Estimación puntual

Supongamos que se selecciona una muestra de tamaño n de una población. Antes de obtener la muestra no sabemos cuál será el valor de cada observación. Así, la primera observación puede ser considerada una v.a. X_1, la segunda una v.a.X_2, etc. Por lo tanto, antes de obtener la muestra denotaremos $X_1, X_2, ..., X_n$ a las observaciones y, una vez obtenida la muestra los valores observados los denotaremos $x_1, x_2, ..., x_n$. Del mismo modo, antes de obtener una muestra, cualquier función de ella será una v.a.

Definición: Un estimador puntual de un parámetro θ es un valor que puede ser considerado representativo de θ y se indicará $\hat{\theta}$. Que se obtiene a partir de alguna función de la muestra.

Ejemplo: Con el fin de estudiar si un dado es o no equilibrado, se arroja el dado 100 veces en forma independiente, obteniéndose 21 ases. ¿Qué valor podría utilizarse, en base a esa información, como estimación de la probabilidad de as? Parece razonable utilizar la frecuencia relativa de ases. En este caso, si llamamos p a la probabilidad que queremos estimar, consideramos que $\hat{p} = 21/100$.

¿Cómo obtener estimadores para un problema dado?

Método de momentos: La idea básica consiste en igualar ciertas características muestrales con las correspondientes características poblacionales.

Definición: Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de una distribución con función de probabilidad puntual o función de densidad que depende de m parámetros (en muchos casos m es uno) $\theta_1, \theta_2 .... \theta_m$. Los estimadores de momentos de $\theta_1, \theta_2 .... \theta_m$ son los valores que se obtienen $\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2}, ..., \hat{\theta_m}$ igualando momentos poblacionales con los correspondientes momentos muestrales. En general, se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n} = E(X_1^k), \qquad k = 1..m$$

En particular, si solo se requiere una ecuación

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = E(X_1)$$

Ejemplos

1. Parámetro de la Poisson
2. Uniforme $(0, \theta)$
3. Uniforme $(-\theta, \theta)$

Estimadores de parámetros poblacionales

- **Media y varianza poblacional**Sean $X_1, ...X_n$ una muestra aleatoria con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, vamos a considerar
$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$
$$\hat{\sigma^2} = S^2$$

- **Propocion poblacional**Sean $X_1, ...X_n$ una muestra aleatoria con X con distribución Bernoulli de parámetro p, vamos a considerar
$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n},$$
$$\hat{Var}(X) = \hat{p}(1 - \hat{p}).$$

Propiedades de los estimadores Observemos que, dada una muestra $X_1, ...X_n$, un estimador puntual del parámetro θ, obtenido en base a ella, es una v.a. $\hat{\theta}$. La diferencia

$$\hat{\theta} - \theta$$

es el error de estimación y una estimación será más precisa cuanto menor sea este error. Este error es también una v.a. dado que depende de la muestra obtenida. Una propiedad deseable es que la esperanza del error sea 0, es decir que en promedio el error obtenido al estimar a partir de diferentes muestras sea cero.

Definición: Un estimador puntual $\hat{\theta}$ del parámetro θ es insesgado si

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Por lo tanto, un estimador es insesgado si su distribución tiene como valor esperado al parámetro a estimar.

Si $\hat{\theta}$ no es insesgado, se denomina sesgo de θ a $b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$.

Definición: Un estimador puntual $\hat{\theta}$ del parámetro θ basado en una muestra $X_1, ...X_n, ..$,es asintóticamente insesgado si

$$E(\hat{\theta}) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \theta.$$

Cuando hay más de un estimador insesgado para un mismo parámetro, ¿cómo decidimos cuál conviene usar? Por ejemplo, sea $X_1, ...X_n$ una m.a. de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Es inmediato verificar que los siguientes son todos estimadores insesgados de μ:

$$\hat{\mu_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$
$$\hat{\mu_2} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$
$$\hat{\mu_3} = X_1$$

Las varianzas de estos estimadores son

$$V(\hat{\mu_1}) = \frac{\sigma^2}{n}$$
$$V(\hat{\mu_2}) = \frac{\sigma^2}{2}$$
$$V(\hat{\mu_1}) = \sigma^2$$

y parece natural elegir el estimador más preciso, es decir el de menor varianza.

Otra forma de medir cuan bueno es un estimador es con el error cuadratico medio, que lo definimos a continuacion

Definición: Sea $\hat{\theta}$ un estimador de θ, su error cuadrático medio es

$$ECM(\hat{\theta}) = E((\hat{\theta} - \theta)^2)$$

Proposición:

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + (b(\theta))^2.$$

Si el estimador $\hat{\theta}$ es insesgado el error cuadrático medio es igual a la varianza del estimador.