Entrega Clase 1 - Álgebra lineal

Alejandro Uribe

Octubre 2022

Enunciado

Determinar los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ (k+2)x+ky-z=0 \\ -x+y-2z=-1 \end{cases}$$

Desarrollo

A partir del sistema se construyó la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k+2 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Y se llevó a cabo eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k+2 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-2*f_1\to f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k-2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_1\to f_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & k-2 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} k & k-2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_3\to f_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{k*f_2\to f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -4 & -2 \\ k & k & k & k \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-f_1\to f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -4 & -2 \\ 0 & 0 & k+4 & k+2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} k & k & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+4 & k+2 \end{array}\right)$$

La anterior es una matriz escalonada a la que le corresponde el sistema:

$$\begin{cases} kx+ky-4z=-2 \\ 2y-z=0 \\ z=\frac{k+2}{k+4} \end{cases}$$

Se remplazó la variable z y se simplificó el sistema:

$$\begin{cases} kx+ky-4z=-2 \\ 2y-z=0 \\ z=\frac{k+2}{k+4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kx=-2-ky+4z \\ y=\frac{z}{2} \\ z=\frac{k+2}{k+4} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} kx = -2 - k\frac{k+2}{2(k+4)} + 4\frac{k+2}{k+4} \\ y = \frac{k+2}{2(k+4)} \\ z = \frac{k+2}{k+4} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{2-k}{2(k+4)} \\ y = \frac{k+2}{2(k+4)} \\ z = \frac{k+2}{k+4} \end{cases}$$

Sistema incompatible

En este caso el sistema no tiene solución. Notar que el denominador común en todas las variables es $k+4 = 0$. Dicho denominador debe ser tal que $k+4 \neq 0$, ya que en otro caso existiría una indeterminación, es decir, $k = -4$. Por lo tanto, el sistema en cuestión no tiene solución si $k = -4$.

Sistema compatible determinado

Este caso implica que el sistema tiene solución única, es decir, si después de escalonar la matriz ampliada de un sistema de n incógnitas se obtuvieron exactamente n ecuaciones no nulas. Ahora bien, el sistema en cuestión cumple dicha condición si se cumple la igualdad:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (k+2)x + ky - z = 0 \\ -x + y - 2z = -1 \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} x = \frac{2-k}{2(k+4)} \\ y = \frac{k+2}{2(k+4)} \\ z = \frac{k+2}{k+4} \end{cases}$$

Del ejercicio anterior se concluyó que existe una indeterminación si $k = -4$. Por lo tanto, el sistema en cuestión tiene solución única si $k \neq -4$. Sea S el conjunto de soluciones tal que:

$$S = \left\{ (x, y, z, k) \in \left\{ (\frac{2-k}{2(k+4)}, \frac{k+2}{2(k+4)}, \frac{k+2}{k+4}, k) \right\} : k \in \mathbb{R} - \{-4\} \right\}$$

Sistema compatible indeterminado

Este caso implica que el sistema tiene infinitas soluciones. Es decir, si al escalonar la matriz ampliada se obtuvo menos de n filas no nulas en las primeras n columnas, y el resto de las filas son nulas en todas las columnas.

Para el sistema en cuestión, cumpliría este caso si se encuentra un k que haga que los términos $(k+2)$ y $(k+4)$ sean ambos igual a cero. Es decir:

$$z(k+4) = (k+2)$$

$$z(0) = (0)$$

No obstante, no existe dicho k. Por lo tanto, se concluye que no existe un valor de k para que el sistema en cuestión sea *compatible indeterminado*. Hecho que se puede comprobar gráficamente, siendo $k+4$ y $k+2$ dos líneas paralelas.