

# 波浪能最大输出功率设计

## 摘要

本文基于波浪能转换装置浮子与振子的运动过程，通过运动学分析、线性规划、指数拟合、参数估计与假设检验等方法，建立了浮子与振子的运动模型，并利用四步龙格库塔算法、局部搜索法等算法，对不同阻尼系数下转换装置输出功率进行了研究，建立了确立阻尼器最优阻尼系数的数学模型，并求取了最大输出功率及对应的阻尼系数。

问题一中，通过受力分析进行物理建模，首先设浮子锥形壳体部分完全浸入水中，并验证其合理性。选定参考系，规定物体速度与加速度的方向，经受力分析后列写浮子与振子垂荡运动时的微分方程组，得到垂荡运动下浮子与振子的运动模型。利用 MATLAB 绘制浮子、振子位移与速度随时间变化图。

问题二中，为了求取在不同阻尼系数的情况下 PTO 系统平均输出功率的最大值，将阻尼系数的变化分别视为单因素单目标优化和多因素单目标优化问题，选取浮子和振子运动稳定后的时间，即 100T 至 110T 这 10 个周期求 PTO 系统做的总功，通过浮子和振子 10 个稳定运动的周期内做的功的平均值来计算 PTO 系统的平均输出功率。在问题一所作离散图基础上，采用线性规划的思想，求平均输出功率的最大值为 264.5315W，并通过指数拟合法得到平均输出功率随比例系数变化函数：

$$f(x) = 482.4 \cdot e^{-9.925 \times 10^{-6} \cdot x} - 494.4 \cdot e^{-5.184 \times 10^{-5} \cdot x} \quad R^2 = 0.9967$$

问题三中，研究转动情况我们以转轴为各力矩作用的参考轴，以海平面的垂直方向角度为 0，因为垂荡运动与纵摇运动之间具有相互影响，为了研究垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度，我们分别研究竖直方向的受力和旋转的力矩。通过分别分析竖直方向浮子和振子的受力情况得出垂荡时浮子与振子的力与加速度的方程，再分析摇荡时浮子与振子所受力矩与加速度关系得到一个四元微分方程组

$$\begin{cases} T_j - T_{nt} - T_{xz} - T_{xb} - T_h = (J_1 + J_f)\alpha_1 \\ T_{nt} + T_{xz} = J_2\alpha_2 \\ F_j - F_x - F_h - F_{zz} - F_t = (m_1 + m_f)a_1 \\ F_j - m_2 \cdot g + F_{zz} + F_n \cdot \sin \theta_2 = m_2 a_2 \end{cases}$$

利用 MATLAB 强大的运算能力运用四步龙格库塔算法求解微分方程，得到振子与浮子各参数随时间的变化曲线。

问题四中，基于问题三的运动模型，通过多因素线性规划，以直线阻尼器的阻尼系数和旋转阻尼器的阻尼系数为变量因素，以平均功率最大为目标函数建立多因素规划模型，利用 MATLAB 迭代，遍历搜索、逐步逼近功率的最优值 176.013 W。

**关键词：**龙格库塔算法 局部搜索法 参数估计与假设检验 线性规划 指数拟合

## 一、 问题重述

近年来，能源利用与环境污染问题日趋严重，太阳能、波浪能等可再生能源具有广阔的应用前景。为合理有效地利用波浪能这种可再生能源，人类研发出一种波浪能装置，该装置的能量转换效率是尤为关键的一项研究问题。

该波浪能转换装置由浮子、振子、能量输出系统 PTO（包括弹簧和阻尼器）、中轴组成，在波浪能的作用下，浮子运动带动振子运动，波浪能转换装置如图 1。

问题一：假设浮子在海水中只做垂荡运动，根据附件 3 与附件 4 中的相关信息，建立浮子与振子的运动模型，并求出在以下两种情况下，波浪激励力为  $f \cos \omega t$  时，浮子与振子前 40 个周期内时间间隔为 0.2 秒的垂荡位移与速度：

（1）直线阻尼器的阻尼系数为  $10000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ；

（2）直线阻尼器的阻尼系数与振子、浮子间的相对速度的绝对值的开方成正比，比例系数为 1000。

给出 10s、20s、40s、60s、100s 时浮子与振子的垂荡位移与速度。

问题二：假设浮子在波浪中只做垂荡运动，在以下两种情况下，通过建立数学模型确定直线阻尼器最优阻尼系数，使得能量输出系统 PTO 输出功率最大：

（1）直线阻尼器系数为区间  $[0, 10000]$  内的一个确定常数；

（2）直线阻尼器系数与浮子、振子间的相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数为区间  $[0, 10000]$  内的一个确定常数，幂值为区间  $[0, 1]$  内的值。

通过计算得出两种情况下最大输出功率及最优阻尼系数。

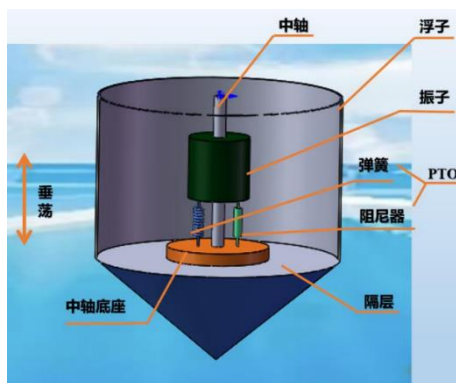


图 1 波浪能转换装置

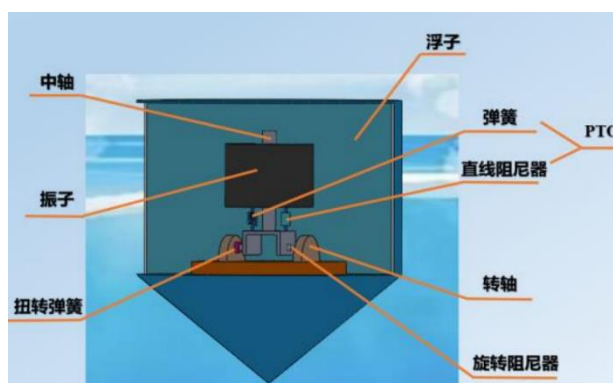


图 2 波浪能转换装置 II

装置经改进后，PTO 与振子和转轴装置相连，转轴装置上装有旋转阻尼器与扭转弹簧，输出功率与旋转阻尼器与直线阻尼器做的功有关。具体装置如图 2。

问题三：假设浮子在海水中做垂荡与纵摇运动，建立浮子与振子的运动模型。根据附件 3、4 中的相关参数，计算在波浪激励力  $f \cos \omega t$  与波浪激励力矩  $L \cos \omega t$  作用下，浮子与振子在前 40 个周期内时间间隔为 0.2 秒的垂荡位移与速度、纵摇角位移与角速度。此外，求出 10s、20s、40s、60s、100s 时浮子与振子的垂荡位移与速度、纵摇角位移与角速度。

问题四：假设浮子仍做垂荡与纵摇运动，建立直线阻尼器与旋转阻尼器最优阻尼系数的数学模型，直线阻尼器与旋转阻尼器的阻尼系数为区间  $[0, 10000]$  内的常数，求出最大输出功率与此时的阻尼系数。

## 二、 问题假设

1. 忽略中轴、底座、隔层及 PTO 的质量和各种摩擦；
2. 海水是无粘及无旋的，即海水为理想流体，流体间无剪应力；
3. 流体是均质的和不可压缩的，流体密度处处相等且为常数；
4. 浮子与振子均为刚体，不会发生弹性形变；
5. 假设波浪高度对浮子沉入水面体积的影响忽略不计；
6. 浮子壳体厚度忽略不计；
7. 假设力矩作用点位于转轴轴心，转轴到隔层的距离忽略不计；

## 三、 问题分析

### 3.1 问题一的分析

初始时刻浮子和振子平衡于静水中，通过隔离法对浮子和振子分别进行受力分析，得出初始时刻的平衡方程。假设初始时刻浮子圆锥壳体部分完全浸入水中，通过简单计算验证该假设是否合理。以中轴底座与隔层的接触面为基准面，建立直角坐标系，规定浮子和振子的速度及加速度方向均为向上为正，通过隔离法对浮子和振子进行受力分析，得到浮子与振子的受力方程，在 MATLAB 中绘制浮子与振子的垂荡位移、速度随时间变化的关系图，求出对应情况下浮子与振子的垂荡位移与速度。

### 3.2 问题二的分析

问题二仍只考虑浮子在波浪中做垂荡运动的情况，浮子的受力分析情况同问题一，因此本文以问题一所建立的模型为基础对题目二做出进一步分析。问题二中的第一小题只改变阻尼系数，其他条件不变，求取在不同阻尼系数的情况下 PTO 系统平均输出功率的最大值，该问题可视为单目标优化问题，因此本文采用非线性规划的思想，建立微分模型。列出微分方程组后，用龙格库塔算法进行求解，并分别做出功率随阻尼系数变化的图像，最后根据图像找到 PTO 系统的功率最大值点与对应的阻尼系数。问题二中的第二小题同时改变阻尼系数和浮子和振子的相对速度的绝对值的幂指数，可列出

$$F_{zz} = \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot k_{zk} \cdot \left| \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \right|^a$$

同时改变  $k_{zk}$  和  $a$ ，求出 PTO 系统的功率最大值，该问题同样可视为单目标优化问题，由于可以同时改变  $k_{zk}$  和  $a$  两组值，因此做出的图像是一个三维图像，通过做出的三维图像找到最大值所在的区域，然后对该区域内的数据进行三次样条插值拟合，得到较为精确的功率最大值。

### 3.3 问题三的分析

问题三既要考虑题目一、二中分析的垂荡，还须分析浮子和振子的纵摇运动，并且两种运动方式相互影响，导致题目一、二所建立的垂荡模型的幅值及频率发生改变，故重新对浮子和振子进行受力分析，其中不论对于浮子和振子的速度和加速度，都假定竖直向上为正方向。对于浮子的受力与前两题类似，分析浮子做垂荡运动使其受到的波浪激励力、兴波阻尼力、附加惯性力和静水恢复力，分析浮子做纵摇运动时分析其受到的波浪激励力矩、兴波阻尼力矩、附加惯性力矩和静水恢复力矩。振

子的受力情况更复杂些，除了弹簧和阻尼器对它的力以外，还受到中轴对其的支持力，并且中轴对振子的力的左右方向和作用大小难以确定，使得问题的分析难度直线上升。为了解决这一问题，本文采取了多重搜索法，列出浮子及振子的受力分析图，并基于受力分析图列写微分方程组，通过龙格库塔算法对方程组进行求解，绘制出关于浮子与振子的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度的曲线。

### 3.4 问题四的分析

基于问题三所建立的物理模型，题目四解法与问题二类似。直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数均在区间[0,100000]内取值，将直线阻尼器系数与旋转阻尼器系数视为因变量，将待求解的 PTO 系统平均输出功率视为目标函数，问题四即可转化为多因素单目标的线性规划问题，在利用线性规划的思想求解 PTO 系统平均输出功率的最大值。

