Índice general

Capítulo 1

Probabilidades

Experimentos aleatorios: acciones o procesos en los cuales conocemos todos los resultados posibles pero no sabemos con certeza cuál va a ocurrir.

Ahora, si conocemos todos los resultados posibles, podemos anotarlos.

El **espacio muestral** (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento aleatorio. Sus elementos, ω, se llaman eventos elementales.

Veamos algunos ejemplos de experimentos aleatorios:

1. Tiro una moneda y anoto que lado salió
2. Tiro una moneda dos veces y anoto que lado salió
3. Tiro un dado y observo el resultado
4. Registro la cantidad de personas que llaman a un call center entre las 14 y las 15 hs
5. Registro el tiempo entre la llegada de personas al banco

Ahora encontremos el espacio muestral para cada uno de los experimentos aleatorios

1. $\Omega_1 = \{cara, ceca\}$
2. $\Omega_2 = \{(cara, cara), (cara, ceca), (ceca, cara), (ceca, ceca)\}$
3. $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
4. $\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3...\} = \mathbb{N}_0$
5. $\Omega_5 = \{t : t \geq 0\}$

En el estudio de la probabilidad interesan no solo los resultados individuales del espacio muestral sino también varias recopilaciones de resultados del mismo.

Llamamos **evento o suceso** a cualquier subconjunto de resultados en el espacio muestral. Los resultados pueden conformar un conjunto finito o infinito de cualquier cardinalidad.

En el ejemplo anterior para el ítem 3, podríamos definir el evento A como: A:“ El valor observado es par”

Las situaciones más antiguas consideradas en la teoría de la probabilidad, originada en los juegos de azar, corresponden al caso en el que el espacio muestral Ω es finito y todos sus elementos tienen las mismas “chances” de ser elegidas. Decimos que un espacio muestral es **equiprobable** cuando todos sus elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

Pero, ¿Qué es la probabilidad?

Definamos algunas cosas que nos sirvan para empezar a entender la idea.

Supongamos que tenemos un dado y queremos apostar a un número...pero no sabemos a cual, queremos “estudiar“ el dado un poco más. ¿qué haríamos? A mi se me ocurre empezar a tirarlo, tirarlo muchas veces y por ejemplo observar cual de las 6 caras aparece más veces.

Frecuencia absoluta: Para un experimento en particular, es la cantidad de veces que sucede un evento A.

Frecuencia relativa: Para un experimento en particular, es la relación entre la cantidad de veces que ocurre el evento A y el número total de ensayos n

$$f_A = \frac{n_A}{n}$$

Volviendo a nuestro dado, podemos definir nuestro evento A: “Sale el número 2”, lo tiramos 100 veces y contamos cuantas veces salió el 2, a partir de ese resultado podemos calcular la frecuencia relativa y eso podría darnos alguna idea de como funciona este dado. ¿Y qué pasa si lo tiramos muchas veces más?

Si el número n de ensayos se repite muchas veces ($n \to \infty$), la frecuencia relativa del evento tiende a un valor que se llamará *probabilidad de A*

$$f_A \to \mathbf{P}(A)$$

Entonces ahora sí podríamos dar una primera definición.

Probabilidad de un evento A: Es un número positivo (o nulo) que se le asigna a cada suceso o evento del espacio muestral.

Ya entendemos que es, necesitamos definiciones que nos ayuden a calcular probabilidades.

Laplace: La probabilidad de que ocurra un suceso A se calcula como la cantidad de casos en los que ocurre ese suceso dividido la cantidad de casos posibles del experimento, siempre y cuando todos los sucesos sean equiprobables.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#\text{casos favorables de A}}{\#\text{casos posibles del experimento}}$$

Ejemplo: En un pueblo, la cantidad de personas separadas según color de pelo y color de ojos se encuentra en la siguiente tabla

ojos/pelo	rubio	pelirrojo	marrón	blanco	negro
verdes	10	5	4	3	1
azules	6	1	4	2	3
castaños	6	2	6	7	5
oscuros	2	1	6	3	3

Se elige una persona del pueblo al azar. Calcular la probabilidad de que:

1. tenga ojos azules y sea pelirroja.
2. tenga ojos azules
3. sea pelirroja.
4. tenga ojos azules o sea pelirroja.

En este caso fue fácil contar porque encontramos una forma de observar todos los resultados posibles del experimento aleatorio, pero ¿que ocurriría si en lugar de una persona elijo dos, o tres?¿Sería igual de fácil hacer los cálculos? Vamos a necesitar algo que se llama **técnicas de conteo**. Pero eso lo veremos después

La definición de probabilidad vista hasta ahora sirve si estamos en un espacio equiprobable, pero en la mayoría de los casos no es así. Necesitamos una teoría que nos permita calcular probabilidades en otro tipo de espacios.

