1. Para desarrollar en clase. En un pueblo, la cantidad de personas separadas según color de pelo y color de ojos se encuentra en la siguiente tabla

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	blanco	negro
verdes	10	5	4	3	1
azules	6	1	4	2	3
castaños	6	2	6	7	5
oscuros	2	1	6	3	3

Se elige una persona del pueblo al azar. Calcular la probabilidad de que:

a) tenga ojos azules y sea pelirroja.

b) tenga ojos azules

c) sea pelirroja.

d) tenga ojos azules o sea pelirroja.

2. Autoevaluación. Una pequeña comunidad consta de 20 familias, 4 de las cuales tiene un único hijo, 8 tienen dos hijos, 5 tienen tres hijos, 2 tienen cuatro hijos y 1 tiene cinco hijos.

a) Si se selecciona una familia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga i hijos, para $i = 1, \cdots, 5$?

b) Si se selecciona un niño al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a una familia con i hijos, para $i = 1, 2 \cdots, 5$?

3. Se lanzan dos dados equilibrados de 6 caras y se anotan los valores de las caras observadas.

a) Describir un espacio muestral de este experimento que sea equiprobable.

b) Calcular la probabilidad de que se anoten los números 2 y 5, en algún orden.

c) Calcular la probabilidad de que se observen dos unos.

d) Calcular la probabilidad de que la suma de los números observados sea 7.

e) Calcular la probabilidad de que la suma de los números observados sea 2.

f) Calcular la probabilidad de que la suma de los números observados sea mayor o igual a 10.

g) Calcular la probabilidad de que los dos dados sean iguales.

h) Calcular la probabilidad de que el resultado del primer dado sea par.

Comparar las probabilidades calculadas en los últimos ítems con las frecuencias relativas asociadas a cada uno de los eventos de interés, a partir de simulaciones realizadas en R con la función `sample()`.

4. Para desarrollar en clase. De una bolsa que contiene 7 bolitas blancas y 4 rojas, se extraen 2 bolitas al azar con reposición.

    a) Describir un espacio muestral para este experimento que sea equiprobable.

    b) Hallar la probabilidad de que en la primer extracción salga una bolita roja y en la segunda una blanca.

    c) Calcular la probabilidad de que salga al menos una bolita roja en las dos extracciones.

    d) Repetir los puntos anteriores para extracciones sin reposición.

5. Una bolsa contiene 4 bolitas azules, 8 blancas y 11 rojas. Se extraen 2 bolitas al azar **sin reposición**. Describir un espacio muestral asociado al experimento y calcular la probabilidad de obtener:

    a) las dos bolitas del mismo color.

    b) al menos una bolita roja.

    c) una bolita azul y una roja.

    d) una bolita azul o una roja.

6. Autoevaluación. Una urna contiene 5 bolas rojas, 6 azules, 8 verdes y 9 negras. Si se eligen tres bolas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que

    a) todas las bolas sean del mismo color?

    b) todas las bolas sean de colores diferentes?

    c) Repetir el experimento pero extrayendo las bolas con reposición.

7. Un profesor reparte una lista de diez ejercicios entre sus alumnos y avisa que el examen constará de cinco de los ejercicios de la lista seleccionados al azar. Si un estudiante sabe resolver siete de los diez ejercicios, ¿cuál es la probabilidad de que responda bien

    a) los cinco ejercicios?

    b) al menos cuatro?

8. Para desarrollar en clase. ¿Cuántos invitados debe haber en una fiesta para que al menos dos cumplan años el mismo día? ¿Cuántos para que al menos dos cumplan años el mismo día con probabilidad mayor o igual a 0,5? Asumir que un año tiene 365 días e implementar, en R, una función que tenga como entrada la cantidad de invitados y devuelva la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día. Graficar en el eje x el número de invitados, considerando los valores entre 2 y 120 (`seq(2:120)`), y en el eje y la probabilidad calculada para cada número de invitados.

9. Demostrar utilizando las propiedades de la probabilidad los siguientes resultados:

    a) Si $P(A_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots$, entonces

    $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$$

b) Si $P(B_i) = 1$ para $i = 1, 2, \ldots$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 1$$

c) Si $P(C_1) \geq 1 - \alpha$ y $P(C_2) \geq 1 - \delta$, entonces

$$P(C_1 \cap C_2) \;\geq\; 1 - (\alpha + \delta)$$

d) Bonferroni! Si $P(C_i) \geq 1 - \alpha$ para $i = 1, \ldots, p$, entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{p} C_i\right) \;\geq\; 1 - p\alpha$$

e) Se sabe que al menos (i) al 80 % de la población le gusta el helado de chocolate y (ii) al 70 % le gusta el de dulce de leche. Se elige una persona al azar de la población. Acotar inferiormente la probabilidad de que a la persona seleccionada le guste el helado de chocolate y el de dulce de leche. $Rta: \geq 0,5$

10. Para desarrollar en clase En una materia optativa la proporción de alumnos según carrera y género está dada por la siguiente tabla:

Género/Carrera	Biología	Física	Computación	Química	Matemática
Femenino	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
Masculino	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

Se elige un estudiante al azar. Calcular la probabilidad de que el estudiante elegido sea

a) de género femenino y de Biología.

b) de género femenino.

c) de Biología.

d) de Biología o de género femenino.

e) de Biología si se sabe que que es de género femenino.

f) Sabiendo que un estudiante es de género masculino, ¿es más probable que sea Biólogo o Físico?

