Ejercicio 1

Demostrar que, si conociéramos exactamente el valor de cada acción, es decir, si $Q_t(a) = E\left[R_t \middle| A_t = a\right]$, entonces la acción *greedy* $A_t = \operatorname{argmax}_a Q_t(a)$ es la acción óptima en el sentido de que permite maximizar las recompensas totales.

Solución:

Sea,
a: Acción arbitraria
A_t: Acción tomada en el tiempo t
R_t: Recompensa obtenida en el tiempo t
$Q_t(a)$: Valor estimado de la acción a en el tiempo t
$q_*(a)$: Recompensa esperada dado que se toma la acción a
Acción *greedy*: acción cuyo valor estimado es el mayor de todos los valores estimados de las acciones posibles en el tiempo t

El valor $q_*(a)$ de una acción arbitraria a equivale al valor esperado de la recompensa si a es seleccionada.

$$q_*(a) \doteq \mathbb{E}\left[R_t \middle| A_t = a\right]$$

La aplicación del algoritmo *greedy* implica guardar los valores estimados de las acciones en cada iteración, en una estrategia no exploratoria. Se calcula $Q_t(a)$ como el valor estimado de la acción a en el tiempo t, o bien, promediando las recompensas obtenidas, es decir,

$$Q_t(a) \doteq \frac{\text{suma de las recompensas al tomar } \mathbf{a} \text{ antes de } \mathbf{t}}{\text{veces que se ha tomado } \mathbf{a} \text{ antes de } \mathbf{t}}$$

Donde $\mathbb{1}$ denota una variable aleatoria que toma el valor 1 si la acción a fue seleccionada en el tiempo t, y 0 en caso contrario[1]. La estrategia no exploratoria se interpreta matemáticamente como:

$$Q_t(a) = \frac{\sum_{i=1}^{t-1} R_i \cdot \mathbb{1}}{\sum_{i=1}^{t-1} \mathbb{1}_{A_i = a}}$$

De la cual se toma el valor máximo del *Q-valor*, es decir

$$A_t = argmax_a Q_t(a)$$

Si se conociera el valor de $q_*(a)$, entonces la acción *greedy* será la acción que maximiza el valor esperado de la recompensa, es decir, la acción a tal que $Q_t(a) \approx q_*(a)$.

Ejercicio 2

En una selección de acciones tipo $\varepsilon - greedy$ con dos acciones posibles y $\varepsilon = 0{,}1$, ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la acción *greedy*?

Solución:

En una estrategia de acciones tipo $\varepsilon - greedy$, se selecciona una acción aleatoria con probabilidad ε y se selecciona la acción *greedy* con probabilidad $1 - \varepsilon$. Es decir, si $\varepsilon = 0{,}1$, entonces la probabilidad de seleccionar la acción *greedy* es de $1 - \varepsilon = 0{,}9$. O bien,

$$P(\text{acción } \textit{greedy}) = 1 - \varepsilon = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

---

[1] Si el denominador es 0, se define $Q_t(a)$ como un valor por defecto, sea 0

Ejercicio 3 Demostrar que el valor de una acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces, definido como

$$Q_n = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1}$$

puede calcularse incrementalmente con la siguiente fórmula:

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{n}\left[R_n - Q_n\right]$$

Describa la ventaja de esta fórmula desde un punto de vista computacional.

Solución:

Sea,
Q_n: Valor estimado de la acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces
R_i: Recompensa obtenida después de la i-ésima selección de la acción
n: Número de veces que la acción ha sido seleccionada

Dado que Q_n es el promedio de las recompensas obtenidas después de haber seleccionado la acción $n-1$ veces, se tiene que

$$Q_n = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1}$$

O bien puede escribirse como

$$Q_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} R_i$$

O su equivalente en términos de Q_{n+1}, al sustituir n por $n+1$ en la fórmula anterior

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$$

Si se desea calcular el valor de la acción después de haber sido seleccionada n veces, se puede hacer de manera incremental, es decir, se puede calcular el valor de la acción después de haber sido seleccionada n veces a partir del valor de la acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} + R_n}{n} \\ &= \frac{n-1}{n}\frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}R_n \end{aligned}$$

Tras simplificar la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{n-1}{n}Q_n + \frac{1}{n}R_n \\ &= Q_n + \frac{1}{n}\left[R_n - Q_n\right] \end{aligned}$$

Ventajas de la fórmula incremental

- Memoria constante para estimar el valor promedio de la recompensa de una acción.

