Álgebra Lineal - Verano 2021

Práctica 3 - Proyecciones ortogonales - Determinantes

En todos los ejercicios, puede realizar los cálculos a mano o utilizando **R**.

Proyección ortogonal

1. *a*) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base del plano

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

   b) Calcular el punto de S más cercano a $w = (1, 0, 0)$, y la distancia que los separa.

2. Sea $S = \langle (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Calcular $S^\perp$.
   Hallar el punto de S más cercano a $(0, 1, 1, 0)$, y la distancia de $(0, 1, 1, 0)$ a S.

3. *a*) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal de un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^t$$

   es la matriz de la proyección ortogonal sobre S.

   b) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, probar que $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

4. Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular la matriz de la proyección ortogonal sobre la imagen de $\boldsymbol{A}$.

5. Los siguientes datos corresponden a la población argentina (expresada en millones de habitantes):

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Hab. (millones)	17	20,5	23,9	27,9	32,6	36,9

   (a) Hallar una función f de la forma $f(x) = ax + b$ que mejor ajuste e los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar en una misma figura los datos y la función f.

   (b) Utilizando la función del ítem anterior, ¿qué población se puede inferir que había en Argentina en los años: 1955, 1965, 1975, 1985, 1995?

   (c) La población *real* de la Argentina en los años del ítem anterior era de: 18,8, 22,2, 25,9, 30,2 y 34,8 millones de habitantes respectivamente. Calcular el error que se cometió al inferir la población de estos años a partir del ajuste del ítem (a). Volver a graficar la función f del ítem a), incorporando (en otro color) los nuevos datos.

   (d) ¿Considera que la inferencia del ́tem (b) es razonablemente buena?

6. Hallar la constante (polinomio de grado 0) que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$.

7. Para cada uno de los conjuntos de datos dados, calcular los polinomios de grado $1, 2$ y 3 que mejor aproximan la tabla en el sentido de cuadrados mínimos. Graficar los datos junto con los tres polinomios. ¿Qué se observa? ¿Qué se puede decir del polinomio de grado 3?

x	-1	0	2	3
y	-1	3	11	27

x	-1	0	1	2
y	-3	1	1	3

Determinantes

8. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando propiedades y realizando la menor cantidad de cálculos posibles.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular

$$\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_1 1 + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}$$