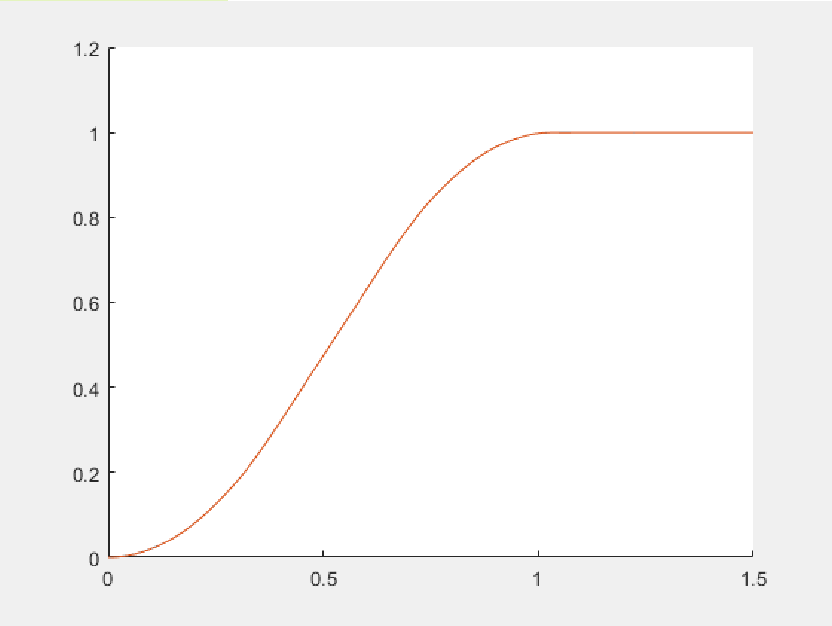
第3章 控制系统的噪声分析

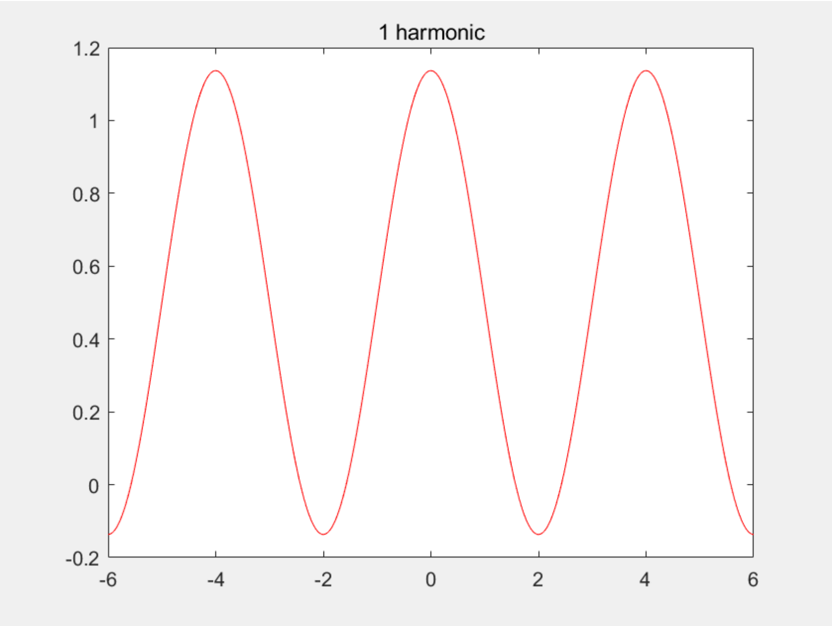
——2023年春季学期

授课教师： 马 杰（控制与仿真中心）
霍 鑫（控制与仿真中心）
马克茂（控制与仿真中心）
陈松林（控制与仿真中心）

作业篇

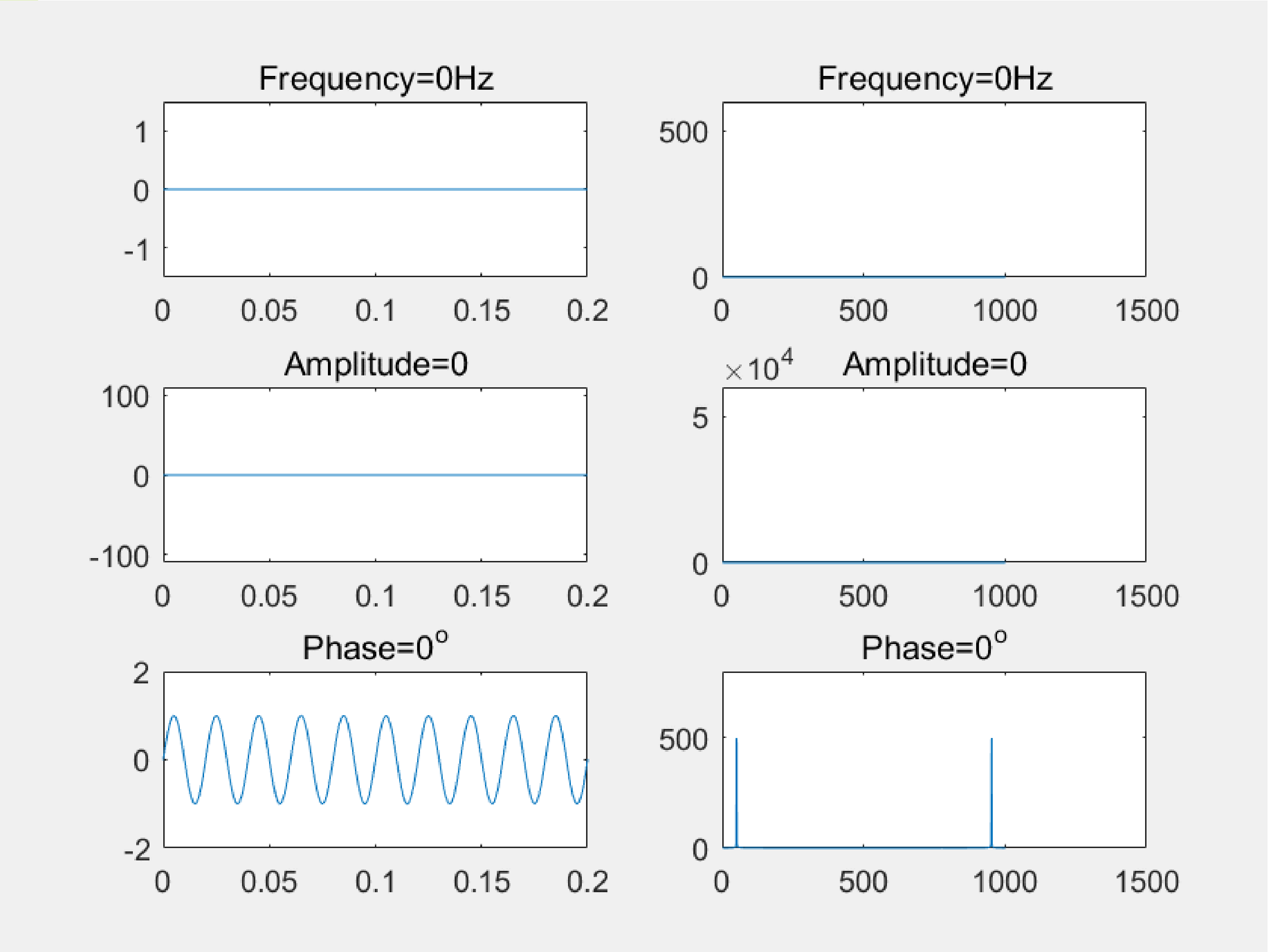
