



第1章 控制系统的输入条件分析

——2023年春季学期

授课教师：马 杰（控制与仿真中心）

霍 鑫（控制与仿真中心）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

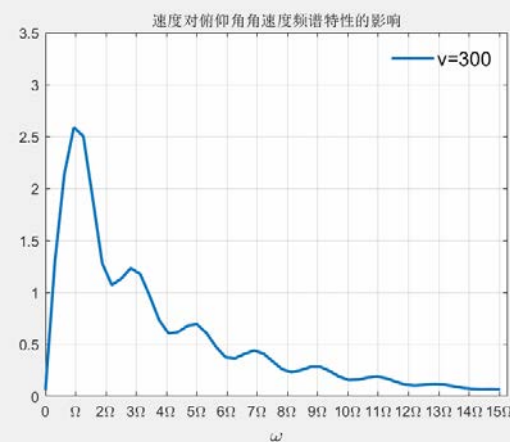
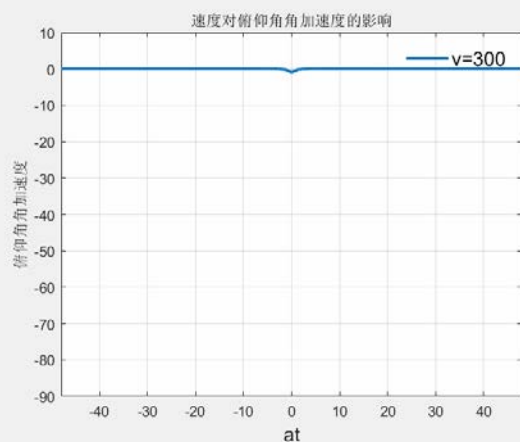
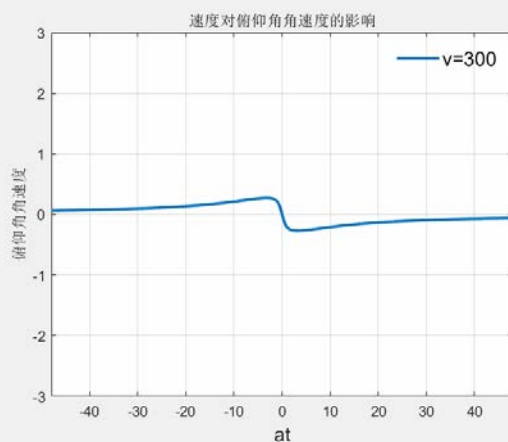


哈尔滨工业大学控制与仿真中心



作业篇

- 1 明确作业的目的，不是简单地复现曲线；
- 2 先调出稳定的系统，再加入饱和环节；
- 3 遇到问题都是好事，解决问题的过程就是进步的过程；
- 4 每一道都是综合题，可以得到全方位的锻炼。





回顾篇

傅里叶变换的相关概念

1. 任何满足狄里特利条件的**周期信号**都可以由频率 f 整数倍的正余弦信号的加权和表示;
2. 傅里叶**级数** (描述周期信号) 和傅里叶**积分** (非周期信号) 之间的关系, 傅里叶变换**FT**和傅里叶反变换**IFT**;

$f(t) \rightarrow F(\omega)$ 傅里叶变换**FT**

$F(\omega) \rightarrow f(t)$ 傅里叶反变换**IFT**

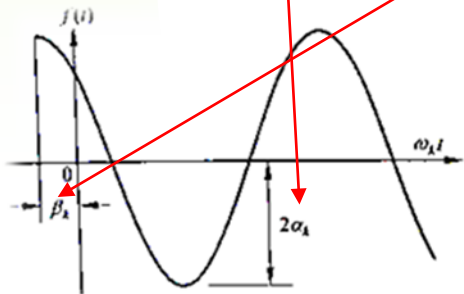


回顾篇

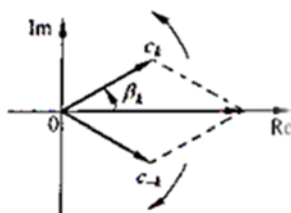
关于傅里叶的变换常见问题说明

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 n t}$$

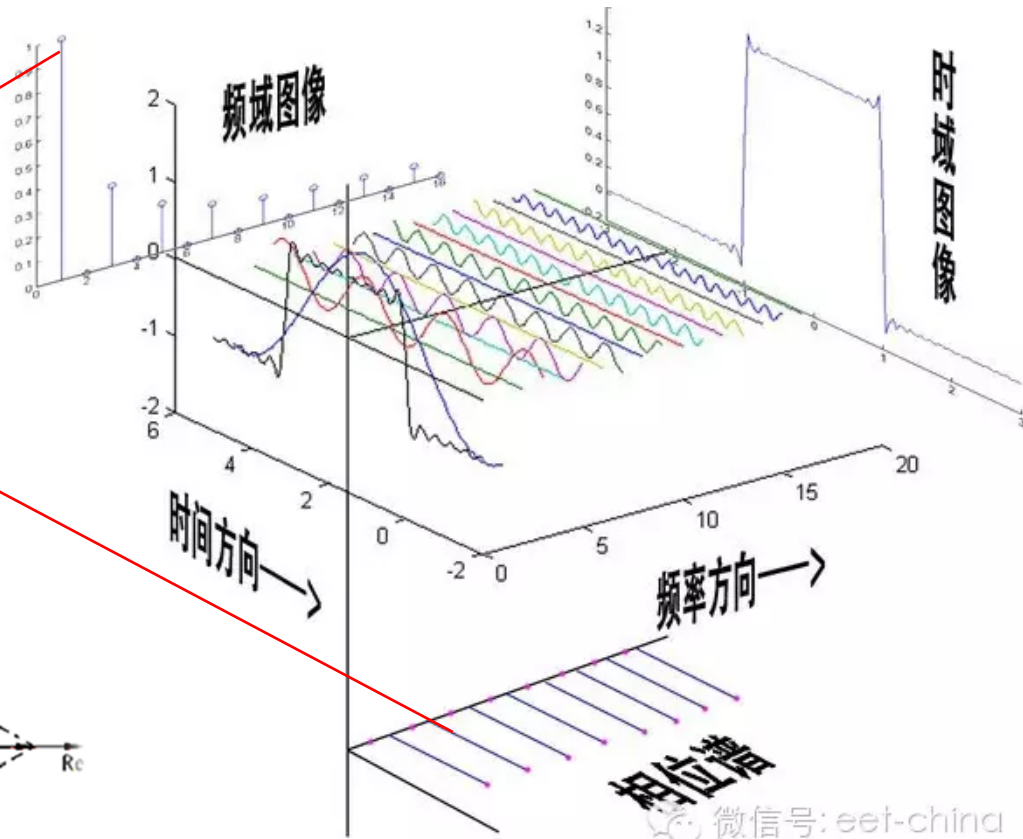
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2\alpha_n \cos(\omega_1 n t + \beta_n)$$



(a)



(b)



微信号: eet-china

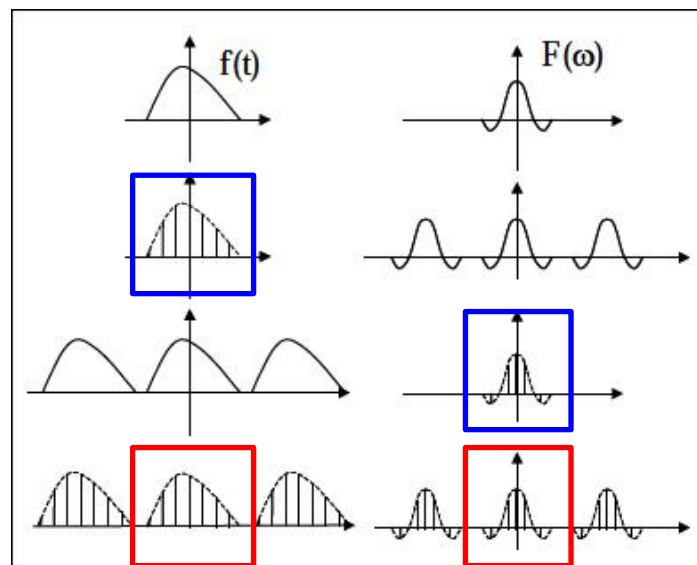


回顾篇

傅里叶变换的相关概念

3. 考虑到实际信号多是非周期，有限长度，离散的，数值的，所以通过对信号进行周期延拓，采样和截断等处理，得到了 **DFT** 变换表达式；

$$\begin{cases} F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jnk2\pi/N}, & (k = 0, \dots, N-1) \\ f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jnk2\pi/N}, & (n = 0, \dots, N-1) \end{cases}$$



4. 利用二进制特点，幂运算周期性，调整运算次序，提出了计算量更小的**FFT**算法。



回顾篇

傅里叶变换在控制系统设计中的用途

1. 基于典型的输入信号频谱分析，可以**指导元部件选型（动态特性）**；
2. 基于典型的输入信号频谱分析，可以**确定带宽和频响指标**；
3. 基于典型的输入信号频谱分析，**对模型进行简化**；
4. 通过输入和输出信号的频谱分析，可以获得**系统的频率特性**（绘制bode图，辨识参数）；
5. 分析信号中各种**特殊的频率成分**，如机械谐振，波动力矩等。

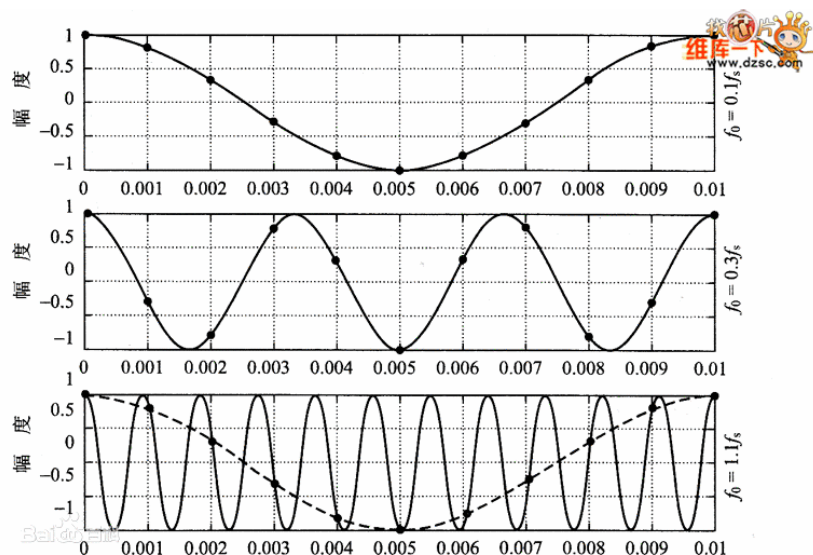


提升篇

- 傅里叶分析是对信号（数据）的分析，不是对系统的分析；
- 信号可以是时间的函数，也可以是其他变量的函数（如空间）
- DFT反变换和原信号并不是完全一致
- DFT分析的结果符合采样定理。采样频率大于或等于有效信号最高频率的两倍（1秒采样了100个点，DFT最高频谱为50Hz，分辨率为1Hz）

