Modelo Lineal de Regresión Múltiple

El modelo de regresión múltiple tiene por objetivo explicar el comportamiento de una variable endógena, explicada o dependiente, que se designa como Y, utilizando la información proporcionada por los valores tomados por un conjunto de variables exógenas, explicativas o independientes, designadas $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Si X es la variable explicativa e Y es la variable explicada entonces:

Modelo Poblacional

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_i$$

Modelo Muestral

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 + e_i$$

Supuestos del modelo múltiple

Plano de regresión muestral

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Método de mínimos cuadrados

$Minimizar\ \sum_{i=1}^{n} e_i^2$

$Minimizar\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

$Minimizar\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2\right)\right)^2$

$Minimizar\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_1 - \hat{b}_2 x_2\right)^2$

Función que se quiere minimizar en el modelo de regresión múltiple

$$\varphi(\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_1 - \hat{b}_2 x_2)^2$$

La condición de mínimo es que las derivadas parciales respecto de $\hat{b}_0, \hat{b}_1\ y\ \hat{b}_2$ sean cero.

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_0} = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_1} = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_2} = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_0} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_1 - \hat{b}_2 x_2)(-1) = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1x_1 - \hat{b}_2x_2)(-x_1) = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1x_1 - \hat{b}_2x_2)(-x_2) = 0$$

Dividiendo por 2 a las tres ecuaciones, aplicando distributiva respecto de la sumatoria y de la derivada:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_0} = -\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_2 = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_1} = -\sum_{i=1}^{n} y_ix_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0x_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_1\,x_2 = 0$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\hat{b}_2} = -\sum_{i=1}^{n} y_ix_2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0x_2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1\,x_2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_2^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0x_1 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1^2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_1\,x_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{b}_0x_2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_1x_1\,x_2 + \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_2x_2^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_2$$

Sistema de Ecuaciones Normales de Gauss

$$n\ \hat{b}_0 + \hat{b}_1\sum_{i=1}^{n} x_1 + \hat{b}_2\sum_{i=1}^{n} x_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat{b}_0\sum_{i=1}^{n} x_1 + \hat{b}_1\sum_{i=1}^{n} x_1^2 + \hat{b}_2\sum_{i=1}^{n} x_1\,x_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_1$$

$$\hat{b}_0\sum_{i=1}^{n} x_2 + \hat{b}_1\sum_{i=1}^{n} x_1\,x_2 + \hat{b}_2\sum_{i=1}^{n} x_2^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_2$$

¿Cómo se obtienen los estimadores $\hat{b}_0$, $\hat{b}_1$y $\hat{b}_2$?

Resolución Matricial del modelo de regresión múltiple

Dados los valores de las variables independiente $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$y dependiente $\boldsymbol{y_i}$.

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{y_i}$
x_{11}	x_{21}	y_1
x_{12}	x_{22}	y_2
x_{13}	x_{23}	y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1n}	x_{2n}	y_n

$$B = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ 1 & x_{13} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ 1 & x_{13} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1\, x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1\, x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 y_i \end{bmatrix}$$

$$(X'X)B = X'Y = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 y_i \end{bmatrix}$$

Sistema de Ecuaciones Normales de Gauss

$$n\ \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^{n} x_1 + \hat{b}_2 \sum_{i=1}^{n} x_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\hat{b}_0 \sum_{i=1}^{n} x_1 + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^{n} x_1^2 + \hat{b}_2 \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 = \sum_{i=1}^{n} x_1\, y_i$$

$$\hat{b}_0 \sum_{i=1}^{n} x_2 + \hat{b}_1 \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 + \hat{b}_2 \sum_{i=1}^{n} x_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_2\, y_i$$

Dado que X’X = (X’X)’. Se trasponen las filas por las columnas

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)' = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante de X’X

$$DeterminantedeX'X = |X'X| = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \\ n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} =$$

$$|X'X| = [(n\sum_{i=1}^{n} x_1^2 \sum_{i=1}^{n} x_2^2) + (\sum_{i=1}^{n} x_1 \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \sum_{i=1}^{n} x_2) + (\sum_{i=1}^{n} x_2 \sum_{i=1}^{n} x_1 \sum_{i=1}^{n} x_1x_2)] \\ - [(\sum_{i=1}^{n} x_1 \sum_{i=1}^{n} x_1 \sum_{i=1}^{n} x_2^2) + (n\sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \sum_{i=1}^{n} x_1x_2) + (\sum_{i=1}^{n} x_2 \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \sum_{i=1}^{n} x_2)]$$

Hallamos la inversa de X’X

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} adj(X'X)$$

Matriz adjunta

En primer lugar se tiene que aplicar la regla de signos de los adjuntos de la siguiente manera:

Si el número de la fila más el número de la columna da número par queda el signo del adjunto, si el número de la fila más el número de la columna da número impar cambia el signo del adjunto.

	$col\ 1$	$col\ 2$	$col\ 3$
$fila\ 1$	$+$	(-1)	$+$
$fila\ 2$	(-1)	$+$	(-1)
$fila\ 3$	$+$	(-1)	$+$

Dada la matriz (X’X) para hallar la matriz adjunta se procede de la siguiente manera:

Se selecciona el elemento de la fila 1 columna 1, se tapa la fila 1 y la columna 1 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(1,1).

$$
(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}
$$

$$
(X'X) = \begin{bmatrix} & & \\ & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}
$$

$$
Adj(X'X) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}
$$

Se selecciona el elemento de la fila 1 columna 2, se tapa la fila 1 y la columna 2 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(1,2).

$$
(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}
$$

$$
(X'X) = \begin{bmatrix} & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}
$$

$$Adj(X'X) = \left[\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} \right]$$

Se selecciona el elemento de la fila 1 columna 3, se tapa la fila 1 y la columna 3 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(1,3).

