1. Variables Aleatorias Continuas

1. Para desarrollar en clase

   El diámetro (expresado en dm) del tronco de cierta especie de árboles es una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad:

   $$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{si } x \in (0, 10) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

   De manera resumida, utilizando la función indicadora del intervalo $(0, 10)$, $f_X(x)$ puede ser escrita como

   $$f_X(x) = kx\mathbf{I}\{0 < x < 10\}$$

   a) Hallar el valor de la constante k. Graficar $f_X(x)$.

   b) Hallar y graficar $F_X(x)$.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

   d) Si un árbol elegido al azar tiene un diámetro mayor a 5 dm. ¿Cuál es la probabilidad de que mida entre 4 y 6 dm? Comparar con la respuesta anterior.

   e) Sin hacer cuentas, calcular $E[X]$.

2. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

   $$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}75\,(1 - x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) Graficar $f_X(x)$

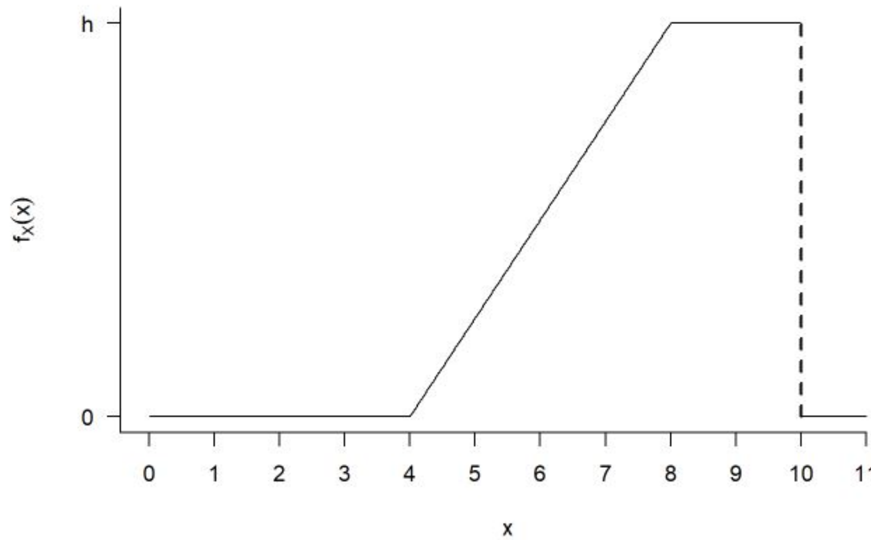
   b) Hallar y graficar $F_X(x)$.

   c) Calcular cada una de las siguientes probabilidades y representarlas sombreando áreas bajo la función de densidad.

   $$P\,(X > 0) \qquad P\,(-0{,}5 < X < 0{,}5) \qquad P\,(|X| > 0{,}25)$$

3. Se seleccionan al azar y de forma independiente 100 números sobre el intervalo $(-3, 2)$. Hallar la probabilidad de que exactamente 5 de los números seleccionados disten del 0 en menos de 0,1.

4. Autoevaluación. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$ dada por la siguiente figura.



a) Hallar el valor de h.

b) Sea $F_X(x)$ la función de distribución acumulada. Calcular $F_X(6)$.

c) Hallar el percentil $12,5$, es decir el valor de a tal que $P(X < a) = 0,125$.

5. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ax^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{5} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

Responder:

a) Determinar a.

b) Hallar la esperanza y varianza de X.

6. El tiempo, en minutos, que una persona debe esperar el colectivo de una cierta línea los días de semana por la mañana es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $[0, 15]$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona espere entre 5 y 10 minutos, sabiendo que esperó al menos 6 minutos?

b) Hallar el tiempo de espera superado con una probabilidad de 0,2.

7. Autoevaluación. Sea X una v.a. uniforme $U[0, 6]$ e $Y = 5 + X^2$.

a) Hallar la esperanza de Y.

b) Calcular $P(Y > 9)$.

8. Para desarrollar en clase

   La duración (en horas) de las lámparas almacenadas en un depósito es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro 0,01.

   a) Hallar y graficar la función de distribución de X.

   b) ¿Cuántas horas se espera que dure una lámpara?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara dure menos de 100 horas?

   d) Calcular $P(X > 150|X > 100)$.

   e) Si se eligen 5 de estas lámparas, siendo independientes los tiempos de duración de cada una, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellas duran más de 100 horas.

9. La biblioteca de una facultad dispone de una red de computadoras al alcance de los estudiantes. El tiempo (en minutos) que un estudiante destina a búsqueda bibliográfica es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro 0.1.

   a) Calcular la probabilidad de que un alumno destine más de 10 minutos a la búsqueda bibliográfica.

   b) Sabiendo que un alumno destinó esta semana más de 20 minutos a la búsqueda bibliográfica, calcular la probabilidad de que destine más de 30. Comparar con la probabilidad calculada en el ítem anterior.

   c) Hallar la función de distribución del tiempo que un estudiante destina a búsqueda bibliográfica.

10. Autoevaluación. El manual de un determinado producto establece que la vida útil T del producto, definida como el tiempo (en años) que el producto funciona correctamente hasta que se descompone, satisface $P(T \geq t) = e^{-\frac{t}{5}}$, para $t \geq 0$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que uno de tales productos se descomponga antes del año 3?.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que se descomponga antes del año 6 sabiendo que duró más de 3?

    c) Hallar la función de distribución acumulada. ¿Qué distribución tiene T? ¿De qué parámetro?.

