Álgebra Lineal

Práctica 1 - Sistemas de ecuaciones lineales - Vectores y matrices

1. Considerar el sistema lineal

$$S : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - 3z & = & 7 \\ 3x + 2z & = & 8 \\ x + y - 3z & = & 5 \end{array} \right. .$$

   (a) Resolver haciendo uso de la "matriz ampliada" y reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal equivalente resultante.

   (b) Sin hacer más cuentas, ¿cuáles son todas las soluciones del sistema lineal homogéneo asociado?

$$S_0 : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 2y - 3z & = & 0 \\ 3x + 2z & = & 0 \\ x + y - 3z & = & 0 \end{array} \right. .$$

2. Clasificar cada uno de los siguientes sistemas lineales. Cuando el sistema sea compatible determinado, obtener la solución. Cuando el sistema sea compatible indeterminado, describir el conjunto de todas las soluciones. Si es incompatible, no hacer nada. En cada caso, describir además el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo asociado.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 5y & = 2 \\ -2x + 4y & = 6 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y + z & = 3 \\ x - 2y + z & = 3 \\ 2x + y - z & = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y - z + 2t & = 0 \\ x + y + z + 2t & = 1 \\ -x + y - 5z - 2t & = -3 \end{array} \right.$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{ll} x - 2y & = 0 \\ 2x + y & = 0 \\ x + 3y & = 1 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{rl} 2x + y - z & = 8 \\ x - y + z & = 1 \\ 5x + y - z & = 17 \end{array} \right.$$

3. Construir:

   (a) Dos sistemas lineales distintos de tres ecuaciones con tres incógnitas tales que $(-1, 2, -5)$ sea la única solución de cada sistema.

   (b) Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas de manera tal que tenga infinitas soluciones y $(-1, 2, -5)$ sea una de ellas.

4. Agregar una ecuación al sistema lineal $S : \left\{ \begin{array}{rl} 3x - y + z & = 1 \\ 4x + 2y - 2z & = 0 \end{array} \right.$ de manera que resulte:

   (a) compatible determinado.

   (b) compatible indeterminado.

   (c) incompatible.

5. Analizar cada uno de los siguientes sistemas determinando, en cada caso, los valores de k (si existen) que hacen que el sistema resulte compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rl} (k^2 - 9)x + y + kz & = 0 \\ (k-1)y + z & = 0 \\ (k+2)z & = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z & = k \\ x + ky + z & = 1 \\ kz & = 2 \end{array} \right.$$

6. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(3,0)$ resolviendo un sistema de ecuaciones lineales apropiado.

7. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

   i) $\{(1,0,1,2)\,, (1,-1,0,-1)\,, (-1,3,2,7)\}$ en $\mathbb{R}^4$.

   ii) $\{(1,3,3)\,, (0,2,1), (0,1,2)\}\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

8. Dados los vectores $u = (0,1,2,3)$, $v = (1,2,-3)$ y $w = (-1,1,0)$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, calcular cuando sea posible las siguientes operaciones.

   (a) $3u$
   (b) $v + w$
   (c) $u + v + w$
   (d) $2v - \frac{3}{2}w$
   (e) $A + 2B$
   (f) $B \cdot A$
   (g) $A \cdot B - B \cdot A$
   (h) $A \cdot C$
   (i) $C \cdot A$
   (j) $C \cdot v$
   (k) $v \cdot C$
   (l) $B(Cv) - (BC)v$

9. Dadas las matrices

$$A = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   (a) calcular el rango fila de cada matriz, llevando la matriz a forma escalonada.
   (b) repetir para las respectivas matrices transpuestas.
   (c) sin calcular el producto, ¿cuál es el rango de $B \cdot E$? Verificar realizando el producto.
   (d) ¿cuál es el rango de $D \cdot A$?

10. Reescribir los sistema de ecuaciones del ejercicio **??** como producto de matrices (notación matricial).

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

   (a) ¿cuál es la tercera fila de AC?
   (b) ¿cuál es la segunda columna de CA?
   (c) ¿cuál es la primera columna de AC?

12. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

   (a) verificar que son inversibles y calcular:

i. A^{-1}, B^{-1} y C^{-1}.

ii. $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(b) resolver el sistema $Cx = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ utilizando la inversa calculada.

13. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^T, C^T, $(AC)^T$ y $C^T A^T$.