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_n t} \\ c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_n t} dt \end{aligned} \right\} T \rightarrow \infty \left\{ \begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \right.$$

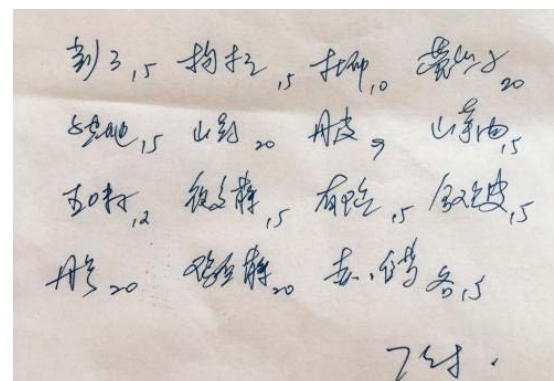
$$F(j\omega_n) = c_n T$$





拓展篇

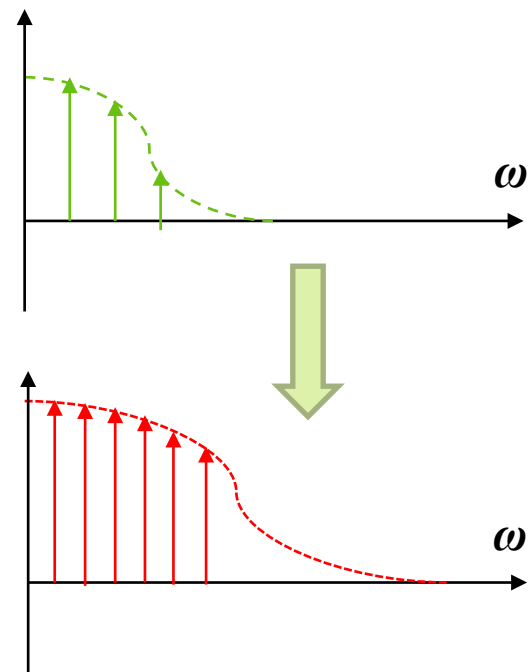
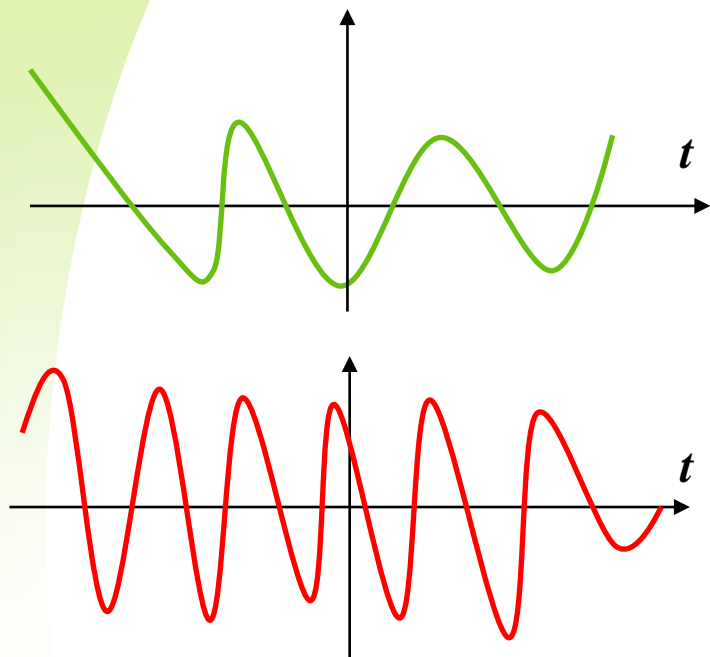
傅里叶变换给我们的洞见





拓展篇

傅里叶变换引发的人生思考



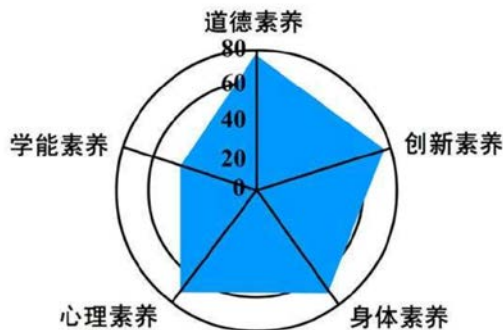
除去睡眠人的一生只有1万多天，但是人与人之间的区别在于你究竟是活了1万天，还是仅仅只是活了一天却重复了一万次，相信C罗的每一天，都会感到自己是崭新的。——贺炜

人生不能只是时域的简单重复，而应该是频域的不断丰富和增强



拓展篇

傅里叶变换给我们的启发



想象力

创造力

执行力

坚毅

领导力

学习力

内驱力

方案力

搜索力

增加雷达图的面积和简历中的内容，
丰富你的人生频谱



张某 MOU ZHANG

求职意向：材料研发/工艺岗位

教育背景

长春**大学（研究生） 2013.09-2016.04 材料科学与工程
主要课程：复合材料、表面工程、材料热力学、摩擦磨损、固体物理、材料强度学、固态相变、材料失效分析等。

山东建筑大学（本科） 2009.09-2013.07 材料成型及控制工程
主要课程：材料科学基础、铸造机械、液压气压传动、铸件形成理论、铸造工艺学、特种铸造等。

实习经历

- 中国重汽集团铸锻中心 2013.03-2013.04
进行生产实习，对铸造工艺、模具设计提出改进意见，了解铸造机械化的流程并熟悉相关设备。
- 山东邹平开泰集团 2013.03-2013.04
进行生产实习，了解铸模铸造的工艺，了解抛丸设备。通过砂型铸造生产了手轮零件，并对工艺设计提出改进意见。

科研项目

碳纤维增强金属基复合材料 2013.03-2013.04
主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*

碳纤维增强金属基复合材料 2013.03-2013.04
主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*主用从事碳纤维增强金属基复合材料的制备、性能测试等*

荣誉证书

- CET-6 (565分)
- 全国计算机等级二级
- 国际焊接工程师 (IWE)
- 教师资格证 (高中数学)
- CAD中级证书
- 唯科中国奖学金
- 优秀学生
- 优秀班干部

