Probabilidad

Ejercicio 15 - Entrega

Alejandro Uribe

Se tiene una urna A con 5 bolitas rojas y 3 blancas, y una urna B con 1 bolita roja y 2 blancas. Se arroja un dado equilibrado. Si sale 3 ó 6 se extraen dos bolitas con reposición de la urna A. En caso contrario, las dos extracciones se hacen con reposición de la urna B.

a). Hallar la probabilidad que ambas bolitas sean rojas.

Se definen los experimentos aleatorios equiprobables:

D: Lanzar un dado equilibrado

$D = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\#D = 6$

A: Sacar una bolita de la urna A

$A = \{R,R,R,R,R,B,B,B\}$ $\#A = 8$

B: Sacar una bolita de la urna B

$B = \{R,B,B\}$, $\#B = 3$.

R: Bolita roja, B: bolita blanca.

Se busca calcular la probabilidad de lanzar el dado y sacar dos bolitas rojas, para tal efecto se definen los siguientes eventos:

D_{36}: Lanzar el dado y obtener 3 ó 6

$$P(D_{36}) = \frac{\overset{\text{sacar 3}}{1} + \overset{\text{sacar 6}}{1}}{6 \rightarrow \#D}, \quad P(D_{36}) = \frac{1}{3}$$

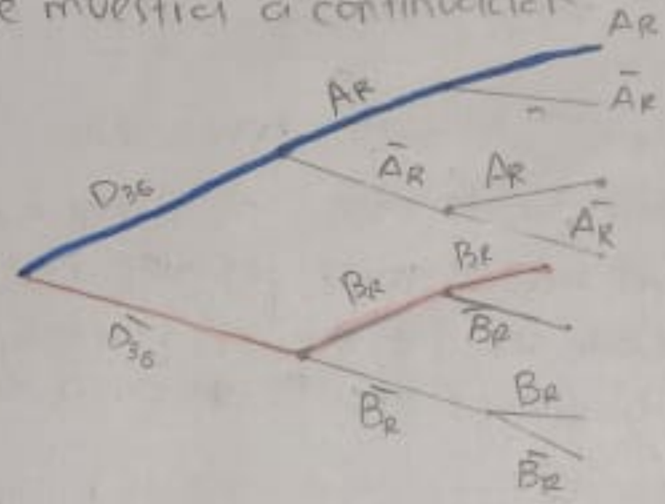
A_R: Sacar una bolita roja de la urna A

$$P(A_R) = \frac{5 \rightarrow \text{5 bolitas en la urna}}{8 \rightarrow \#A}, \quad P(A_R) = \frac{5}{8}$$

B_R: Sacar una bolita roja de la urna B

$$P(B_R) = \frac{1 \rightarrow \text{1 bolita en la urna}}{3 \rightarrow \#B}, \quad P(B_R) = \frac{1}{3}$$

Se sabe que después de lanzar el dado se sacan una bolita tras otra de la urna con reposición. Un gráfico del proceso anterior se muestra a continuación



Por lo tanto,

$$P(R) = \underbrace{P(D_{36})\,P(A_R)\,P(A_R)}_{\text{camino color azul}} + \underbrace{P(\bar{D}_{36})\,P(B_R)\,P(B_R)}_{\text{camino color pomelo}}$$

$$P(R) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) + \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$P(R) = 0.2043$.

Ahora bien, sin hacer uso del gráfico anterior se puede calcular la probabilidad de sacar dos bolitas rojas, para ello se definen los eventos:

A_{2R}: Sacar dos bolitas con reposición de la urna A

El espacio muestral al sacarse dos bolitas independiente de su color es:

A_2: Sacar dos bolitas (con rep) de urna A

$A_2 = \{(x_1, x_2), x_i \in \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, B_1, B_2, B_3\}\}$

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	B_1	B_2	B_3
R_1	/	/	/	/	/	/	/	/
R_2	/	/	/	/	/	/	/	/
R_3	/	/	/	/	/	/	/	/
R_4	/	/	/	/	/	/	/	/
R_5	/	/	/	/	/	/	/	/
B_1	/	/	/	/	/	/	/	/
B_2	/	/	/	/	/	/	/	/
B_3	/	/	/	/	/	/	/	/

El número de casos favorables es el cuadrado azul de área 5x5. El número de casos posibles es el cuadrado azul + celdas pomelo, es decir, un cuadrado de área 8x8

$$P(A_{2R}) = \frac{25}{28}$$

De la urna B:

B_2: Sacar dos bolitas (con reposición) de la urna B

$B_2 = \{(x_1, x_2), x_i \in \{R_1, B_1, B_2\}\}$

Si se repite el análisis anterior se concluye que:

	R_1	B_1	B_2
R_1	/	/	/
B_1	/	/	/
B_2	/	/	/

$$P(B_{2R}) = \frac{(1)^2}{(3)^2}$$

$$P(B_{2R}) = \frac{1}{9}$$

Notar que sacar las dos bolitas de la urna A y sacar las dos bolitas de la urna B dado el lanzamiento del dado son eventos entre sí mutuamente excluyentes.

Entonces, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(A_{2R} | D_{36}) P(D_{36}) + P(B_{2R} | \bar{D}_{36}) P(\bar{D}_{36})$$

Ahora bien, el hecho de sacar las dos bolitas de la urna tras lanzar el dado los hace independientes, entonces

$$\begin{cases} P(A_{2R} | D_{36}) = P(A_{2R}) \\ P(B_{2R} | \bar{D}_{36}) = P(B_{2R}) \end{cases}$$

Remplazando en $P(R)$

$$P(R) = P(A_{2R}) P(D_{36}) + P(B_{2R}) P(\bar{D}_{36})$$

$$P(R) = \frac{25}{64} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$P(R) = 0.2043$$

↳ Probabilidad de que ambas bolitas sean rojas

b). Si ambas bolitas son rojas, ¿cuál es la probabilidad de que provengan de la urna A?

Se define el evento:

R_A: Sacar dos bolitas rojas y que provengan de la urna A.

Usando el gráfico del ejercicio anterior:

$$P(R_A) = P(D_{36}) P(A_R) P(A_R)$$

$$P(R_A) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right) = 0.1302$$

$P(R_A)$ es equivalente a $P(A_{2R} \cap D_{36})$ entonces usando la probabilidad condicional

$$P(A_{2R} | D_{36}) = \frac{P(A_{2R} \cap D_{36})}{P(D_{36})}$$

$$P(A_{2R} \cap D_{36}) = P(A_{2R} | D_{36}) P(D_{36})$$

Siendo A_{2R} y D_{36} eventos independientes

$$P(A_{2R} \cap D_{36}) = P(A_{2R}) P(D_{36})$$

$$P(A_{2R} \cap D_{36}) = \frac{25}{64} \cdot \frac{1}{3} = 0.1302$$