

# Tabla de distribuciones utilizadas en el curso

## 1. Distribuciones discretas univariadas

Distribución	Notación	$p_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Bernoulli	$\text{Ber}(p)$	$p^x(1-p)^{1-x}$	$\{0, 1\}$	$p \in (0, 1)$	$p$	$p(1-p)$
Binomial	$\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$p \in (0, 1), n \in \mathbb{N}$	$np$	$np(1-p)$
Geométrica	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{x-1}p$	$\mathbb{N}$	$p \in (0, 1)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Pascal	$\text{Pas}(k, p)$	$\binom{x-1}{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$	$\mathbb{Z}_k$	$p \in (0, 1), k \in \mathbb{N}$	$k/p$	$k(1-p)/p^2$
Poisson	$\text{Poi}(\mu)$	$(\mu^x e^{-\mu})/x!$	$\mathbb{Z}_0$	$\mu > 0$	$\mu$	$\mu$
Hipergeométrica	$\mathcal{H}(N, d, n)$	$\frac{\binom{d}{x}\binom{N-d}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\llbracket m, M \rrbracket^\dagger$	$d \leq N, n \leq N \in \mathbb{N}$	$\frac{nd}{N}$	$\frac{nd(N-d)(N-n)}{N^2(N-1)}$

$$^\dagger m = \max\{0, d + n - N\}, M = \min\{n, d\}$$

Notación:

$$\llbracket a, b \rrbracket := \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$$

$$\mathbb{Z}_k := \{x \in \mathbb{Z} : x \geq k\}$$

### 1.1. Notas

- La función de probabilidad  $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$  en la tabla vale para  $x$  en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de  $x$ .
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- El número combinatorio (*binomial coefficient*) se define como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad n \in \mathbb{N}, r = 0, 1 \dots n$$

y el combinatorio generalizado (*multinomial coefficient*):

$$\binom{n}{r_1 r_2 \dots r_k} = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} \quad n \in \mathbb{N}, r_i = 0, 1 \dots n, \sum_{i=1}^k r_i = n.$$

- Algunos autores llaman “binomial negativa” a la distribución Pascal.

## 1.2. Algunos modelos

Una variable aleatoria con distribución:

- Bernoulli modela un experimento con dos resultados posibles, asignando el valor 1 a la ocurrencia del evento estudiado (que en general se lo llama *éxito* y tiene probabilidad  $p$ ) y 0 a la no ocurrencia del mismo (con probabilidad  $1 - p$ ).
- Binomial modela la cantidad de *éxitos* obtenidos al repetir  $n$  veces de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad  $p$  de *éxito*.
- Geométrica modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener el primer *éxito* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad  $p$  de *éxito*.
- Pascal modela la cantidad de ensayos necesarios hasta obtener  $k$  *éxitos* si se repite de forma independiente un experimento de Bernoulli con probabilidad  $p$  de *éxito*.
- Hipergeométrica modela la cantidad de *éxitos* en  $n$  extracciones sin reposición de una población de tamaño total  $N$ , de los cuales  $d$  individuos son *éxito* y  $N - d$  individuos no lo son.

## 2. Distribuciones continuas univariadas

Distribución	Notación	$f_X(x)$	Soporte	Parámetros	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{var}(X)$
Uniforme	$\mathcal{U}[a, b]$	$1/(b-a)$	$[a, b]$	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
Exponencial	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$[0, +\infty)$	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\Gamma(\nu, \lambda)$	$\frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-\lambda x}$	$[0, +\infty)$	$\nu > 0, \lambda > 0$	$\nu/\lambda$	$\nu/\lambda^2$
Normal	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$\mu$	$\sigma^2$
Chi cuadrado	$\chi_k^2$	$\frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	$[0, +\infty)$	$k \in \mathbb{N}$	$k$	$2k$
$t$ -Student	$t_\nu$	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$	$\mathbb{R}$	$\nu > 0$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}^*$
Weibull	$\text{Wei}(c, \alpha)$	$\frac{c}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^c}$	$[0, +\infty)$	$c > 0, \alpha > 0$	$\alpha\Gamma(1 + \frac{1}{c})$	$\alpha^2 \left[\Gamma(1 + \frac{2}{c}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{c})\right]$
Rayleigh	$\text{Ray}(\sigma)$	$\frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$	$[0, +\infty)$	$\sigma > 0$	$\sigma\sqrt{\pi/2}$	$\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Pareto	$\text{Par}(m, \alpha)$	$\frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}}$	$[m, +\infty)$	$m > 0, \alpha > 0$	$\frac{\alpha m}{\alpha-1}^\dagger$	$\frac{m^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}^\ddagger$
Beta	$\beta(a, b)$	$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$(0, 1)$	$a > 0, b > 0$	$a/(a+b)$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$
Cauchy	$\text{Cau}(x_0, \gamma)$	$\frac{1}{\pi\gamma} \left[ \frac{\gamma^2}{(x-x_0)^2 + \gamma^2} \right]$	$\mathbb{R}$	$x_0 \in \mathbb{R}, \gamma > 0$	no existe	no existe