联系我

吉林省长春市延安大街2055号
(+86)131-xxxx-xxxx7
948187xx1@qq.com

职业技能

Office组件
CAD、UG
PS、AI、AE
Analysis

兴趣爱好

跑步、游泳、阅读、听音乐



开新篇

A1

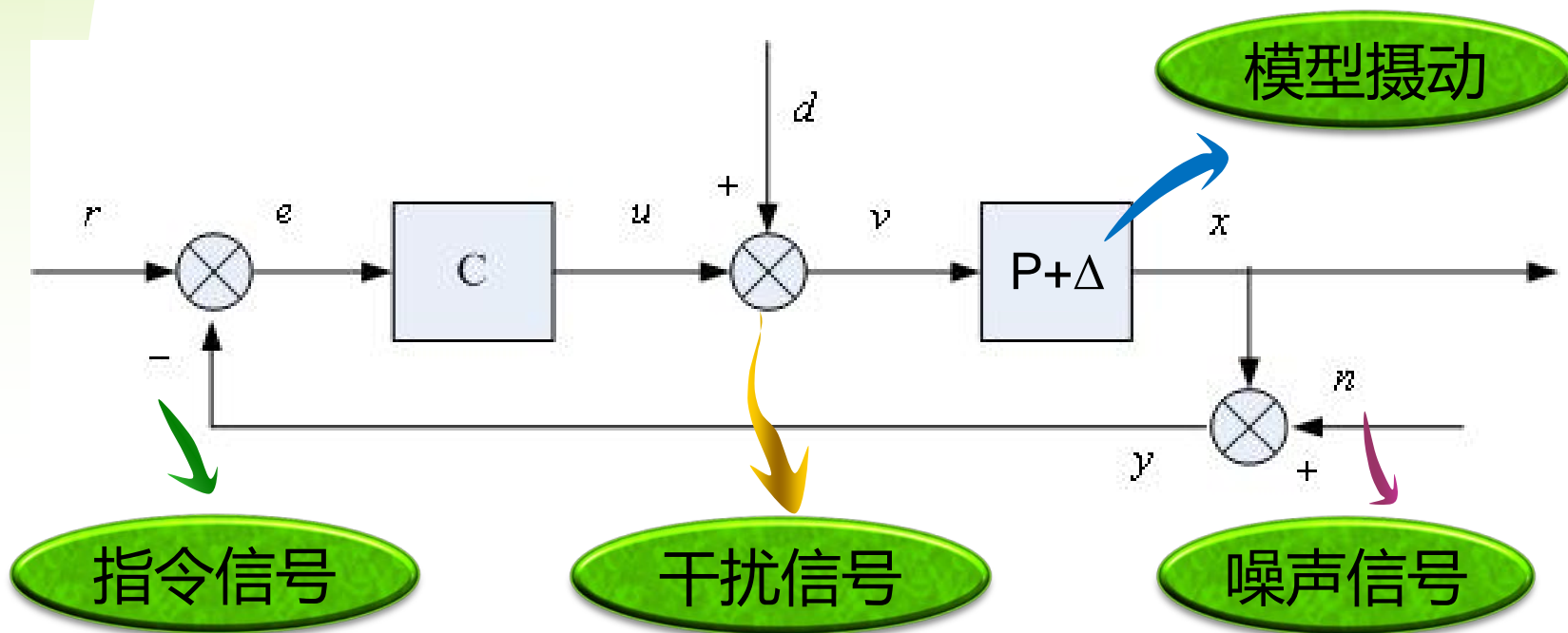
输入信号和跟踪误差

A2

噪声和它引起的误差

A3

扰动响应及抑制





1.1 输入信号和跟踪误差

1.1.1

输入信号的分析

1.1.2

静态误差系数和动态误差系数

1.1.3

跟踪误差的计算及在控制系统设计中的应用



1.1.1 输入信号的分析

分析内容

系统工作原理分析



确定典型的输入信号类型



典型输入信号特性分析



频谱分析



元部件选型及带宽设计
依据之一

输入信号及导数幅值



执行元件、测量元件等
部件选择依据

误差分析



控制器设计依据之一



1.1.1 输入信号的分析

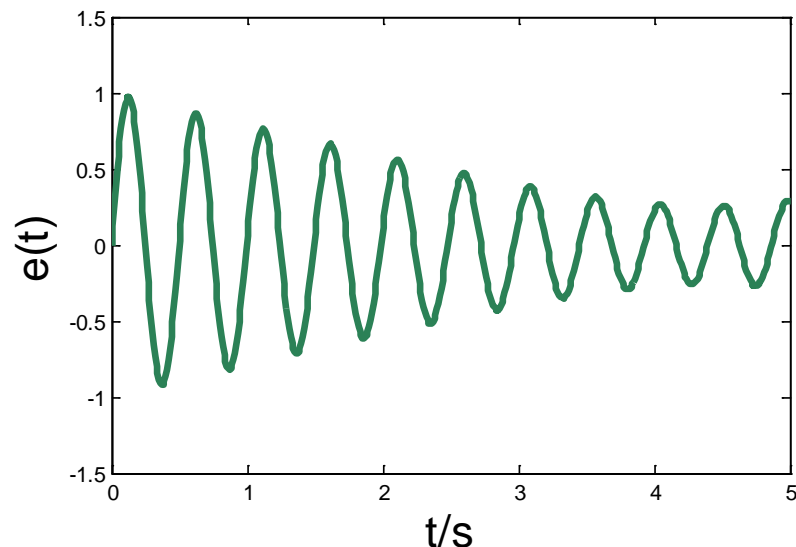
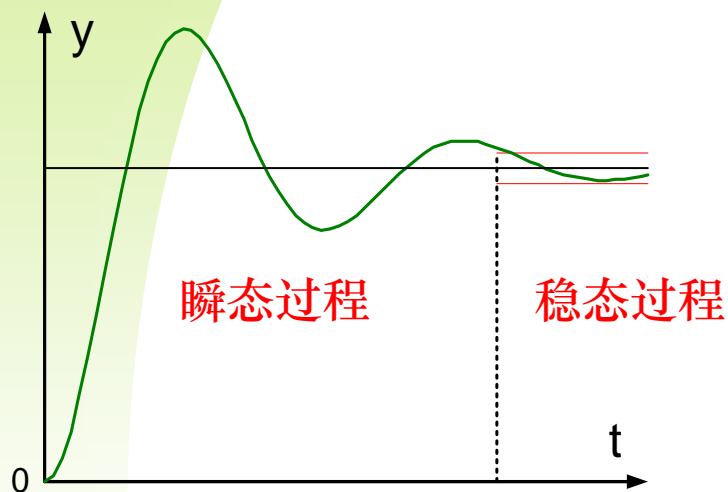
本节课需要掌握的内容

- 1 了解误差的分类
- 2 了解误差的指标形式，理解控制系统指标的重要性
- 3 掌握误差与偏差，稳态误差与暂态误差，动态误差与静态误差，系统误差与随机误差等概念的区别
- 4 掌握静态误差系数法及其适用条件
- 5 理解误差与稳定性之间的矛盾
- 6 掌握减小误差的常用方法及其适用条件



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



$t \rightarrow \infty ?$

暂态(瞬态)
误差

稳态误差

$e(t) = \text{const} ?$

静态误差

动态误差

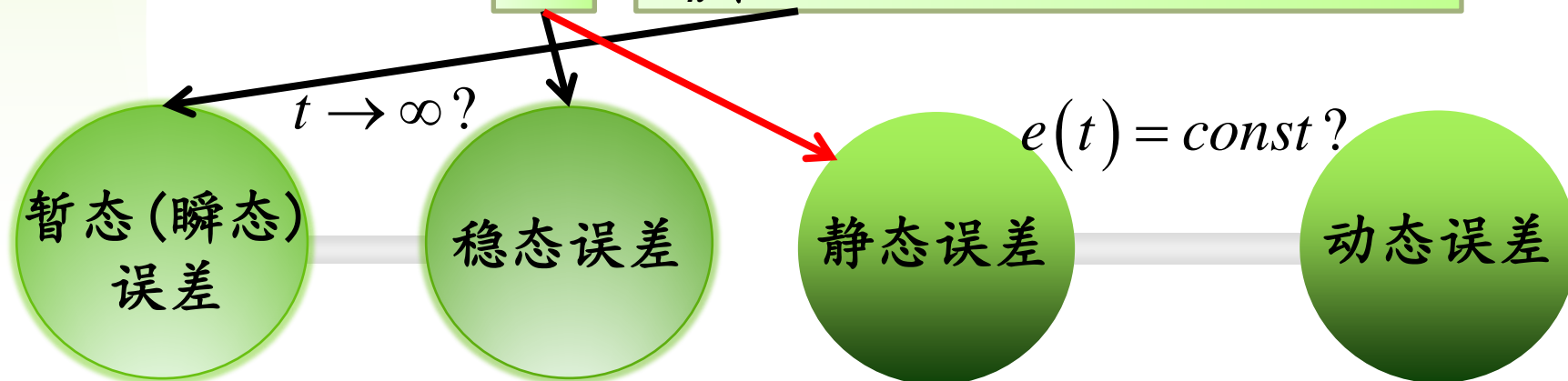


1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + 2\beta)$$





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

强调静态误差的系统：温控、滚梯、印刷机、离心机





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

强调动态误差的系统：数控车床，雷达系统，导引头，稳定平台

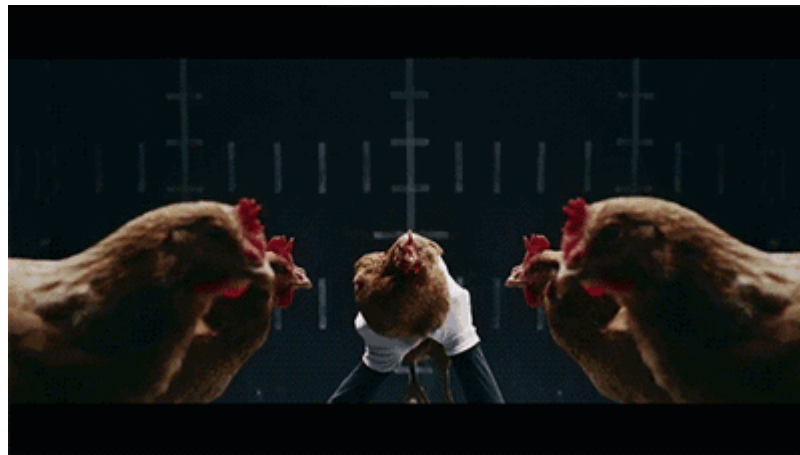




1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

强调动态误差的系统：数控车床，雷达系统，导引头，稳定平台



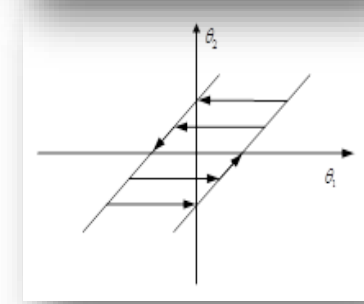
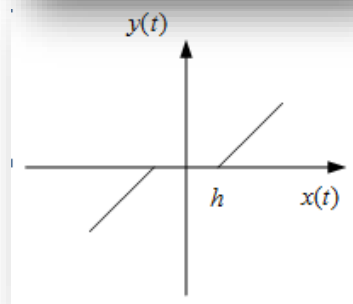
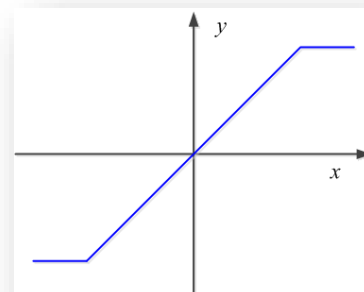
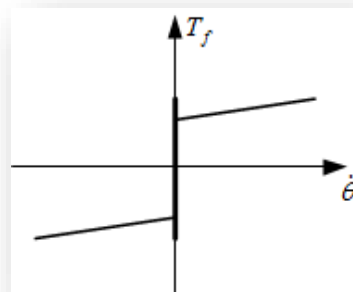
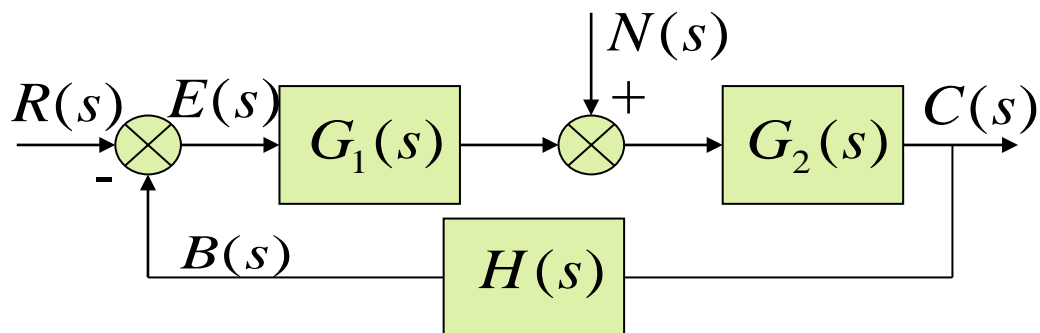


1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

由于系统结构、输入作用形式所产生的稳态误差称为**原理性稳态误差**。

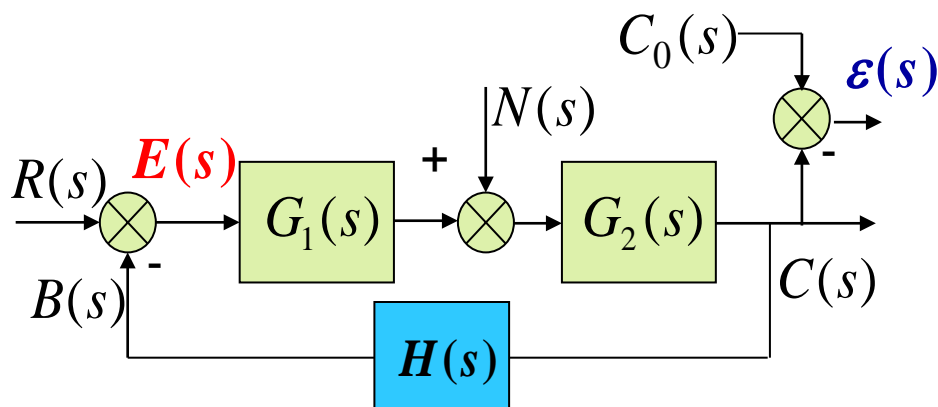
由于非线性因素（摩擦、间隙、死区等）所引起的系统稳态误差称为**附加稳态误差**或**结构性稳态误差**。





