Clase 3: Ejercicio grupal - G10
Curso Nivelador Análisis – Carrera de Especialización en Estadística 2022

Alejandro Uribe

Octubre 2022

1. Dada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ con $x \in [-1, 2]$

   (a) Calcular f', $Domf'$ y determinar los puntos críticos.

   (b) Máximos y mínimos absolutos de f en $[-1, 2]$.

   A fin de calcular f', $Domf'$, puntos críticos de $f(x)$, y máximos y mínimos absolutos de $f(x)$, la función debe ser derivable en el intervalo $x \in [-1, 2]$.

   El $Domf$, son aquellos valores de x para los cuales existe un valor asociado de la función $f(x)$:

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad \exists f(x)\}$$

   Se calcula el $Domf$:

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x^2 - 9 > 0\}$$

   Es decir,

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x < -3 \quad | \quad x > 3\}$$

   Por lo tanto, $f(x)$ no se encuentra definida en el intervalo $[-1, 2]$ y no es derivable en tal intervalo.

2. Dada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

   (a) Hallar el $Domf$

   El $Domf$ son aquellos valores de x para los cuales existe un valor asociado de la función $f(x)$:

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad \exists f(x)\}$$

   Se calcula el $Domf$:

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x^2 - 9 > 0\}$$

   Es decir,

   $$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x < -3 \quad | \quad x > 3\}$$

(b) Para cada c en el borde del dominio de $f(x)$, determinar qué límites laterales tiene sentido tomar cuando x tiende a c y calcularlos.

El dominio de $f(x)$ es $Dom f = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. Por lo que tiene sentido tomar los límites cuando $x \to \{-3^-, 3^+, \pm\infty\}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$$
$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = +\infty$$

(c) Calcular f', $Dom f'$ y hallar sus puntos críticos. Luego analizar dónde crece y decrece f.

Calcular f'

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}\right)$$
$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{x}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}$$

Calcular $Dom f'$

El $Dom f'$, son aquellos valores de x para los cuales existe un valor asociado de la función $f'(x)$:

$$Dom f' = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad \exists f'(x)\}$$

Se calcula el $Dom f'$:

$$Dom f' = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x^2 - 9 > 0\}$$

Es decir,

$$Dom f' = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x < -3 \quad | \quad x > 3\}$$

Puntos críticos

Los puntos críticos de $f(x)$ son los x_i tales que $f'(x_i) = 0$.

$$f'(x) = -\frac{x}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\frac{x}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}} = 0$$
$$\left(\frac{1}{(x^2 - 9)^{\frac{3}{2}}}\right)(-x) = 0$$

Notar que $\left(\frac{1}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \quad \forall x \in Dom f'$. Por otro lado, $(-x)$ no toma el valor de cero ya que tal no pertence al $Dom f'$. Por lo tanto, $f(x)$ no tiene puntos críticos en su dominio.

Intervalos $f(x)$ donde crece o decrece

- $f(x)$ crece si $f'(x) > 0$, es decir:

$$\left(\frac{1}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}\right)(-x) > 0$$

Notar que $\left(\frac{1}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \quad \forall x \in Domf'$. Por otro lado, $(-x) > 0$ si $x < 0$.

- $f(x)$ decrece si $f'(x) < 0$, es decir:

$$\left(\frac{1}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}\right)(-x) < 0$$

Notar que $\left(\frac{1}{(x^2-9)^{\frac{3}{2}}}\right) > 0 \quad \forall x \in Domf'$. Por otro lado, $(-x) > 0$ si $x > 0$.

Por lo tanto,

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{si } x < -3 \Rightarrow f(x) \uparrow \\ f'(x) < 0, & \text{si } x > 3 \Rightarrow f(x) \downarrow \end{cases}$$

(d) Hallar máximos y mínimos locales y decidir si son absolutos.

Del item anterior se concluyó que $f(x)$ no tiene puntos críticos. No obstante, $f(x)$ tiene dos asíntotas verticales: $x = -3, \quad x = 3$ y una asíntota vertical en $y = 0$.