## 四、 符号说明

符号	含义
$m_1$	浮子质量 (kg)
$m_2$	振子质量 (kg)
$m_f$	垂荡附加质量 (kg)
$r_1$	浮子底半径 (m)
$\rho$	海水的密度 (kg/m <sup>3</sup> )
$g$	重力加速度 (m/s <sup>2</sup> )
$k_t$	弹簧刚度 (N/m)
$k_x$	垂荡兴波阻尼系数 (N·s/m)
$k_z$	直线阻尼器的阻尼系数(N·s/m)
$k_{xz}$	旋转阻尼器阻尼系数 (N·s/m)
$J_1$	浮子的转动惯量(N·m)
$J_2$	振子的转动惯量(N·m)
$k_{zk}$	直线阻尼器的阻尼比例系数(N·s/m)
$k_{nt}$	扭转弹簧刚度 (N · m)
$k_h$	静水恢复力矩系数 (N · m)
$J_f$	附加转矩惯量(N · m)
$k_{cx}$	垂荡兴波阻尼系数 (N · s/m)
$k_{zx}$	纵摇兴波阻尼系数 (N · m · s)
$L$	纵摇激励力矩振幅 (N · m)
$\omega$	入射波浪频率 (s <sup>-1</sup> )
$f$	垂荡激励力振幅 (N)
$F_j$	波浪激励力 (N)
$F_f$	附加惯性力 (N)
$F_x$	兴波阻尼力 (N)
$F_h$	静水恢复力 (N)
$F_{zz}$	直线阻尼力 (N)
$F_t$	弹簧回复力(N)
$x_1$	浮子的相对位移 (m)

$x_2$	浮子的相对位移 (m)
$x_t$	弹簧原长 (m)
$r_1$	浮子底半径 (m)
$T_{nt}$	扭转弹簧力矩(N · m)
$T_{xb}$	兴波阻尼力矩(N · m)
$T_{xz}$	旋转阻尼器力矩(N · m)
$T_h$	静水回复力矩(N · m)
$\theta_1$	浮子转过的角度(rad)
$\theta_2$	振子转过的角度(rad)
$P$	PTO 系统的平均输出功率(W)

## 五、模型的建立与求解

### 5.1 问题一：垂荡运动下浮子与振子的运动模型的建立

#### 5.1.1 模型准备

初始时刻假设浮子圆锥壳体部分完全浸入水中，由于不计中轴、底座、隔层及 PTO 的质量，则有静水中浮子与振子的总重力与浮力平衡。

$$G_{总} = G_{浮} + G_{振} = F_{浮} \quad (5-1-1)$$

$$G_{浮} = m_1 \cdot g = 47686.8N \quad (5-1-2)$$

$$G_{振} = m_2 \cdot g = 23843.4N \quad (5-1-3)$$

$$F_{浮} = G_{总} = 71530.2N \quad (5-1-4)$$

波浪能转换装置排开水的体积

$$V_{排} = \frac{F_{浮}}{\rho \cdot g} \approx 7.12m^3 \quad (5-1-5)$$

圆锥壳体体积

$$V_{锥} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \approx 0.838m^3 \quad (5-1-6)$$

圆柱壳体浸在水中的高度

$$h = \frac{V_{排} - V_{锥}}{S_{底}} \approx 2.0m \quad (5-1-7)$$

因此初始时刻浮子露出水面 1 米，为求解第一问，我们首先假设其在垂荡过程中不会露出圆锥底也不会沉没水中。经计算，可知若浮子位移不超过一米则假设合理。以中轴底座与隔层的接触面为基准面，建立直角坐标系。

初始时刻，波浪能转换装置在静水中平衡，用隔离法对浮子和振子进行受力分析。

对振子：平衡时刻受到两个力的作用，自身重力 $m_2 \cdot g$ 竖直向下，弹簧的支持力 $k_t \cdot x_0$ 竖直向上，受力图如图 3。

对浮子：平衡时刻受到三个力的作用，自身重力 $m_1 \cdot g$ 竖直向下，弹簧的压缩力 $k_t \cdot x_0$ 竖直向下，浮力 $F_{\text{浮}}$ 竖直向上。受力图如图 4。

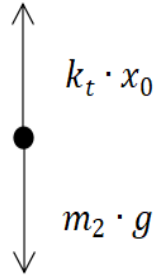


图 3 振子初始时刻受力图

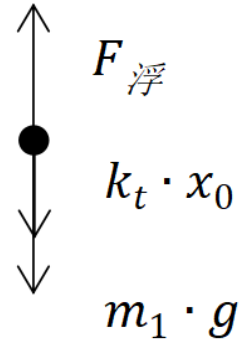


图 4 浮子初始时刻受力图

### 5.1.2 模型建立

规定浮子和振子的速度及加速度方向均为向上为正。

浮子受到海水激励力 $f \cos wt$ 后开始运动并带动振子运动，在线性周期微幅波作用下，浮子会受到波浪激励力、附加惯性力、兴波阻尼力等力。运用隔离法对振子、浮子进行分析。假设浮子受到海水激励力后开始向上运动。

对振子：振子在直线阻尼器阻尼力 $F_{zz}$ 、自身重力 $m_2 \cdot g$ 作用下产生加速度。受力分析如图 5。

对浮子：浮子在波浪激励力 $F_j$ 、附加惯性力 $F_f$ 、直线阻尼器阻尼力 $F_{zz}$ 、兴波阻尼力 $F_x$ 、静水恢复力 $F_h$ 、自身重力 $m_1 \cdot g$ 、弹簧弹力 $F_t$ 作用下产生加速度。将波浪激励力 $F_j$ 、兴波阻尼力 $F_x$ 、静水恢复力 $F_h$ 视为作用于浮子质心，受力分析如图 6。

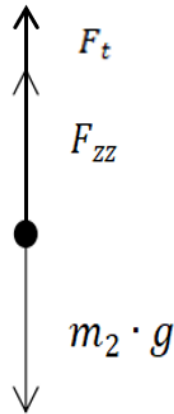


图 5 振子运动受力分析

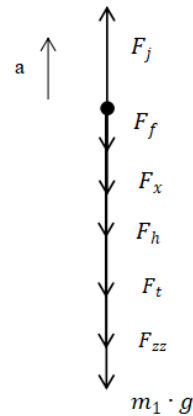


图 6 浮子运动受力分析

振子受力：

$$F_{zz} + F_t - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2 \quad (5-1-8)$$

浮子受力：

$$F_j - F_x - F_f - F_h - F_{zz} - F_t = m \cdot \frac{dx_1^2}{d^2t} \quad (5-1-9)$$

初始时刻，波浪能转换装置受到一个波浪激励力 $F_j = f \cos wt$ ，其中 $f$ 为波浪激励力的幅值， $w$ 为波浪频率。周边波浪对浮体运动产生兴波阻尼力，兴波阻尼力与浮子运动速度成正比，设兴波阻尼系数为 $k_x$ ，兴波阻尼力

$$F_x = k_x \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5-1-10)$$

附加惯性力对装置产生一个虚拟质量，可将其等效为一个重力性质的力，则有附加惯性力

$$F_f = m_f \cdot g \quad (5-1-11)$$

浮子做垂荡运动时，会受到使物体回到平衡位置的静水恢复力，该力与浮力的变化有关。初始时刻装置平衡于静水中，由公式（1）可知，初始时刻浮力与浮子、振子总重力平衡，浮子开始做垂荡运动后，浮力发生变化，假设浮子向上运动过程中，浮子锥形壳体完全浸入水中，则浮力的变化量仅与圆柱壳体排开水的体积有关，而与圆锥壳体排开水的体积无关。静水恢复力

$$F_h = \rho \cdot g \cdot x_1 \cdot \pi \quad (5-1-12)$$

直线阻尼力与浮子、振子间的相对速度成正比，比例系数 $k_z = 10000$ ，设浮子位移为 $x_1$ ，振子位移为 $x_2$ ，则直线阻尼力

$$F_{zz} = \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot k_z \quad (5-1-13)$$

由模型准备中知弹簧初始压缩量为 $x_0$ ，设 $k_t$ 为弹簧劲度系数，则运动过程中，弹簧弹力

$$F_t = k_t \cdot (x_1 - x_2 + x_0) \quad (5-1-14)$$

联立上式可得浮子和振子的运动模型。

### 5.1.3 模型求解

（一）直线阻尼器的阻尼系数为  $10000\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$

由上述建立模型的过程可得

$$\left\{ \begin{array}{l} F_j - F_x - F_f - F_h - F_z = m \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2} \\ F_j = f \cdot \cos(w \cdot t) \\ F_x = k_x \cdot \frac{dx}{dt} \\ F_f = m_f \cdot g \\ F_h = \rho \cdot g \cdot x_1 \cdot \pi \\ F_{zz} = \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot k_z \\ F_t = k_t \cdot (x_1 - x_2 + x_0) \\ F_{zz} + F_t - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a_2 \\ k_z = 10000 \end{array} \right. \quad (5-1-15)$$

在 MATLAB 中分别绘制浮子、振子垂荡位移、速度随时间变化关系图，如图 7、图 8、图 9、图 10 分别为浮子位移、浮子速度、振子位移、振子速度随时间变化关系图。

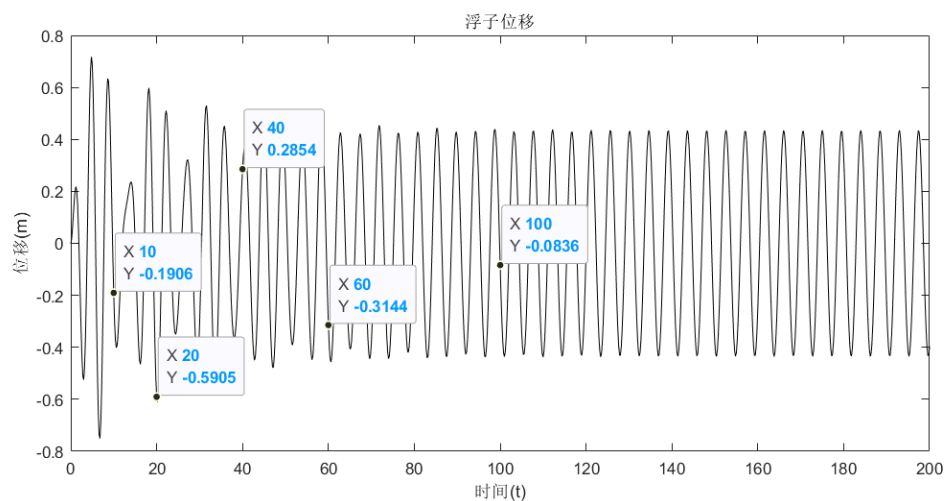


图 7 浮子位移随时间变化关系图 I

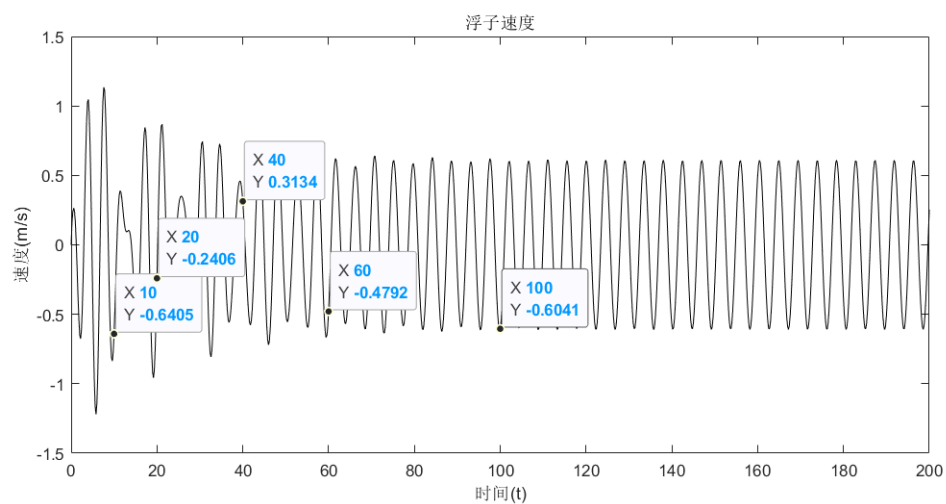


图 8 浮子速度随时间变化关系图 II

由图可知，浮子位移最大值并未超过 0.8，因此不会出现浮子沉入水中或露出底部的问题，因此模型准备时的假设成立。浮子：

时间(s)	浮子垂荡位移(m)	位移方向	浮子垂荡速度(m/s)	速度方向
10	0.1906	向下	0.6405	向下
20	0.5905	向下	0.2406	向下
40	0.2854	向上	0.3134	向上
60	0.3144	向下	0.4792	向下
100	0.0836	向下	0.6041	向下

