0.1. Variables aleatorias

En primer lugar, vamos a definir una función que transforma cada elemento de mi espacio muestral en un número, porque una vez que transformemos todo a números vamos a poder realizar muchísimas operaciones que de otra manera no podríamos realizar.

Idea: Dado un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral asociado a él, una función X que asigna a cada uno de los elementos $\omega \in \Omega$ un número real $X(\omega)$ se llama variable aleatoria.

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función, diremos que X es una variable aleatoria si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
(donde B será un evento)

Proposición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y X una V.A., entonces $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (porque lo dice la definición) Luego, se le puede calcular la probabilidad, es decir $\mathbf{P}(X^{-1}(B)) = \mathbf{P}(X \in B)$

Obs: $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$

Por lo tanto, una variable aleatoria es una función, que a cada elemento de Ω le asigna un número, de manera que ahora, los resultados de mi experimento aleatorio siempre sean números, y poder operar.

Así como nos encontrábamos con espacios muestrales diferentes, y a partir de ello buscábamos formas de medir probabilidad, también nos vamos a encontrar con variables aleatorias diferentes. Primero veamos una definición que sirve para medir probabilidad bajo cualquier escenario posible.

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y X una V.A., definimos su función de distribución acumulada como la función $F_X : \mathbf{R} \to [0, 1]$ dada por

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$$

Propiedades:

1. $F_X(x) \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F_X(x)$ es monótona no decreciente
3. $F_X(x)$ es continua a derecha
4. $lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

0.2. Variables aleatorias discretas

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y X una V.A., diremos que X es una V.A. discreta cuando existe $A \in \mathbb{R}$ finito o numerable tal que $p_X(A) = 1$

Interpretemos lo que quiere decir:

Una variable aleatoria discreta es aquella cuyos valores posibles constituyen un conjunto finito o infinito numerable.

Vamos a llamar **rango** de la variable aleatoria discreta X a $R_X = \{x \in \mathbb{R} : p_X(x) > 0\}$

Obs: R_X satisface que es el menor de los A

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta, se llama función de probabilidad de X a una función $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ tal que $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$ Con cada resultado posible x_i asociamos un número $p_X(x_i) = \mathbf{P}(X = x_i)$ que debe satisfacer:

1. $p_X(x_i) \geq 0 \forall i$
2. $\sum_{x \in R_X} p_X(x) = 1$

La función p se llama función de probabilidad de la variable aleatoria discreta X y se denomina $p_X(x)$

Ejemplo: Si X mide la cantidad de caras al tirar una moneda dos veces, ¿Cual es el rango de X?

$$R_X = \{0, 1, 2\}$$

Ahora podemos definir y graficar la función de probabilidad de X:

$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x), \forall x \in R_X$$

lo que debemos hacer es tomar elemento por elemento de R_X y calcular la probabilidad como aprendimos a hacerlo en la GUIA 1.

¿Que pasa ahora si quiero por ejemplo calcular la probabilidad de que salga ALGUNA cara? ¿Que significa en términos de mi variable aleatoria?

Podriamos decir que:

Teorema: Se a X una variable aleatoria discreta entonces:

$$p_X(B) = \sum_{x \in B} p_X(x)$$

Si la variable aleatoria es discreta, a demás se tiene que:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \textstyle\sum_{y \leq x} p_X(y)$$

Obs: Si X es una variable aleatoria discreta, la gráfica de F se formará de trazos horizontales (llamada función escalonada). F es continua excepto para los valores probables de X. En el valor x_i la gráfica tendrá un salto de magnitud $p_X(x_i)$

Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles x_j, entonces:

$$p_X(x_j) = \mathbf{P}(X = x_j) = F_X(x_j) - F_X(x_{j-1})$$

Ejemplo: De un conjunto de 7 Ingenieras y 4 matemáticas se eligen al azar 5 personas. Sea X el número de ingenieras elegidas.

1. Hallar la función de probabilidad de X y graficarla.
2. Hallar la función de distribución de X y graficarla.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté formado por al menos 3 ingenieras?

Cada vez que nos encontramos con una variable discreta, debemos estos 3 pasos: Definir la variable, definir el rango, y buscar la función de probabilidad.

