Ejercicio 1

Demostrar que, si conociéramos exactamente el valor de cada acción, es decir, si $Q_t(a) = E\left[R_t \middle| A_t = a\right]$, entonces la acción *greedy* $A_t = \text{argmax}_a\, Q_t(a)$ es la acción óptima en el sentido de que permite maximizar las recompensas totales.

Solución

Sea,
a: Acción arbitraria
A_t: Acción tomada en el tiempo t
R_t: Recompensa obtenida en el tiempo t
$Q_t(a)$: Valor estimado de la acción a en el tiempo t
$q_*(a)$: Recompensa esperada al tomar la acción a
Acción greedy: acción que maximiza el valor esperado de la recompensa

El valor $q_*(a)$ de una acción a equivale a la recompensa esperada si se selecciona dicha acción.

$$q_*(a) \doteq \mathbb{E}\left[R_t \middle| A_t = a\right]$$

El algoritmo *greedy*, *no exploratorio*, estima $Q_t(a)$ como el promedio de las recompensas obtenidas, es decir,

$$Q_t(a) \doteq \frac{\text{suma de las recompensas obtenidas al seleccionar } \mathbf{a}}{\text{número de veces que se seleccionó } \mathbf{a}}$$

En cada tiempo t, el algoritmo *greedy* selecciona la acción a que maximiza el valor esperado de la recompensa, es decir, la acción a tal que $Q_t(a) = q_*(a)$. En otras palabras, en cada paso, el algoritmo elige la acción que tiene la mayor recompensa esperada, matemáticamente se expresa como

$$\begin{aligned} A_t &= \operatorname*{argmax}_a Q_t(a) \\ &= \operatorname*{argmax}_a q_*(a) \end{aligned}$$

Dado que $q_*(a)$ es la recompensa esperada real, al seleccionarla se obtiene la mayor recompensa posible. Por lo tanto, la acción *greedy* $A_t = \text{argmax}_a\, Q_t(a)$ es la acción óptima en el sentido de que permite maximizar las recompensas totales.

Ejercicio 2

En una selección de acciones tipo $\varepsilon - greedy$ con dos acciones posibles y $\varepsilon = 0{,}1$, ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la acción *greedy*?

Solución

En una estrategia de acciones tipo $\varepsilon - greedy$, se selecciona una acción aleatoria con probabilidad ε y se selecciona la acción *greedy* con probabilidad $1 - \varepsilon$. Es decir, si $\varepsilon = 0{,}1$, entonces la probabilidad de seleccionar la acción *greedy* es de $1 - \varepsilon = 0{,}9$. O bien,

$$P(\text{acción } greedy) = 1 - \varepsilon = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar la acción *greedy* es 0,90 o el 90 %.

Ejercicio 3

Demostrar que el valor de una acción después de haber sido seleccionada $n - 1$ veces, definido como

$$Q_n = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1}$$

puede calcularse incrementalmente con la siguiente fórmula:

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{n}\left[R_n - Q_n\right]$$

Describa la ventaja de esta fórmula desde un punto de vista computacional.

Solución

Sea,
Q_n: Valor estimado de la acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces
R_i: Recompensa obtenida después de la i-ésima selección de la acción
n: Número de veces que la acción ha sido seleccionada

Dado que Q_n es el promedio de las recompensas obtenidas después de haber seleccionado la acción $n-1$ veces, se tiene que

$$Q_n = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1}$$

O bien puede escribirse como

$$Q_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} R_i$$

O su equivalente en términos de Q_{n+1}, al sustituir n por $n+1$ en la fórmula anterior

$$Q_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i$$

Si se desea calcular el valor de la acción después de haber sido seleccionada n veces, se puede hacer de manera incremental, es decir, se puede calcular el valor de la acción después de haber sido seleccionada n veces a partir del valor de la acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} + R_n}{n} \\ &= \frac{n-1}{n}\frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}R_n \end{aligned}$$

Tras simplificar la expresión anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{n-1}{n}Q_n + \frac{1}{n}R_n \\ &= Q_n + \frac{1}{n}\left[R_n - Q_n\right] \end{aligned}$$

Ventajas de la fórmula incremental

Desde un punto de vista computacional, la fórmula incremental más eficiente que recalcular el promedio desde cero en cada paso. Las principales ventajas son:

- **Memoria constante**: La fórmula incremental no almacena todas las recompensas anteriores, solo se necesita almacenar el valor actual de Q_n y el número de veces que la acción ha sido seleccionada, lo que reduce el requerimiento de $O(n)$ a $O(1)$, lo que es mucho más eficiente cuando n es grande.
- **Eficiencia**: El cálculo del valor de Q_{n+1} únicamente requiere una operación de suma y una operación de división, lo que es computacionalmente más eficiente que recalcular el promedio desde cero en cada paso.