表 1 浮子垂荡位移和速度随时间变化关系表



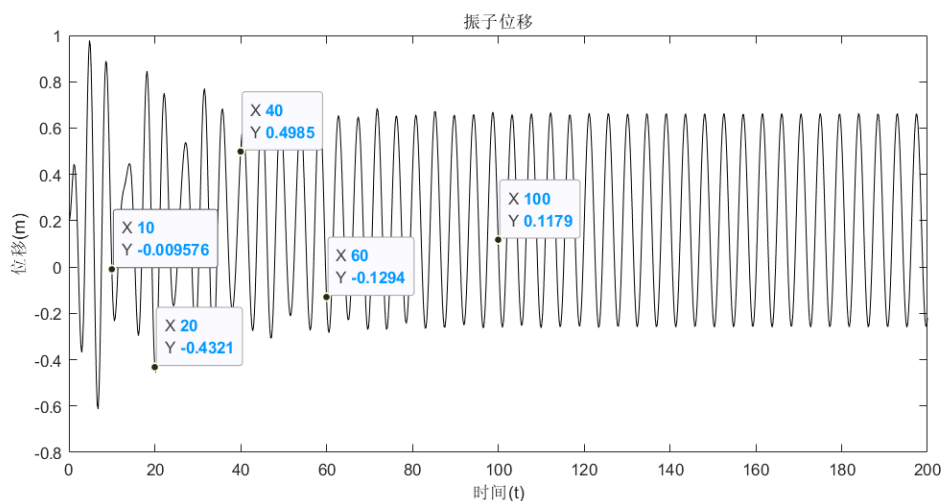


图 9 振子位移随时间变化关系图 I

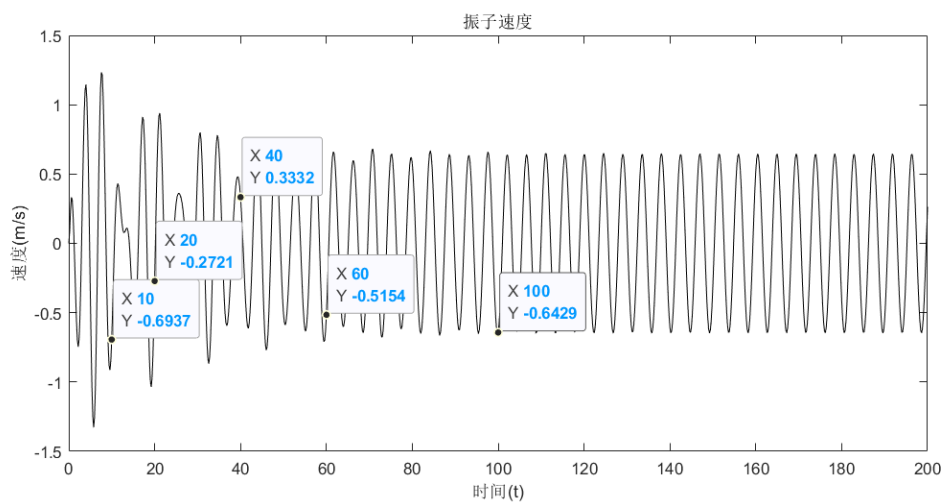


图 10 振子速度随时间变化关系图 I

由图可知，振子：

时间(s)	振子垂荡位移(m)	位移方向	振子垂荡速度(m/s)	速度方向
10	0.0096	向下	0.6937	向下
20	0.4321	向下	0.2721	向下
40	0.4985	向上	0.3332	向上
60	0.1294	向下	0.5154	向下
100	0.1179	向下	0.6041	向下

表 2 振子垂荡位移和速度随时间变化关系表

(二) 直线阻尼器的阻尼系数与振子、浮子间的相对速度的绝对值的开方成正比  
同理可在 MATLAB 中分别绘制浮子、振子垂荡位移、速度随时间变化关系图，如图 11、图 12、图 13、图 14 分别为浮子位移、浮子速度、振子位移、振子速度随时间变化关系图。

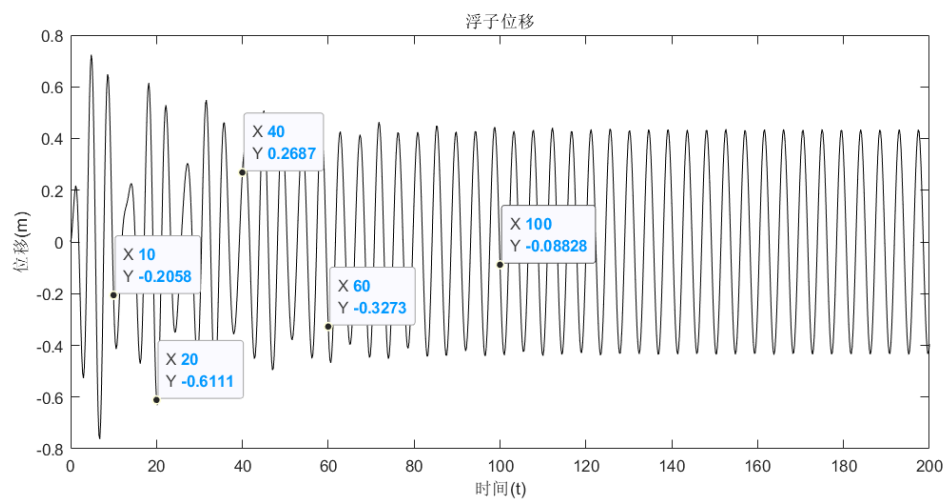


图 11 浮子位移随时间变化关系图 II

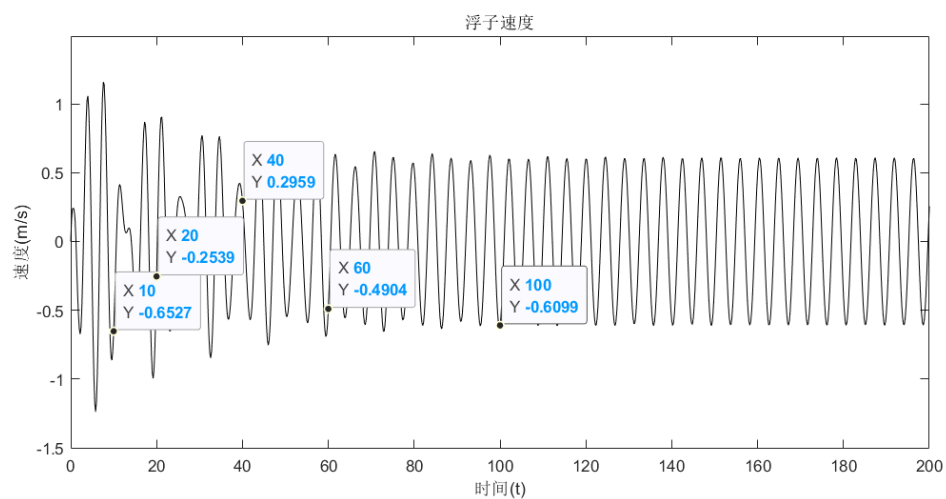


图 12 浮子速度随时间变化关系图 II

由图可知，浮子：

时间(s)	浮子垂荡位移(m)	位移方向	浮子垂荡速度(m/s)	速度方向
10	0.2058	向下	0.6527	向下
20	0.6111	向下	0.2539	向下
40	0.2687	向上	0.2959	向上
60	0.3273	向下	0.4904	向下
100	0.0883	向下	0.6099	向下

表 3 浮子垂荡位移和速度随时间变化关系表

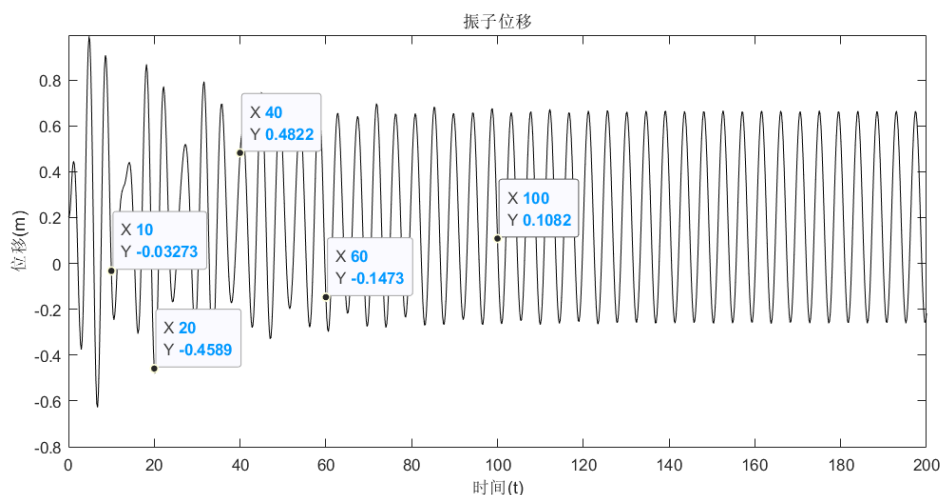


图 13 振子位移随时间变化关系图 II

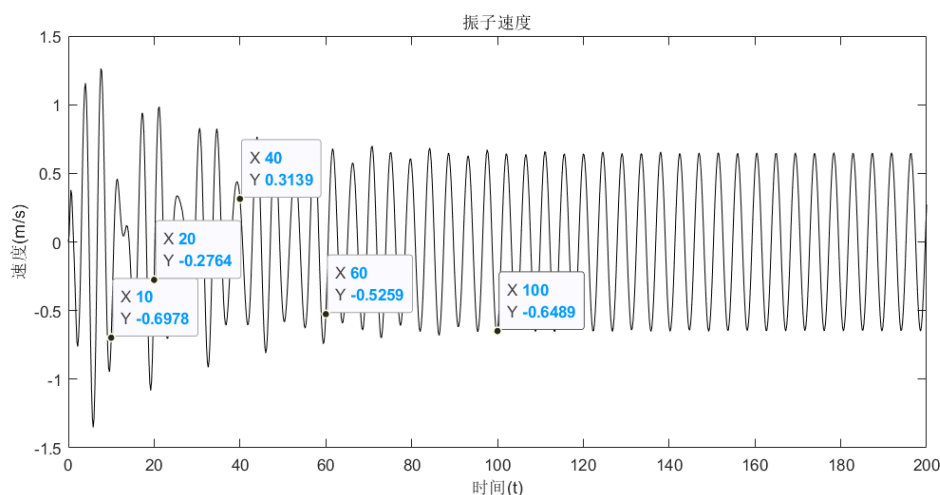


图 14 振子速度随时间变化关系图 II

由图可知，振子：

时间(s)	振子垂荡位移(m)	位移方向	振子垂荡速度(m/s)	速度方向
10	0.0327	向下	0.6978	向下
20	0.4589	向下	0.2764	向下
40	0.4822	向上	0.3139	向上
60	0.1437	向下	0.5259	向下
100	0.1082	向下	0.6489	向下

