Álgebra Lineal

Clase 4 - Diagonalización, procesos de Markov

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Determinar si cada una de las matrices es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de A y una matriz inversible C que diagonalice a A (es decir, tal que $C^{-1} \cdot A \cdot C$ sea diagonal).

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\lambda = 1$ es autovalor de A y $(1, 1, 1) \in \mathrm{Nu}(I - A)$.

   a) Determinar a, b y c y hallar todos los autovalores de A.
   b) ¿Es A diagonalizable?
   c) Calcular A^{100} y A^{201}.

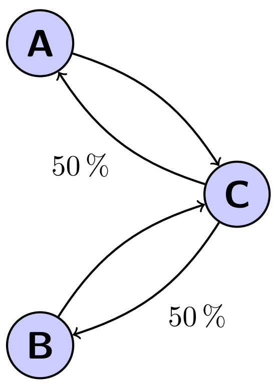
3. Sea $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & a + \frac{1}{10} & b + \frac{1}{10} \\ b & a & 2a \\ b & b + \frac{1}{10} & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$$

   a) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales M resulta ser una matriz de Markov.
   b) Para los valores de a y b hallados, calcular los estados de equilibrio.
   c) Para el estado inicial $v^{(0)} = (0{,}5, 0{,}2, 0{,}3)$, calcular, si existe, el estado límite.
   d) Para los valores a y b hallados, verificar que la matriz transpuesta M^T es también una matriz de Markov. ¿Es casualidad o una ley general?

4. Un proceso de Markov admite 3 sectores: A, B, C. Al cabo de un período el 50 % de los individuos del sector C pasan al A y el otro 50 % al B. Además, todos los de A pasan a C y todos los de B pasan a C.

   a) Construir la matriz de transición P que describe el proceso.
   b) Si el estado actual está dado por $\boldsymbol{\pi}^0 = (0{,}5; 0{,}25; 0{,}25)$, determinar los estados siguientes $\boldsymbol{\pi}^1$, $\boldsymbol{\pi}^2$ y $\boldsymbol{\pi}^3$.
   c) Decidir si existe un estado límite para cualquier estado inicial.



Para entregar.
La población en estudio es constante y está distribuida en un territorio dividido en tres sectores A, B y C. Día a día se observan desplazamientos entre los sectores, siguiendo la siguiente regla:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

donde (a_k, b_k, c_k) representa la cantidad de individuos en cada sector luego de k días.
Si inicialmente hay 500 individuos en A, 1000 en B y 2500 en C, es decir $v_0 = (a_0, b_0, c_0) = (500, 1000, 2500)$,

(a) ¿cuántos individuos habrá en cada sector luego de 1 día? ¿Y luego de 2 días?

(b) ¿cuántos individuos habrá en cada sector luego de 50 días?

(c) hallar (si existe) $\lim_{k\to\infty}(a_k, b_k, c_k)$, el límite de la cantidad de individuos en cada sector.