Ejercicio 4

Considere un problema *k-armed bandit* con $k = 4$ acciones. Considere la aplicación de un algoritmo *bandit* usando selección de acciones ε - *greedy*, estimación incremental de los valores de cada acción y valores iniciales nulos $Q_1(a) = 0\ \forall a$. Suponga la siguiente secuencia de acciones y recompensas:

- $A_1 = 1,\ R_1 = 1$
- $A_2 = 2,\ R_2 = 1$
- $A_3 = 2,\ R_3 = -2$
- $A_4 = 2,\ R_4 = 2$
- $A_5 = 3,\ R_5 = 0$

En algunos de estos pasos se ha tomado una decisión aleatoria.

- ¿En qué pasos definitivamente se tomaron decisiones aleatorias?
- ¿En qué pasos es posible que la decisión haya sido aleatoria?

Solución

Sea,
$k = 4$: Número de acciones
$Q_1(a) = 0\ \forall a$: Valor inicial de cada acción

La secuencia de acciones y recompensas se muestra en la siguiente tabla:

n	A_n	R_n	Q_{n+1}	Aleatoria
0	-	-	0.0	-
1	1	1	1.0	Sí
2	2	1	1.0	Sí
3	2	-2	0.0	Posiblemente
4	2	2	0.5	Posiblemente
5	3	0	0.4	Posiblemente

Paso 1:
Este es el primer paso y no hay información previa. Por lo que la decisión fue aleatoria.

$$Q_2 = Q_1 + \frac{1}{1}[R_1 - Q_1] = 0 + \frac{1}{1}[1 - 0] = 1{,}0$$

Paso 2:
Al ser el segundo paso y aún no tener información suficiente sobre las recompensas esperadas, es probable que esta decisión también haya sido aleatoria.

$$Q_3 = Q_2 + \frac{1}{2}[R_2 - Q_2] = 1 + \frac{1}{2}[1 - 1] = 1{,}0$$

Paso 3:
Aunque se ha seleccionado la acción 2 nuevamente, la recompensa anterior fue positiva. No obstante, considerando el algoritmo ε-*greedy*, existe la posibilidad de que se haya tomado una decisión aleatoria.

$$Q_4 = Q_3 + \frac{1}{3}[R_3 - Q_3] = 1 + \frac{1}{3}[-2 - 1] = 0{,}0$$

Paso 4:
Aunque se ha repetido la acción con una recompensa positiva en el paso anterior, podría haber habido un componente aleatorio en la elección.

$$Q_5 = Q_4 + \frac{1}{4}[R_4 - Q_4] = 0 + \frac{1}{4}[2 - 0] = 0{,}5$$

Paso 5:
Considerando las acciones anteriores, las cuales fueron sobre la acción 2, principalmente, la elección en cuestión podría ser el resultado de una decisión aleatoria.

$$Q_6 = Q_5 + \frac{1}{5}[R_5 - Q_5] = 0{,}5 + \frac{1}{5}[0 - 0{,}5] = 0{,}4$$

Ejercicio 5

[Programación] Aplique el algoritmo bandit $\varepsilon - greedy$ con $\varepsilon \in \{0, 0{,}01, 0{,}10\}$ a un problema *k-armed bandit* con $k = 10$ acciones. Considere recompensas con medias aleatorias y desvío estándar constante σ. Analice experimentalmente el efecto del desvío estándar σ evaluando tres casos: $\sigma \in \{0, 1, 10\}$
¿Qué conclusiones puede sacar?