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



误差： 输出量的希望值 $c_0(t)$ 和实际值 $c(t)$ 之差。

$$\epsilon(t) = c_0(t) - c(t)$$

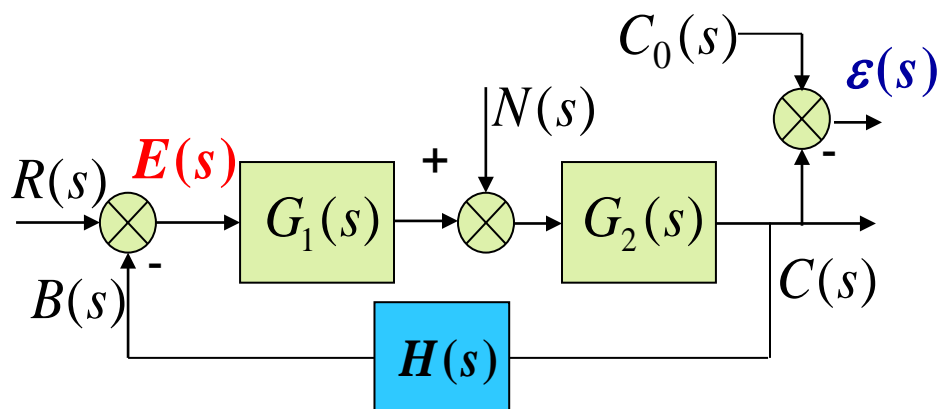
偏差： 系统的输入 $r(t)$ 和主反馈信号 $b(t)$ 之差。即

$$e(t) = r(t) - b(t)$$



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



稳态误差：当 $t \rightarrow \infty$ 时的系统误差，用 ε_{ss} 表示。即

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

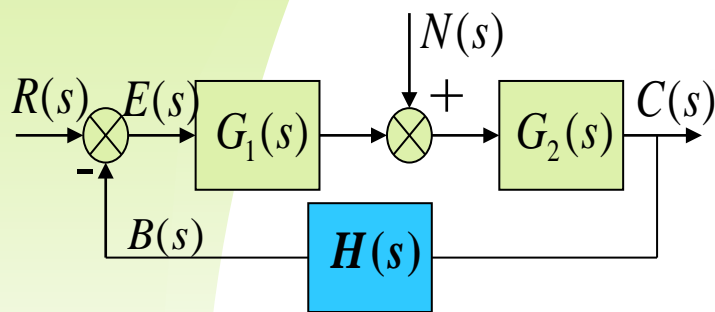
稳态偏差：当 $t \rightarrow \infty$ 时的系统偏差，用 e_{ss} 表示。即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$



1.1.2 误差系数

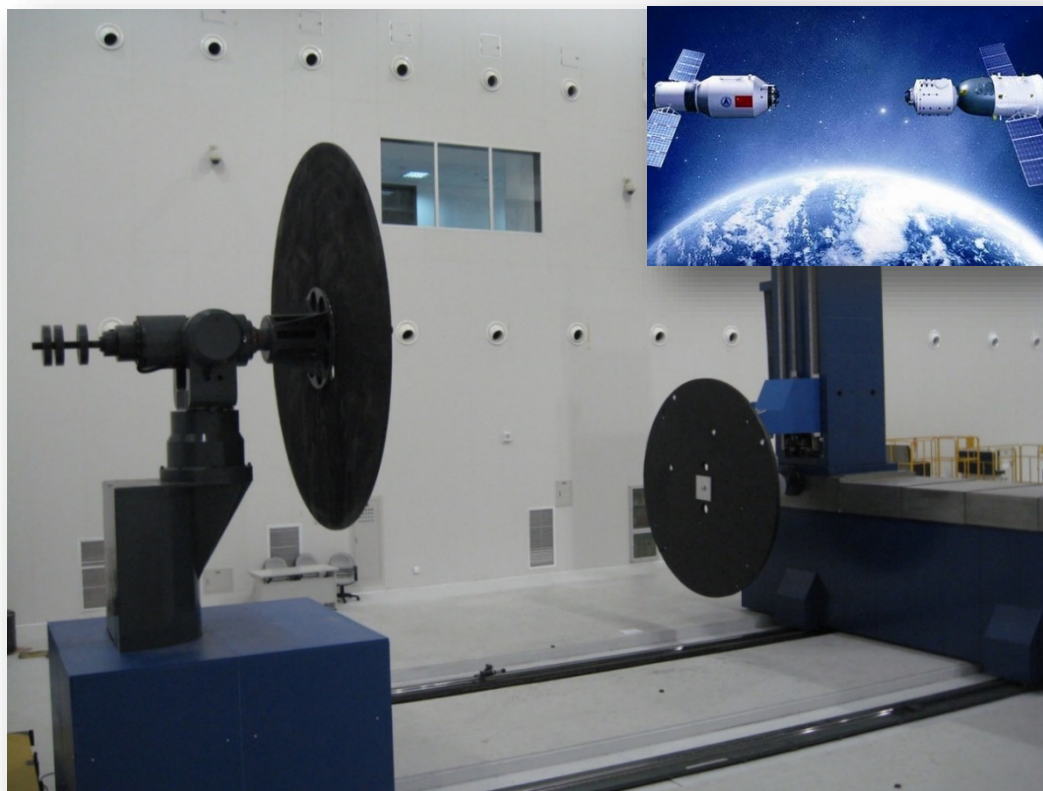
误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



传感器测得的是角位置
期望被控量为线位移

$H(s)?$

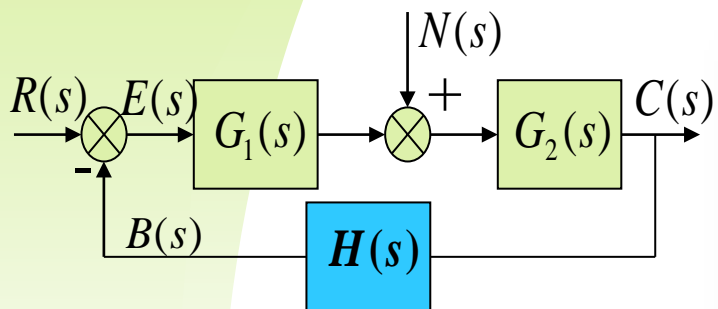
$$H(s) = k \quad (^\circ / \text{mm})$$





1.1.2 误差系数

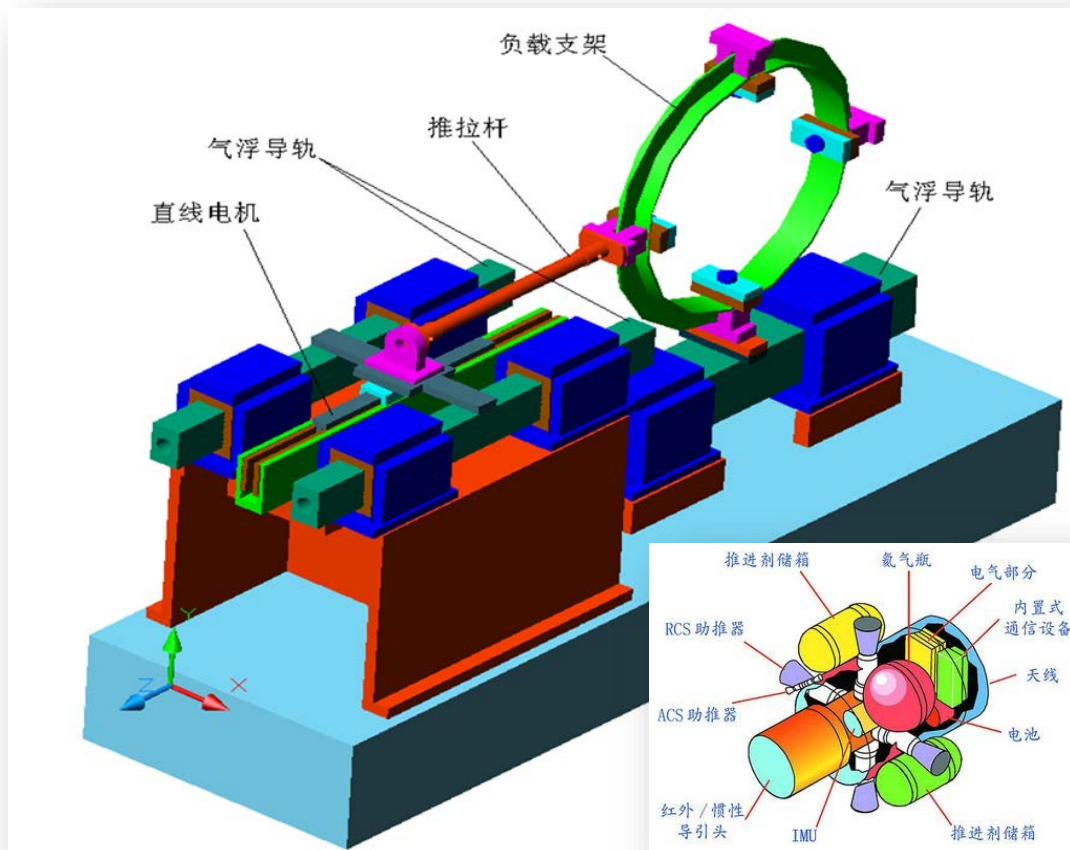
误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



传感器得到的是位移
期望被控量为加速度

$H(s)?$

$$H(s) = \frac{1}{s^2}$$





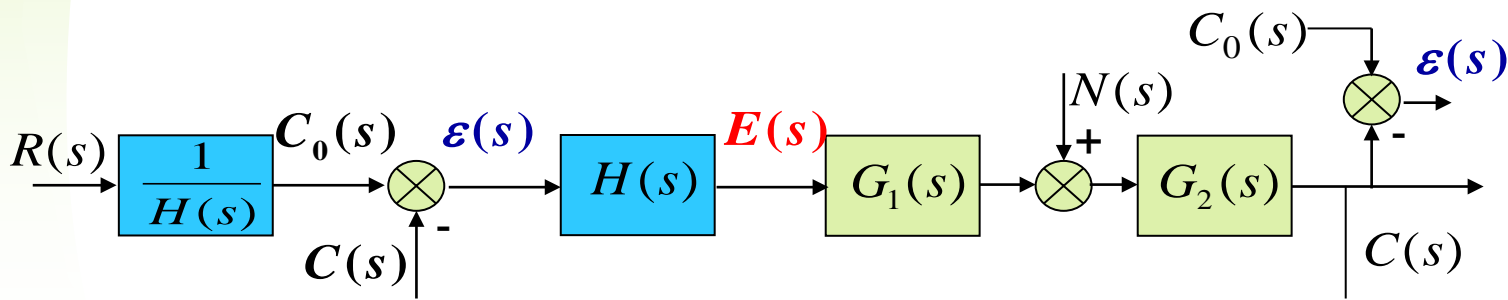
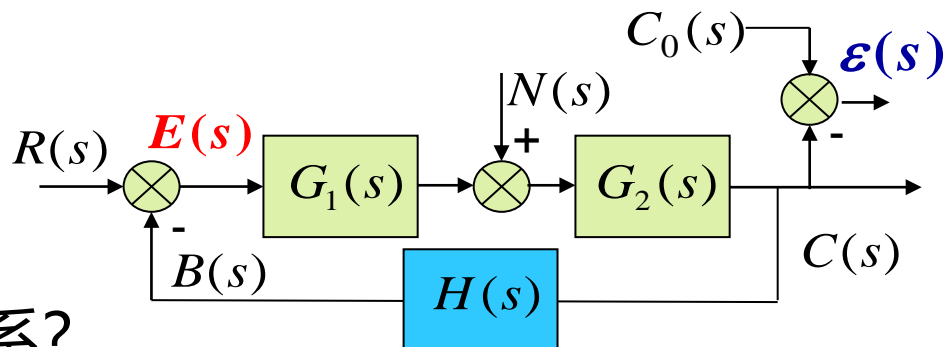
1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

