

Álgebra Lineal - Verano 2021

Clase 3 - Proyecciones ortogonales, mínimos cuadrados y determinante

En todos los ejercicios, puede realizar los cálculos a mano o utilizando **R**.

- Dados $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 2, 0)$, $w = (2, 1, 0, 1)$ y $P = (1, -2, 0, 3)$.
 - verificar que el conjunto de vectores $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente y hallar por Gram-Schmidt una base ortonormal de $V = \langle u, v, w \rangle$.
 - hallar el punto R de V más cercano al punto P . ¿Cuál es la distancia entre P y R ?
- La siguiente tabla tiene la altura y el peso de 6 hombres entre 25 y 29 años de edad:

Altura (metros)	1.83	1.73	1.68	1.88	1.63	1.78
Peso (kilogramos)	79	69	70	81	63	73

- Hallar, utilizando las ecuaciones normales, la recta $y = c_0 + c_1x$ que mejor ajusta los datos en el sentido de mínimos cuadrados.
 - Utilizando la fórmula de proyección ortogonal, hallar la proyección del vector y sobre el espacio generado por las columnas de la matriz A construida en el ítem anterior. ¿Coincide el vector obtenido con el vector $c_0x + c_1$ calculado en el ítem anterior?
- Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices, utilizando propiedades para simplificar los cálculos cuando sea posible.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -\frac{2}{5} & \frac{5}{2} \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

¿Para cuáles de estas matrices el sistema $Ax = b$ (siendo A la matriz de cada ítem y b un vector cualquiera del tamaño apropiado) tiene solución única?

- Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible en cada uno de las siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}.$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}.$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Para entregar.

A los largo de los años, en un río cercano a un complejo industrial se han tomado muestras de agua para medir la presencia de cierto contaminante. Los datos han sido resumidos en la siguiente tabla, donde x representa el año desde el inicio de la toma de las muestras e y representa la concentración del contaminante en mg/L :

x	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
y	0.13	0.68	1.49	1.6	1.85	1.96	2.2	2.27

- (a) Hallar, utilizando las ecuaciones normales, la recta $f(x) = c_0 + c_1x$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.
- (b) Hallar, utilizando las ecuaciones normales, el polinomio $g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2$ que mejor ajusta a los datos en sentido de cuadrados mínimos. Graficar conjuntamente los datos y la función obtenida.