Curso Nivelador – Análisis – Carrera de Especialización en Estadística
2022

Práctica 1: Sucesiones, funciones y límites

Sucesiones

1. Dadas las sucesiones

   a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   b) $b_n = \dfrac{(-1)^{n+3}}{n^2}$

   c) $c_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n(\cos(n\pi)+3)}$

   d) $d_n = (-1)^{n+5}$

   e) $e_n = \dfrac{2^n + 3^{n+1}}{5^n} + 7$

   f) $f_n = 2 - \frac{n^2-1}{n+2n^2}$

   a) Hallar a_4, b_8, c_{100}, d_{510}, e_3, f_{10}.

   b) Esbozar un gráfico con los primeros 10 términos de las sucesiones a_n y d_n.

   c) Decidir si las sucesiones son convergentes y, cuando corresponda, determinar el valor del límite.

2. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tres sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1{,}1$ y $a_n \leq c_n \leq b_n$. Qué puede decir de $\lim_{n\to\infty} c_n$?.

3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ y $\{b_n\}$ una sucesión tal que $|b_n| < 50$ para todo $n \geq 7$. Qué puede decir de $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$?

4. Dada $\{a_n\}$ una sucesión que satisface que $\lim_{n\to\infty} n.a_n = 0$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

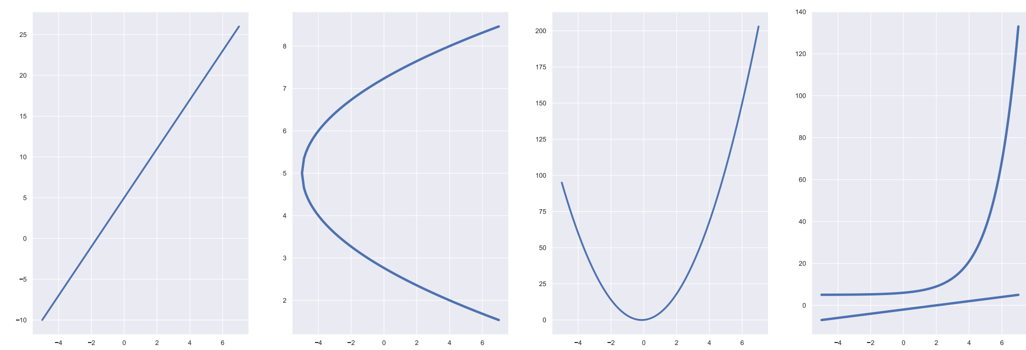
   Sug.: multiplicar y dividir por n y usar álgebra de límites.

5. Calcular los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{3n^2-n+2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{5n^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+n}{n^2+3}$ *d)* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5}{\sqrt{n^5+n^2}}$.

Funciones

6. Determinar, en cada caso, si los siguientes gráficos corresponden al gráfico de una función



7. Hacer un gráfico que refleje la evolución de la temperatura del agua a lo largo del tiempo atendiendo a la siguiente descripción:

   Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba en 60 grados. Luego, fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba en 30 grados y 20 minutos después seguía teniendo algo más de 20 grados, temperatura que se mantuvo, pues era la temperatura que había en la cocina.

   El gráfico que hizo es el único que respeta las consignas anteriores?.

8. Determinar cuál (o cuáles) de las siguientes ecuaciones corresponden a la recta que pasa por los puntos $(1, -1), (-1, 2)$

$$y = -\frac{3}{2}(x-1) - 1, \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{3}{2}x + 1,$$

$$y = -\frac{3}{2}(x+1) + 2, \quad y = -\frac{3}{2}(x-1) - 1, \quad y = -\frac{3}{2}(x+1) - 1$$

9. Calcular la función lineal con pendiente 10 y que pasa por $(5, 25)$. Indicar el valor que le asigna la recta al punto $x = 4$.

10. Dada la recta que pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(10, 9)$

    a) Hallar su pendiente.

    b) Determinar la ecuación de la función lineal que representa la recta y graficarla.

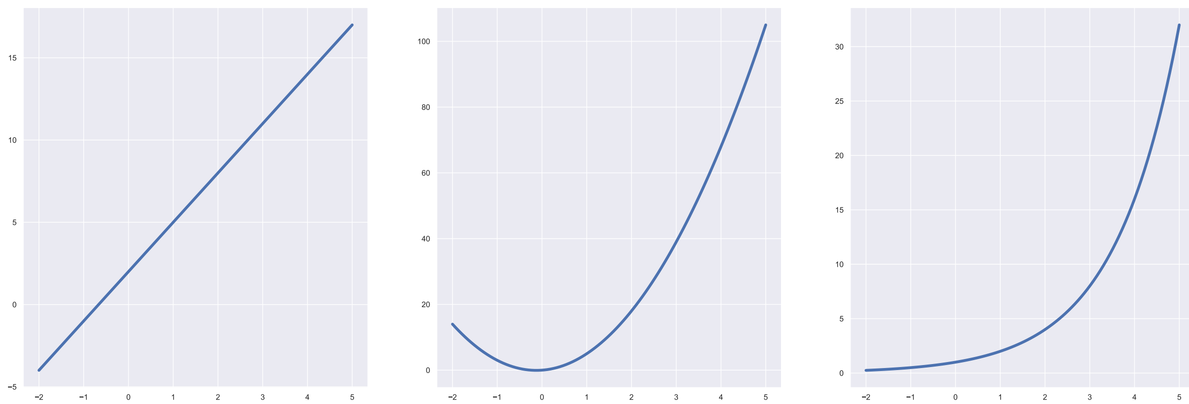
    c) El punto $(3, 2)$ pertenece a la recta?

    d) Indicar otros 3 puntos que pertenezcan a la recta.