对非单位反馈系统

$$r(t) \neq c_0(t) \quad \varepsilon(t) \neq e(t)$$

偏差和误差之间存在一定的关系？

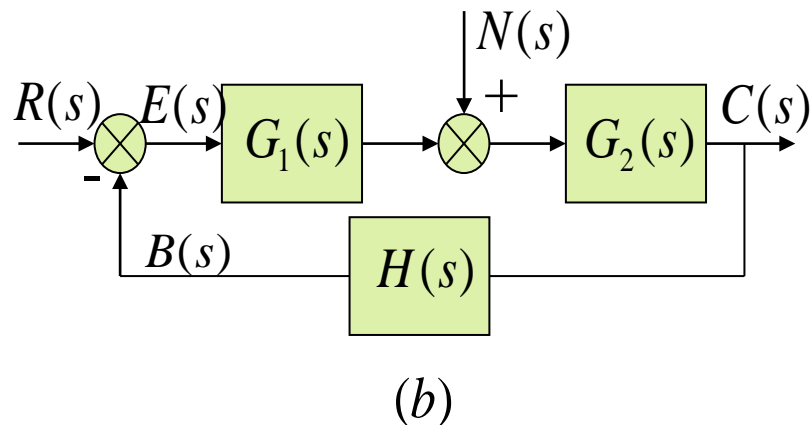
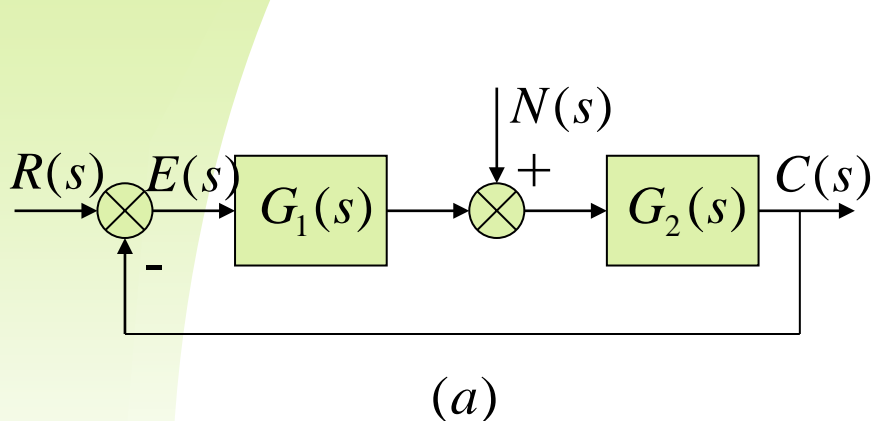


$$E(s) = R(s) - B(s) = H(s)C_0(s) - H(s)C(s) = H(s)\varepsilon(s)$$



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法



我们用**偏差** $E(s)$ 代替**误差**进行研究。除非特别说明，后文所指的误差就是指偏差；**稳态误差**就是指**稳态偏差**。

注意：只有稳定的系统，才可以计算稳态误差。

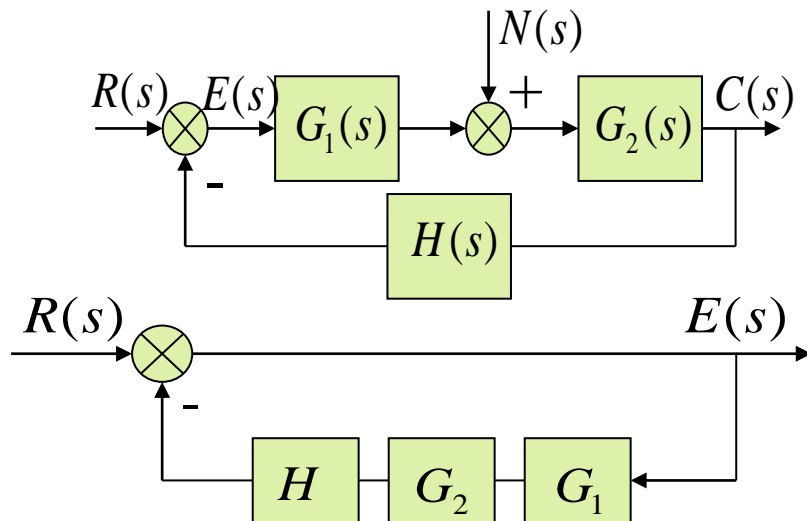


1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

不考虑扰动的影响。由图(b)，随动系统的误差 $E(s)$ 为（见右图）：

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)},$$
$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



当 $t \rightarrow \infty$ 的误差称为稳态误差 e_{ssr} 。根据终值定理有：

$$e_{ssr} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1G_2H} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)}$$

式中， $G_k(s) = G_1G_2H$ 为开环传递函数。

显然， e_{ssr} 与输入和开环传递函数有关。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | **误差分析** | 静态误差系数 | 减小误差的方法

假设**开环传递函数** $G_k(s)$ 的形式如下:

$$G_k(s) = \frac{k}{s^\nu} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (\tau_k s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{\prod_{j=1}^{n_1} (T_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} = \frac{k}{s^\nu} \cdot G_0(s)$$

式中: k – 开环放大系数, ν – 积分环节的个数;

$G_0(s)$ – 开环传递函数去掉**积分和比例环节**剩余部分。

$$G_0(0) = 1, m_1 + 2m_2 = m, \nu + n_1 + 2n_2 = n$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_k(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + \frac{k}{s^\nu} G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{\nu+1} R(s)}{s^\nu + k}$$

给定作用下的稳态误差与**外作用**有关; 与时间常数形式的**开环增益** k 有关; 与**积分环节的个数**有关。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s}$ 时 ($r(t) = 1(t)$)

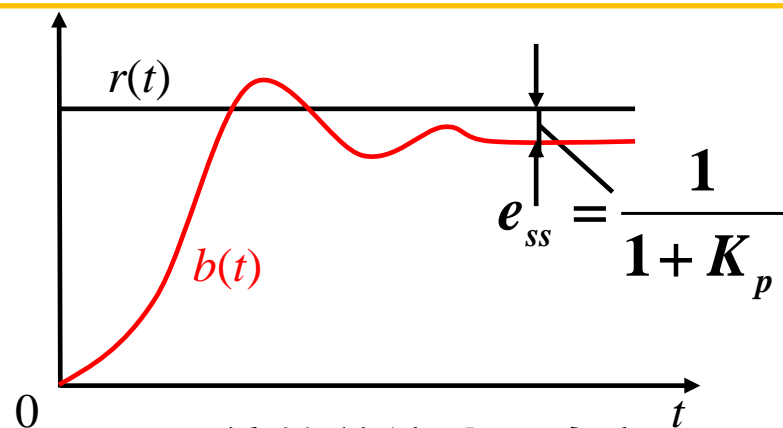
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^\nu} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$ 称为静态位置误差系数;

当 $\nu = 0$ 时

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} kG_0(s) = k$$

$$\Rightarrow e_{ssr} = \frac{1}{1 + k}$$



0型系统的单位阶跃响应



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s}$ 时 ($r(t) = 1(t)$)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^\nu} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

式中: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_k(s)$ 称为静态位置误差系数;

$$\text{当 } \nu \geq 1 \text{ 时, } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^\nu} G_0(s) = \infty, \Rightarrow e_{ssr} = 0$$

K_p 的大小反映了系统在阶跃输入下的稳态精度。 K_p 越大 e_{ssr} 越小, K_p 反映了系统跟踪阶跃信号的能力。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | **误差分析** | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时 ($r(t) = t \cdot 1(t)$)

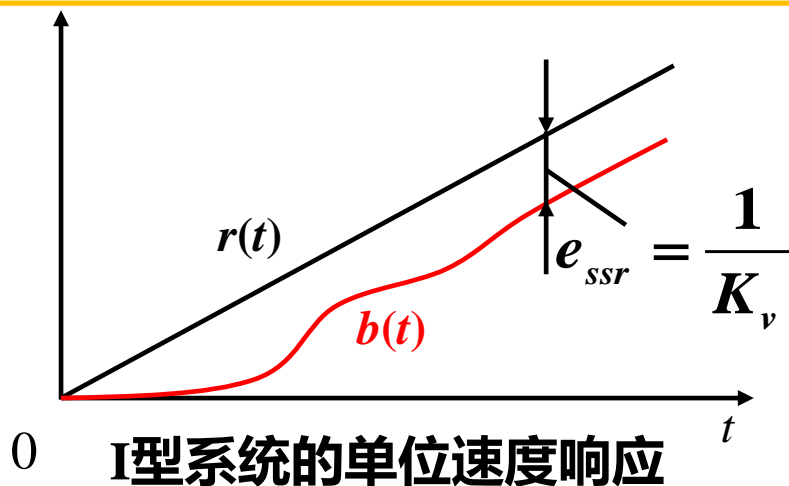
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-1}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)$ 称为**静态速度误差系数**;

当 $\nu = 1$ 时,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} kG_0(s) = k,$$

$$\Rightarrow e_{ssr} = \frac{1}{k}$$





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | **误差分析** | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^2}$ 时 ($r(t) = t \cdot 1(t)$)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-1}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_v}$$

式中: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_k(s)$ 称为**静态速度误差系数**;

当 $\nu = 0$ 时, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} skG_0(s) = 0, \Rightarrow e_{ssr} = \infty$

当 $\nu \geq 2$ 时, $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-1}} G_0(s) = \infty, \Rightarrow e_{ssr} = 0$

K_v 的大小反映了系统在斜坡输入下的稳态精度。 K_v 越大, e_{ssr} 越小。所以说 K_v 反映了系统跟踪斜坡信号的能力。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 时 ($r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$)