(e) Esbozar un gráfico de f.

De los items anteriores se tiene que:

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} \text{Horizontales}: & \{y = 0\} \\ \text{Verticales}: & \{x = -3, \quad x = 3\} \end{cases}$$

$$\text{Crecimiento/Decrecimiento} \begin{cases} f(x) \uparrow, & \text{si } x < -3 \\ f(x) \downarrow, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

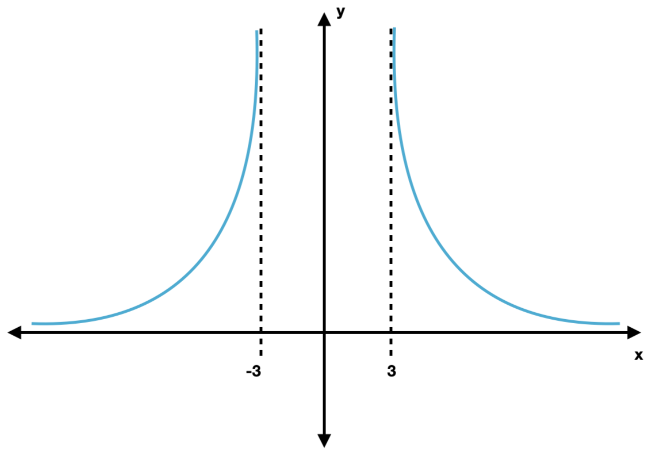
Resta analizar la concavidad de $f(x) \quad \forall x \in Domf$. Para ello se calcula la segunda derivada de $f(x)$.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)$$
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{2x^2-9}{(x^2-9)^{\frac{5}{2}}}$$

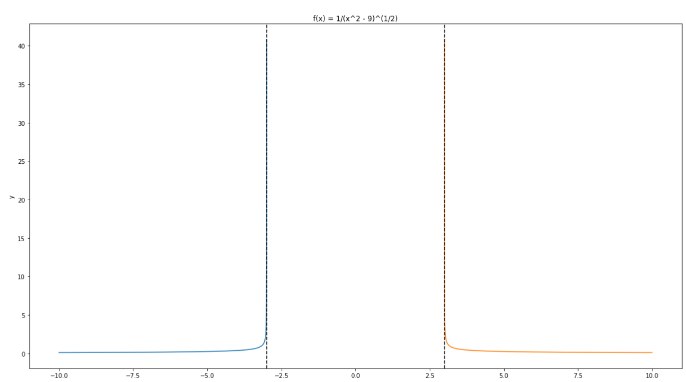
La función $f(x)$ es cóncava hacia abajo si $f"(x) < 0$ y cóncava hacia arriba si $f"(x) > 0$. Al tomar valores arbitarios de $x \in Domf$, se nota que:

$$\begin{cases} f”(x) > 0, & \text{si } \{x < -3, \quad x > 3\} \\ f”(x) < 0, & \text{en ningún caso} \end{cases}$$

Se esboza la gráfica de $f(x)$ a continuación.



(f) Hacer un gráfico de la función usando la computadora y comparar con el gráfico del item anterior.



Notar que la función generada por computadora se acerca mas rápido a sus asíntotas verticales y horizontales que en el esbozo a mano.

(g) Decidir si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones

i. $f(x) \leq 1/3 \quad \forall x \in Dom f$ Se chequea tal condición:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \leq \frac{1}{3}$$

La condición se cumple si:

$$x \geq 3\sqrt{2}$$

Y se sabe que:

$$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x < -3 \quad | \quad x > 3\}$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

ii. $f(x) < 1/2 \quad \forall x \in Domf$ Se chequea tal condición:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \leq \frac{1}{2}$$

La condición se cumple si:

$$x \geq \sqrt{13}$$

Y se sabe que:

$$Domf = \{x \in \mathbf{R} \ / \quad x < -3 \quad | \quad x > 3\}$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.