- Reducción de la complejidad computacional al no tener que almacenar todas las recompensas obtenidas, ni tener que llevar a cabo la suma del numerador.
- El cálculo del valor de Q_{n+1} únicamente requiere guardar el valor de Q_n y n para poder calcular el valor de la acción después de haber sido seleccionada $n+1$ veces.

Ejercicio 4

Considere un problema *k-armed bandit* con $k = 4$ acciones. Considere la aplicación de un algoritmo *bandit* usando selección de acciones ε - *greedy*, estimación incremental de los valores de cada acción y valores iniciales nulos $Q_1(a) = 0\ \forall a$. Suponga la siguiente secuencia de acciones y recompensas: $A_1 = 1,\ R_1 = 1,\ A_2 = 2,\ R_2 = 1,\ A_3 = 2,\ R_3 = -2,\ A_4 = 2,\ R_4 = 2,\ A_5 = 3,\ R_5 = 0$. En algunos de estos pasos se ha tomado una decisión aleatoria.

- ¿En qué pasos definitivamente se tomaron decisiones aleatorias?
- ¿En qué pasos es posible que la decisión haya sido aleatoria?

Solución:

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Ejercicio 5

[Programación] Aplique el algoritmo bandit $\varepsilon - greedy$ con $\varepsilon \in \{0, 0.01, 0.10\}$ a un problema *k-armed bandit* con $k = 10$ acciones. Considere recompensas con medias aleatorias y desvío estándar constante σ. Analice experimentalmente el efecto del desvío estándar σ evaluando tres casos: $\sigma \in \{0, 1, 10\}$
¿Qué conclusiones puede sacar?

Solución:

El algoritmo bandit $\varepsilon - greedy$ consiste en los siguientes pasos:

Algoritmo 1 Algoritmo $\varepsilon - greedy$ para el problema de Multi-Armed Bandit

Inicializar: para $a = 1$ hasta k:
    $Q(a) \leftarrow 0$ // Valor estimado de la acción a
    $N(a) \leftarrow 0$ // Número de veces que se ha seleccionado la acción a
Iterar n veces:
    Seleccionar una acción A:
    $$A \leftarrow \begin{cases} \operatorname{argmax}_a Q(a) & \text{con probabilidad } 1-\varepsilon \\ \text{una acción aleatoria} & \text{con probabilidad } \varepsilon \end{cases}$$
    $R \leftarrow bandit(A)$: Obtener la recompensa R de la acción seleccionada.
    $N(A) \leftarrow N(A) + 1$: Actualizar el número de selecciones de A.
    $Q(A) \leftarrow Q(A) + \frac{1}{N(A)}[R - Q(A)]$: Actualizar la estimación de valor de A.

Donde,
a: Acción arbitraria
A: Acción seleccionada

R: Recompensa obtenida
$Q(A)$: Valor estimado de la acción A
$N(A)$: Número de veces que se ha seleccionado la acción A
$bandit(A)$: Función que devuelve la recompensa de la acción A
R: Recompensa obtenida

Sean las constantes,
$k = 10$: Número de brazos
$n = 20000$: Número de iteraciones
$\varepsilon \in \{0, 0.01, 0.10\}$: Probabilidad de exploración
$\sigma \in \{0, 1, 10\}$: Desvío estándar de las recompensas