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \end{bmatrix}$$

$$Adj(X'X) = \left[\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} (-1) \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \end{vmatrix} \right]$$

Se selecciona el elemento de la fila 2 columna 2, se tapa la fila 2 y la columna 2 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(2,2).

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$Adj(X'X) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \\ & & \end{bmatrix}$$

Se selecciona el elemento de la fila 2 columna 3, se tapa la fila 2 y la columna 3 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(2,3).

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \\ & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 & \end{bmatrix}$$

$$Adj(X'X)=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ & & \end{bmatrix}$$

Se selecciona el elemento de la fila 3 columna 3, se tapa la fila 3 y la columna 3 y el elemento que queda visible es el adjunto de ese elemento adj(3,3).

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 & \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$Adj(X'X) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ & & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Luego por tratarse de una matriz simétrica se completa con los adjuntos de la siguiente manera el adj(2,1)=adj(1,2); el adj(3,1)=adj(1,3); el adj(3,2)=adj(2,3)

$$Adj(X'X) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1^2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ (-1)\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_2^2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} & (-1)\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_2 & \sum_{i=1}^{n} x_1x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_1 & \sum_{i=1}^{n} x_1^2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$B = (X'X)^{-1}(X'Y) = \frac{Adj(X'X)}{|X'X|}(X'Y) = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$

Ecuación del plano de regresión

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2$$

Bondad de Ajuste

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = Variación\ total = SCT = VT$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = Variación\ no\ explicada = SCE = VNE$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = Varianción\ explicada = SCR = VE$$

Variación total = variación no explicada + variación explicada

Suma de cuadrados total = Suma de cuadrados del error + Suma de cuadrados de la regresión

Demostración:

Sumando y restando $\hat{y}_i$, luego aplicando el cuadrado del binomio queda:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y} + \hat{y}_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y})\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}$$

$$SCT = SCE + SCR$$

$$VT = VNE + VE$$

$$\frac{SCT}{SCT} = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

$$1 = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

Medida absoluta de la bondad del ajuste. Error estándar de la estimación

$$S_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k-1}} = \sqrt{\frac{SCE}{n-k-1}}$$

Medida relativa de la bondad del ajuste. Coeficiente de determinación

$$R^2 = \frac{SCR}{SCT} = \frac{\text{Varianción explicada}}{Variación\ total}$$

$R^2 =$ es la proporción de la variación total explicada por el plano de regresión

$$R^2 100 = \_\_\_\% \; de \; la \; variación \; total \; explicado \; por \; el \; plano \; de \; regresión$$

¿Cuál es el rango de variabilidad de R^2?

$$\boxed{0 \leq R^2 \leq 1}$$

Otras medidas

Varianza de la estimación

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k-1} = \frac{SCE}{n-k-1}$$

Siendo k el número de variables independientes en el modelo

Coeficiente de no determinación

$$1 - R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Es la proporción de la variación total que no está explicada por el plano de regresión.

$(1 - R^2)100 = \_\_\_\%$ es el porcentaje de la variación total que no está explicada por el plano de regresión.

Test de Significatividad Global o Total

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$H_1: \beta_i \neq \beta_j$$

$$F_e = \frac{\frac{SCR}{k}}{\frac{SCE}{n-k-1}} = \frac{\frac{\frac{SCR}{SCT}}{K}}{\frac{\frac{SCE}{SCT}}{n-k-1}} = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}}$$

Se rechaza la hipótesis nula si $F_e \geq F_{(1-\alpha;k,n-k-1)}$

Test de Significatividad Individual

Elementos de la matriz adjunta

$$Adj(X'X) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 > 0$$

$$t_e = \frac{\hat{b}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{b}_1}}$$

$$\sigma_{\hat{b}_1} = S_e \sqrt{\frac{a_{22}}{|X'X|}}$$

Se rechaza la hipótesis nula si $t_e \geq t_{(1-\alpha;n-k-1)}$

$$H_0: \beta_1 = 0$$

$$H_1: \beta_1 < 0$$

$$t_e = \frac{\hat{b}_1 - \beta_1}{\sigma_{\hat{b}_1}}$$

Se rechaza la hipótesis nula si $t_e \leq -t_{(1-\alpha;n-k-1)}$

$$H_0: \beta_2 = 0$$

$$H_1: \beta_2 > 0$$

$$t_e = \frac{\hat{b}_2 - \beta_2}{\sigma_{\hat{b}_2}}$$

$$\sigma_{\hat{b}_2} = S_e \sqrt{\frac{a_{33}}{|X'X|}}$$

Se rechaza la hipótesis nula si $t_e \geq t_{(1-\alpha;n-k-1)}$

$$H_0: \beta_2 = 0$$

$$H_1: \beta_2 < 0$$

$$t_e = \frac{\hat{b}_2 - \beta_2}{\sigma_{\hat{b}_2}}$$

Se rechaza la hipótesis nula si $t_e \leq -t_{(1-\alpha;n-k-1)}$