Álgebra Lineal - Verano 2021

Práctica 2 - Espacios vectoriales

Espacios y subespacios

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

   a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.
   b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 3\}$.
   c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$.
   d) $S \subset \mathbb{R}^2$; $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.
   e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\}$.
   f) $S \subset \mathbb{R}^3$; $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\}$.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Probar que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \ A \cdot v = 0\}$, el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineal homogéneo, es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

3. Se consideran los vectores $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2. ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

4. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

   a) $S = \langle(1, 2, 3)\rangle$; $v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.
   b) $S = \langle(1, 2, 3),\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})\rangle$; $v = (-5, -10, -15)$.
   c) $S = \langle(1, -1, 2, 1),\ (2, 1, 3, 0)\rangle$; $v = (0, -3, 1, 1)$.

5. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:

   a) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1)\}$.
   b) $n = 2$, $\{(1, 1), (1, -1), (3, 4)\}$.
   c) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$.
   d) $n = 3$, $\{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.
   e) $n = 4$, $\{(1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, -2), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 1, 2)\}$.

6. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

   a) $\{(1, -3, 5), (-2, 2, 1), (-1, -1, 6)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   b) $\{(1, 2, 2, -1), (0, 2, -2, -3), (1, 1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.
   c) $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$.
   d) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \ldots v_n, 0 \in \mathbb{V}$.

7. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de $\mathbb{V}$.

   a) $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   b) $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   c) $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.
   d) $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

e) $\{(1,1,1,1,1),\ (1,2,0,1,1),\ (1,1,1,2,1)\}$; $\mathbb{V}=\mathbb{R}^5$.

8. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

   a) $S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2=0,\ x_3-x_2=0\}$.

   b) $S=\langle(1,1,-1),\ (0,1,1),\ (1,2,0)\rangle$.

9. Sea $S=\langle(0,-1,k),\ (1,-1,0),\ (-1,0,2)\rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k.

10. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S=\{x\in\mathbb{R}^3:\ 2x_1-x_2+x_3=0,\ -4x_1+2x_2-2x_3=0\}$ y $T=\langle(2,3,-1),\ (-2,1,5),\ (4,2,-6)\rangle$:

    a) Probar que $T\subset S$.

    b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T=S$ o no.

Transformaciones lineales. Imagen y núcleo de matrices.

11. Dadas las matrices

$$A=(1\quad 1\quad 0\quad 1),\quad B=\begin{pmatrix}2&1\\8&7\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-3&0\\4&-5&1\\2&-1&2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad D=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\\5&-5\\9&-9\end{pmatrix}.$$

    a) hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.

    b) calcular el rango.

    c) repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

12. Sea $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

    a) Si $m=7$, $n=8$ y $\mathrm{Im}(A)=2$, calcular $\dim(\mathrm{Nu}(A))$.

    b) Si $m=6$, $n=5$ y $\dim(\mathrm{Nu}(A))=3$, calcular $\mathrm{Im}(A)$.

    c) Si $m=3$, $n=5$ y $\dim(\mathrm{Im}(A^t))=3$, calcular $\mathrm{Im}(A)$ y $\dim(\mathrm{Nu}(A))$.

13. Sea $A\in\mathbb{R}^{4\times5}$ la matriz $A=\begin{pmatrix}3&1&6&1&9\\2&2&0&2&2\\2&1&3&1&5\\2&0&6&0&8\end{pmatrix}$.

    a) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(A)$.

    b) Calcular $\dim(\mathrm{Nu}(A))$, $\dim(\mathrm{Nu}(A^t))$, $\mathrm{Im}(A)$ y $\mathrm{Im}(A^t)$.

14. Sea $A\in\mathbb{R}^{4\times3}$ una matriz tal que $\dim(\mathrm{Nu}(A))=1$ y sea $b\in\mathbb{R}^{4\times1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b]\in\mathbb{R}^{4\times4}$ para que el sistema $A\cdot x=b$ tenga solución.

15. Sea $A\in\mathbb{R}^{3\times4}$ la matriz $A=\begin{pmatrix}3&1&1&0\\1&0&1&1\\4&2&0&b\end{pmatrix}$.

    a) Determinar el valor de $b\in\mathbb{R}$ que hace que $\mathrm{Im}(A)=2$.

    b) Para el valor de b hallado, decidir si $v=(3,2,2)\in\mathrm{Im}(A)$ y hallar una base de $\mathrm{Nu}(A^t)$.

16. Sean $A\in\mathbb{R}^{4\times3}$ la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-2\\1&2&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$ y S el sistema $S:\begin{cases}ax+y+bz&=0\\2ax-y+bz&=0\end{cases}$.

    Hallar $a,b\in\mathbb{R}$ tales que el subespacio $\mathrm{Nu}(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S.

17. Para cada uno de los siguientes subespacios S, hallar $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que $\mathrm{Nu}(A) = S$.

    a) $S = \langle (1,3,1),\ (-2,1,0)\rangle$.

    b) $S = \langle (1,3,1,-2),\ (-2,1,0,3),\ (-1,4,1,1)\rangle$.

Producto interno

18. Calcular la norma de cada uno de los vectores siguientes, y normalizarlos

    a) $u = (0,1,2)$,

    b) $v = (-1,1,1)$,

    c) $w = 3u$,

    d) $z = u + v$

19. Determinar la distancia entre los puntos $A = (1,2,3)$ y $B = (4,1,-2)$

20. *a*) Sean $u = (1,2,-1)$, $v = (1,-1,1)$. Hallar $w \in \mathbb{R}^3$, $w \neq 0$ tal que $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$. ¿Es único?

    b) Sea $u = (1,-1)$. Hallar todos los $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle u, v\rangle = 0$.

    c) Sea $u = (0,0,2)$. Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|v\| = \|u\|$ y $\langle v, u\rangle = 0$.

    d) Sean $u = (1,2)$, $v = (-1,1)$ y $w \in \mathbb{R}^2$ tales que $\langle u, w\rangle = 1$ y $\langle v, w\rangle = 3$. Hallar w.

21. Decidir si son o no ciertas las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

    a) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ para algún $u \neq 0$, entonces $v = w$.

    b) Si $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^n$, entonces $v = w$.

22. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales o no

    a) $v = (1,1,1), w = (1,0,1)$

    b) $v = (1,-2,4), w = (-2,1,1)$

23. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

    a) $v = (1,1), w = (1,0)$

    b) $v = (3,2,-1), w = (0,1,2)$

24. Sea la recta $S = \langle (3,4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$ y p la proyección ortogonal sobre S. Hallar:

    a) $p(3,4)$, $p(-4,3)$ y $p(2,1)$.

    b) El punto más cercano de la recta S a cada uno de los puntos $(3,4)$, $(-4,3)$ y $(2,1)$, y la distancia de esos puntos a la recta S.

25. *a*) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B}'$.

    b) Escribir a los vectores $v = (1,1,1)$ y de $w = (1,0,0)$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}'$.

    c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

    $$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$$