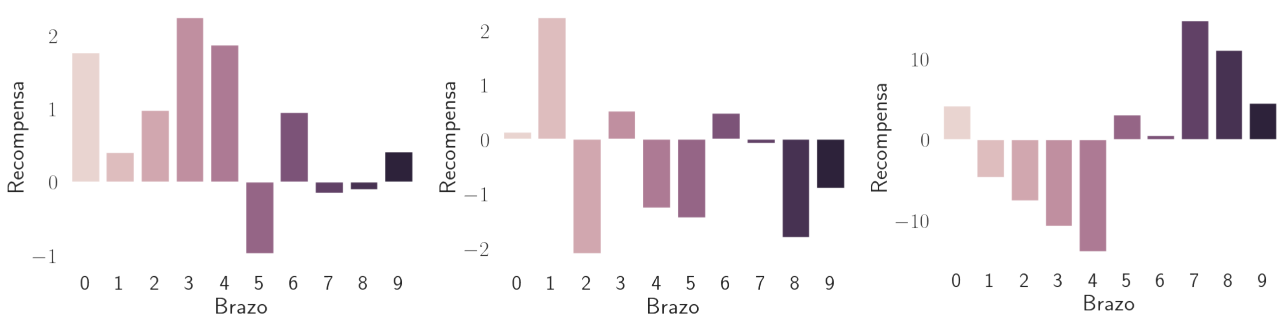
Se inicializó la recompensa media de cada brazo tal que se distribuya normalmente $\mu_i \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$.

$$\mu_k = [\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}] \quad \text{con} \quad \mu_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

Teniendo en cuenta las recompensas medias μ_k y los desvíos estándar σ, se calcularon las recompensas para cada brazo R_k:

$$R_k \sim \mathcal{N}(\mu_k,\, \sigma^2) \quad \forall i, \sigma$$

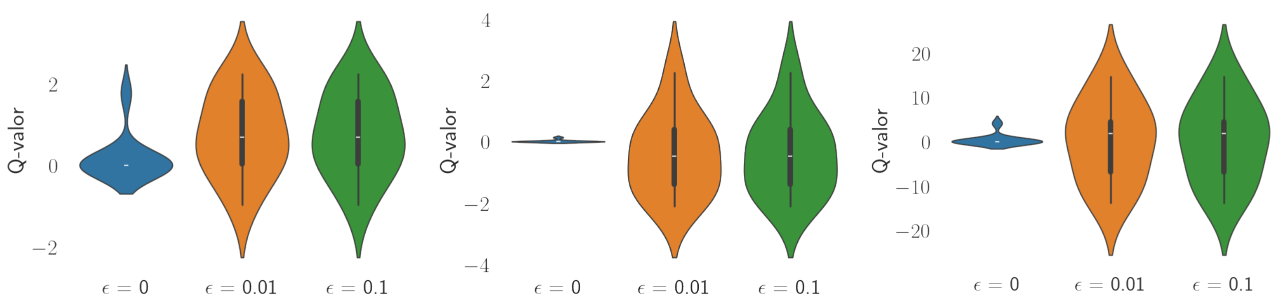
Las recompensas para cada caso se muestran en la Figura 1.



(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 1: Recompensa para cada brazo

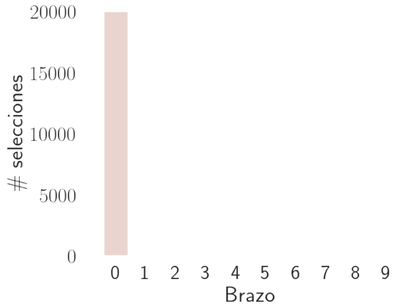
Se aplicó el algoritmo $\varepsilon - greedy$ con distintas combinaciones de ε y σ. Los resultados de los *Q-valor* de las acciones se muestran en la Figura 2.



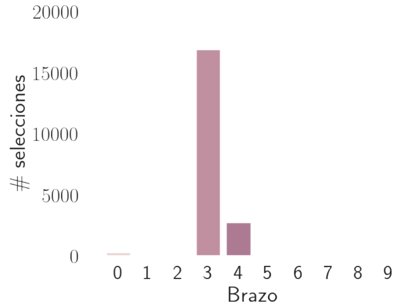
(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 2: *Q-Valor* de las acciones

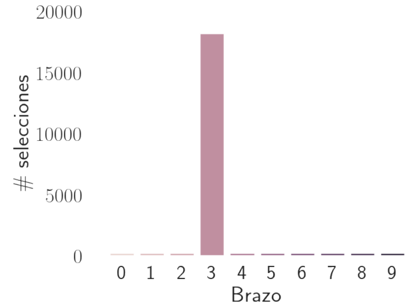
Las figuras 2a, 2b y 2c muestran que el Q-valor es cero para todas las acciones, aunque aumente el valor de ε ya que las recompensas son cero para todos los brazos y por lo tanto, determinístico.
La Figura 3 muestra el número de veces que se seleccionó cada brazo para los distintos valores de ε y σ.