11. Sea $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Usando R, resolver los siguientes ítems procurando encontrar en cada caso expresiones en términos de ϕ o ϕ^{-1}. Recordar para ello que $\phi(u) = P(Z \leq u)$. Graficar la función de densidad de Z y sombrear la region de interés en cada caso.

    a) $P(Z \leq 0)$

    b) $P(Z \leq -1{,}2)$

    c) $P(Z \geq -1)$

    d) $P(-1{,}2 \leq Z \leq -1)$

    e) Hallar a tal que $P(Z \leq a) = 0{,}7$.

f) Hallar b tal que $P(Z \geq b) = 0{,}4$.

12. Sea $X \sim \mathcal{N}(2, 0{,}16)$.

    a) Calcular $P(X \geq 2{,}3)$ y $P(1{,}8 \leq X \leq 2{,}1)$.

    b) Hallar a tal que $P(a \leq X \leq 2{,}4) = 0{,}3$.

13. Para desarrollar en clase La longitud (en cm) de la cintura de los hombres en Buenos Aires es una variable aleatoria con distribución normal de media 75 y varianza 25. Se sabe que todos los hombres de menos de 70 cm. de cintura usan cinturón de talle 1, mientras que los de cintura entre 70 y 81 cm. usan talle 2 y los restantes talle 3.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre use cinturón de talle 2?

    b) ¿Cuál debería ser la longitud máxima de cintura del talle 1 si se quiere que la probabilidad de que un hombre use talle 1 sea de a lo sumo 0.3?

    c) Carolina sabe que la cintura de su novio mide más de 70 cm.¿Cuál es la probabilidad de que use talle 2?

14. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcular $P(|X - \mu| < \sigma)$ y $P(|X - \mu| < 2\sigma)$.

15. Autoevaluación. La altura (en cm) de las personas de cierta población es una variable aleatoria X con distribución normal de parámetros $\mu = 173$ y $\sigma^2 = 5,3^2$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga una altura inferior a 175,2 cm?

    b) Hallar la altura superada con una probabilidad de 0,2.

16. Cierta industria tabacalera utiliza dos variedades distintas, I y II, con probabilidades 0.35 y 0.65 respectivamente. El contenido de nicotina de cierto producto es una v.a., cuya distribución es $\mathcal{N}(1{,}9, 0{,}16)$ cuando se utiliza la variedad I y $\mathcal{N}(2{,}2, 0{,}09)$ cuando se utiliza la variedad II.

    a) Calcular la probabilidad de que el contenido de nicotina sea mayor o igual a 2,1 cuando se utiliza la variedad I.

    b) Se selecciona uno de tales prouductos al azar. Calcular la probabilidad de que el contenido de nicotina sea mayor o igual que 2,1.

    c) Calcular la probabilidad de que una muestra con contenido de nicotina mayor que 2,1 provenga de la variedad I.

17. En un determinado aeropuesto openan dos aerolíneas A y B. La duración (en minutos) del vuelo Aeroparque-Montevideo operado por la compañía A es una variable aleatoria con distribución Normal de parámetros $\mu = 27$ y $\sigma^2 = 4$. Para los aviones de la compañía B, dicha duración es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[25, 31]$. El 40 % de los aviones que salen son de la compañía A y el resto de la B.

    a) Hallar la probabilidad de que el próximo vuelo de la compañía A dure más de 29 minutos.

b) Hallar la probabilidad de que el próximo vuelo de la compañía B dure más de 29 minutos.

c) Hallar la probabilidad de que el próximo vuelo dure más de 29 minutos.

18. En un juego de tiro al blanco, la distancia al centro (en cm.) que obtiene Juan es una variable aleatoria X con función de distribución

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{144} & \text{si } 0 \leq t < 12 \\ & \\ 1 & \text{si } t \geq 12. \end{cases}$$

a) Hallar la probabilidad de que un tiro de Juan diste menos de 1 cm. del blanco.

b) Hallar $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$.

c) Hallar el cuantil 0.90 de X.

19. Autoevaluación. La altura (en cm) de las personas de cierta población es una variable aleatoria Y con distribución normal de media 167 y desvío estándar de 5,5.

a) Si elegimos una persona al azar de esa población, ¿qué altura se **espera** que tenga?

b) Hallar a tal que $P(Y > a) = 0,3$.

20. Para desarrollar en clase

Considerar el enunciado presentado en el ejercicio 18 y responder los siguientes puntos.

a) En el pub se organiza un juego que otorga un premio de $120 - 10X$ pesos para cada lanzamiento al blanco, donde X es la distancia conseguida, y para participar se deben pagar \$45 por cada intento. Calcular la esperanza y la varianza de la ganancia neta para Juan en cada tiro.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la gananacia neta sea mayor que la ganancia neta esperada?

c) Juan tira 12 veces al blanco, ¿cuál es la probabilidad de que dos o menos de sus tiros disten menos de 1 cm. del blanco?

21. La biblioteca de una facultad dispone de una red de computadoras al alcance de los estudiantes. El tiempo (en minutos) que un estudiante destina a búsqueda bibliográfica es una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro 0,1. Supongamos que de acuerdo al tiempo destinado a la búsqueda bibliográfica el usuario (siempre estudiante) es clasificado en una de tres categorías: I si $T < 25$, II si $25 \leq T \leq 50$ y III si $T > 50$. Hallar la esperanza de la variable aleatoria W : “categoría asignada al usuario“.