Solución

El algoritmo bandit $\varepsilon - greedy$ consiste en los siguientes pasos[1]:

Algoritmo 1 Algoritmo $\varepsilon - greedy$ para el problema de Multi-Armed Bandit

Inicializar: para $a = 1$ hasta k:
  $Q(a) \leftarrow 0$ // Valor estimado de la acción a
  $N(a) \leftarrow 0$ // Número de veces que se ha seleccionado la acción a
Iterar n **veces:**
  Seleccionar una acción A:

$$A \leftarrow \begin{cases} \text{argmax}_a\, Q(a) & \text{con probabilidad } 1 - \varepsilon \\ \text{una acción aleatoria} & \text{con probabilidad } \varepsilon \end{cases}$$

  $R \leftarrow bandit(A)$: Obtener la recompensa R de la acción seleccionada.
  $N(A) \leftarrow N(A) + 1$: Actualizar el número de selecciones de A.
  $Q(A) \leftarrow Q(A) + \frac{1}{N(A)}[R - Q(A)]$: Actualizar la estimación de valor de A.

Donde,
a: Acción arbitraria

[1]La implementación del algoritmo se realizó en Python utilizando la librería *numpy* para el cálculo de las recompensas y se encuentra disponible en el repositorio de GitHub.

A: Acción seleccionada
R: Recompensa obtenida
$Q(A)$: Valor estimado de la acción A
$N(A)$: Número de veces que se ha seleccionado la acción A
$bandit(A)$: Función que devuelve la recompensa de la acción A

Sean las constantes,
$k = 10$: Número de brazos
$n = 20000$: Número de iteraciones
$\varepsilon \in \{0, 0{,}01, 0{,}10\}$: Probabilidad de exploración
$\sigma \in \{0, 1, 10\}$: Desvío estándar de las recompensas

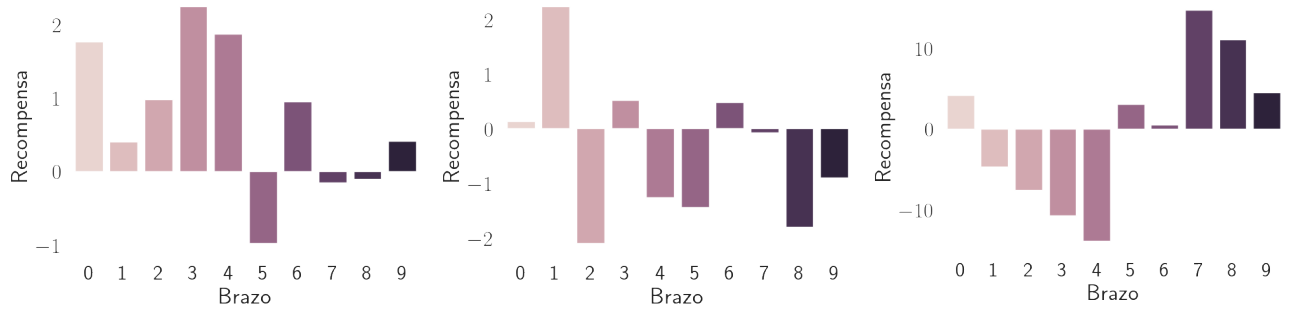
Se inicializó la recompensa media de cada brazo tal que se distribuya normalmente $\mu_i \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$.

$$\mu_k = [\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}] \quad \text{con} \quad \mu_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \forall \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$$

Teniendo en cuenta las recompensas medias μ_k y los desvíos estándar σ, se calcularon las recompensas para cada brazo R_k:

