Álgebra Lineal

Práctica 4 - Diagonalización

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Determinar si cada una de las matrices A del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

3. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no es diagonalizable cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con tal que $b \neq 0$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $v = (1, 2, 0)$, $w = (2, 6, 0)$ y $u = (-2, -2, -1)$ son autovectores de A.

   a) Probar que A es diagonalizable.

   b) Calcular los autovalores de A y determinar los valores de r, s y t.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

   b) Calcular A^{10}.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

   a) Probar que A es diagonalizable y hallar una matriz inversible C que diagonalice a A.

   b) Calcular $A^6 v$ utilizando la diagonalización de A.

   c) Escribir al vector v como combinación lineal de una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de A.

   d) Calcular nuevamente $A^6 v$ sin utilizar la diagonalización de A.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y sea $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$.

   a) Hallar los autovalores de A y los autovectores asociados.
   b) Probar que A **no** es diagonalizable.
   c) Escribir al vector v como combinación lineal de autovectores de A.
   d) Calcular $A^{63}v$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   a) Hallar todos los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lambda = 3$ es autovalor de A.
   b) Para cada b hallado, dar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.

9. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es diagonalizable.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

    a) Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A **no** es diagonalizable.
    b) Para cada a hallado, dar todos los $b \in \mathbb{R}$ tales que $(0, b^2+1, 2)$ es autovector de A.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Hallar los autovalores y autovectores de A, A^3 y A^9.

12. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con autovalores $\{0, 1, 5\}$.

    a) Determinar si A es inversible y/o diagonalizable.
    b) Calcular los autovalores de $B = (3A - 4I)^3$ y $C = 5A^t + 4I$.
    c) Probar que $H = A + I$ es inversible y calcular los autovalores de H^{-1}, $\det(H^{-1})$ y $\mathrm{tr}(H^{-1})$.
    d) Hallar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales $\alpha A + 3I$ no es inversible.

13. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\{1, 2, 3\}$ son las raíces de χ_A. Sea $B = 5A^2 + 3A - 2I$. Calcular $\det(B)$ y $\mathrm{tr}(B)$.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A, $\mathrm{tr}(A) = 2$ y $\det(A) = -2$.

    a) Hallar **todos** los autovalores de A.
    b) Decidir si A^t es o no diagonalizable.

15. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$, $\mathrm{rg}(A + 2I) = 2$ y $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$.

    a) Calcular los autovalores de A.
    b) Decidir si A es inversible y/o diagonalizable.

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz inversible tal que $\mathrm{tr}(A) = -2$, $\mathrm{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$ y $\chi_A(1) = -8$. Probar que A es diagonalizable.

17. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que $N(A + I) \neq \{0\}$, $\mathrm{rg}(A - 2I) \leq 2$ y $\chi_A(1) = -4$. Decidir si A es diagonalizable y calcular $A^3 - 4A^2 + A + 6I$.

18. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Para un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se define recursivamente $x^{(n)} = Ax^{(n-1)}$, $n \geq 1$. Probar que para todo $x^{(0)}$ se cumple $x^{(n)} \to 0$ (es decir, $x_i^{(n)} \to 0$, $1 \leq i \leq 3$).

Procesos de Markov

19. Determinar cuáles de las siguientes matrices son de Markov.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0.\hat{3} \\ 1 & 0 & 0{,}1\hat{6} \\ 0 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

20. Se tiene un proceso de Markov cuya matriz de transición es

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/10 \\ 2/5 & 7/10 \end{pmatrix},$$

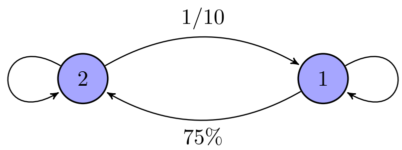
verificar que el vector $\boldsymbol{\pi} = (3/7\ 4/7)^T$ es un estado de equilibrio del proceso.

21. Sea $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/4 \\ 1/3 & 3/4 \end{pmatrix}$ la matriz de transición de un proceso de Markov y sea $\boldsymbol{\pi}^2 = (7/18, 11/18)^T$ el segundo estado, verificar que P es inversible y calcular $\boldsymbol{\pi}^1$ y $\boldsymbol{\pi}^0$.

22. Probar que si P y Q son matrices de Markov, entonces

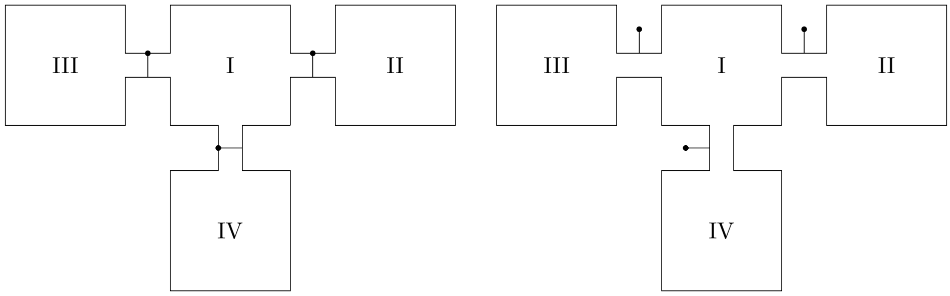
    a) $(1-\theta)\mathrm{P} + \theta\mathrm{Q}$ es una matriz de Markov para cualquier $\theta \in [0, 1]$.
    b) P.Q es una matriz de Markov.
    c) $\mathrm{P}^n.\mathrm{Q}^m$ es de Markov, cualquiera sean $n, m \in \mathbb{N}$.

23. La población en estudio está distribuida en un territorio dividido en dos sectores. Esta población es constante y se desplaza. En el momento inicial, exactamente la mitad de la población está en cada sector. Al día siguiente se observa que el 75 % de la población del Sector 1 se ha desplazado al Sector 2, mientras que 1 de cada 10 individuos que estaban en el Sector 2 pasó al Sector 1. Esta pauta de desplazamiento se mantiene.



    a) Determinar la matriz de transición y el estado inicial.
    b) Calcular los 5 primeros estados del proceso de Markov.
    c) Verificar que el vector $\boldsymbol{\pi} = (2/17\ 15/17)^T$ es estado de equilibrio.
    d) Para el estado inicial dado, determinar (si existe) el estado límite del proceso.
    e) Simular el comportamiento del sistema durante 100 días con una población total de 100 individuos.

24. En el instante inicial 20 ratones se encuentran en el compartimiento I (ver Figura 1). Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante un breve lapso, donde los ratones pueden pasar a un comportamiento adyacente o permancer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.



(a) Laberinto cerrado.   (b) Laberinto abierto.

Figura 1: El laberinto se abre unos pocos segundos cada hora.

a) Determinar la matriz de transición del proceso.

b) Determinar el vector de estado después de 4 horas. ¿Cuántos ratones hay en cada compartimiento?

c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

d) Para el vector inicial dado, determinar (si existe) el límite del proceso.

25. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

b) Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

c) Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).