1.1. Axiomas

Definición Una probabilidad (o medida de probabilidad) es una función $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ que a cada evento A le hace corresponder un número real $\mathbf{P}(A)$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
3. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ (*)
4. **Axioma de continuidad**: Para cada sucesión decreciente de eventos $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ tal que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, vale que $lim_{n\rightarrow\infty}\mathbf{P}(A_n) = 0$

(*) Se dice que dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo ($A \cap B = \emptyset$)

Propiedades importantes

- Si A^c es el evento complementario de A, entonces $\mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ (la demostramos en clase)
- Sean A y B eventos cualesquiera pertenecientes a Ω, entonces $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) – \mathbf{P}(A \cap B)$
- Si $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de elementos de A, mutuamente excluyentes dos a dos entonces, $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$

Ejemplo: En una materia optativa la proporción de alumnos según carrera y género está dada por la siguiente tabla:

Género/Carrera	Biología	Física	Computación	Química	Matemática
Femenino	0.15	0.06	0.12	0.05	0.10
Masculino	0.10	0.12	0.15	0.10	0.05

Se elige un estudiante al azar. Calcular la probabilidad de que el estudiante elegido sea

1. de género femenino y de Biología.
2. de género femenino.
3. de Biología.
4. de Biología o de género femenino.

1.2. Técnicas de conteo

1.2.1. Regla del producto

Dados dos conjuntos A y B, con n_A y n_B elementos cada uno respectivamente, la cantidad de todos los pares ordenados formados por un elemento de A y otro de B se calcula como $n_A * n_B$.

Veamos algunos ejemplos y como contarlos

1. Tiro un dado 2 veces. Contar la cantidad de resultados posibles
2. ¿Cómo cambia si tiro 3 veces el dado, o 4?
3. En 4 tiros de un dado, contar de cuantas formas posibles puede no aparecer ningún 6
4. Contar cuántas patentes hay con 3 letras y 3 números

Supongamos que tengo 5 libros, que quiero ordenar en mi biblioteca, la cual solo tiene 5 lugares. Entonces quiero ver, o mejor dicho contar, todas las formas posibles en las que puedo ordenarlos.

Este ejemplo nos da lugar a otra definición.

1.2.2. Permutaciones

La cantidad de formas distintas en que se pueden ordenar los números 1,2,3…n es $n!$.

1. Quiero ordenar 5 libros diferentes en un estante, ¿de cuantas formas puedo ordenarlos?
2. ¿de cuantas formas diferentes puedo fotografiar a una familia de 5 integrantes puestos en hilera?

Parece bastante simple, no? Empecemos a analizar algunas variantes del ejemplo. ¿Que pasa si mi estante solo tiene lugar para 3 libros? cómo cambia mi ejercicio?

1.2.3. Variaciones

Es la cantidad de subconjuntos *ordenados* de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos.

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

1. De los 5 libros solo tengo lugar para 3 ¿de cantas formas puedo ordenarlos?
2. Hay 70 lugares en el cine, ¿de cuantas formas diferentes se pueden sentar 45 personas? OJO!! Una persona por asiento

Vamos a pensar ahora un caso diferente. Este si es el caso con el que vas a encontrarte todo el tiempo, al menos en esta materia. Hay muchas situaciones en las que el experimento consiste en seleccionar un subconjunto de elementos, pero no te importa el orden en el que lo sacás. Por ejemplo, si de un curso de probabilidad digo que voy a seleccionar 3 personas al azar para ponerles un punto extra en el examen, a esas personas ¿Les importa en que orden las elija? O si estás jugando al truco, cuando te dan las 3 cartas, ¿Te importa si el Ancho de espada te lo dieron primero, segundo o tercero? La respuesta es no.

1.2.4. Combinaciones

Es la cantidad de subconjuntos *no ordenados* de r elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de n elementos.

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

Algunos ejemplos:

1. ¿De cuantas formas diferentes puedo elegir 11 personas de 30 para formar un equipo de futbol?0
2. ¿De cuantas formas diferentes puedo elegir 5 personas del curso para ponerles 1 punto más en el examen?
3. Control de calidad: ¿Cuántas muestras diferentes de 10 piezas puedo elegir de un lote de 100?
4. ¿Cuántas manos diferentes puede tener una persona que juega al truco?¿cuántas donde todas las cartas sean de oro? ?cuántas con todas del mismo palo?¿cuántas con oro o espada?¿cuántas con 2 oros y una copa?

1.2.5. Permutaciones con elementos repetidos (anagramas)

Tenemos n elementos en los cuales hay n_1 de una clase, n_2 de la segunda, n_k de la k-esima, entonces el número de permutaciones de estos n objetos está dada por:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

1. ¿Cuántas palabras diferentes puedo formar con la palabra ANANA? ¿Y MANZANA?

2. UN EJEMPLO DIFÍCIL: Queremos pintar 12 bolitas de 3 colores, de manera de tener 3 blancas, 2 rojas y 7 azules. ¿De cuantas formas distintas las puedo elegir?