$$R_k \sim \mathcal{N}(\mu_k,\, \sigma^2) \quad \forall i, \sigma$$

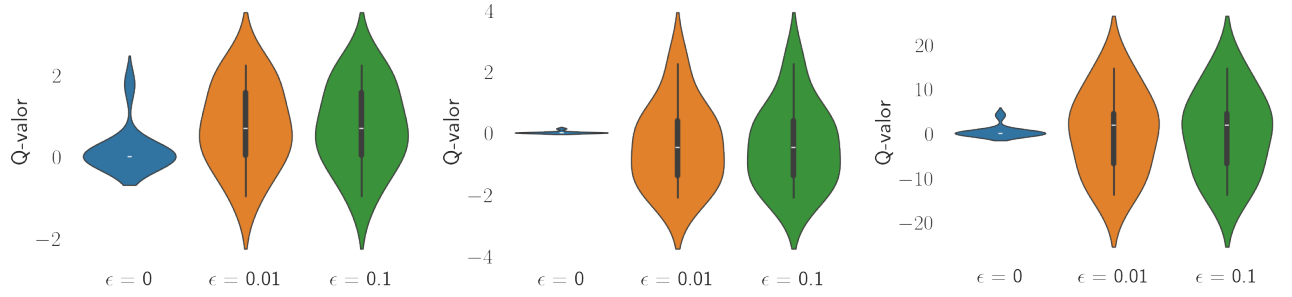
Las recompensas para cada caso se muestran en la Figura 1.



(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 1: Recompensa para cada brazo

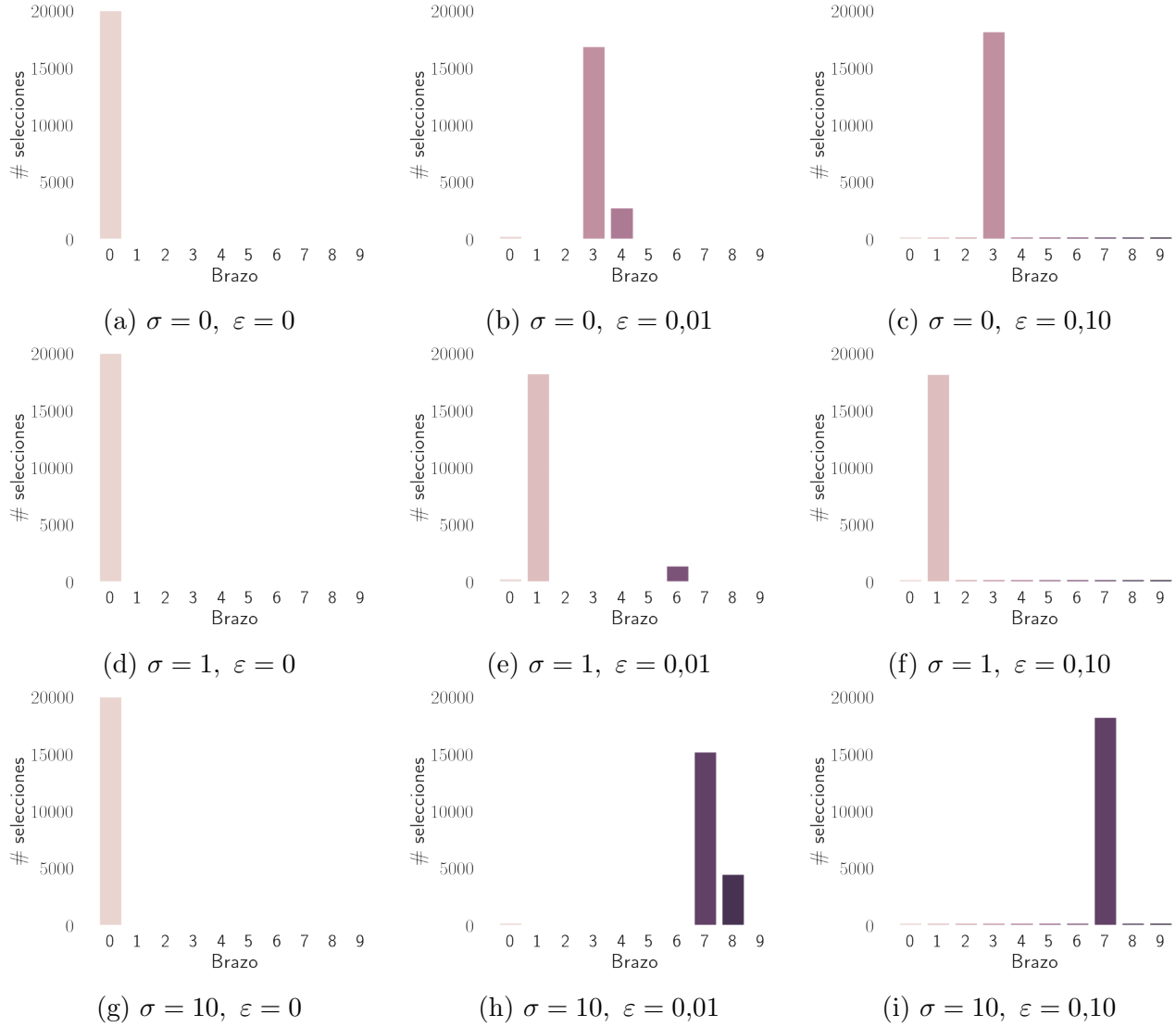
Se aplicó el algoritmo $\varepsilon - greedy$ con distintas combinaciones de ε y σ. Los resultados de los Q-*valor* de las acciones se muestran en la Figura 2.



