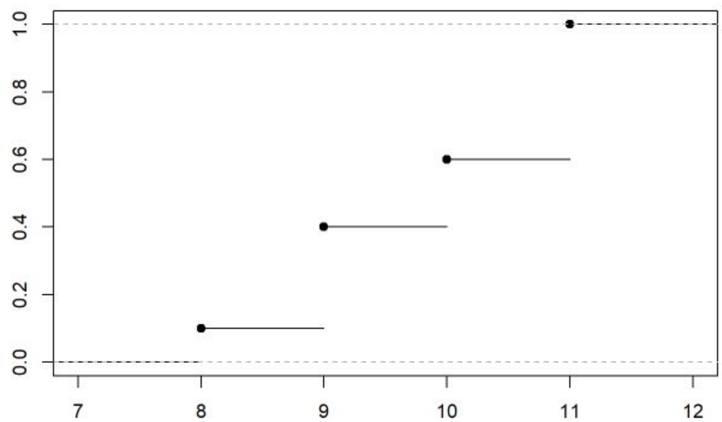
1. Variables Aleatorias discretas

1. Autoevaluación. El siguiente gráfico corresponde a la función de distribución $F_X(x)$ de la variable aleatoria X, que se mantiene constante para $x \geq 11$ y para $x < 8$.



   a) Indicar la cantidad de valores que conforman el rango de X.
   b) Indicar cúal es el menor valor perteneciente al rango de X.
   c) Indicar cuál es el valor de $\lim_{x \to 9^+} F_X(t)$.
   d) Indicar cuál es el valor de $\lim_{x \to 9^-} F_X(t)$.
   e) Indicar cuál es el valor de $P(X = 9)$.
   f) Calcular $\lim_{x \to -\infty} F_X(t)$.
   g) Calcular $\lim_{x \to +\infty} F_X(t)$.

2. Para entregar. Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de distribución:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0{,}4 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}7 & 2 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

   a) Graficar $F_X(x)$.
   b) Hallar el rango R_X y la función de probabilidad de X, $p_X(x)$.
   c) Calcular

$$P(1{,}5 < X \leq 5) \qquad P(1 < X < 5) \qquad P(X \geq 2)$$

3. Definir una función en R que, dados dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $p = (p_1, \ldots, p_n)$ y un número real t, calcule $F_X(t)$, es decir, la probabilidad de que una variable aleatoria discreta, que toma valores $x_1, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, \ldots, p_n$ respectivamente, sea menor o igual que t. Utilizar dicha función para graficar la función de distribución del punto anterior.

4. Para desarrollar en clase. Una urna contiene 5 bolitas numeradas: dos de ellas con el número 1, dos con el número 2 y una con el 5. Se extraen dos bolitas (sin reposición) y se observan las numeraciones. Sea X la suma de los resultados obtenidos.

   a) Hallar el rango de la variable aleatoria X.

   b) Hallar la función de probabilidad $p_X(x)$ y graficarla.

   c) Hallar la función de distribución $F_X(x)$ y graficarla.

5. Se arroja un dado 8 veces. Calcular la probabilidad de que salgan

   a) exactamente 3 unos,

   b) entre 3 y 5 valores mayores a 2,

   c) menos de 7 resultados pares.

6. Sea $X \sim \mathcal{B}(15, p)$. Graficar $\ell(p) = P(X = 8)$ en función de p. Encontrar el valor p que maximiza $\ell(p)$.

7. Autoevaluación. Se arroja una moneda 10 veces, con probabilidad de cara 5/8. Calcular la probabilidad de observar

   a) exactamente 4 caras,

   b) entre 3 y 5 caras,

   c) más de 7 caras, si se sabe que se observaron más de 5.

8. Para desarrollar en clase. El número (por cm^3 de agua) de cierto tipo de larvas en un estanque es una variable aleatoria con distribución de Poisson de párametro 3.

   a) Calcular la probabilidad de que una muestra de 1 cm^3 contenga 4 o más larvas.

   b) Si ahora se toman en forma independiente 5 muestras de 1 cm^3 cada una, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas contengan 4 o más larvas?

9. Autoevaluación. La cantidad de partículas alfa emitidas (por segundo) por una fuente de polonio es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro 1/2.

   a) Calcular la probabilidad de que en un segundo la fuente emita más de 3 partículas.

   b) Si ahora se miden en forma independiente 5 muestras de 1 segundo cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en exactamente 2 de ellas se emitan más de 3 partículas.

10. Sea $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Graficar $\ell(\lambda) = P(X = 3)$ en función de λ. Hallar el valor de λ que maximiza $\ell(\lambda)$.

11. Considerar una población de N individuos, M de los cuales tienen una *marca*. Se seleccionan (con reposición) n inviduos al azar. Sea Y la cantidad de individuos marcados entre los n seleccionados. Hallar la función de probabilidad de X. ¿Cuál es el nombre de la distribución de Y? ¿Cuáles son sus parámetros?

12. Considerar una población de N individuos, M de los cuales tienen una *marca*. Se seleccionan (sin reposición) n inviduos al azar. Sea X la cantidad de individuos marcados entre los n seleccionados. Hallar la función de probabilidad de X. ¿Cuál es el nombre de la distribución de X? ¿Cuáles son sus parámetros?

13. **Captura y Recaptura**. Capturar individuos, marcarlos y liberarlos; después seleccionar una muestra al azar de tamaño n y contar la cantidad de invidivuos en la *muestra* llevan marcas es una técnica muy utilizada para estimar el tamaño N de una población. Asumir que se marcan $M = 200$ individuos, se eleigen $n = 50$ al azar y $k = 38$ de ellos están marcados. Graficar una función que a cada posible valor N de la población le asigna la probabilidad la de obtener $k = 38$ marcados en los $n = 50$ elegidos sabiendo que hay $M = 200$ marcados. Eligir los posibles valores de N para incluir en el gráfico y encontrar el valor que maximiza la probabilidad graficada. En la práctica, ese es el valor que se utiliza para estimar el tamaño de la población.