Ejemplo: ¿ Cuántos invitados debe haber en una fiesta para que al menos dos cumplan años el mismo día? ¿Cuántos para que al menos dos cumplan años el mismo día con probabilidad mayor o igual a 0,5? Asumir que un año tiene 365 días e implementar, en R, una función que tenga como entrada la cantidad de invitados y devuelva la probabilidad de que al menos dos cumplan años el mismo día. Graficar en el eje x el número de invitados, considerando los valores entre 2 y 120, y en el eje y la probabilidad calculada para cada número de invitados.

1.3. Probabilidad condicional

Se trata de analizar cómo afecta la información de que "un evento B ha ocurrido" a la probabilidad asignada de A.

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, A y B $\in \mathcal{A}$ con $\mathbf{P}(B) > 0$, la probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido está definida por:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$$

¿Era la cuenta que habías pensado?

Revisemos propiedades importantes (y probemos algunas):

La $\mathbf{P}(A|B)$ para un valor de B fijo satisface todos los axiomas de la probabilidad:

1. $0 \leq \mathbf{P}(A|B) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$
2. $\mathbf{P}(\Omega|B) = 1$
3. Si $A \cap C = \emptyset$, entonces $\mathbf{P}(A \cup C|B) = \mathbf{P}(A|B) + \mathbf{P}(C|B)$

Mas propiedades: que vas a usar todo el tiempo:

1. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)$
2. $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C)$

Ahora si dos Ejemplos:

1. Siguiendo el ejemplo de las biologas
   a) de Biología si se sabe que que es de género femenino.

b) Sabiendo que un estudiante es de género masculino,¿ es más probable que sea Biólogo o Físico?

2. Una persona arroja dos dados equilibrados. Calcular la probabilidad de que la suma sea 7 dado que:

   a) la suma es impar.
   b) la suma es mayor que 6.
   c) el número del segundo dado es impar.
   d) el número de alguno de los dados es impar.
   e) los números de los dados son iguales.

No olvidemos de analizar que pasó con este ejemplo.

Definición: Decimos que los eventos $B_1, \ldots, B_k$ representan una partición de Ω si:

1. $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$

Dada una partición, podemos escribir al conjunto A como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_k)$$

Todos los eventos entre paréntesis son entre sí mutuamente excluyentes. Si quiero calcular la probabilidad del evento A, usando el axioma 3 resulta:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_k)) = \mathbf{P}((A \cap B_1)) + \cdots + \mathbf{P}((A \cap B_k))$$

Y así a su vez se puede expresar $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)$, obteniendo el ***teorema de la probabilidad total***:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}((A|B_i)\mathbf{P}(B_i)$$

Ejemplo: 3 máquinas

1.3.1. Teorema de Bayes

Teorema: Sean $B_1, \ldots, B_n$ una partición de Ω, A un evento e probabilidad positiva, entonces:

$$\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_i\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}((A|B_j)\mathbf{P}(B_j)}$$

Vamos ahora mismo a hacer un ejemplo:

Ejercicio para trabajar en salas: En una población el 20 % de los adultos mayores practican actividad física con *baja* intensidad, el 55 % con intensidad *media* y el resto con intensidad *alta*. De los adultos que practican actividad física con intensidad *baja*, el 70 % es *hipertenso*, de los que practica actividad física con intensidad *media* el 50 % y de los que practican con intensidad *alta* el 20 %. Si se elige al azar un adulto mayor de dicha población:

1. calcular la probabilidad de que sea *hipertenso*.
2. calcular la probabilidad de que practique actividad física con *baja* intensidad sabiendo que es *hipertenso*.

1.4. Eventos independientes (ver video)

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad, A y B $\in \mathcal{A}$, A y B $\in \mathcal{A}$, se dice que A y B son independientes **si y solo si** $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) * \mathbf{P}(B)$

Propiedades:

1. Ω es independiente de cualquier suceso
2. $\emptyset$ es independiente de cualquier suceso
3. $A \subset B$, y $\mathbf{P}(B) \neq 1$, A y B no son independientes
4. Si A es independiente de B, $\forall B$, entonces $\mathbf{P}(A) = 0$ o $\mathbf{P}(A) = 1$
5. SI A y B son independientes, también lo son A y B^c ,A^c y B, A^c y B^c
6. $A_1, \ldots, A_n$ son independientes sii para toda sucesión de k conjuntos, $2 \leq k \leq n$, la probabilidad de la intersección de los k sucesos coincide con el producto de las probabilidades

Observación importante: Si la probabilidad de B es positiva, cuando A y B son independientes $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$

Ejemplo: Se elige al azar una permutación de las letras A, T, C, G. Mostrar que:

1. Los eventos “A precede a T” y “C precede a G” son independientes.
2. Los eventos “A precede inmediatamente a T” y “C precede inmediatamente a G” no son independientes.