表 4 振子位移和速度随时间变化关系表

## 5.2 问题二：垂荡运动下直线阻尼器最优阻尼系数模型的建立

### 5.2.1 模型准备

浮子只做垂荡运动，问题一中的运动模型在本问仍然成立，故问题二不额外对物体进行受力分析。以问题一中建立的微分方程组为基础，浮子所受的直线阻尼力

$$F_{zz} = \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot k_z \quad (5-2-1)$$

### 5.2.2 模型建立

问题 2 (1) 中的阻尼系数为常量, 且变化范围为[0, 100000], 其他受力同问题 1。为了求取在不同阻尼系数的情况下 PTO 系统的平均输出功率最大值, 可将该问题视为单因素单目标优化问题, 因此本文采用线性规划的思想, 建立微分模型。

$$\begin{aligned} \max P &= \int_0^T F_{zz}(x_2 - x_1) dt \cdot \frac{1}{T} \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{aligned} F_j - F_x - F_f - F_h - F_z - F_t &= m \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2} \\ F_j &= f \cdot \cos(w \cdot t) \\ F_x &= k_x \cdot \frac{dx}{dt} \\ F_f &= m_f \cdot g \\ F_h &= \rho \cdot g \cdot x_1 \cdot \pi \\ F_{zz} &= \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) \cdot k_z \\ F_t &= k_t \cdot (x_1 - x_2 + x_0) \\ F_{zz} - m_2 \cdot g &= m_2 \cdot \frac{dx_2^2}{dt^2} \\ 0 &< k_z < 100000 \end{aligned} \right. \quad (5-2-3) \end{aligned}$$

问题 2 (2) 中的阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比, 比例系数在区间 [0,100000]内取值, 幂指数在区间[0,1]内取值, 该问题的解法与第一小题类似, 可将该问题视为多因素单目标优化问题, 因此本文采用线性规划的思想, 建立微分模型

$$\begin{aligned} \max P &= \int_0^T F_{zz}(x_2 - x_1) dt \cdot \frac{1}{T} \\ \text{s.t.} \left\{ \begin{aligned} F_j - F_x - F_f - F_h - F_z - F_t &= m \cdot \frac{dx_1^2}{dt^2} \\ F_j &= f \cdot \cos(w \cdot t) \\ F_x &= k_x \cdot \frac{dx}{dt} \\ F_f &= m_f \cdot g \\ F_h &= \rho \cdot g \cdot x_1 \cdot \pi \\ F_{zz} &= \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) \cdot k_{zk} \cdot \left|\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)\right|^a \\ F_t &= k_t \cdot (x_1 - x_2 + x_0) \\ F_{zz} - m_2 \cdot g &= m_2 \cdot \frac{dx_2^2}{dt^2} \\ 0 &< k_{zk} < 100000 \\ 0 &< a < 1 \end{aligned} \right. \quad (5-2-4) \end{aligned}$$

由于题目一所做出的图像是关于前 40 个波浪周期内时间间隔为 0.2s 的关于垂荡位移和速度的离散图, 因此本题需用求离散图的方式列出离散函数来求解 PTO 系统的平均输出功率。本文为了减小偶然误差, 选取浮子和振子运动稳定后的时间, 即 100T 至 110T 这 10 个周期求 PTO 系统做的总功, 通过浮子和振子 10 个稳定运动的周期内做的功的平均值来计算 PTO 系统的平均输出功率。

$$W = \sum_{t=100T}^{110T} k_{zk} (v_1(t) - v_3(t)) \left( (x_1(t) - x_2(t)) - (x_1(t-T) - x_2(t-T)) \right) \quad (5-2-5)$$

$$P = W/10T \quad (5-2-6)$$

### 5.2.3 模型 2 (1) 求解

将题目二所给的入射波浪频率、垂荡附加质量、垂荡兴波阻尼系数、垂荡激励力振幅等数据导入 **matlab**，再结合题目一所得到的浮子和振子的垂荡运动规律，可做出 PTO 系统的平均输出功率随阻尼系数变化的曲线，如下图

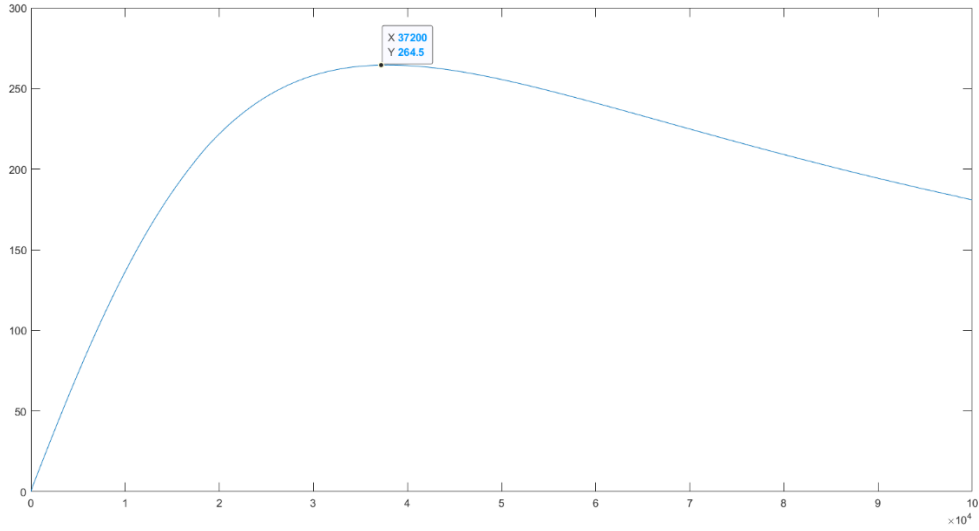


图 15 PTO 系统的平均输出功率随阻尼系数常数变化的曲线 I

由上图可知 PTO 系统的平均输出功率的最大值在 37200 附近，因此对该范围进行精确查找，做出图像如下

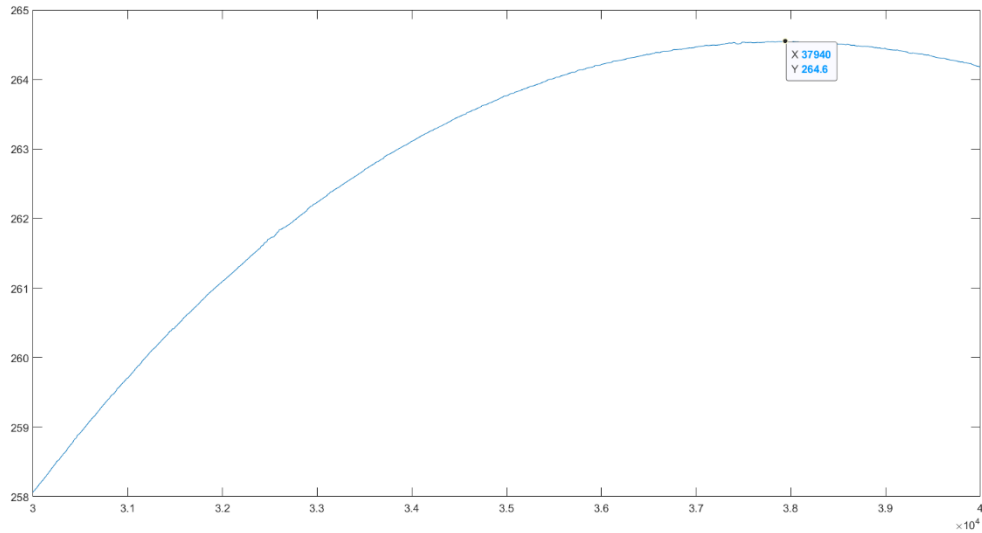


图 16 PTO 系统的平均输出功率随阻尼系数常数变化的曲线 II

由图 16 可知阻尼系数为常量，并且在区间[0,100000]内取值的情况下，PTO 系统的平均输出功率的最大值为 264.5315W。

### 5.2.4 模型 2 (2) 求解

题目 2 (2) 中阻尼系数与浮子和振子的相对速度的绝对值的幂成正比，比例系数在区间[0,100000]内取值，幂指数在区间[0,1]内取值，由于幂指数与比例系数同时影响 PTO 系统的平均输出功率，因此做出的图像是三维图像。利用 **MATLAB** 作图如下。