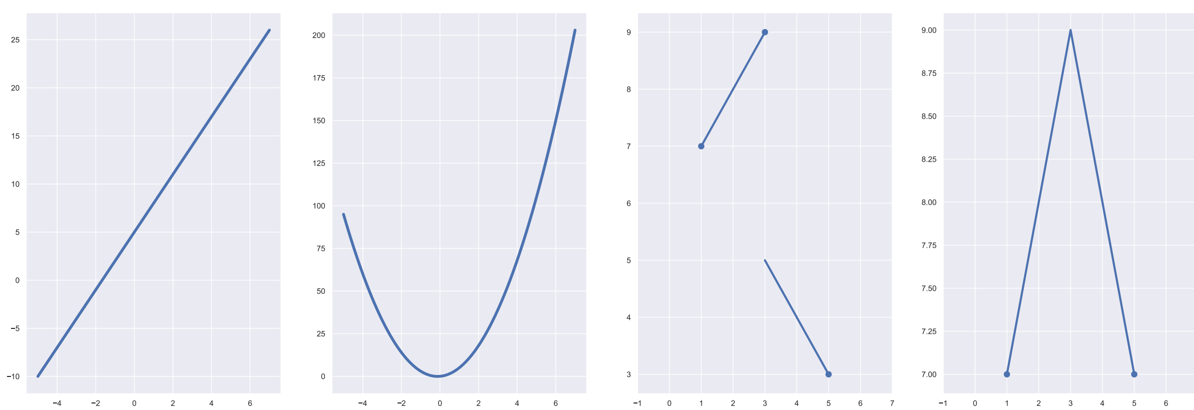
11. Calcular todas las funciones cuadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasan por los puntos $(0, 5)$, $(1, 6)$ y $(2, 3)$. Hay más de una?

12. Calcular todas las funciones exponenciales $f(x) = ka^x$ con $a > 0$ que pasan por los puntos $(-1, 3/2)$ y $(1, 6)$. Hay más de una?

13. Para cada uno de los siguientes gráficos decidir si corresponde a una función lineal, a una cuadrática o a una exponencial.



14. Dados los siguientes gráficos de funciones



En cada caso, determinar el dominio y decidir si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

15. Calcular el dominio natural de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = \ln(x+1)$ *b*) $f_2(x) = \frac{e^{-x}+3}{x^3}$ *c*) $f_3(x) = \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{2x+3}}$

16. Determinar la fórmula de la función que describe la distancia de un $x \in \mathbb{R}$ al $x_0 = 5$. ¿Y cuál la distancia al $x_0 = -3$?

17. Para cada $k > 0$ se define la función de pérdida de Huber $\rho_k : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$\rho_k(x) = \begin{cases} -2kx - k^2 & \text{si} \quad x < -k \\ x^2 & \text{si} \quad -k \leq x \leq k \\ 2kx - k^2 & \text{si} \quad x > k \end{cases}$$

a) Notar que si $k = 5$, esta función coincide con el tramo de montaña rusa para $x \in [-10, 10]$.

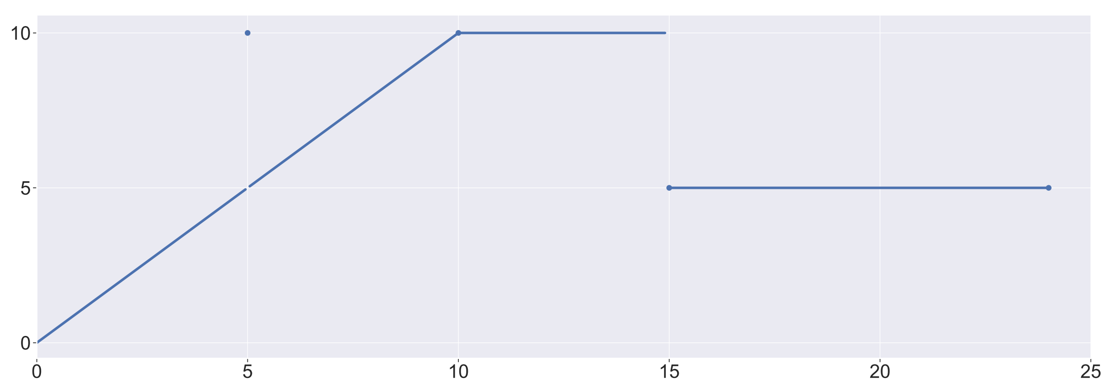
b) Mostrar que ρ_k es continua en R.

c) Esbozar un gráfico de ρ_k para algunos k.

d) Verificar que se puede reescribir ρ_k de la siguiente manera $\rho_k : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$\rho_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| \leq k \\ 2k|x| - k^2 & \text{si} \quad |x| > k \end{cases}$$

18. Un broker (agente financiero) está estudiando el siguiente gráfico que proporciona los valores de la bolsa de las acciones de la empresa de uno de sus clientes durante 24hs de un determinado día:



a) Determinar la función que describe la gráfica de f y su dominio.

b) Es una función lineal?

c) En qué momento del día alcanza su valor máximo?

d) Determinar el valor de las acciones a las 5am y a las 7am.