动图：让曲线跳舞



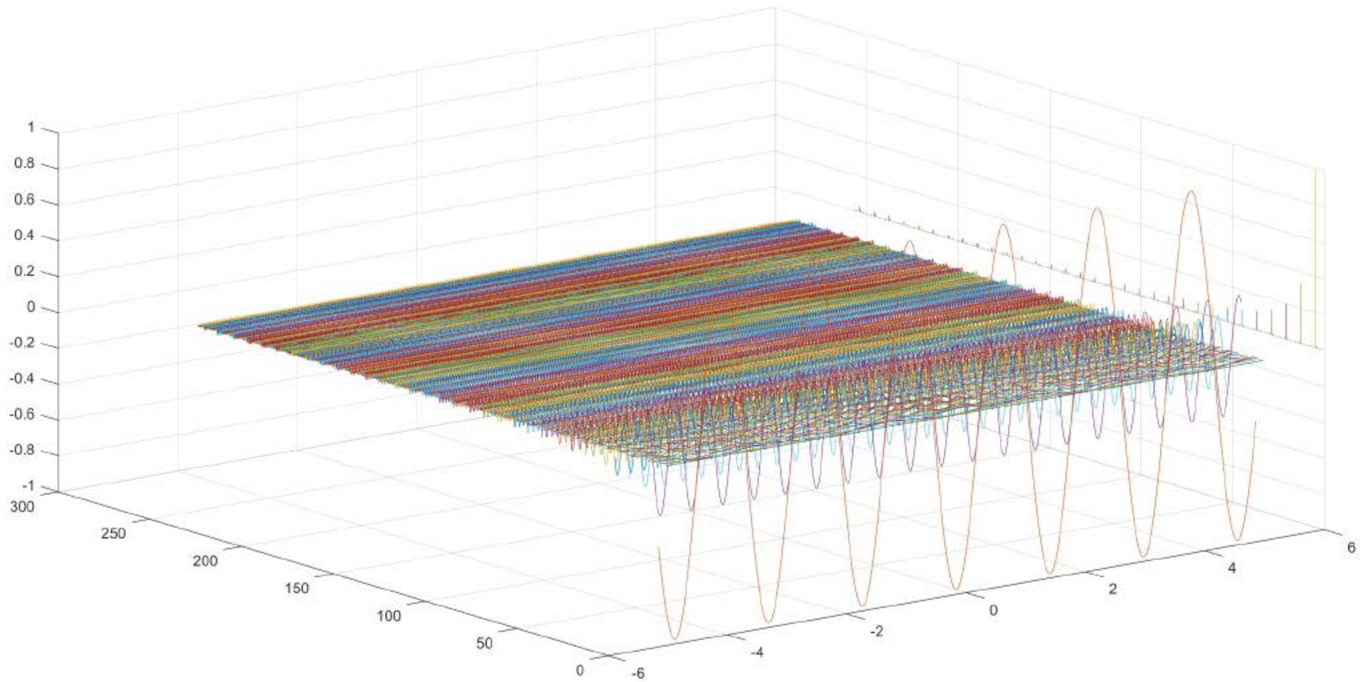


代码有魔力，知识有魅力

正弦信号的傅里叶分析

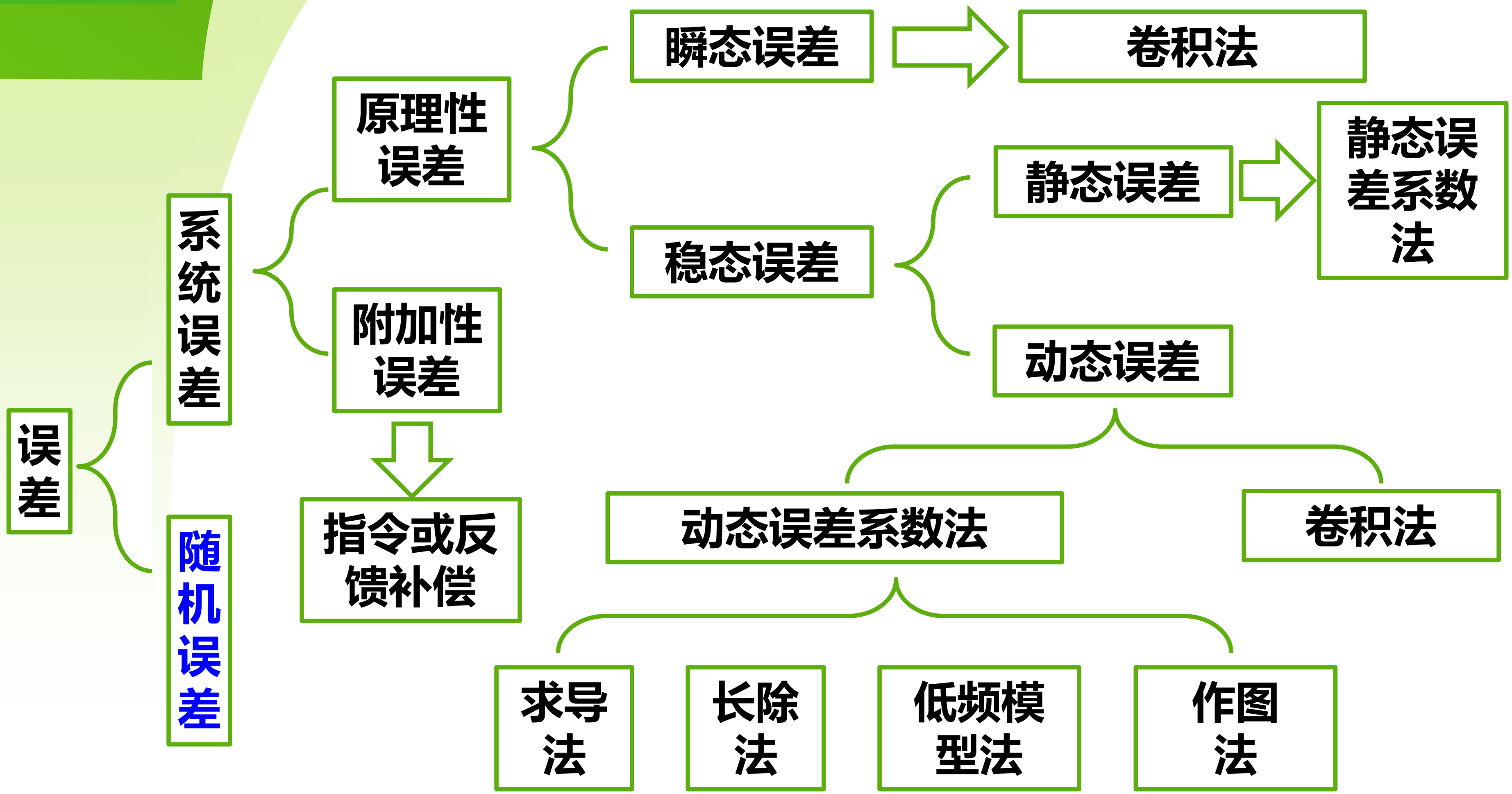

Frequency=0Hz
1
0
-1
0
0.05
0.1
0.15
0.2
Frequency=0Hz
500
0
0
500
1000
1500
Amplitude=0
100
0
-100
