Álgebra Lineal - Verano 2021

Cuestionario 2 - Espacios vectoriales

En todos los ejercicios, puede realizar los cálculos a mano o utilizando **R**.

1. Sean $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 2)$, $v_3 = (-13, -1, 2)$ y $v_4 = (1, 1, 0)$.
   (a) Mostrar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente dependiente y encontrar una relación lineal entre ellos.
   (b) Mostrar que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_4\}$ es un conjunto linealmente independiente y por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:
   (a) $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 3, 1)\rangle \subset \mathbb{R}^3$.
   (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, \ \ 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, \ \ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por
$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 3x_2, 2x_3 - 7x_4)$$
   (a) Escribir la matriz asociada a la transformación dada por T.
   (b) Si $\mathrm{Nu}(T) \subset \mathbb{R}^k$ y $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^m$, hallar k y m.
   (c) Hallar generadores de los subespacios $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
   (d) Calcular las dimensiones de ambos subespacios y verificar el Teorema de la Dimensión.

4. Dados $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2, 0)$, $w = (2, 1, 0, 1)$, $P = (1, -2, 0, 3)$ y $Q = (2, 1, 1, 1)$,
   (a) hallar $\|P\|$.
   (b) hallar el ángulo que forman P y Q.
   (c) verificar que el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente y hallar por Gram-Schmidt una base ortonormal de $V = \langle u, v, w\rangle$.
   (d) completar la base hallada en el ítem anterior a una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.
   (e) escribir al vector P como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y verificar el resultado obtenido.

Para entregar. Dados $u = (2, 2, 1)$ y $v = (2, 1, 3)$.

(a) hallar $\|u\|$ y $\|v\|$.

(b) hallar el ángulo que forman u y v.

(c) hallar la proyección de $w = (1, 1, 1)$ sobre las recta $\langle u\rangle$.

(d) verificar que el conjunto de vectores $\{u, v\}$ es linealmente independiente y hallar por Gram-Schmidt una base ortonormal de $V = \langle u, v\rangle$.

(e) completar la base hallada en el ítem anterior a una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(f) escribir al vector $(1, 0, 0)$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y verificar el resultado obtenido.