0.1. Variables aleatorias continuas

Definición: Una V.A. es continua si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Su conjunto de valores posibles se compone de todos los números que hay en un solo intervalo que hay sobre la línea de numeración o todos los números en una unión excluyente de dichos intervalos

2. Ningún valor posible de la variable aleatoria tiene probabilidad positiva, o sea, $\mathbf{P}(X = c) = 0 \forall c \in \mathbb{R}$

Definición: Se dice que X es una V.A. continua si existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamada función de densidad de probabilidad de X, que satisface las siguientes condiciones:

1. $f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3. Para cualquier a,b tal que $-\infty < a < b < \infty$ tenemos $\mathbf{P}(a < x < b) = \int_a^b f_X(x)dx$

Si X es una VAC entonces $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Veamos que pasa con un ejemplo:

Ejemplo: La demanda de aceite pesado en cientos de litros durante una temporada tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{4x+1}{3}\mathbf{1}\{0 < x < 1\}$$

1. Graficar $f_X(x)$ y verificar que sea una función de densidad.

2. Hallar la función de distribución de X.

3. Calcular $\mathbf{P}(1/3 < X \leq 2/3)$ y $\mathbf{P}(1/3 < X \leq 2/3 | X < 1/2)$

Obs: Si X es una V.A.C., $F_X(x)$ es una función continua para todos los reales (Admite derivada)

Teorema: Sea $F_X(x)$ la función de distribución de una V.A.C. (admite derivada) con f.d.p $f_X(x)$, luego:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

Con las variables continuas nos va a pasar algo diferente que con las discretas. No podemos darnos cuenta de su distribución solo por conocer el experimento aleatorio. Necesitamos que el enunciado nos comunique el modelo a seguir en cada caso. Ahora la tabla de distribuciones va a ser vital para nosotros, y voy a tener que presentarte unos cuantos modelos continuos porque no se descubren solos como pasaba con las variables discretas

0.2. Tipo de variable según su función de distribución

Átomos: Diremos que $a \in \mathbb{R}$ un átomo de $F_X(x)$ si su peso es positivo, es decir: $\mathbf{P}(X = a) > 0$.

El conjunto de todos los átomos de $F_X(x)$: $A = a \in \mathbb{R} : P(X = a) > 0$, coincide con el conjunto de todos los puntos de discontinuidad de $F_X(x)$.

De esta forma podemos definir el tipo de variable aleatoria según su función de distribución:

- La variable aleatoria X será discreta si la suma de las probabilidades de todos los átomos es 1
- La variable aleatoria X será continua si su función de distribución es continua
- **Diremos que una variable aleatoria es mixta si no es continua ni discreta**

Como ya no puedo hablar más de Rango, Se define el **soporte** de una variable aleatoria X como

$$S = \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) - F_X(x^-) \neq 0 \quad o \quad \frac{d}{dx}F_X(x) \neq 0\}$$

Ejemplo: Sea X una V.A. con función de distribución $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$:

$$F_X(x) = \tfrac{x}{4}\mathbf{1}\{0 \leq x < 1\} + \tfrac{1}{3}\mathbf{1}\{1 \leq x < 2\} + \tfrac{x}{6}\mathbf{1}\{2 \leq x < 4\} + \mathbf{1}\{4 \leq x\}$$

1. Hallar: $\mathbf{P}(1 < X \leq 4), \mathbf{P}(1 \leq X \leq 4), \mathbf{P}(1 \leq X < 4), \mathbf{P}(1 < X < 4)$
2. Sean $A = [1; 3{,}5]$ y $B = (0{,}5; 3)$, calcular $\mathbf{P}(X \in A), \mathbf{P}(X \in B|X \in A)$

0.3. Modelos continuos importantes

0.3.1. Distribución uniforme

Supongamos que X es una V.A.C. que toma todos los valores en el intervalo [a,b]donde ambos son finitos. Si $f_X(x)$ está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}\{a < x < b\}$$

Se dice que X está distribuida uniformemente sobre el intervalo $[a, b]$ y se nota $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Ver que a y b son los parámetros del modelo.

Ejemplo: Una vara de longitud 10 m se corta en un punto elegido al azar. Calcular la probabilidad de que la pieza más corta mida menos de 3m.

0.3.2. Distribución exponencial

Una variable aleatoria tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}\{x > 0\}$$

Se dice que X tiene distribución exponencial de parámetro λ y se nota $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Propiedades:

1. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ entonces $\mathbf{P}(X > t + s|X > t) = \mathbf{P}(X > s)$ $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$
2. Si X es una VAC y $\mathbf{P}(X > t + s|X > t) = \mathbf{P}(X > s)$ $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$, entonces exista $\lambda > 0$ tal que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

En otras palabras, se dice que la variable aleatoria con distribución exponencial tiene *pérdida de memoria.*

Ejemplo: La duración (en horas) de las lámparas almacenadas en un depósito es una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro 0,01.

1. Hallar y graficar la función de distribución de X.
2. ¿Cuántas horas se espera que dure una lámpara?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara dure menos de 100 horas?
4. Calcular $P(X > 150|X > 100)$.
5. Si se eligen 5 de estas lámparas, siendo independientes los tiempos de duración de cada una, calcular la probabilidad de que al menos 3 de ellas duran más de 100 horas.