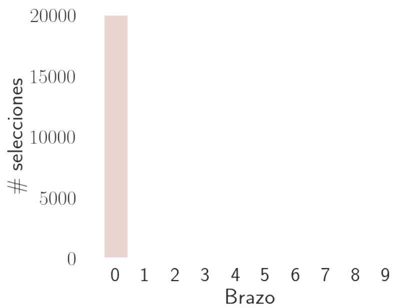
(a) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0$



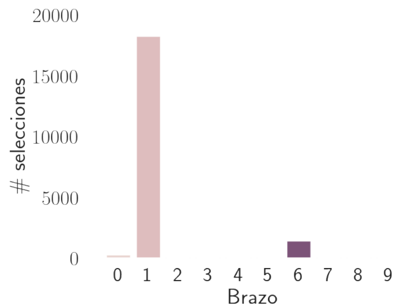
(b) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0.01$



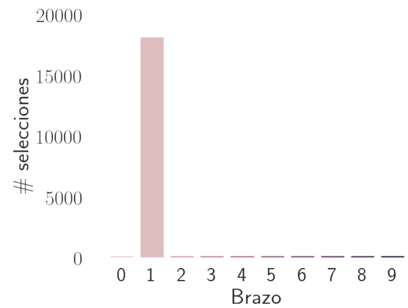
(c) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0.10$



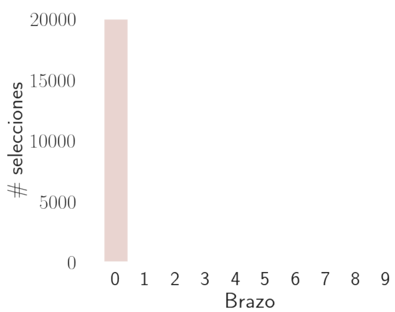
(d) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0$



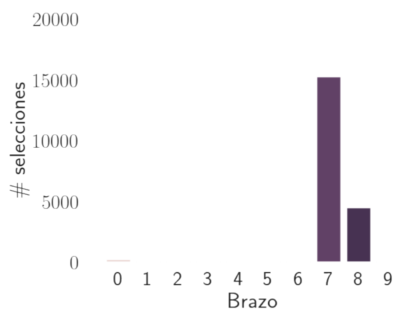
(e) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0.01$



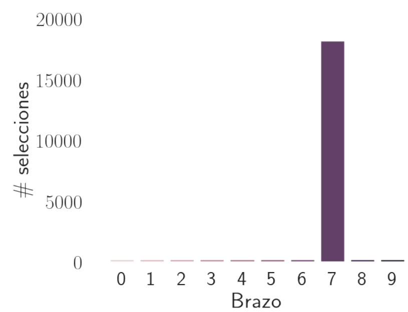
(f) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0.10$