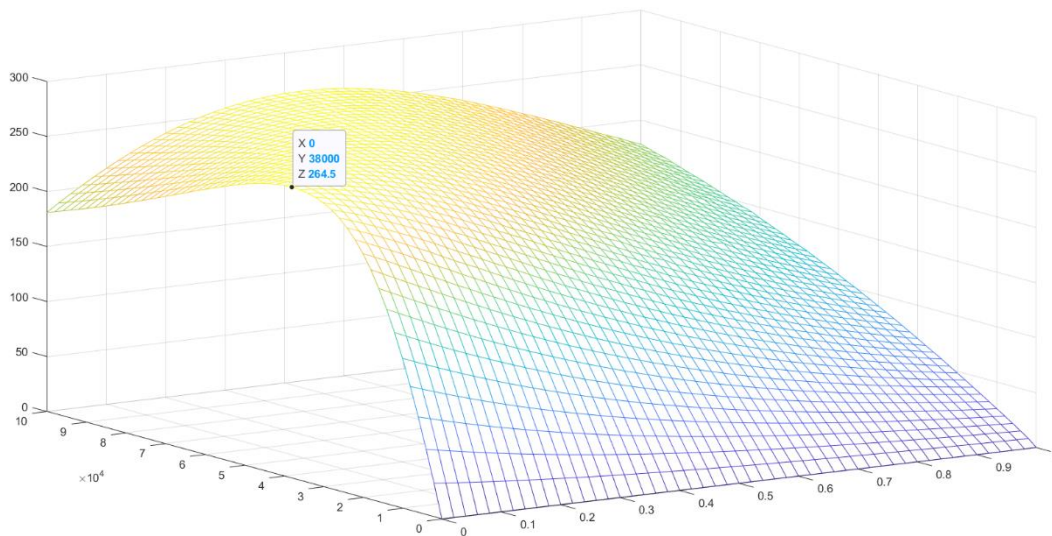


图 17 PTO 系统的平均输出功率随比例系数和幂指数变化的曲线 I

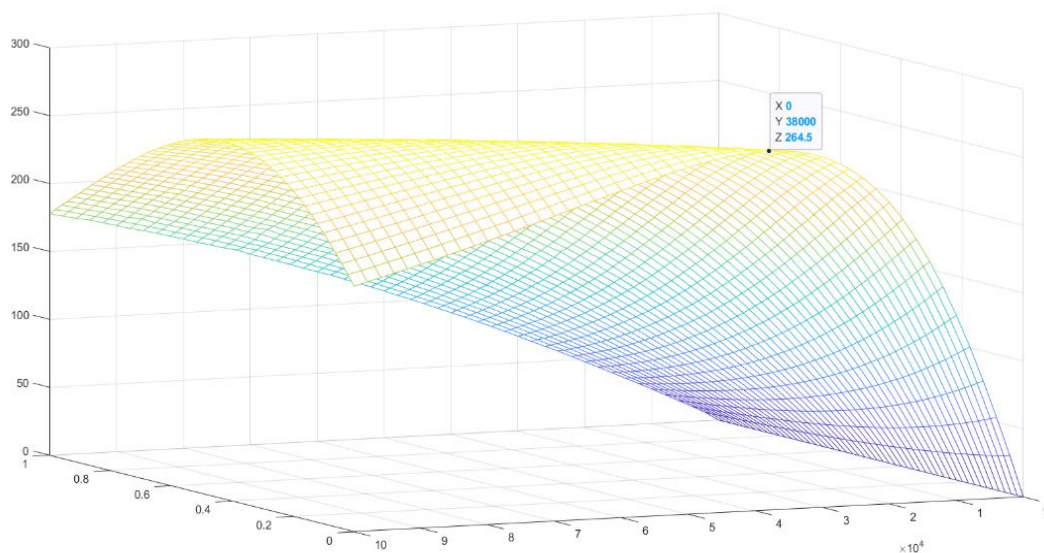


图 18 PTO 系统的平均输出功率随比例系数和幂指数变化的曲线 II

由上图可知 PTO 系统的平均输出功率在  $a = 0$ ,  $k_{zk} = 38000$  附近取值较大，因此取  $a = 0$ ，做出 PTO 系统的平均输出功率随  $k_{zk}$  变化的曲线，并对其进行数据拟合求最大值。在尝试过指数逼近、傅里叶逼近、高斯逼近、插值逼近、多项式逼近等多种拟合方法后，发现指数逼近的拟合效果最后，故最终采用指数逼近的方式拟合图像，如下图所示。

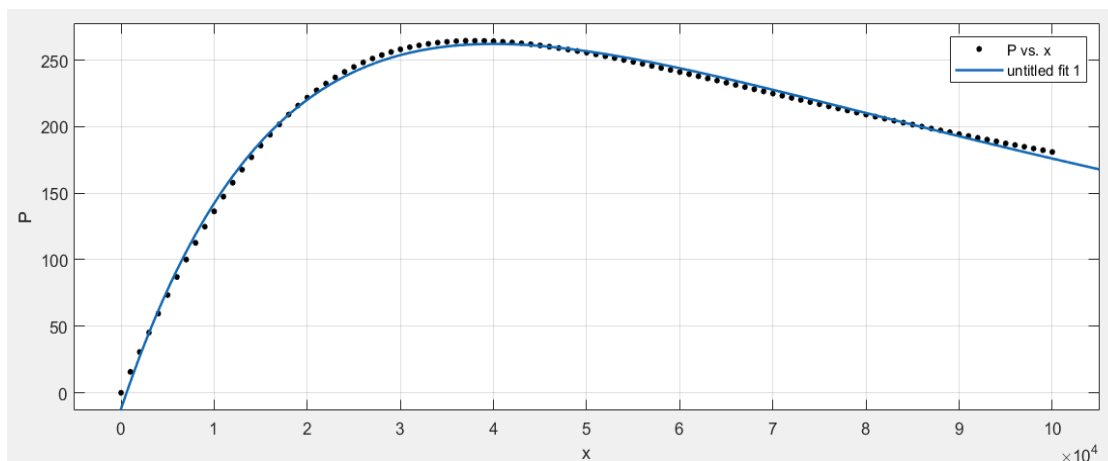


图 17 指数拟合

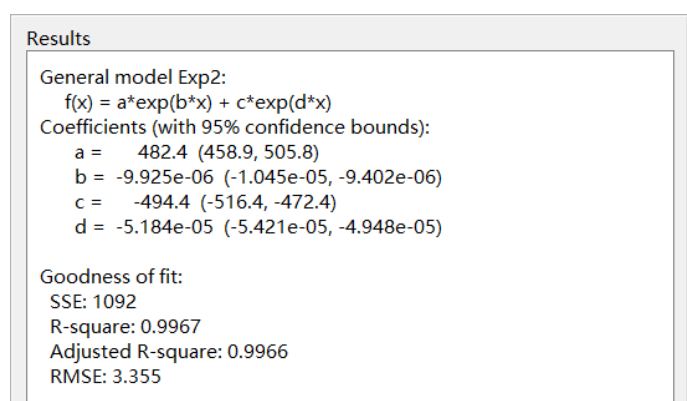


图 18 拟合参数

由图 20 可知，拟合所得函数为

$$f(x) = 482.4 \cdot e^{-9.925 \times 10^{-6} \cdot x} - 494.4 \cdot e^{-5.184 \times 10^{-5} \cdot x}$$

$$R^2 = 0.9967$$

残差接近为 1，说明数据与指数函数拟合得很好，可以将指数函数视作系统的平均输出功率与比例系数  $k_{zk}$  的函数。

通过拟合函数求得最大值为 264.5315W，此时  $a = 0$ ， $f_{kz} = 38000\text{Hz}$ 。

### 5.3 问题三：垂荡与纵摇运动下振子与浮子运动模型

#### 5.3.1 模型准备

由于问题三在问题一、二的基础上开始考虑浮子和振子的纵摇运动，因此在对浮子和振子进行受力分析时除了需要考虑力还需要考虑力矩的作用。假定正方向如受力分析图所示，重新对浮子和振子进行受力分析，如图 19、20。

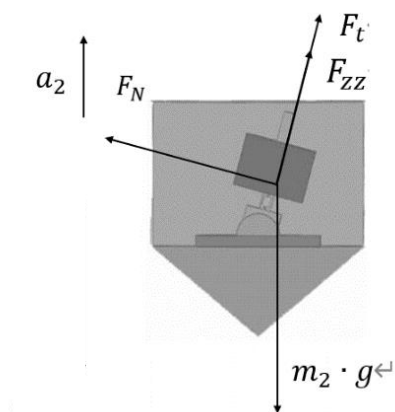
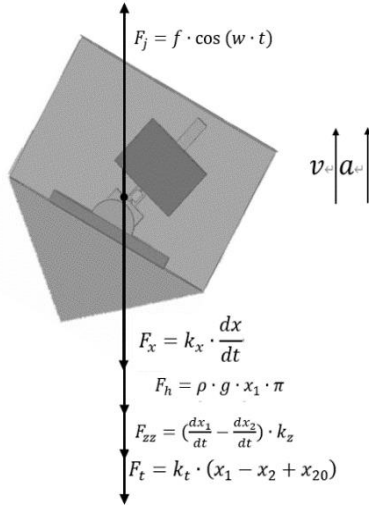


图 19 模型三的受力分析图 I

### 5.3.2 模型建立

考虑垂荡运动时，浮子在波浪激励力 $F_j$ 、附加惯性力 $F_f$ 、直线阻尼器阻尼力 $F_{zz}$ 、兴波阻尼力 $F_x$ 、静水恢复力 $F_h$ 、自身重力 $m_1 \cdot g$ 、弹簧弹力 $F_t$ 的作用下运动，则有



$$F_j - F_x - F_h - F_{zz} - F_t = (m_1 + m_f)a_1 \quad (5-3-1)$$

振子在弹簧弹力 $F_t$ 、直线阻尼器阻尼力 $F_{zz}$ 、自身重力 $m_2 \cdot g$ 、中轴支持力 $F_n$ 作用下运动，有

$$F_j - m_2 \cdot g + F_{zz} + F_n \sin \theta_2 = m_2 a_2 \quad (5-3-2)$$

中轴支持力

$$F_n = m_2 \cdot a_2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_2} - m_2 \cdot g \cdot \sin \theta_2 \quad (5-3-3)$$

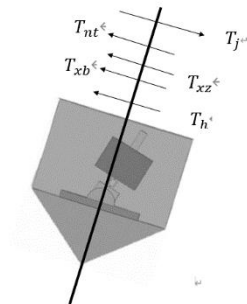
弹簧弹力

$$F_t = k_t \cdot [x_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + x_1 - x_2] - m_2 \cdot g \quad (5-3-4)$$

其中，波浪激励力 $F_j$ 、附加惯性力 $F_f$ 、直线阻尼器阻尼力 $F_{zz}$ 、兴波阻尼力 $F_x$ 、静水恢复力 $F_h$ 均在 5.1 节给出<sup>1</sup>。联立上式可得浮子和振子在垂荡与纵摇运动下的垂荡运动模型：

$$\begin{cases} F_j - F_x - F_h - F_{zz} - F_t = (m_1 + m_f)a_1 \\ F_j - m_2 \cdot g + F_{zz} + F_n \cdot \sin \theta_2 = m_2 a_2 \end{cases} \quad (5-3-5)$$

考虑纵摇运动时，浮子在力矩作用下产生转动，各力矩方向如图所示，由题知波浪激励力矩：



$$T_j = L \cos \omega t \quad (5-3-6)$$

扭转弹簧扭矩与浮子和振子的相对角位移成正比：

$$T_{nt} = (\theta_1 - \theta_2) \cdot k_{nt} \quad (5-3-7)$$

旋转阻尼力矩与浮子和振子的相对角速度成正比：

$$T_{xz} = (\omega_1 - \omega_2)k_{xz} \quad (5-3-8)$$

兴波阻尼力矩为：

$$T_{xb} = k_{xb}\omega_1 \quad (5-3-9)$$

图 21 纵摇浮子受力分析

<sup>1</sup> 见式 (5-1-15)



静水恢复力矩:  $T_h = k_h \theta_1$  (5-3-10)

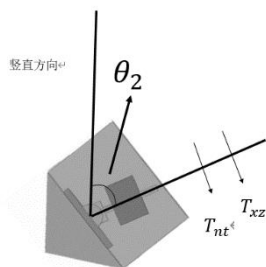


图 22 纵摇振子受力分析

由角加速度与力矩的关系可列出以下描述纵摇的方程组:

$$\begin{cases} T_j - T_{nt} - T_{xz} - T_{xb} - T_h = (J_1 + J_f)\alpha_1 \\ T_{nt} + T_{xz} = J_2\alpha_2 \end{cases} \quad (5-3-11)$$

联立纵摇与垂荡的方程组得系统运动学方程:

$$\begin{cases} T_j - T_{nt} - T_{xz} - T_{xb} - T_h = (J_1 + J_f)\alpha_1 \\ T_{nt} + T_{xz} = J_2\alpha_2 \\ F_j - F_x - F_h - F_{zz} - F_t = (m_1 + m_f)a_1 \\ F_j - m_2 \cdot g + F_{zz} + F_n \cdot \sin \theta_2 = m_2 a_2 \end{cases} \quad (5-3-12)$$