(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 2: Q-*Valor* de las acciones

Por otro lado, para $\varepsilon = 0{,}01$ y $\varepsilon = 0{,}10$, el algoritmo explora y actualiza los valores de las acciones, lo que permite obtener recompensas mayores.
La Figura 3 muestra el número de veces que se seleccionó cada brazo para los distintos valores de ε y σ.



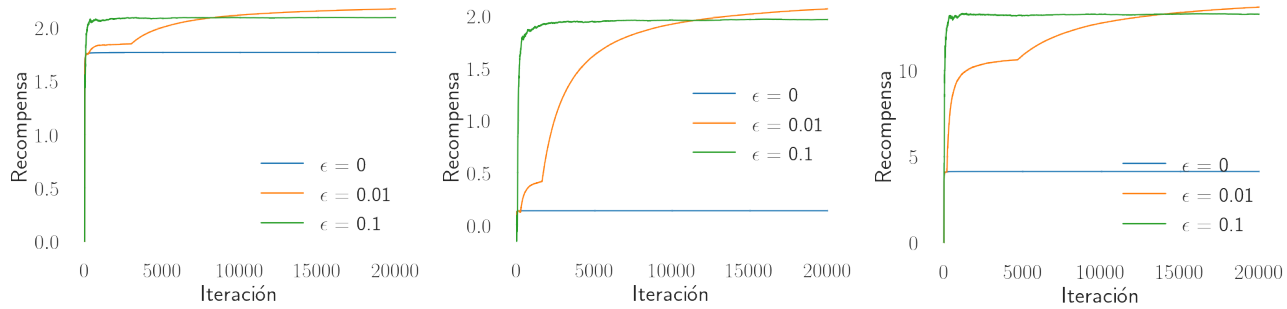
(a) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0$ (b) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0{,}01$ (c) $\sigma = 0,\ \varepsilon = 0{,}10$

(d) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0$ (e) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0{,}01$ (f) $\sigma = 1,\ \varepsilon = 0{,}10$

(g) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0$ (h) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0{,}01$ (i) $\sigma = 10,\ \varepsilon = 0{,}10$

Figura 3: Número de veces que se seleccionó cada brazo

Finalmente, se analizó la recompensa promedio obtenida en función del número de iteraciones para los distintos valores de ε y σ. Los resultados se muestran en la Figura 4.



(a) $\sigma = 0$ (b) $\sigma = 1$ (c) $\sigma = 10$

Figura 4: Recompensa promedio obtenida

Conclusiones

Ejercicio 6

Dada la fórmula adaptativa del valor $Q_{n+1} = Q_n + \alpha\left[R_n - Q_n\right]$ con $\alpha \in (0, 1]$, demostrar que

- $Q_{n+1} = (1-\alpha)^n Q_n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} R_i$
- $(1-\alpha)^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} = 1$, es decir, Q_{n+1} es un promedio pesado de $Q_n, R_1, R_2, \ldots, R_n$.

Solución

Sea,
Q_n: Valor estimado de la acción después de haber sido seleccionada $n-1$ veces
R_i: Recompensa obtenida después de la i-ésima selección de la acción
n: Número de veces que la acción ha sido seleccionada
$\alpha \in (0, 1]$: *step-size* constante
Q_{n+1}: Valor estimado de la acción después de haber sido seleccionada n veces

Primera parte

La fórmula adaptativa para calcular el valor Q_{n+1} se puede expresar como

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= Q_n + \alpha\left[R_n - Q_n\right] \\ &= Q_n + (1-\alpha)\, Q_n + \alpha R_n \end{aligned}$$