0
0.05
0.1
0.15
0.2
$\times 10^4$
Amplitude=0
5
0
0
500
1000
1500
Phase=0°
2
0
-2
0
0.05
0.1
0.15
0.2
Phase=0°
500
0
0
500
1000
1500

爆炸图



用代码编织“地毯”，很有成就感

回顾篇



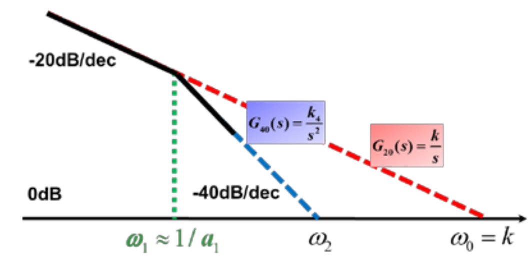
目的是计算误差，评估性能，同时找出影响误差的关键因素，指导控制设计

动态误差系数的求取方法

- **求导方法**更具有普适性，但计算复杂。精度要求高时，需要求取多个系数时适用；
- **长除法**获得的动态误差系数表使用方便，但只能提供有限个系数，精度取决于所使用的系数个数；
- **图解法**简单方便，适用于没有精确数学模型只有对象bode图，而且精度要求不高的场合（I型，II型）；
- **低频模型法**使用简单，但对输入信号频带有要求，精度不高。