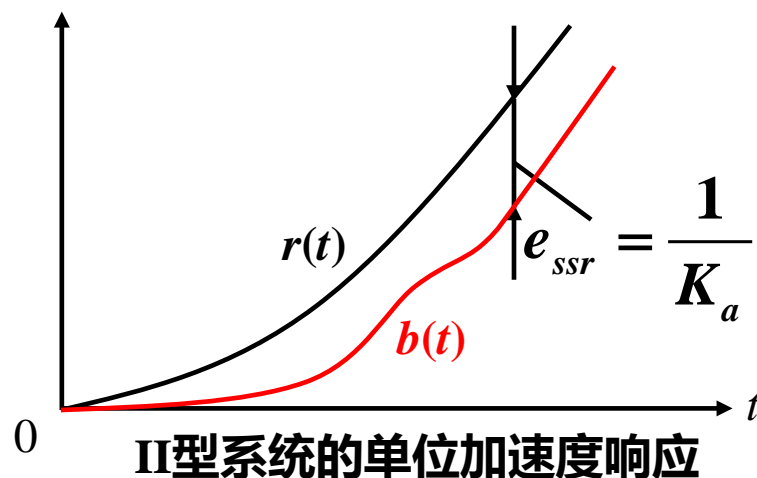
$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-2}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$ 称为静态加速度误差系数;

当 $\nu = 2$ 时,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} k G_0(s) = k,$$

$$\Rightarrow e_{ssr} = \frac{1}{k}$$





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当输入为 $R(s) = \frac{1}{s^3}$ 时 ($r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$)

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G_k(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-2}} \cdot G_0(s)} = \frac{1}{K_a}$$

式中: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_k(s)$ 称为静态加速度误差系数;

当 $\nu = 0, 1$ 时, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^{(2,1)} k G_0(s) = 0, \Rightarrow e_{ssr} = \infty$

当 $\nu \geq 3$ 时, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k}{s^{\nu-2}} G_0(s) = \infty, \Rightarrow e_{ssr} = 0$

K_a 的大小反映了系统在加速度输入下的稳态精度。 K_a 越大, e_{ssr} 越小。所以说 K_a 反映了系统跟踪加速度信号的能力。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

系统 类型别	静态误差系数			静态误差		
	K_p	K_v	K_a	单位阶跃 输入 $1(t)$	单位速度 输入 t	加速度输 入 $0.5t^2$
0型	k	0	0	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞
I型	∞	k	0	0	$\frac{1}{k}$	∞
II型	∞	∞	k	0	0	$\frac{1}{k}$

上表中， k 为开环放大系数（开环传递函数写成时间常数形式时的开环增益）



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | **静态误差系数** | 减小误差的方法

系统 类型别	静态误差系数			静态误差		
	K_p	K_v	K_a	单位阶跃 输入 $1(t)$	单位速度 输入 t	加速度输 入 $0.5t^2$
0型	$\frac{1}{1+k}$	0	0	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞
I型	∞	$\frac{1}{k}$	0	0	$\frac{1}{k}$	∞
II型	∞	∞	$\frac{1}{k}$	0	0	$\frac{1}{k}$

第二种静态误差系数定义方式，与动态误差系数相对应



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

□ 当系统的输入信号由位置，速度和加速度分量组成时，即

$$r(t) = A + Bt + \frac{Ct^2}{2}$$

有：

$$e_{ssr} = \frac{A}{1+k} + \frac{B}{k} + \frac{C}{k}$$

$$e_{ssr} = \frac{A}{1+K_p} + \frac{B}{K_v} + \frac{C}{K_a}$$

是否正确？

实际系统中有这样的组合信号吗？



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | **静态误差系数** | 减小误差的方法

静态误差系数适用条件：

- 系统是稳定的
- 指令只能是三种典型的指令或者是他们的线性组合

与静态误差相关的因素

- 系统的增益
- 信号的形式和幅值
- 系统的型别

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + \frac{k}{s^v} G_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{v+1} R(s)}{s^v + k}$$

减小静态误差的方法：

- 提高增益
- 提升型别

善于抓住主要矛盾，让复杂问题简单化



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | **静态误差系数** | 减小误差的方法

- ❖ 给定作用下的稳态误差**与外作用有关**。对同一系统加入**不同的输入**，**稳态误差可能不同**。
- ❖ 与时间常数形式的**开环增益 k 有关**；对有差系统， k 越大，稳态误差越小，但同时系统的**稳定性会变差**。
- ❖ **与积分环节的个数有关**。积分环节的个数越多，稳态误差越小，但同时系统的**稳定性和动态特性会变差**。所以Ⅲ型及Ⅲ型以上的系统几乎不用。

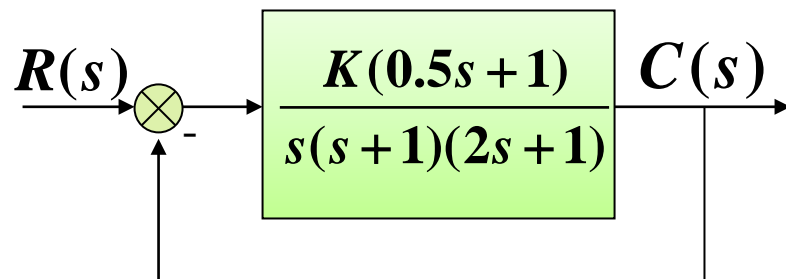
由此可见对稳态误差的要求往往与系统的**稳定性和动态特性**的要求是矛盾的。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

例1：系统结构如右图所示，当输入信号为单位斜坡函数时，调整 K 值能使稳态误差小于0.1。



解：系统特征方程为

$$2s^3 + 3s^2 + (1 + 0.5K)s + K = 0$$

由劳斯判据知稳定的条件为： $0 < K < 6$

$$\Phi_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} = \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \quad e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(2s+1)}{s(s+1)(2s+1) + K(0.5s+1)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

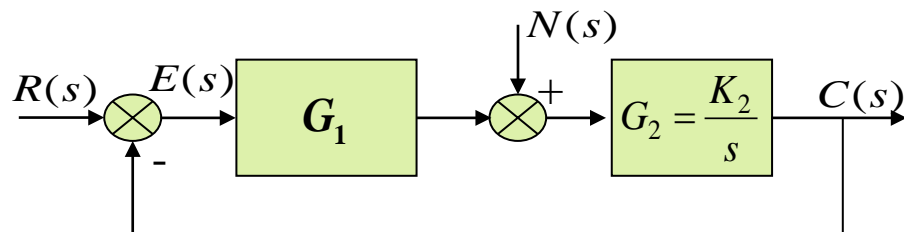
由稳定的条件知： $e_{ss} > \frac{1}{6}$ 不能满足 $e_{ss} < 0.1$ 的要求



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法

例2：若要斜坡信号输入时稳态误差为零，如何设计 G_1 ？



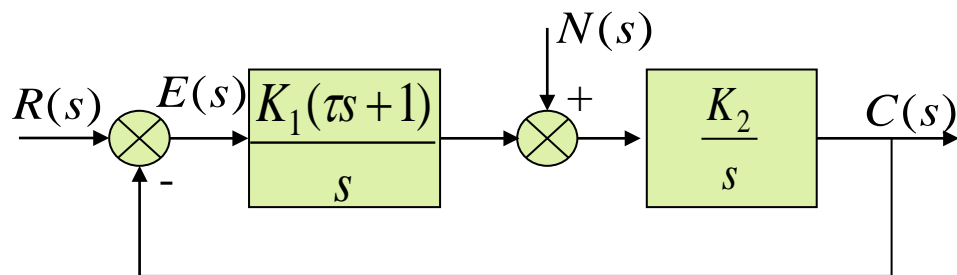
$$G_1 = \frac{K_1}{s} \quad e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K_1 K_2 / s^2} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + K_1 K_2} = 0$$

对不对？

由于此时系统的稳定性遭到破坏，成为结构不稳定系统，直接加一个积分环节是不可行的。若要满足误差为零，并保证系统稳定，可以将 G_1 设计为**比例加积分环节**

$$G_1 = \frac{K_1(\tau s + 1)}{s}$$

$$\Phi_E = \frac{s^2}{s^2 + K_1 K_2 \tau s + K_1 K_2}$$



当 $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $\tau > 0$ 时系统稳定



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-滞后

滞后校正主要利用其对高频幅值衰减性来提高增益，提高的最大幅度为

$$20\log \alpha$$

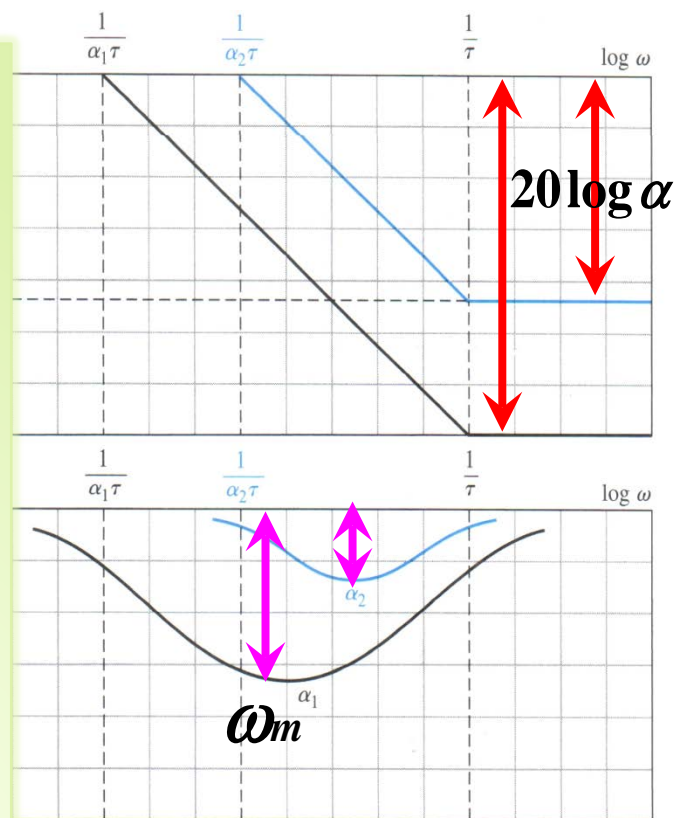
但是滞后环节会在 ω_m 处出现最大滞后相角，必须合理选择 ω_m

$$\omega_m = \sqrt{zp} = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$$

应用滞后环节较小静态误差时，必须要在加入滞后环节后重新调整系统增益，使调整前后的剪切频率不变，这样就达到了提高了系统低频增益的作用。

$$G_c(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} = \frac{1}{\alpha} \frac{(s + z)}{(s + p)}$$

一般的做法是根据系统实际误差大小确定要提高增益的倍数 α ，根据剪切频率所在位置确定中心频率 ω_m ，然后根据 α 和 ω_m 即可以计算出 τ ，从而确定滞后环节传递函数