2. Esperanza

14. Para desarrollar en clase. Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{-3, -1, 1, 4\}$, cuya función de probabilidad dada por

x	-3	-1	1	4
$p_X(x)$	0.3	0.2	0.1	?

   a) Calcular $p_X(4)$.
   b) Calcular la esperanza de X.
   c) Calcular $\mathbb{P}(X^2 = 1)$ y $\mathbb{P}(X^2 > 8)$.

15. Autoevaluación. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad calculada en el ejercicio 2. Sea $Y = 3X + X^2$. Calcular $\mathbb{E}(Y)$.

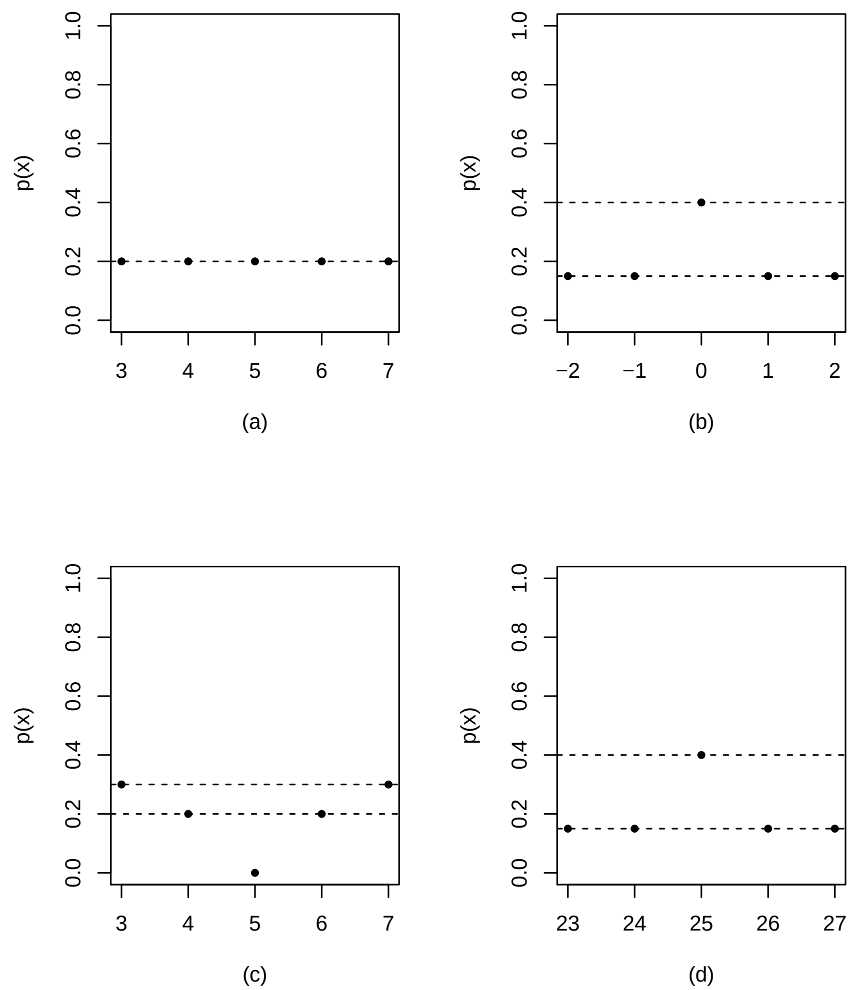
16. Implementar una función en R que, dados dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ correspondiente al rango de X y $p = (p_1, \ldots, p_n)$ correspondiente a los valores que toma su función de probabilidad, devuelva la esperanza de X.

17. Una proporción p de piezas producidas por una fábrica presentan defectos. Sea X la cantidad de piezas defectuosas al revisar con reposición un lote de tamaño n. ¿Cuál es la esperanza de X en función de la proporción total y n?

18. La cantidad de reclamos por día que recibe un centro de atención al cliente es una variable aleatoria con distribución Poisson. La probabilidad de que un día reciba al menos un reclamo es $1 - e^{-n}$. Hallar el número esperado de reclamos por día.

2.1. Varianza

19. A continuación se muestran gráficos de funciones de probabilidad de variables aleatorias, ordene (y no haga cuentas) los gráficos de manera de observar crecimiento en la varianza de las variables.



20. Sea X una variable aleatoria con distribución Bernoulli de parámetro p.

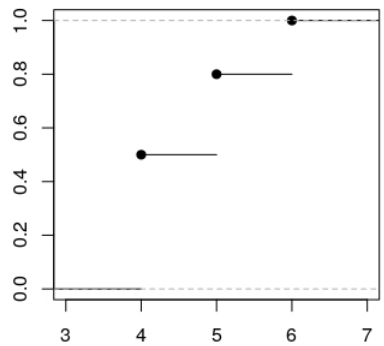
    a) Calcular $E(X^k)$ para $k \in \mathbb{N}$

    b) Mostrar que $V(X) = p(1-p)$.

21. Implementar una función en R que, dados dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ correspondiente al rango de X y $p = (p_1, \ldots, p_n)$ correspondiente a los valores que toma su función de probabilidad, devuelva la varianza de X.

22. ¿Cuál es la varianza de las variables definidas en los ejercicios **??**, 17 y 18?

23. Autoevaluación. Utilizando en gráfico de $F_X(x)$, la función de distribución de la variable aleatoria X, responder las siguientes preguntas:



a) Indicar cuántos valores hay en el rango de X

b) Calcular la esperanza de X

c) Calcular la varianza de X