11. Se arroja un dado dos veces. Sabiendo que la suma de los puntos es impar, calcular la probabilidad de que:

a) la suma dé 7.

b) la suma sea mayor que 9.

c) el resultado del segundo tiro sea par.

d) al menos uno de los dos resultados sea impar.

e) ambos resultados sean iguales.

12. Monty Hall (de Wasserman): Probablemente lo hayas escuchado antes. Ahora puedes solucionarlo rigurosamente. Se llama el "Problema de Monty Hall". Un premio se coloca al azar detrás de una de tres puertas. Se elige una puerta, supongamos que siempre se elige la puerta 1. Ahora Monty Hall elige uno de los otros dos puertas, la abre y te muestra que está vacía, sin premio. Luego da la oportunidad de mantener la puerta que se eligió originalmente o cambiar a la otra puerta sin abrir. ¿Deberías quedarte o cambiarte? Calcular la probabilidad de ganar el premio sin cambiar de puerta. Calcular la probabilidad de ganar el premio cambiando de puerta. $Rta:\ 1/3 \text{ y } 2/3\ \text{ el doble!}$

13. Para desarrollar en clase. En una población el 20 % de los adultos mayores practican actividad física con *baja* intensidad, el 55 % con intensidad *media* y el resto con intensidad *alta*. De los adultos que practican actividad física con intensidad *baja*, el 70 % es *hipertenso*, de los que practica actividad física con intensidad *media* el 50 % y de los que practican con intensidad *alta* el 20 %. Si se elige al azar un adulto mayor de dicha población:

    a) calcular la probabilidad de que sea *hipertenso*.

    b) calcular la probabilidad de que practique actividad física con *baja* intensidad sabiendo que es *hipertenso*.

14. En un examen de multiple choice en el que para cada pregunta existen 3 opciones, la probabilidad de que un alumno sepa la respuesta es p. Cuando no la sabe elige una de las tres opciones al azar.

    a) Hallar la probabilidad de que el alumno responda correctamente una pregunta.

    b) Hallar la probabilidad de que el alumno sepa la respuesta dado que respondió correctamente una pregunta.

    Aclaración: la probabilidad de responder correctamente DADO que sabe es 1; eso es saber...

15. Para entregar Se tiene una urna A con 5 bolitas rojas y 3 blancas, y una urna B con 1 bolita roja y 2 blancas. Se arroja un dado equilibrado. Si sale 3 ó 6 se extraen dos bolitas con reposición de la urna A. En caso contrario, las dos extracciones se hacen con reposición de la urna B.

    a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

    b) Si ambas bolitas son rojas, ¿cuál es la probabilidad de que provengan de la urna A?

16. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea B con $P(B) > 0$. Demostrar que $P(\cdot \mid B)$ es una función de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$. Es decir, verificar que la aplicación que a cada $A \in \mathcal{F}$ le asigna el valor $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$ satisface la definición de una función de probabilidad.

17. Considerar una sucesión de repeticiones independientes de un experimento con dos posibles resultados: éxito, con probabilidad p y fracaso con probabilidad $1 - p$. ¿Cuál es la probabilidad de que

a) al menos un éxito ocurra entre las primeras n repeticiones?

b) exactamente k éxitos ocurran en las primeras n repeticiones?

c) ocurra el primer éxito en la k–ésima repetición?

d) se tire una y otra vez y nunca se observe un éxito?

18. Las siguientes propiedades se deducen de la definición de independencia.

    a) Demostrar que si $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$ entonces A es independiente de todo evento B.

    b) Demostrar que A es independiente de si mismo si y sólo si $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$.

    c) Para conversar en clase. Demostrar que si A y B son eventos independientes, entonces $\bar{A}$ y B también son independientes. Concluir que $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

19. Autoevaluación. Se tiene una sucesión de repeticiones independientes de un experimento con dos posibles resultados: éxito, con probabilidad 0,3 y fracaso con probabilidad 0,7. Si se utiliza el número 1 para representar los éxitos y el 0 para los fracasos.

    a) Calcular la probabilidad de observar los resultados $0, 0, 1, 0, 1, 0$, en ese orden.

    b) Calcular la probabilidad de observar al menos un éxito en las primeras 4 repeticiones.

    c) Calcular la probabilidad de observar exactamente 2 éxitos en las primeras 6 repeticiones.