Si $n = 1$,

$$Q_2 = (1-\alpha)\, Q_1 + \alpha R_1$$

Si $n = 2$,

$$Q_3 = (1-\alpha)\, Q_2 + \alpha R_2$$

Lo que coincide con la fórmula en cuestión,

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= (1-\alpha)^1 Q_1 + \sum_{i=1}^{1} \alpha(1-\alpha)^{1-i} R_i \\
Q_2 &= (1-\alpha) Q_1 + \alpha R_1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
Q_3 &= (1-\alpha)^2 Q_2 + \sum_{i=1}^{2} \alpha(1-\alpha)^{2-i} R_i \\
Q_3 &= (1-\alpha)^2 Q_2 + \alpha(1-\alpha) R_1 + \alpha R_2
\end{aligned}
$$

Si se generaliza para n, se tiene que

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1} &= (1-\alpha)^n Q_n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} R_i \\
&= (1-\alpha)^n Q_n + \alpha(1-\alpha)^{n-1} R_1 + \alpha(1-\alpha)^{n-2} R_2 + \ldots + \alpha R_n
\end{aligned}
$$

Segunda parte
Se desea demostrar que $(1-\alpha)^n + \sum_{i=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{n-i} = 1$. La expresión se puede reescribir como

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha \, (1-\alpha)^{n-i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha)^{n-i}$$

Se sustituye $j = n - i$, tal que cuando $i = 1$, $j = n - 1$ y cuando $i = n$, $j = 0$.

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j$$

El último término de la expresión anterior es la suma de una serie geométrica, la cual se puede expresar como

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-\alpha)^j = \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha}$$

Al sustituir $(1-\alpha)^n + \alpha \left(\frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \right)$ en la expresión original, se obtiene

$$(1-\alpha)^n + \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} = 1$$

Esto implica que Q_{n+1} es un promedio pesado de los valores $Q_n, R_1, R_2, \ldots, R_n$, donde los pesos están determinados por los términos de la serie geométrica.

Ejercicio 7

Demostrar que fórmula adaptativa para calcular el valor $Q_{n+1} = Q_n + \alpha \left[R_n - Q_n \right]$ con *step-size* $\alpha \in (0, 1]$ constante no verifica las hipótesis del teorema de convergencia y, por lo tanto, no está garantizada su convergencia.

Solución

La fórmula adaptativa para calcular el valor Q_{n+1} se puede expresar como

$$Q_{n+1} = (1-\alpha) Q_n + \alpha R_n$$

Es decir, el valor de Q_{n+1} es una combinación lineal de los valores anteriores Q_n y la recompensa R_n.
Análisis de convergencia
Para que la secuencia Q_n converja se deben cumplir las condiciones:

- **Condición de convergencia**: El *step-size* α debe decrecer a lo largo del tiempo, es decir, $\alpha_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- **Acotamiento**: La secuencia Q_n debe estar acotada, es decir, Q_n debe estar acotada para todo n.

El caso en cuestión plantea que α es constante, es decir, $\alpha_n = \alpha,\ \forall n$. Por lo tanto, el término $R_n - Q_n$ no se reduce a lo largo del tiempo, lo que impide que la secuencia Q_n converja, o bien, su valor presente oscilaciones.
En conclusión, teniendo en cuenta los teoremas sobre convergencia de sucesiones:

- Si el término general no tiende a cero, la secuencia Q_n no converge.
- El caso en cuestión, con $\alpha \in (0, 1]$, es contante y no decrece.

Por lo tanto, no se garantiza la convergencia de la secuencia Q_n.

Ejercicio 8
En la *Figura 2.3* del libro *Sutton&Barto (2018)*, se observa un *spike* en el paso número 11 cuando se utiliza inicialización optimista. De una explicación de este fenómeno.

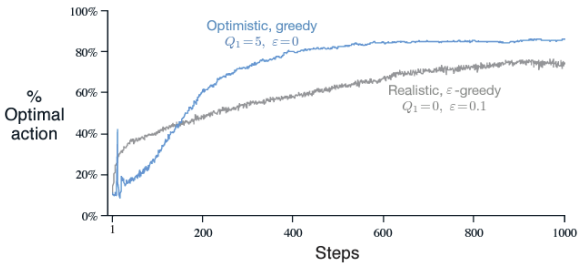


Figure 2.3: The effect of optimistic initial action-value estimates on the 10-armed testbed. Both methods used a constant step-size parameter, $\alpha = 0.1$.