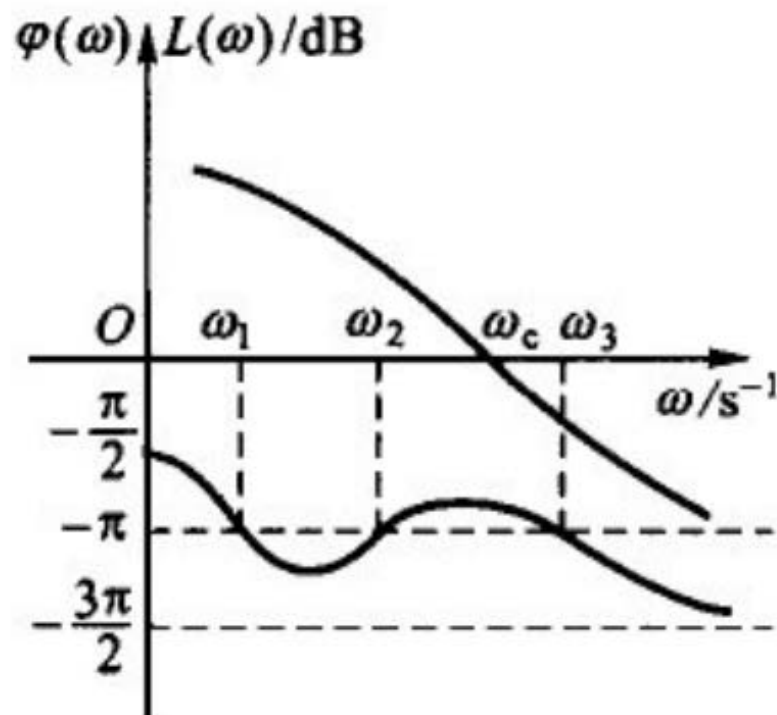


1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-滞后

应用滞后环节注意事项:

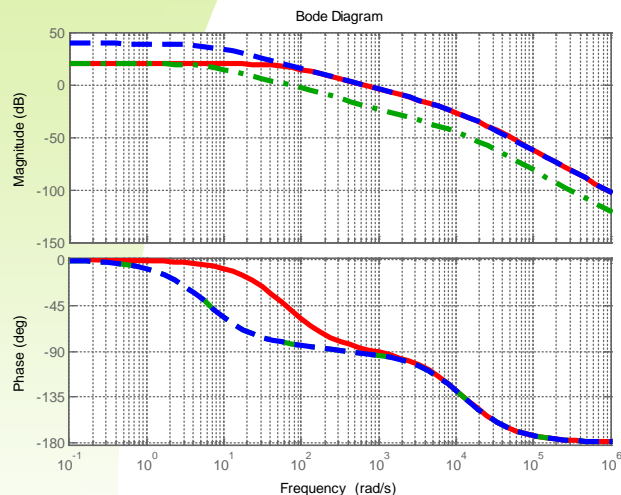
- 提高同样的增益, 用多个中心频率(ω_m)不同的小幅值(α)滞后环节比一个大幅值的更好, 但环节要中心频率要错开, 以避免在局部损失过大的相角从而导致条件稳定;
- 滞后环节要应用于低频, 并尽量远离剪切频率, 以减小剪切频率处的相角损失;
- 滞后环节由于处于低频, 时间常数较大, 因此误差收敛的速度很慢, 对于要求误差快速收敛的系统并不适用。



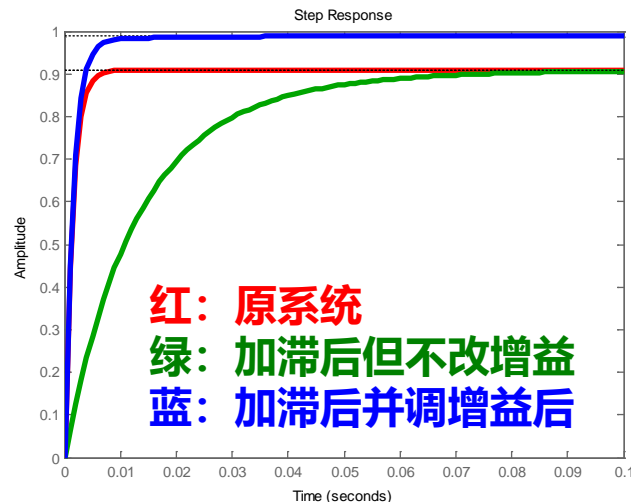


1.1.2 误差系数

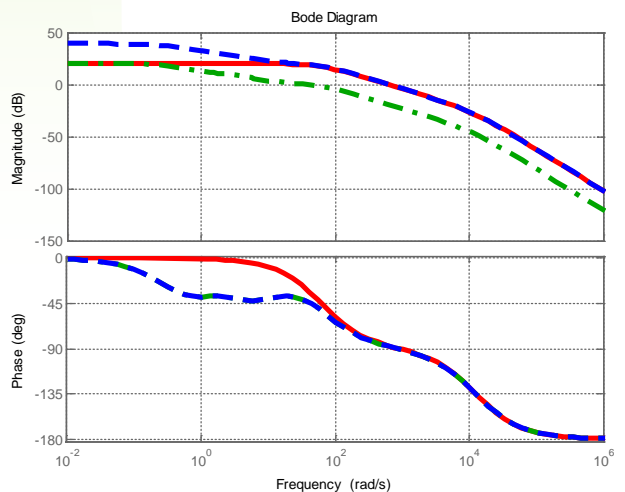
误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-滞后



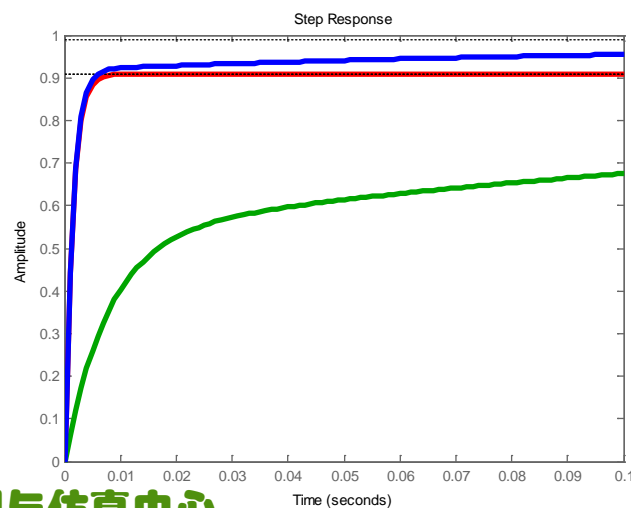
一个3Hz提高增益9倍的滞后环节，损失相角很多，但误差收敛速度快



红：原系统
绿：加滞后但不改增益
蓝：加滞后并调增益后



两个1Hz和0.1Hz提高增益各3倍的滞后环节（共9倍），损失相角很小，但误差收敛速度慢

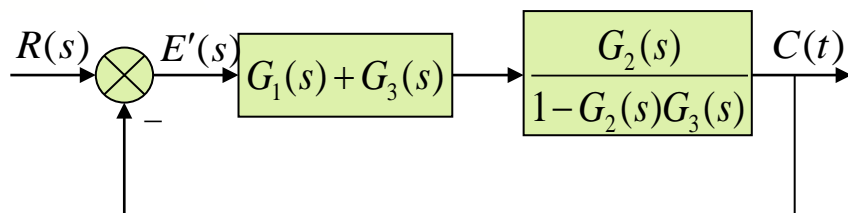
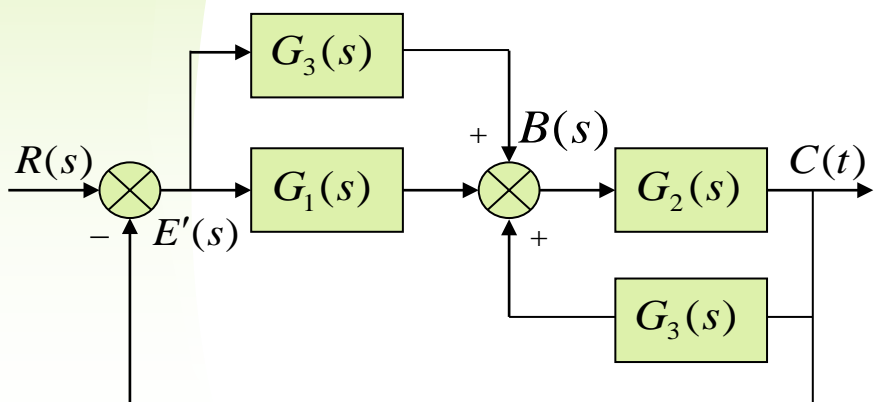
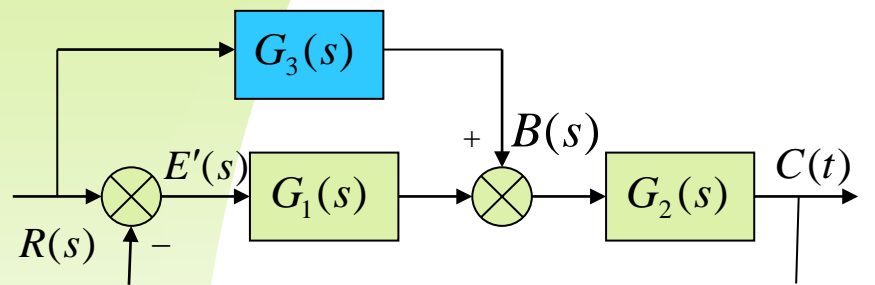


Time (seconds)



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-顺馈



$$\frac{E'(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + \frac{[G_1(s) + G_3(s)]G_2(s)}{1 - G_2(s)G_3(s)}} = \frac{1 - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$$\therefore E'(s) = \frac{1 - G_2G_3}{1 + G_1G_2} \cdot R(s)$$

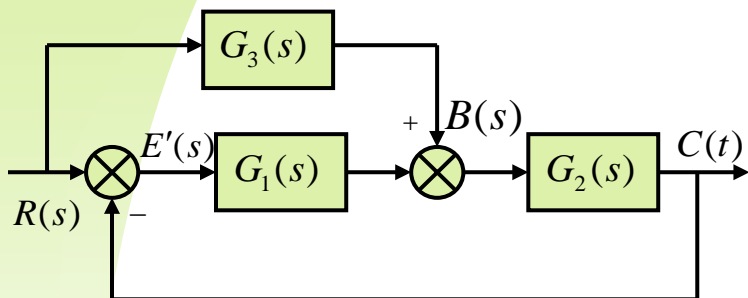
若满足 $G_3 = \frac{1}{G_2}$, 则 $E'(s) = 0$,

即由给定引起的稳态误差为零, 输出完全复现给定输入。该式称为按给定作用实现完全不变性的条件。



1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-顺馈



$$G(s) = \frac{1}{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)} \Rightarrow$$
$$G^{-1}(s) \approx \frac{(\tau_e s + 1)(\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