0.3. Algunos modelos discretos

0.3.1. Distribución Bernoulli

Una variable aleatoria de **Bernoulli** es aquella cuyos únicos valores posibles son 0 y 1, y que le asigna $\mathbf{P}(X = 1) = p$ y $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$

Un caso particular de esta variable es la que llamamos
Función indicadora:

$$\mathbf{I}\{a < x < b\} = 1 \text{ si } a < x < b, \ 0 \text{ en otro caso}$$

0.3.2. Distribución Binomial, Pascal y Geométrica

Sea X una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro p, se repiten sucesivamente experimentos de Bernoulli de manera que dichos experimentos se realizan de forma independiente y siempre con la misma probabilidad p de éxito. Entonces tendremos $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d $Ber(p)$. Diremos que estamos frente a un proceso bernoulli,

Sea Y la variable que cuenta la cantidad de éxitos en n ensayos de Bernoulli, Y es una variable con distribución Binomial de parámetros n y p, y se denota $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$

Su rango será $R_Y = \{0, 1, 2 \ldots n\}$, y su función de probabilidad:

$$p_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}, y \in R_Y$$

Sea N la variable aleatoria que cuenta la cantidad de ensayos de Bernoulli hasta el primer éxito, N es una variable con distribución Geométrica de parámetro p, y se denota $N \sim \mathcal{G}(p)$.

Su rango será $R_N = \mathbb{N}$, y su función de probabilidad:

$$p_N(n) = p \cdot (1-p)^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Sea W la variable aleatoria que cuenta cantidad de ensayos de Bernoulli hasta el k-ésimo éxito, W es una variable con distribución Pascal de parámetros k y p, y la denotamos $W \sim Pas(k, p)$

Su rango será $R_W = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, y su función de probabilidad:

$$p_W(w) = \binom{w-1}{k-1} p^k \cdot (1-p)^{w-k}, w \in R_W$$

Ejemplos:

1. El diámetro de las arandelas (en mm.) producidas por una máquina es una variable aleatoria X, donde la probabilidad de que X sea inferior a 6.5 es 1/7. Si se revisan 100 arandelas, ¿cuál es la probabilidad de que más de una tenga un diámetro inferior a 6.5 mm.?

2. Chocolatines Jack lanza una colección de muñequitos con las figuras de los personajes de Kung Fu Panda: Panda, Tigre, Mono, Grulla y Mantis. Cada vez que Lucas compra un chocolatín es igualmente probable que obtenga alguno de los personajes. Sea N la cantidad de chocolatines que Lucas debe comprar hasta completar la colección, hallar $\mathbf{E}[N]$ y $\mathbf{var}[N]$. Interpretar los resultados.

Ahora, puede ocurrir que en un experimento similar al que venimos trabajando con el proceso de Bernoulli, no se cumplan alguna de las 3 condiciones para estar dentro del proceso, como por ejemplo

1. Hay más de dos clases (no hay dicotomía). Esto se trabajará cuando se vean vectores aleatorios.

2. La probabilidad de "éxito"no es la misma para cada repetición del experimento. Aquí aparecerán nuevas distribuciones

Distribuciones Hipergeométrica y Poisson: Se ven en clase.

0.4. Momentos

Buscaremos valores que representen a nuestras variables aleatorias. Es cierto que si tenemos la distribución de la variable, tenemos toda la información que necesitamos, pero por ahí puede resultar que sea mucha información, y lo que buscamos es entender el comportamiento de nuestra variable a partir de unos pocos valores constantes.

0.4.1. Esperanza de una variable aleatoria

Es el promedio ponderado de los valores que puede tomar una variable aleatoria. Podríamos pensarlo como el centro de masa de la variable.

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p_X(x)$, el valor esperado (o media) de X es:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x * p_X(x)$$

A veces, usamos como notación μ_X para referirnos a la esperanza de la variable aleatoria X.

Ejemplo: Hallar la esperanza de la cantidad de tiros necesarios de un dado equilibrado hasta observar por primera vez el 6.

Muchas veces vamos a querer calcular la esperanza de una función de una variable aleatoria

Propiedad: El valor de la esperanza de cualquier función $h(X)$ se calcula como:

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{x \in R_X} h(x) * p_X(x)$$

Propiedad de linealidad: $E(aX + b) = aE(X) + b$. Lo demostramos en clase

0.5. Varianza de una variable aleatoria

Mide la dispersión media de los valores de una variable aleatoria.

Sea X una V.A. y μ su valor esperado, la varianza de X se define como:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$$

Propiedad:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$$

El problema de la varianza, es que su valor no nos dice mucho, si estamos midiendo por ejemplo altura en metros, la varianza estaría expresando algo en metros al cuadrado, y eso no significa nada con respecto a la altura, no es un valor comparable con el resto. Por ese motivo se define el desvío estándar.

El desvío estándar se define como la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{\mathbf{var}(X)}$. Se expresa en las mismas unidades que la variable aleatoria.

Otras dos medidas de tendencia central que se usan mucho en la vida:

La **mediana** es el valor de X que acumula a izquierda (o derecha) una probabilidad igual a 0.5, o sea $F_X(x) = 0{,}5$.

La **moda** es el valor de la variable con valor de probabilidad máximo.