$^\dagger$  Válida si  $\alpha > 1$ .  $^\ddagger$  Válida si  $\alpha > 2$ .  $*$  Válida si  $\nu > 2$

### 2.1. Notas

- La función de densidad  $f_X(x)$  en la tabla vale para todo  $x$  real en el soporte indicado, y vale 0 para cualquier otro valor de  $x$ .
- La forma de definir los parámetros de las variables aleatorias no tiene una convención universal. En las tablas se intentó respetar el siguiente orden de prioridad: [1], [2], [3]. Al consultar un libro o usar funciones de un software lea atentamente la definición que usa para los parámetros de cada distribución.
- La función Gamma se define  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ . Crece muy rápidamente, y para evitar problemas numéricos en algunos algoritmos conviene adaptar las fórmulas para que aparezca el logaritmo de la función  $\log|\Gamma(t)|$  (las barras de módulo no molestan pues usaremos habitualmente valores positivos). Algunas propiedades:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

### 2.2. Algunas funciones de supervivencia

Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $S(t) = \mathbf{P}(T > t)$  (función de supervivencia o *survival function*), vale que:

- si  $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$  entonces  $S(t) = e^{-\lambda t}$  para  $t \geq 0$ .
- si  $T \sim \Gamma(k, \lambda)$  con  $k \in \mathbb{N}$  entonces  $S(t) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$  para  $t > 0$ .
- si  $T \sim \text{Wei}(c, \alpha)$  entonces  $S(t) = e^{-(t/\alpha)^c}$  para  $t \geq 0$ .
- si  $T \sim \text{Ray}(\sigma)$  entonces  $S(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)}$  para  $t \geq 0$ .
- si  $T \sim \text{Par}(m, \alpha)$  entonces  $S(t) = (m/t)^\alpha$  para  $t \geq m$ .

### 3. Equivalencias

Se usa como notación el signo equivalente  $\equiv$  para indicar que dos distribuciones coinciden para determinados parámetros. Se indican sólo algunas equivalencias que se dan en el curso.

#### 3.1. Discretas

- $\text{Ber}(p) \equiv \mathcal{B}(1, p)$
- $\mathcal{G}(p) \equiv \text{Pas}(1, p)$

#### 3.2. Continuas

- $\mathcal{U}(0, 1) \equiv \beta(1, 1)$
- $\mathcal{E}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda) \equiv \text{Wei}(1, \frac{1}{\lambda})$
- $\chi_k^2 \equiv \Gamma(\frac{k}{2}, \frac{1}{2})$  con  $k \in \mathbb{N}$

### Referencias

- [1] Grynberg, S. *Variables Aleatorias: momentos (Borradores, Curso 23)*. Buenos Aires: [digital], 27 de marzo de 2013
- [2] Maronna, R. *Probabilidad y Estadística Elementales para Estudiantes de Ciencia*. 1ra ed. La Plata: [digital], 1995
- [3] Varios artículos ['· distribution', 'Gamma function']. En *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Consultados en Julio 2016.
- [4] DeGroot, M. H. *Probability and Statistics*. 2nd. ed. EE.UU.: Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [5] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I*. 2da ed. New York: John Wiley & Sons, 1957.