- 顺馈环节也可用来减小**原理性误差（静态和动态）**，但对非线性因素引起的附加性误差无效；
因为它的输入只包含指令信息，而没有反馈信息，是一种开环控制方式；
- 顺馈环节应用时，在输入指令各阶导数不可用的情况下，必须考虑它的**物理可实现性**；
可以通过附加极点的方式来近似实现；
- 顺馈环节的结构和参数依赖于被控对象的精确模型，因此对被控对象的结构和参数摄动等不确定性**不具有鲁棒性**。
因此对于不确定性较大的系统，使用时要慎重。



1.1.2 误差系数

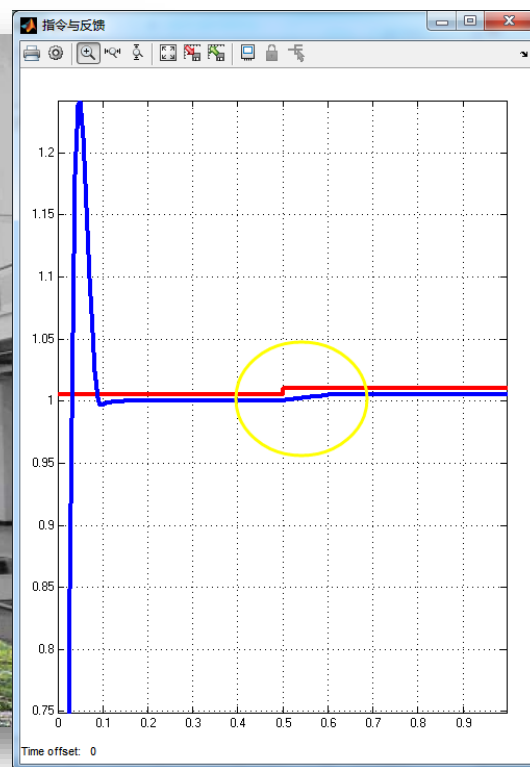
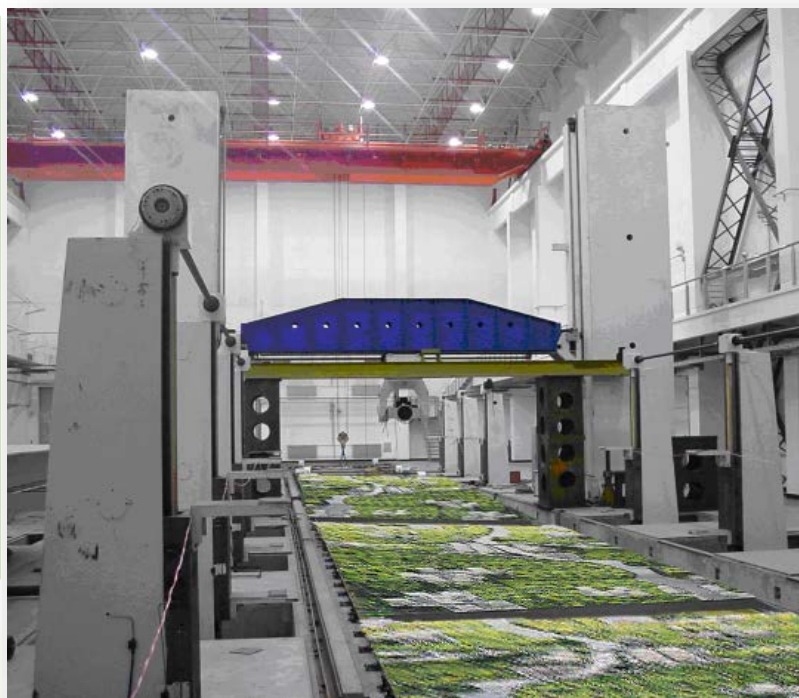
误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-补偿

如果型别不能提升了，滞后也不能再增加了，由于非线性因素存在，顺馈也无效了，如何处理？

如果误差具有重复性，则可以采用补偿得方法来减小误差：

- 1 指令修正
- 2 反馈修正

原理性误差





1.1.2 误差系数

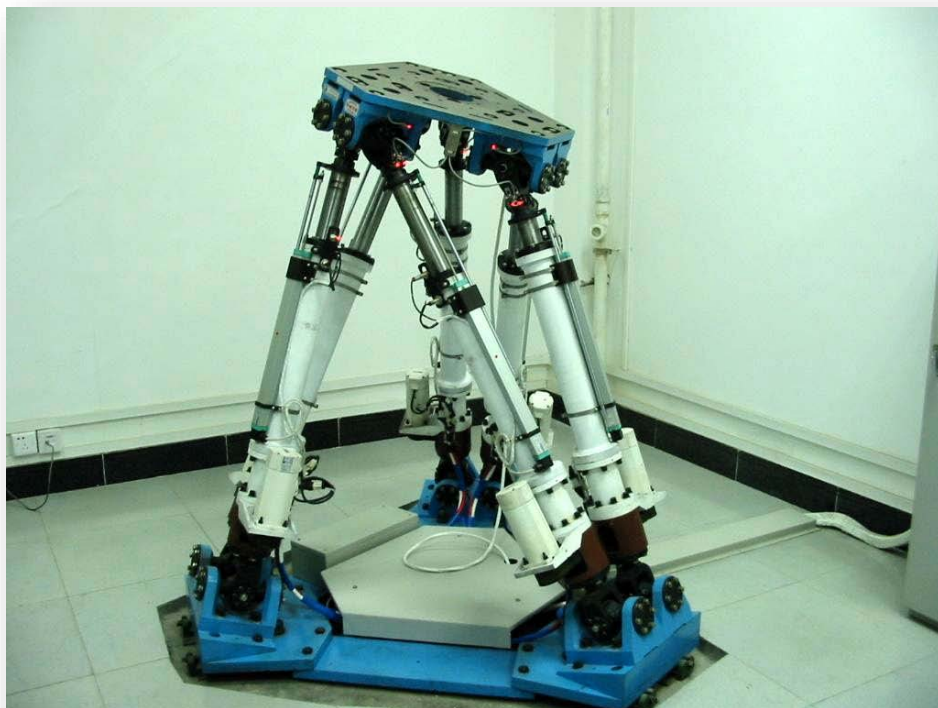
误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-补偿

对于机械结构带来的附加性误差，因其具有一定的重复，也可以采用补偿的方法来进行处理

如果误差具有重复性，
则可以采用补偿得方
法来减小误差：

- 1 指令修正
- 2 反馈修正

附加性误差





1.1.2 误差系数

误差定义与分类 | 误差分析 | 静态误差系数 | 减小误差的方法-总结

- 一、对于给定典型信号输入下静态误差为**无穷大**的系统，必须通过**提高系统型别**来解决；
- 二、对于静差为**非零常数**的系统
 - 0型系统可以直接加**积分环节**解决；
 - I型系统可以**提高增益**或加**比例+积分环节**或者**滞后**环节来解决或改善；
 - II型系统则一般只能通过**提高增益**或**加入滞后**环节来改善；
- 三、**顺馈**也可用来减小**原理性误差**，但对非线性因素引起的附加性误差无效，而且它的物理可实现性、对参数摄动的敏感性需要考虑。顺馈也会抬高系统闭环谐振峰；
- 四、系统型别和增益都提高到极限时，一般只能通过**补偿**方法来减小系统误差（**开环补偿**，要求误差必须有**重复性**）。



1.1.1 输入信号的分析

总结

- 1 傅里叶变换问题总结和说明
- 2 几种误差的指标形式，控制系统性能指标的重要性
- 3 各种误差概念和他们之间的关系
- 4 静态误差的推导和静态误差系数法
- 5 误差与稳定性之间的矛盾
- 6 几种减小误差的方法及其应用条件



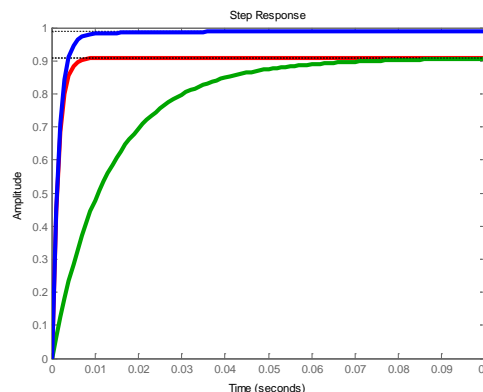
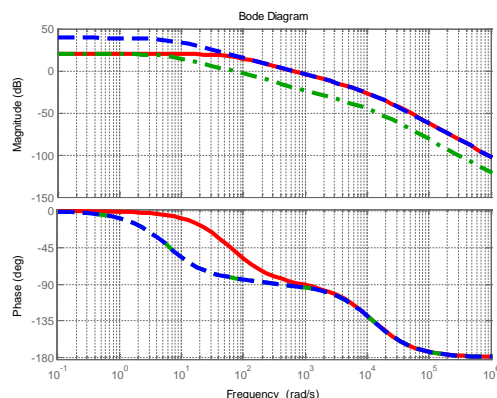
第4周 课后作业

1 必选作业（滞后环节的作用的仿真分析）

7.1 给定系统 $G(s) = 50/(0.2s+1)(0.02s+1)$

- (1) 采用比例控制器 $C(s)=K_1$ （自行设计 K_1 ），观察单位阶跃信号下静态误差；
- (2) 采用控制器 $C(s)=K_2/s$ （自己设计 K_2 ），观察单位阶跃信号下静态误差；
- (3) 在控制器 K_1 的基础上，在1Hz处加入滞后校正环节，将低频增益提升3倍，观察阶跃下的静态误差，与（1）的对比，看看误差是否减小了1/3.

要求：参考下面的图，要画出每种情况下校正前后系统的Bode图，和阶跃响应曲线



选做内容：把指令换成斜坡信号，重复（1）（2）（3），此时滞后环节要与(2)结合，即与 K_2/s 一起用。



第4周 课后作业

2 可选作业

7-1 思考题：为什么静态误差分析时只考虑了阶跃、斜坡和抛物线三种信号？

7-2 导图题：理清误差相关概念，可画思维导图。

7-3 思考题：分析顺馈环节的利与弊，及适用条件；

7-4 导图题：总结整理所有减小系统误差的方法，应用前提和副作用，可画思维导图。

7-5 思考题：为什么控制系统设计时允许的积分环节通常不超过两个？

7-6 分析题：给定均匀采样5s的2000个数据，得到傅里叶分析结果中的频率间隔（最小频率）和最高频率分别是多少。

7-7 编程题：复现方波信号傅里叶分析的爆炸图，做成动态爆炸图更好。



Thank You !



哈尔滨工业大学控制与仿真中心