(g) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0$



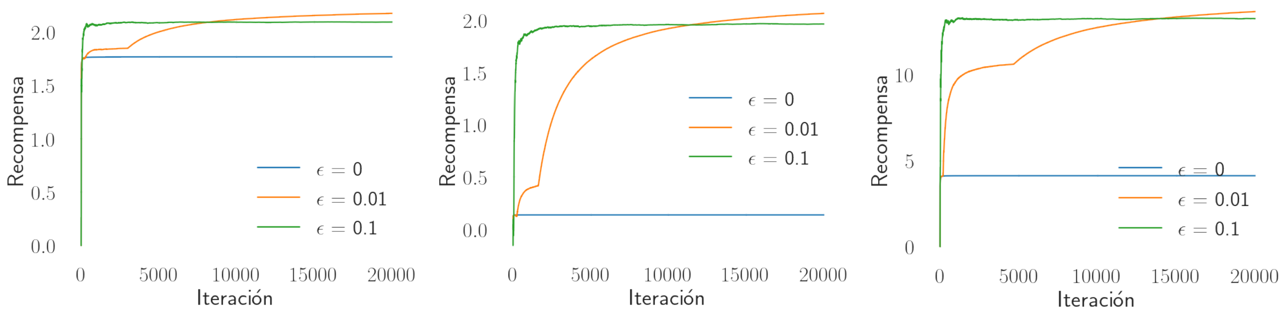
(h) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0.01$



(i) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0.10$

Figura 3: Número de veces que se seleccionó cada brazo

Finalmente, se analizó la recompensa promedio obtenida en función del número de iteraciones para los distintos valores de ε y σ. Los resultados se muestran en la Figura 4.



(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 4: Recompensa promedio obtenida

En las figuras 4a, 4b y 4c se observa que la recompensa promedio obtenida es cero para todos los valores de ε y σ.

Ejercicio 6

Dada la fórmula adaptativa del valor $Q_{n+1} = Q_n + \alpha\,[R_n - Q_n]$ con $\alpha \in (0, 1]$, demostrar que

- $Q_{n+1} = (1-\alpha)^n Q_n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} R_i$
- $(1-\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} = 1$, es decir, Q_{n+1} es un promedio pesado de $Q_n, R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Solución:

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Ejercicio 7

Demostrar que fórmula adaptativa para calcular el valor $Q_{n+1} = Q_n + \alpha\,[R_n - Q_n]$ con *step-size* $\alpha \in (0, 1]$ constante no verifica las hipótesis del teorema de convergencia y, por lo tanto, no está garantizada su convergencia.

Solución:

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Ejercicio 8

En la *Figura 2.3* del libro *Sutton&Barto (2018)*, se observa un *spike* en el paso número 11 cuando se utiliza inicialización optimista. De una explicación de este fenómeno.

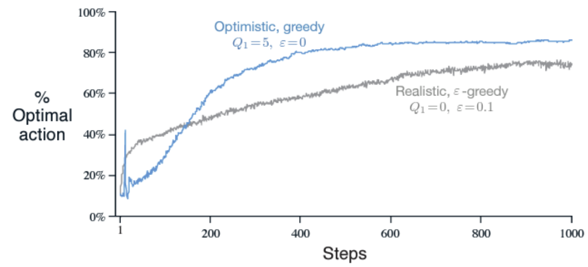


Figure 2.3: The effect of optimistic initial action-value estimates on the 10-armed testbed. Both methods used a constant step-size parameter, $\alpha = 0.1$.

Figura 5: Figura 2.3 - Sutton&Barto (2018)

Solución:

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Ejercicio 9

Demuestre que la función SOFTMAX: $p(a) = \frac{e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}}$, define una distribución de probabilidades discreta válida.

Solución:

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Ejercicio 10

Demostrar que las derivadas de la función SOFTMAX $p(x)$ respecto de sus parámetros $H(a),\ a = 1, 2, \ldots, K$, son iguales a:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial H(a)} = \begin{cases} p(x)(1 - p(x)) & \text{si } x = a \\ -p(x)p(a) & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Solución:

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Ejercicio 11

Demostrar que la regla de actualización por gradiente ascendente estocástico:

$$H_{t+1}(a) = H_t(a) + \alpha \frac{\partial E[R_t]}{\partial H_t(a)}$$

con $E[R_t] = \sum_{x=1}^{K p_t(x) q*(x)}$, puede escribirse de la siguiente manera:

$$H_{t+1}(a) = \begin{cases} H_t(a) + \alpha(R_t - C)(1 - p_t(a)) & \text{si } a = A_t \\ H_t(a) - \alpha(R_t - C)p_t(a) & \text{si } a \neq A_t \end{cases}$$

Solución:

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Referencias Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Apéndice Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.