### 5.3.3 模型求解

如下图分别为浮子、振子垂荡位移、速度和纵摇角位移、角速度。

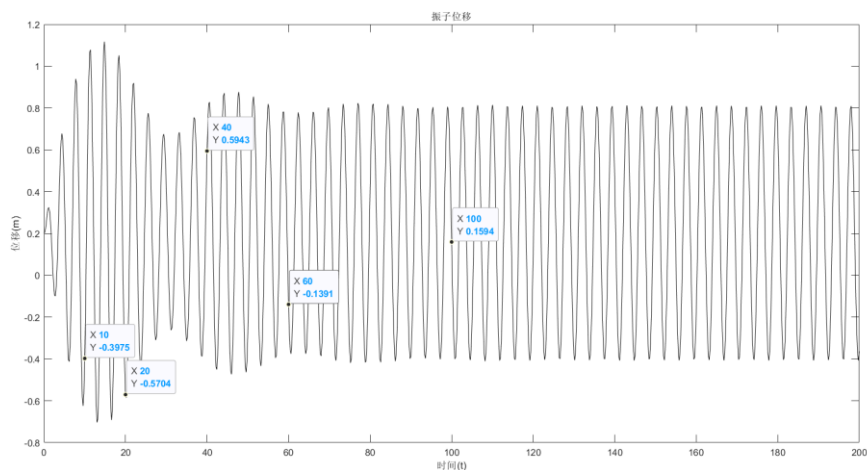


图 23 振子做垂荡运动时的位移随时间变化图

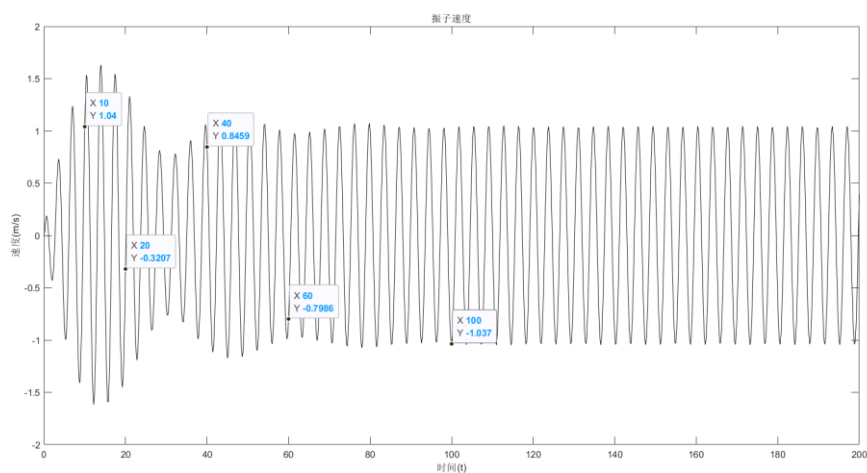


图 24 振子做垂荡运动时速度随时间变化图

由图可知，振子：

时间(s)	振子垂荡位移(m)	位移方向	垂振子荡速度(m/s)	速度方向
10	0.3975	向下	1.04	向上
20	0.5704	向下	0.3207	向下
40	0.6943	向上	0.8459	向上
60	0.1391	向下	0.7986	向下
100	0.1594	向上	1.037	向下

表 5 振子做垂荡运动时位移和速度随时间变化表

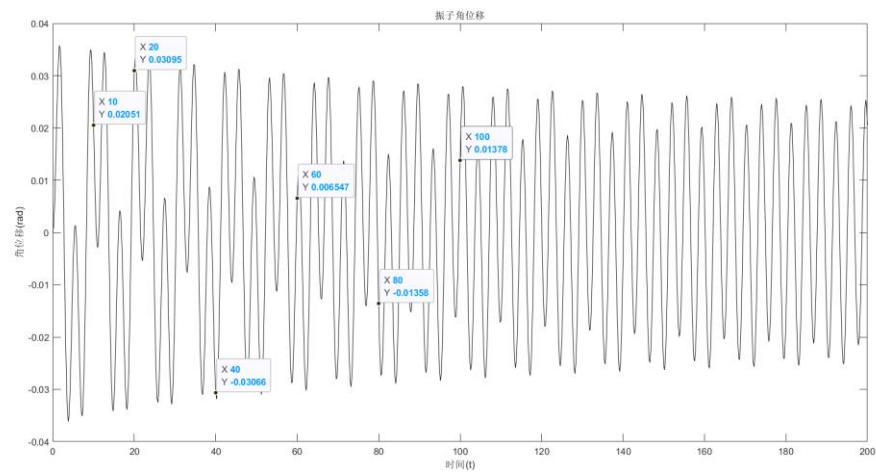


图 25 振子角位移随时间变化图

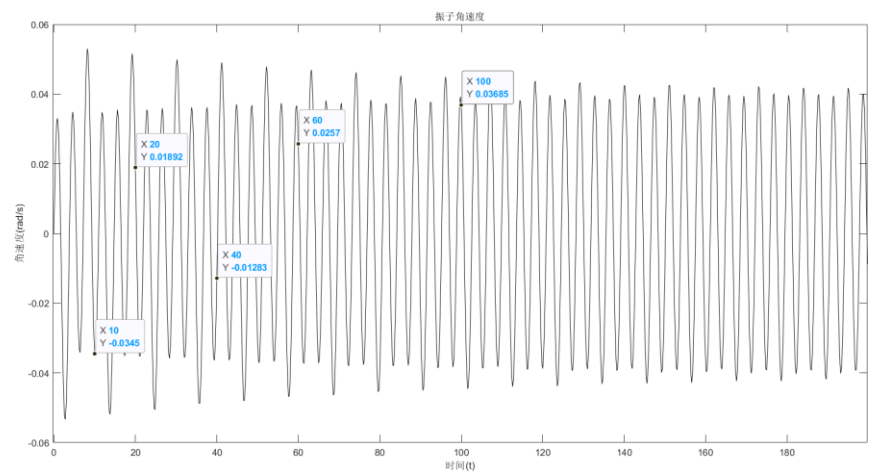


图 26 振子角速度随时间变化图

由图可知，振子：

时间(s)	纵摇角位移(rad)	角位移方向	纵摇角速度(m/s)	角速度方向
10	0.02051	顺时针	0.0345	逆时针
20	0.03095	顺时针	0.01892	顺时针
40	0.03066	逆时针	0.01283	顺时针
60	0.006547	顺时针	0.0257	逆时针
100	0.01378	顺时针	0.03685	顺时针

表 6 振子做纵摇运动时角位移和角速度随时间变化表

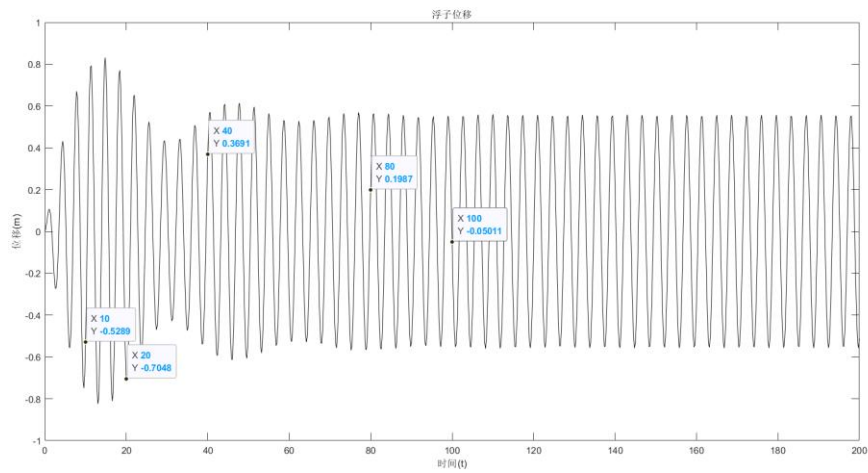


图 27 浮子做垂荡运动时位移随时间变化图

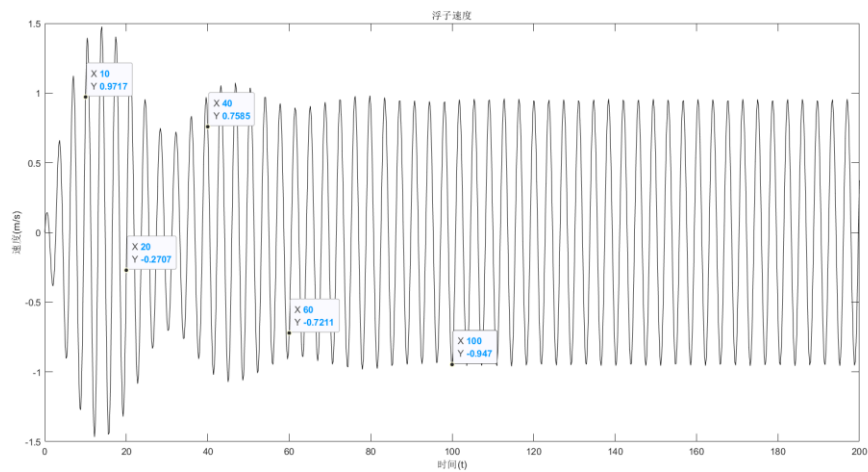


图 28 浮子做垂荡运动时速度随时间变化图

由图可知，浮子：

时间(s)	浮子垂荡位移(m)	位移方向	浮子垂荡速度(m/s)	速度方向
10	0.5289	向下	0.9717	向上
20	0.7047	向下	0.2707	向下
40	0.3691	向上	0.7585	向上
60	0.1987	向上	0.7211	向下
100	0.05011	向下	0.947	向下

表 7 浮子做垂荡运动时位移和速度随时间变化表

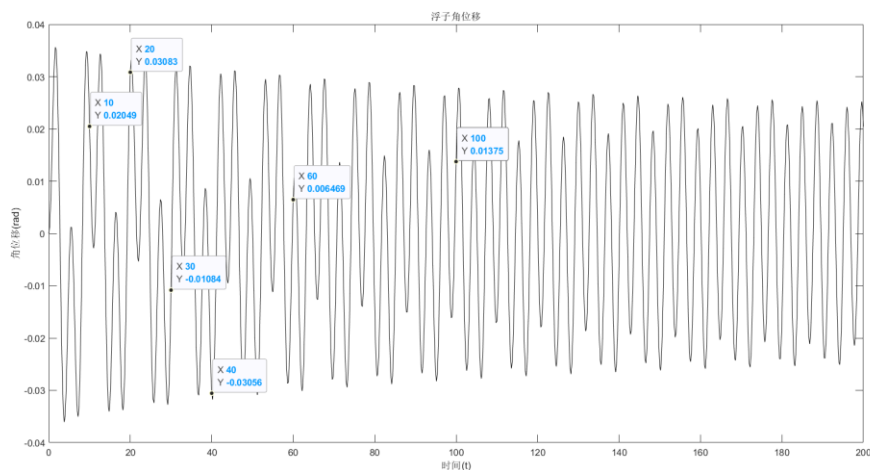


图 29 浮子做纵摇运动时角位移随时间变化图

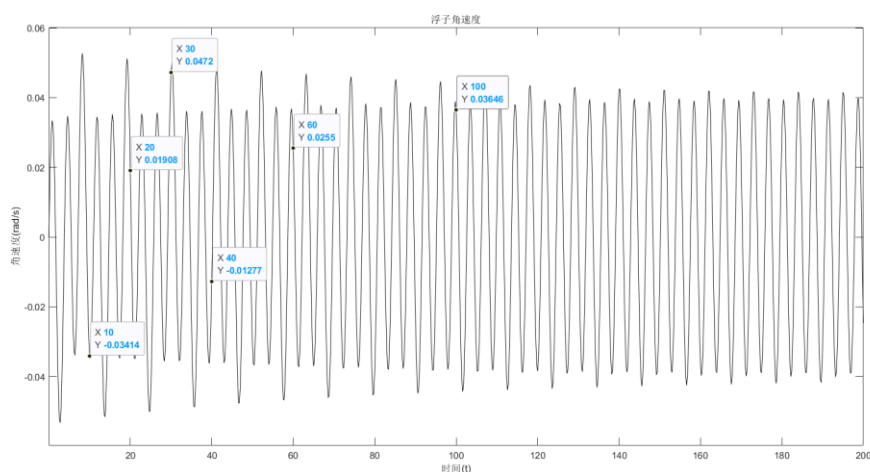


图 30 浮子做纵摇运动时角速度随时间变化图

由图可知，浮子：

时间(s)	纵摇角位移(rad)	角位移方向	纵摇角速度(rad/s)	角速度方向
10	0.02049	顺时针	0.03414	逆时针
20	0.03083	顺时针	0.01908	顺时针
40	0.03056	逆时针	0.01277	逆时针
60	0.006469	顺时针	0.0255	顺时针
100	0.01375	顺时针	0.03646	顺时针

