}^1 \to X \text{ continua} \mid f(1) = x_0 \,\} \,/ \sim$$

Dove $\sim$ è la relazione di equivalenza omotopica. Una funzione si dice omotopa a zero quando è omotopa ad una funzione costante.

Se il gruppo fondamentale è banale $\forall x_0 \in X$ singifica che il suo unico elemento è la classe di equivalenza del laccio costante $[1]$, per cui considerata la generica funzione $g\colon \mathcal{S}^1 \to X$ continua, questa è necessariamente nella stessa classe di equivalenza di $[1]$ in $\pi_1(X, g(1))$ e ciò singifica che è omotopa ad un cammino costante, quindi omotopa a zero.

Mostro il viceversa. Se tutte le funzioni $h\colon \mathcal{S}^1 \to X$ sono omotope a zero allora sono tutte equivalenti al laccio costante $C_{h(1)}$ e quindi il gruppo fondamentale $\pi_1(X, h(1))$ contiene questa sola classe di equivalenza, ed è quindi banale. Questo vale $\forall x_0 \in X$, basta considerare una funzione tale che $h(1) = x_0$. □

8 Esercizio 1.9 (7)

Per risolvere velocemente questo esercizio sono utili alcuni lemmi:

Lemma 2. *Sia ρ_i la riflessione rispetto al piano $x_i = 0$:*

$$\begin{aligned} \rho_i\colon \mathcal{S}^n &\to \mathcal{S}^n \\ (x_1 \ldots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

allora il suo grado è -1, cioè $\deg \rho_i = -1 \ \forall i \in \{\, 1, \ldots, n+1 \,\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione. Per $n = 1$.

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ (x_0, x_1) &\mapsto (x_0, -x_1) \end{aligned}$$

Considero il generatore σ:

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma\colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))) \end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned} (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t))) &= (\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t))) = \\ &= (\cos(2\pi(1-t)), \sin(2\pi(1-t)))) \end{aligned}$$

Quindi $\rho \circ \sigma = \bar{\sigma} = -\sigma$ e quindi il grado è -1.

Suppongo che il risultato sia vero per $\mathcal{S}^{n-1}$ mostro che è vero anche per $\mathcal{S}^n$.

Ho dimostrato che

$$\tilde{H}_p(\mathcal{S}^n) \cong H_p(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_p(\mathcal{S}^n, \mathcal{D}^n)$$

Quindi considerando anche che ρ induce una mappa $\rho_\star$ a livello di omologia:

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[r, "\rho_\star"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) & H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Ho anche che $H_n(\mathcal{D}^n, \mathcal{S}^{n-1}) \cong H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})$, quindi il diagramma diventa:

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[r, "\rho_\star"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_n(\mathcal{S}^n) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1}) \arrow[r, "\rho_\star^{(n-1)}"] & H_{n-1}(\mathcal{S}^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Ma per ipotesi induttiva per $n-1$ il grado è -1, quindi anche per n il grado è -1. □

Lemma 3. *Siano $f, g\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ due mappe continue allora* $\deg(f \circ g) = \deg f \, \deg g$.

Dimostrazione. Il grado è definito dall'azione delle mappe indotte da f e g su $H_n(\mathcal{S}^n)$:

$$\begin{aligned} f_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg f \, \alpha \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} g_\star\colon H_n(\mathcal{S}^n) &\to H_n(\mathcal{S}^n) \\ \alpha &\mapsto \deg g \, \alpha \end{aligned}$$

Per la funtorialità:

$$(f \circ g)_\star(\alpha) = (f_\star \circ g_\star)(\alpha) = f_\star(g_\star(\alpha)) = f_\star(\deg g \, \alpha)$$

Siccome $f_\star$ è omomorfismo:

$$f_\star(\deg g \, \alpha) = \deg g f_\star(\alpha) = \deg g \, \deg f$$

Ma per definizione:

$$(f \circ g)_\star(\alpha) = \deg(f \circ g)\alpha$$

Da cui $\deg(f \circ g) = \deg f \, \deg g$. □

Lemma 4. *Siano $f, g\colon \mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^n$ due mappe continue, se* $\deg f = \deg g$ *allora $f \sim g$, cioe se due applicazioni hanno le stesso grado allora sono omotope.*

Utilizzando questi lemmi diventa semplice classificare tutte le mappe della forma:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (\pm x_1, \dots, \pm x_{n+1})$$

Per rappresentare tutto questo insieme si può scrivere:

$$r^{i_1 \dots i_{n+1}} \colon (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto ((-)^{i_1} x_1, \dots, (-)^{i_{n+1}} x_{n+1}) \text{ con } i_j \in \{ 0, 1 \} \ \forall j \in \{ 1, \dots, n \}$$

L'insieme di queste applicazioni forma un gruppo discreto finito generato dalle riflessioni ρ_i, e la generica mappa si può scrivere come:

$$r^{i_1 \dots i_{n+1}} = \rho_{n+1}^{i_{n+1}} \circ \dots \circ \rho_1^{i_1} \text{ con } i_j \in \{ 0, 1 \} \ \forall j \in \{ 1, \dots, n \}$$

Utilizzando il lemma 3 si ha che:

$$\deg r^{i_1 \dots i_{n+1}} = \prod_j^{n+1} i_j = \pm 1$$

Quindi tutte le funzioni $r^{i_1 \dots i_{n+1}}$ si ripartiscono in due classi di equivalenza, una con rappresentante l'identità, l'altra con rappresentante la mappa antipodale. □

9 Esercizio 1.9 (21)

Sia:

$$\begin{aligned} q_1 \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

Questa induce una mappa sul gruppo $H_1(\mathcal{S}^1)$, il quale è noto essere gruppo libero generato di rango 1. Un suo generatore è dato dalla classe del simplesso singolare:

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Ma quindi:

$$\begin{aligned} q_1 \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

E quindi $q_1(\sigma) = \sigma \star \sigma \star \sigma \cdots = \sigma^n$, cioè sui gruppi di omologia:

$$\begin{aligned} (q_1)_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 &\mapsto n \end{aligned}$$

Per questo il grado della mappa è n. Sia:

$$\begin{aligned} q_2 \colon \mathcal{S}^1 &\to \mathcal{S}^1 \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

Dove $\bar{z}$ indica il cammino inverso. Allora considerando lo stesso generatore:

$$\begin{aligned} q_2 \circ \sigma \colon \Delta_1 &\to \mathcal{S}^1 \\ t &\mapsto \mathrm{e}^{2\pi i(1-t)} = \mathrm{e}^{-2\pi i t} \end{aligned}$$

Quindi a livello di gruppi di omologia:

$$\begin{aligned} (q_2)_\star \colon H_1(\mathcal{S}^1) &\to H_1(\mathcal{S}^1) \\ 1 &\mapsto -1 \end{aligned}$$

E quindi il grado è -1. □

10 Esercizio 4.2.27 (v)

Utilizzando i risultati dell'esercizio 8 e le medesima notazione, la funzione f_k si può scrivere come $f_k = \rho_k \circ \cdots \circ \rho_1$, quindi usando il lemma del grado della composizione di funzioni su sfere:

$$\deg f_k = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$