Figura 5: Figura 2.3 - Sutton&Barto (2018)

Solución
Sea,
Inicialización optimista: Al inicio de cada episodio, se inicializan los valores de las acciones con un valor alto, por lo que el agente tenderá a probar todas las acciones. Esta inicialización fomenta/induce a la exploración.
Inicialización realista: Los valores de las acciones se inicializan con un valor realista, como si no se tuviera información previa sobre las recompensas esperadas. Esta inicialización fomenta/induce a la explotación.

El spike en cuestión se debe a la inicialización optimista de los valores de las acciones. Al corresponder a valores altos, el agente tenderá a probar todas las acciones, lo que puede llevar a obtener recompensas altas en los primeros pasos. En otras palabras, el agente lleva a cabo una búsqueda más agresiva al inicio del episodio.

Ejercicio 9

Demuestre que la función *SOFTMAX*: $p(a) = \frac{e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}}$, define una distribución de probabilidades discreta válida.

Solución

Para demostrar que la función SOFTMAX define una distribución de probabilidades discreta válida, se deben cumplir las siguientes condiciones:

No negatividad

La probabilidad de cada acción debe ser no negativa, es decir, $p(a) \geq 0$. Es decir,

$$p(a) = \frac{e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} \geq 0, \quad \forall a$$

Notar que,

- **Numerador**: $e^{H(a)} \geq 0$, ya que $e^x > 0$ para todo x.
- **Denominador**: $\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')} > 0$, ya que es la suma de los valores exponenciales de las acciones.
- **División**: La división de dos valores positivos es positiva.

Por lo tanto, la probabilidad de cada acción es no negativa, es decir, $p(a) \geq 0$.

Suma unitaria

La suma de las probabilidades de todas las acciones debe ser igual a uno, es decir, $\sum_{a=1}^{K} p(a) = 1$.
Para tal efecto se demuestra que la suma de las probabilidades de todas las acciones es igual a uno.

$$\sum_{a=1}^{K} p(a) = 1$$

O bien,

$$\sum_{a=1}^{K} \frac{e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} = 1$$

El cociente puede expresarse como,

$$\frac{1}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} \sum_{a=1}^{K} e^{H(a)} = 1$$

La suma de los valores exponenciales de las acciones es igual a la suma de los valores exponenciales de las acciones, lo que implica que la suma de las probabilidades de todas las acciones es igual a uno. En otras palabras, la suma en el numerador es igual a la suma en el denominador.

$$\frac{\sum_{a=1}^{K} e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} = 1$$

$$\sum_{a=1}^{K} p(a) = \frac{\sum_{a=1}^{K} e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} = 1$$

$$\sum_{a=1}^{K} p(a) = 1$$

Se concluye que la función *SOFTMAX* define una distribución de probabilidades discreta válida.

Ejercicio 10

Demostrar que las derivadas de la función SOFTMAX $p(x)$ respecto de sus parámetros $H(a)$, $a = 1, 2, \ldots, K$, son iguales a:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial H(a)} = \begin{cases} p(x)(1 - p(x)) & \text{si } x = a \\ -p(x)p(a) & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Solución

Se calcula la derivada cuando $a = b$

$$\frac{\partial p(a)}{\partial H(a)} = \frac{\partial}{\partial H(a)} \left(\frac{e^{H(a)}}{\sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}} \right)$$

Se sustituyó $Z = \sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')}$ previamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(a)}{\partial H(a)} &= \frac{\partial}{\partial H(a)} \left(\frac{e^{H(a)}}{Z} \right) \\ &= \frac{Z \cdot e^{H(a)} - e^{H(a)} \cdot \frac{\partial Z}{\partial H(a)}}{Z^2} \end{aligned}$$

Se calcula la derivada de Z respecto de $H(a)$, es decir, $\frac{\partial Z}{\partial H(a)}$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{a'=1}^{K} e^{H(a')} \\ \frac{\partial Z}{\partial H(a)} &= e^{H(a)} \end{aligned}$$