Función de riesgo (para una V.A.C.)

Supongamos que tenemos un componente, y viene funcionando. Dado que un componente dura más que un cierto tiempo t, ¿cuál es la probabilidad de que se rompa un instante después?, estamos midiendo el riesgo de que se rompa, por ejemplo, en el instante después de que se termine la garantía.

Formalizando: Si definimos T:"tiempo hasta que el componente falla", busco estudiar $\mathbf{P}(T < t + \Delta t|T > t)$ cuando $\Delta t \to 0$.

A esta probabilidad que queremos estudiar la podemos pensar como una función de t, a la que vamos a llamar "función intensidad de fallas"multiplicada por este pequeño intervalo Δt. Si desarrollamos la probabilidad condicional usando todas las definiciones que vimos hasta ahora, y despejamos nuestra función Lambda, podemos observar que nos queda una estructura familiar. Si miramos como nos quedó el númerador dividido Δt, y pensamos en el límite para Δt tendiendo a cero, eso nos tiene que recordar a la derivada de la función, ¿De que función? En este caso de la función de distribución. Por lo tanto, en el límite, esta función intensidad de fallas resulta en el cociente entre la densidad de T y 1 menos la distribución de T

Este límite es una función de t a la que se la llama "función intensidad de fallas" multiplicada por , que desarrollándolo resulta:

$$\Delta t \lambda(t) = \mathbf{P}(T < t + \Delta t|T > t) = \frac{\mathbf{P}(T<t+\Delta t, T>t)}{\mathbf{P}(T>t)}$$
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$$

Como T es una variable aleatoria continua, conociendo $\lambda(t)$ podemos hallar F(t)

$$-\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{d}{dt}ln(1-F(t)) \leftrightarrow ln(1-F(t)) = -\int_0^t \lambda(t)dt$$
$$F_T(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

Distribución Gamma

Función gamma: $\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}dx$, si $y > 0$.

Caso particular: $\Gamma(1) = 1$

Si se desarrolla la integral por partes, se puede observar que $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

Si $a \in \mathbb{N}, \Gamma(a) = (a-1)!$.

Se dice que una variable alealeatoria continua X tiene distribución Gamma de parámetros λ y k si la función de densidad de probabilidad de X es:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{x > 0\}$$

Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\mathbf{P}(X > 0) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x}$

0.3.3. Distribución Normal Estándar

La variable aleatoria X que toma todos los valores reales $-\infty < X < \infty$ tiene una distribución normal estándar si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Ejemplo: Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar, hallar:

1. $\mathbf{P}(Z < 1), \mathbf{P}(Z < -1{,}5), \mathbf{P}(-1{,}5 < Z < 0{,}5)$
2. Para cada α en $\{0{,}95; 0{,}975, 0{,}999\}$, hallar los valores de z_α tal que $\mathbf{P}(Z < z_\alpha) = \alpha$

Cuantil de la variable aleatoria X

$$x_\alpha = min\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}$$

Definición: La variable aleatoria X que toma todos los valores reales $-\infty < X < \infty$ tiene una distribución normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

La variable aleatoria X con distribución normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y$\sigma^2 > 0$ cumple que: $\mathbf{E}[X] = \mu, \mathbf{var}(X) = \sigma^2$

Graficamente: vemos que la función de densidad nos da una forma de campana, centrada en el primer parámetro μ por lo tanto la esperanza es μ, y tiene dos puntos de inflección, situados a distancia σ de la media. La varianza de esta variable es σ^2.

La función dada por $f_X(x)$ no admite una primitiva que pueda expresarse mediante un número finito de funciones elementales, con lo cual el cálculo de probabilidades para esta variable aleatoria se realiza mediante métodos numéricos. Existen tablas y calculos ya hechos para calcular probabilidades con la normal estandar, pero vamos a querer calcular probabilidades para cualquier variable aleatoria normal, no solamente la estándar.

Si decimos que Z es una variable aleatoria que tiene distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, Z será una variable aleatoria normal estándar. Para calcular una probabilidad buscamos en la tabla de valores de $\phi(z)$. Para poder calcular probabilidades con cualquier variable normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es necesario realizar un cambio de variable para llevar la variable X a la Z y luego poder usar las tablas. El cambio propuesto es $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ya que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Lo demostramos: Hallar la distribución de Z. $\mathbf{P}(Z \leq z) \ldots$

De esta manera, siempre que nos encontramos frente al problema de calcular una probabilidad para una variable con distribución normal cualquiera, primero realizamos la transformación, que se conoce con el nombre de **Estandarización**, y luego buscamos en la tabla de valores de $\phi(z)$.

Veamos una propiedad súper interesante de la variable normal. Calculemos la probabilidad de que una variable normal se aleje en un desvío de su media, luego dos y tres. Esto es:

$$\mathbf{P}(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$$

0.4. Esperanza

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$, el valor esperado o media de X es:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Ejemplo: Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Hallar la esperanza de X.

Propiedad:

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx + \int_{-\infty}^{0} F_X(x) dx$$