表 8 浮子做纵摇运动时角位移和角速度随时间变化表

## 5.4 问题四：垂荡与纵摇运动下直线阻尼器与旋转阻尼器最优阻尼系数模型的建立

### 5.4.1 模型准备

因为浮子在波浪中只做垂荡和纵摇运动，所以浮子与振子的受力情况与第三问基本一致，只需改变直线阻尼器和旋转阻尼器的阻尼系数来寻找产生最大输出功率的最

优值即可。

#### 5.4.2 模型建立

问题 4 中的直线阻尼系数和旋转阻尼系数为常量，且变化范围均为[0, 100000]，其他受力与问题 4 相同。为了求取在不同直线阻尼系数和旋转阻尼系数的情况下 PTO 系统的平均输出功率最大值，可将该问题视为多因素单目标优化问题，因此本文采用线性规划的思想，建立微分模型。

$$\begin{aligned} \max P &= \int_0^T [F_{ZZ}(x_2 - x_1) + F_{XZ}(\omega_2 - \omega_1)] dt \cdot \frac{1}{T} \\ \text{s. t. } \begin{cases} F_j - F_x - F_f - F_h - F_t = a_1(m_1 + m_f) \\ F_t + F_z - \sin(\theta_2) \cdot F_N = m_2 a_2 \\ T_j - T_{nt} - T_{xz} - T_{xb} - T_h = (J_1 + J_f) \alpha_1 \\ T_{nt} + T_{xz} = J_2 \alpha_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-4-1)$$

其中：

$$F_N = m_2 \alpha_2 \frac{x_2 - x_1}{\cos \theta_2} - m_2 g \sin(\theta_2) \quad (5-4-2)$$

$$T_j = L \cos \omega t \quad (5-4-3)$$

$$T_{nt} = (\theta_1 - \theta_2) k_{nt} \quad (5-4-4)$$

$$T_{xz} = (\omega_1 - \omega_2) k_z \quad (5-4-5)$$

$$T_{xb} = k_{xb} \omega_1 \quad (5-4-6)$$

$$T_h = k_h \theta_1 \quad (5-4-7)$$

由于目标函数为积分，又含有微分方程，对于微型计算机求解有一定难度，因此这里采取矩形微元近似的方法来求值。为减小误差，这里取了十个周期来计算功率。因此目标函数变为：

$$\begin{aligned} \max P &= \frac{1}{10T} \sum_{t=200T}^{210T} [F_{ZZ}(x_2(t+1) - x_1(t+1)) + F_{XZ}(\omega_2(t+1) - \omega_1(t+1)) \\ &\quad - F_{ZZ}(x_2(t) - x_1(t)) - F_{XZ}(\omega_2(t) - \omega_1(t))] \end{aligned}$$

#### 5.4.3 模型求解

利用 MATLAB 编程作图，以 x 轴为旋转阻尼器阻尼系数，y 轴为直线阻尼器阻尼系数，z 轴为功率大小，作出的三维图如下

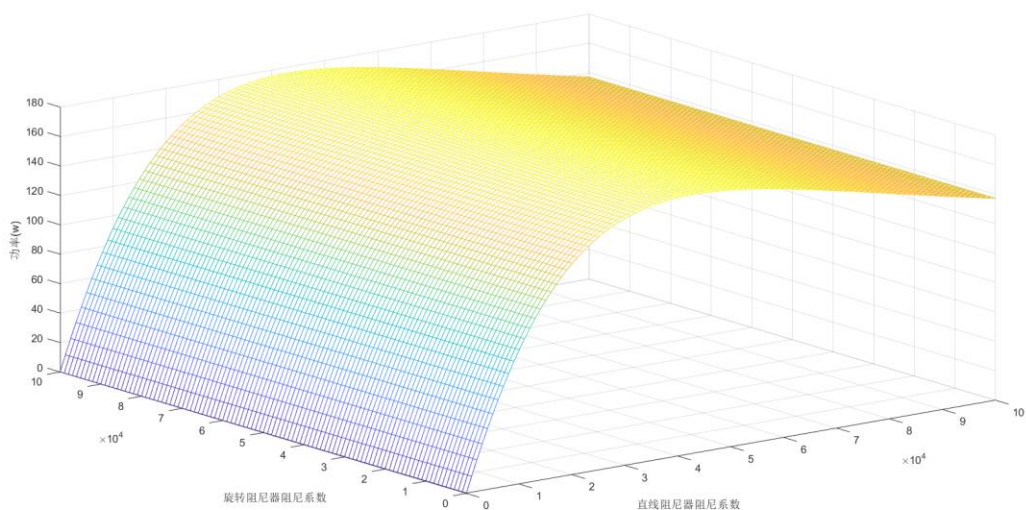


图 31 功率随直线阻尼系数和旋转阻尼系数变化图 I

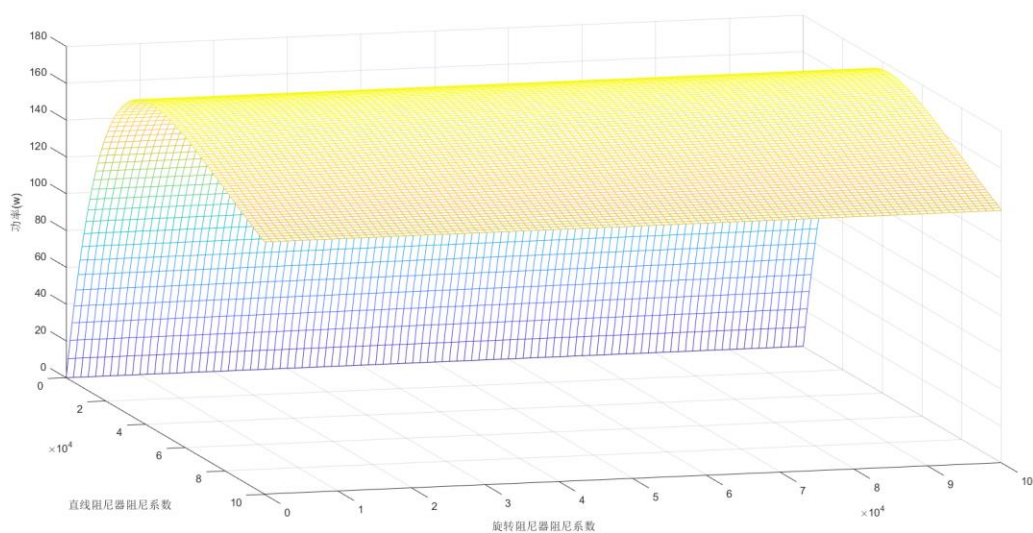


图 32 功率随直线阻尼系数和旋转阻尼系数变化图 II

观察上图可知，输出功率随直线阻尼系数的增大先增大后减小，大约在直线阻尼系数取  $43000\text{Hz}$  时功率最大；

随旋转阻尼系数的增大，输出功率的变化较小，分析原因，发现是因为扭转弹簧和弹簧的刚度太大，导致改变旋转阻尼系数难以对系统造成显著影响。

综合直线阻尼系数和旋转阻尼系数对输出功率的影响，可得最大输出功率为  $176.013\text{W}$

## 六、 模型的评价与推广

### 6.1 模型的优点

- (1) 针对问题一所建立的模型具有良好的物理公式支撑，理论证据充足，说服性强，可靠性较高。

- (2) 针对问题二所建立的模型在进行函数拟合时拟合函数的残差较小, 说明拟合程度较好。
- (3) 针对问题三建立模型时充分考虑了振子和浮子之间的相互作用, 以及浮子和振子纵摇运动和垂荡运动时的相互作用力, 使得建立的模型符合物理规律。
- (4) 在求解问题四的模型时, 我们设置时间步长为  $0.01s$ , 取值较小, 使得计算的精度更大。

## 6.2 模型的缺点与改进

- (1) 在第二问中为了找到最优值采取了局部搜索法方法, 由于在解微分方程时运用了四步龙格库塔算法, 在迭代时运算次数较多, 运算时间时间较长。
- (2) 对于问题二和问题四运算时间较长, 可通过运用模拟退火算法等现代优化算法来改进, 提高运算速度, 并能够提高结果的精确度。
- (3) 在问题三中, 由于题目未指明, 只能假设波浪激励力矩作用在转轴上, 对结果有一定的影响。

## 七、 参考文献

- [1]施金雷. 惯性驱动的波浪能发电装置研究[D].南京信息工程大学,2022.DOI:10.27248/d.cnki.gnjqc.2022.000910.
- [2]马哲.振荡浮子式波浪发电装置的水动力学特性研究[D].中国海洋大学,2013.
- [3]高琅,朱良生,王磊,周斌珍.垂荡式波浪能装置与风机平台集成系统水动力性能研究[J].广东造船,2022,41(03):17-21.
- [4]司守奎、孙玺菁, 数学建模算法与应用 (第三版), 国防工业出版社, 2011.
- [5]黄硕,梁诗琪,盛松伟,马山,陈纪康,李建东.半潜式波浪能养殖平台与系泊系统的耦合动力分析[J].太阳能学报,2022,43(08):463-471.DOI:10.19912/j.0254-0096.tynxb.2021-0786

## 八、 附录

### 8.1 主要计算程序：基于 MATLAB R2020a 开发

---

#### 支撑材料文件列表

---

q1\_1.m:求解问题 1 (1) 所用的代码  
q1\_2.m:求解问题 1 (2) 所用的代码  
q2\_1.m:求解问题 2 (1) 所用的代码  
q2\_2.m:求解问题 2 (2) 所用的代码  
q3.m:求解题目 3 所用的代码  
q3\_J.m:求解题目 3 中间结果 (转动惯量) 所用代码  
q3\_J.mat:求解题目 3 生成的中间数据  
q4.m:求解问题 4 所用的代码  
result1\_1.xlsx:存放问题 1 (1) 的垂荡位移与速度值  
result1\_2.xlsx:存放问题 1 (2) 的垂荡位移与速度值  
result3.xlsx:存放问题 3 的垂荡位移与速度和纵摇角位移与角速度值