Se sustituye en la expresión anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(a)}{\partial H(a)} &= \frac{Z \cdot e^{H(a)} - e^{H(a)} \cdot e^{H(a)}}{Z^2} \\ &= \frac{Z \cdot e^{H(a)} - e^{2H(a)}}{Z^2} \\ &= \frac{e^{H(a)}(Z - e^{H(a)})}{Z^2} \end{aligned}$$

Además, $p(a) = \frac{e^{H(a)}}{Z}$, por lo que

$$\begin{aligned} Z &= p(a) + \sum_{b \neq a} e^{H(b)} \\ &= p(a) + (1 - p(a))Z \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Z - e^{H(a)} = (1 - p(a))Z = (1 - p(x))Z$$

Finalmente,

$$\frac{\partial p(a)}{\partial H(a)} = p(x)(1 - p(x))$$

Se calcula la derivada cuando $a \neq b$. Sea,

$$p(b) = \frac{e^{H(b)}}{Z}$$

Se calcula la derivada de $p(b)$ respecto de $H(a)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(b)}{\partial H(a)} &= 0 - 0 + (-1) \cdot Z^{-2} \cdot e^{H(b)} \cdot e^{H(a)} \\ &= -p(b)p(x)\end{aligned}$$

Se concluye que las derivadas de la función SOFTMAX $p(x)$ respecto de sus parámetros $H(a)$, $a = 1, 2, \ldots, K$, son iguales a:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial H(a)} = \begin{cases} p(x)(1 - p(x)) & \text{si } x = a \\ -p(x)p(a) & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Ejercicio 11

Demostrar que la regla de actualización por gradiente ascendente estocástico:

$$H_{t+1}(a) = H_t(a) + \alpha \frac{\partial E[R_t]}{\partial H_t(a)},$$

con $E[R_t] = \sum_{x=1}^{K} p_t(x) q_*(x)$, puede escribirse de la siguiente manera:

$$H_{t+1}(a) = \begin{cases} H_t(a) + \alpha(R_t - C)(1 - p_t(a)) & \text{si } a = A_t \\ H_t(a) - \alpha(R_t - C)p_t(a) & \text{si } a \neq A_t \end{cases}$$

Solución

Se calcula la derivada de $E[R_t]$ respecto de $H_t(a)$,

$$\frac{\partial E[R_t]}{\partial H_t(a)} = \sum_{x=1}^{K} q_*(x) \frac{\partial p_t(x)}{\partial H_t(a)}$$

Además, $p_t(x) = \frac{e^{H_t(x)}}{\sum_{x'=1}^{K} e^{H_t(x')}}$, por lo que si $x = a$,

$$\frac{\partial p_t(x)}{\partial H_t(a)} = p_t(x)(1 - p_t(x))$$

Si $x \neq a$,

$$\frac{\partial p_t(x)}{\partial H_t(a)} = -p_t(x)p_t(a)$$

Por lo tanto, si $a = A_t$ la derivada de $E[R_t]$ respecto de $H_t(a)$ es

$$\begin{aligned}\frac{\partial E[R_t]}{\partial H_t(a)} &= q_*(a)p_t(a)(1-p_t(a)) + \sum_{x\neq a} q_*(x)(-p_t(b)p_t(a)) \\ &= p(a)\left(q_*(a)(1-p_t(a)) - \sum_{x\neq a} q_*(x)p_t(a)\right)\end{aligned}$$

El término entre paréntesis es igual a $R_t - C$, siendo C el costo esperado,

$$C = E[R_t] = \sum_{x=1}^{K} p_t(x)q_*(x)$$

Al sustituir en la expresión anterior, se obtiene

$$\frac{\partial E[R_t]}{\partial H_t(a)} = p(a)(R_t - C)$$

Lo anterior es válido para $R = q_*(A)$, es decir, la recompensa esperada es igual a la recompensa óptima. Por lo tanto, tras remplazar en la regla de actualización por gradiente ascendente estocástico, se obtiene

$$H_{t+1}(a) = \begin{cases} H_t(a) + \alpha(R_t - C)(1 - p_t(a)) & \text{si } a = A_t \\ H_t(a) - \alpha(R_t - C)p_t(a) & \text{si } a \neq A_t \end{cases}$$