19. Dadas las siguientes funciones inyectivas en el dominio propuesto, hallar en cada caso su inversa indicando el dominio de la función inversa.

a) $f(x) = 3x + 7,\ Dm(f) = \mathbb{R}$.

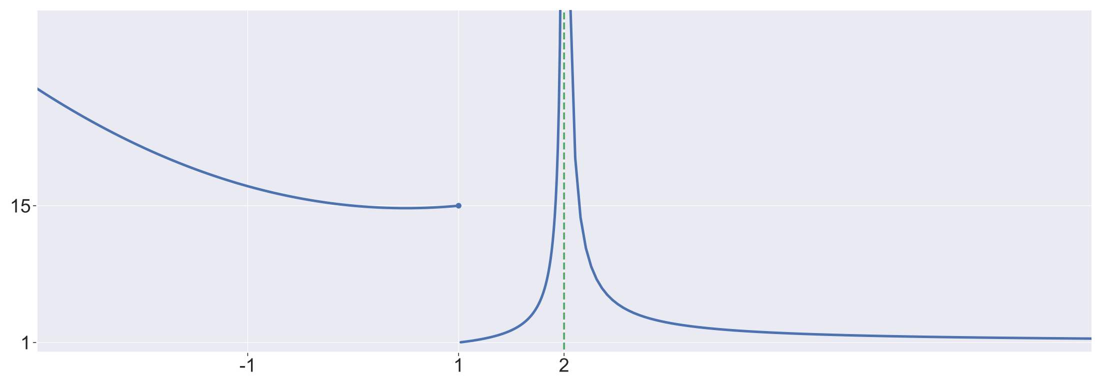
b) $f(x) = 7 + 1/\sqrt{x-1},\ \ Dm(f) = (1, +\infty)$

c) $f(x) = 1 - e^{-3x},\ \ Dm(f) = [0, +\infty)$

20. Calcular el polinomio $p(x)$ interpolador de grado menor o igual que 3 que pasa por puntos presentados en la tabla e indicar cuánto vale en $x = 1$; es decir, calcular $p(1)$.

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

21. El siguiente es el gráfico de la función $f(x)$.



Determinar, en caso que existan, los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 2^+} f(x),\ \lim_{x\to 2^-} f(x),$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

22. Dada $f(x) = \sin(x^2+1) + e^{x-5}.\ln(x^4+3)$.

   a) Determinar si f es continua en $\mathbb{R}$ y explicar porqué.

   b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x^2+1) + e^{x-5}.\ln(x^4+3)$.

Más sucesiones

23. Dado $k \in \mathbb{N}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = \dots\ , \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^n = \dots\ .$$

24. Dada una sucesión $a_n \neq 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} n.a_n = \lambda$. Probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y calcular los límites

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(1-a_n)^n$$

Algunos problemitas más.

1. Para cada uno de los siguientes casos hallar $Dm(f)$, $Dm(g)$, $f \circ g$, $g \circ f$, $Dm(f \circ g)$ y $Dm(g \circ f)$.

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1$

   b) $f(x) = x + 5$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Dadas las funciones $g(x) = |x|$ y

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

   a) Graficar ambas f y g.

   b) Decidir si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son biyectivas.

   c) Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.

   d) Graficar las composiciones.

3. En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

   Se dispone de los siguientes datos

$T(\circ C)$	150	160	170	180	190	200	210
$R(\%)$	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

   Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 45, por lo que la planta trabaja a 175°C. Si la temperatura de trabajo cae a 162°C por una avería, será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?.

4. El pentóxido de dinitrógeno gaseoso puro reacciona en un reactor intermitente según la reacción estequiométrica

$$N_2O_5 \rightleftharpoons 2N_2O_4 + O_2$$

   Calculamos la concentración de pentóxido de dinitrógeno existente en ciertos instantes, obteniendo los siguientes datos

$T(s)$	500	700	900	1100	1300	1500	2300
C	5.5	5.04	4.36	3.45	2.37	1.32	0.71

   Si lo tenemos en el reactor un tiempo máximo de 35 minutos (2100 segundos), cuál es la concentración de pentóxido de dinitrógeno que queda sin reaccionar?.

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}, & \text{si } x > 9 \\ x-5, & \text{si } x \leq 9 \end{cases}$$

Calcular $f(9)$ y decidir si $f(x)$ es continua en $x = 9$.

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{2x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 4 \ \ \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad .$$

a) Determinar si existe $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Hallar, si existe, $a \in \mathrm{R}$ de manera que $f(x)$ resulte continua en $x = 0$.