---

```
q1_1.m:  
clc, clear  
%已知常量定义  
kx=656.3616;mf=1335.535;kz=10000;w=1.4005;f=6250;g=9.8;  
m1=4866;m2=2433;den=1025;r=1;kt=80000;  
%振子初始位置计算  
x2_0=0.5-m2*g/kt;  
%微分方程组建立及求解  
dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r^2-(z(2)-z(4))*kz-...  
    kt*(z(1)-z(3)+x2_0))/(m1+mf)  
    z(4);((z(2)-z(4))*kz+kt*(0.5+z(1)-z(3))-m2*g)/m2];  
[t,z]=ode45(dz,[0:0.2:200],[0 0 x2_0 0]);  
%作随时间变化图象  
figure(1)  
plot(t,z(:,1),'k')  
title('浮子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')  
figure(2)  
plot(t,z(:,2),'k')  
title('浮子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')  
figure(3)  
plot(t,z(:,3),'k')  
title('振子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')  
figure(4)  
plot(t,z(:,4),'k')  
title('振子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
```



### q1\_2.m:

```
clc, clear
%已知常量定义
kx=656.3616;mf=1335.535;kzk=10000;w=1.4005;f=6250;g=9.8;
m1=4866;m2=2433;den=1025;r=1;kt=80000;
%振子初始位置计算
x2_0=0.5-m2*g/kt;
%微分方程组建立及求解
dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r^2-...
    (z(2)-z(4))*kzk*(abs(z(2)-z(4)))^0.5-kt*(z(1)-z(3)+x2_0))/(m1+mf)
    z(4);((z(2)-z(4))*kzk*(abs(z(2)-z(4)))^0.5+kt*(0.5+z(1)-z(3))...
    -m2*g)/m2];
[t,z]=ode45(dz,[0:0.2:200],[0 0 x2_0 0]);
%作随时间变化图象
figure(1)
plot(t,z(:,1),'k')
title('浮子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(2)
plot(t,z(:,2),'k')
title('浮子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
figure(3)
plot(t,z(:,3),'k')
title('振子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(4)
plot(t,z(:,4),'k')
title('振子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
```

### q2\_1.m:

```
clc, clear
%已知常量定义
i=1;
kx=167.8395;mf=1165.992;w=2.2143;f=4890;g=9.8;
m1=4866;m2=2433;den=1025;r=1;kt=80000;
T=2*pi/w;
%振子初始位置计算
x2_0=0.5-m2*g/kt;
for kz=0:100:100000
    %微分方程组建立及求解
    dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r^2-(z(2)-z(4))*kz...
        -kt*(z(1)-z(3)+x2_0))/(m1+mf)
        z(4);((z(2)-z(4))*kz+kt*(0.5+z(1)-z(3))-m2*g)/m2];
    [t,z]=ode45(dz,[100*T:0.05:110*T],[0 0 x2_0 0]);
    %微元法近似求解平均功率
    fz=(z(:,2)-z(:,4))*kz;
    diffz=z(1:567,3)-z(2:568,3);
    Wz=fz(1:567,1).*diffz;
    Wz=sum(Wz);
    P(i,1)=Wz/10/T;
    x(i,1)=kz;
    i=i+1;
end
plot(x,P)
```

### q2\_2.m:

```
clc,clear
%已知常量定义
kx=656.3616;mf=1335.535;kzk=10000;w=1.4005;f=6250;g=9.8;
m1=4866;m2=2433;den=1025;r=1;kt=80000;
%振子初始位置计算
x2_0=0.5-m2*g/kt;
%微分方程组建立及求解
dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r^2-...
    (z(2)-z(4))*kzk*(abs(z(2)-z(4)))^0.5-kt*(z(1)-z(3)+x2_0))/(m1+mf)
    z(4);((z(2)-z(4))*kzk*(abs(z(2)-z(4)))^0.5+kt*(0.5+z(1)-z(3))...
    -m2*g)/m2];
[t,z]=ode45(dz,[0:0.2:200],[0 0 x2_0 0]);
%作随时间变化图象
figure(1)
plot(t,z(:,1),'k')
title('浮子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(2)
plot(t,z(:,2),'k')
title('浮子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
figure(3)
plot(t,z(:,3),'k')
title('振子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(4)
plot(t,z(:,4),'k')
title('振子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
```

### q3.mat:

```
clc, clear
%已知常量载入与定义
load('q3_J.mat');
m1=4866;m2=2433;den=1025;g=9.8;kt=80000;xt=0.5;knt=250000;kh=8890.7;r1=1;
w=1.7152;mf=1028.876;Jf=7001.914;kcx=683.4558;kzx=654.3383;
f=3640;L=1690;kzz=10000;kxz=1000;
%振子初始位置计算
x2_0=0.5-m2*g/kt;
%微分方程组建立及求解
dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kcx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r1^2-(z(2)-z(4))*kzz-...
    kt*(xt*cos(z(7))+z(1)-z(3))+m2*g)/(m1+mf);
    z(4);(kt*(xt*cos(z(7))+z(1)-z(3))+(z(2)-z(4))*kzz-m2*g+...
    (m2*((z(5)-z(7))*knt+(z(6)-z(8))*kxz)/(2433*((z(1)-...
    z(3))/cos(z(7)))^2 + (2433*(z(1)-z(3))/cos(z(7)))/2 + 4055/8))...
    *(z(3)-z(1))/cos(z(7))+m2*g*sin(z(7))*sin(z(7))/m2;
    z(6);(L*cos(w*t)-(z(5)-z(7))*knt-(z(6)-z(8))*kxz-kzx*z(6)...
    -kh*z(5))/(J1+Jf);
    z(8);((z(5)-z(7))*knt+(z(6)-z(8))*kxz)/(2433*((z(1)-z(3))...
    /cos(z(7)))^2 + (2433*(z(1)-z(3))/cos(z(7)))/2 + 4055/8)];
[t,z]=ode45(dz,[0:0.2:200],[0 0 x2_0 0 0 0 0 0]);
%作随时间变化图象
figure(1)
plot(t,z(:,1),'k')
title('浮子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(2)
plot(t,z(:,2),'k')
title('浮子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
figure(3)
plot(t,z(:,3),'k')
title('振子位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('位移(m)')
figure(4)
plot(t,z(:,4),'k')
title('振子速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('速度(m/s)')
figure(5)
plot(t,z(:,5),'k')
title('浮子角位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('角位移(rad)')
figure(6)
plot(t,z(:,6),'k')
title('浮子角速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('角速度(rad/s)')
figure(7)
plot(t,z(:,7),'k')
title('振子角位移'),xlabel('时间(t)'),ylabel('角位移(rad)')
figure(8)
plot(t,z(:,8),'k')
title('振子角速度'),xlabel('时间(t)'),ylabel('角速度(rad/s)')
```

### q3\_J.m:

```
clc, clear
%已知常量定义
m1=4866;m2=2433;
r1=1;r2=0.5;
h11=3;h12=0.8;h2=0.5;
%% 浮子转动惯量的计算
%浮子密度
den1=m1/(pi*r1^2+2*pi*r1*h11+1/2*sqrt(h12^2+r1^2)*2*pi*r1);
%计算浮子顶转动惯量J11
dJ11=@(r) den1.*2.*pi.*r.*(h11.^2+r.^2);
J11=integral(dJ11, 0, r1);
%计算浮子圆柱面的转动惯量J112
dJ12=@(h) den1.*(r1.^2+h.^2). *2.*pi.*r1;
J12=integral(dJ12, 0, h11);
%计算浮子圆锥面的转动惯量J13
dJ13=@(h) den1.*2.*pi.*(h.*r1./h12).*((h12-h).^2+(h.*r1./h12).^2);
J13=integral(dJ13, 0, h12);
%计算浮子对转轴的转动惯量J1
J1=J11+J12+J13;
%% 振子转动惯量的计算
%振子密度
den2=m2/(pi*r2^2*h2);
%转动惯量计算
syms r h l
dJ2=den2.*2.*pi.*r.*((1+h).^2+r.^2);
J2=int(int(dJ2, r, 0, r2), h, 0, h2);
save('q3_J', 'J1', 'J2');
```

### q4.m:

```
clc, clear
%已知常量载入与定义
load('q3_J.mat');
m1=4866;m2=2433;den=1025;g=9.8;kt=80000;xt=0.5;knt=250000;kh=8890.7;r1=1;
w=1.9806;mf=1091.099;Jf=7142.493;kcx=528.5018;kzx=1655.909;
f=1760;L=2140;
T=2*pi/w;
%振子初始位置计算
x2_0=0.5-m2*g/kt;
j=1;i=1;
```

```

for kzz=0:1000:100000
    for kxz=0:1000:100000
        %微分方程组建立及求解
        dz=@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-kcx*z(2)-den*g*z(1)*pi*r1^2-(z(2)-...
            z(4))*kzz-kt*(xt*cos(z(5)-z(7))+z(1)-z(3))+m2*g)/(m1+mf);
            z(4);(kt*(xt*cos(z(5)-z(7))+z(1)-z(3))+(z(2)-z(4))*kzz-m2*g+...
            (m2*((z(5)-z(7))*knt+(z(6)-z(8))*kxz)/(2433*((z(3)-z(1))/...
            cos(z(7)))^2 + (2433*(z(3)-z(1))/cos(z(7)))/2 + 4055/8))*...
            (z(3)-z(1))/cos(z(7))+m2*g*sin(z(7))*sin(z(7)))/m2;
            z(6);(L*cos(w*t)-(z(5)-z(7))*knt-(z(6)-z(8))*kxz-kzx*z(6)-...
            kh*z(5))/(J1+Jf);
            z(8);((z(5)-z(7))*knt+(z(6)-z(8))*kxz)/(2433*((z(3)-z(1))/...
            cos(z(7)))^2 + (2433*(z(3)-z(1))/cos(z(7)))/2 + 4055/8)];
        [t,z]=ode45(dz,[100*T:0.05:110*T],[0 0 x2_0 0 0 0 0 0]);
        %微元法近似求解平均功率
        fcz=(z(:,2)-z(:,4))*kzz;
        diffzc=(z(1:634,3)-z(1:634,1))-(z(2:635,3)-z(2:635,1));
        Wc=fcz(1:634,1).*diffzc;
        Wc=sum(Wc);
        Pc(i,j)=Wc/10/T;
        Tzz=(z(:,6)-z(:,8)).*kxz;
        diffzz=(z(1:634,7)-z(1:634,5))-(z(2:635,7)-z(2:635,5));
        Wz=Tzz(1:634,1).*diffzz;
        Wz=sum(Wz);
        Pz(i,j)=Wz/10/T;
        y(i,1)=kxz;
        i=i+1;
    end
    x(j,1)=kzz;
    j=j+1;
end

P=Pc+Pz;
mesh(x,y,P)
xlabel('直线阻尼器阻尼系数'),ylabel('旋转阻尼器阻尼系数'),zlabel('功率(w)')

```