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1\frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \cdots$$

$$C_n = \frac{d^n}{ds^n}\left[\frac{1}{1+G_k(s)}\right]\Bigg|_{s=0}$$



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{K}s + \frac{\alpha T}{K}s^2$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = C_1 s + \frac{C_2}{2!}s^2$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_k(s)} = \frac{s^\nu(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1)}{s^\nu(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1) + k(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + 1)}$$

静态误差系数和动态误差系数的关系

$$e_{ss} = AK_P + BK_V + CK_A$$

$$r(t) = A\cdot 1(t) + Bt\cdot 1(t) + C\frac{t^2}{2}\cdot 1(t)$$

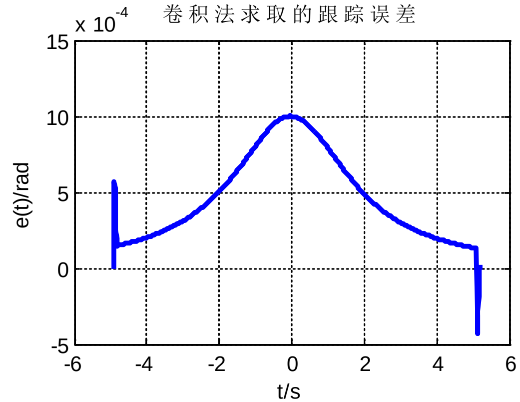
$$\lim_{t\to\infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1\frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2r(t)}{dt^2} + \cdots$$

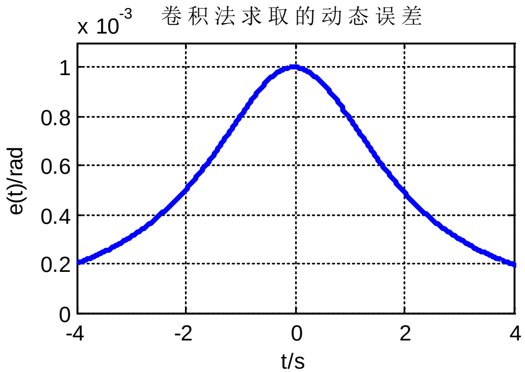
- 静态误差系数是动态误差系数的特例，动态误差系数是静态误差系数的推广；
- 静态误差系数和动态误差系数都只能用于计算系统在时间趋于无穷时的稳态误差，不能用于计算系统的瞬态误差；
- 静态误差系数只适用于阶跃、斜坡和加速度三种典型信号（含组合），动态误差系数适用于任何时间函数信号；
- 动静态误差系数均只与系统的型别和参数有关，与输入信号的类型和幅值无关；

跟踪误差计算小结

- **卷积法**必须要有脉冲响应函数（必须通过推导、仿真或者实验的方法获得），还要进行求和计算，过程比较繁琐。优点是可以计算包含瞬态误差在内的**整个时段的误差**；

- **动态误差系数法**使用较为方便，但精度较低。应用时必须给定指令信号的各阶导数，结果中只包含**稳态误差**；





$$x(k)=\sum_{n=k-N}^{k} w(k-n)u(n)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=C_0 r(t)+C_1\frac{dr(t)}{dt}+\frac{C_2}{2!}\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+\cdots$$

由误差分析指导控制设计

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = C_0 r(t) + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!}\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + \cdots$$

系统类型	静态误差系数			动态误差系数		
	K_P	K_V	K_A	C_0	C_1	$C_2/2!$
0型	$\frac{1}{1+k}$	∞	∞	$\frac{1}{1+k}$	$\frac{k(a_1-b_1)}{(1+k)^2}$	$\frac{(a_2-b_2)k}{(1+k)^3}+\cdots$
I型	0	$\frac{1}{k}$	∞	0	$\frac{1}{k}$	$\frac{a_1-b_1}{k}-\frac{1}{k^2}$
II型	0	0	$\frac{1}{k}$	0	0	$\frac{1}{k}$

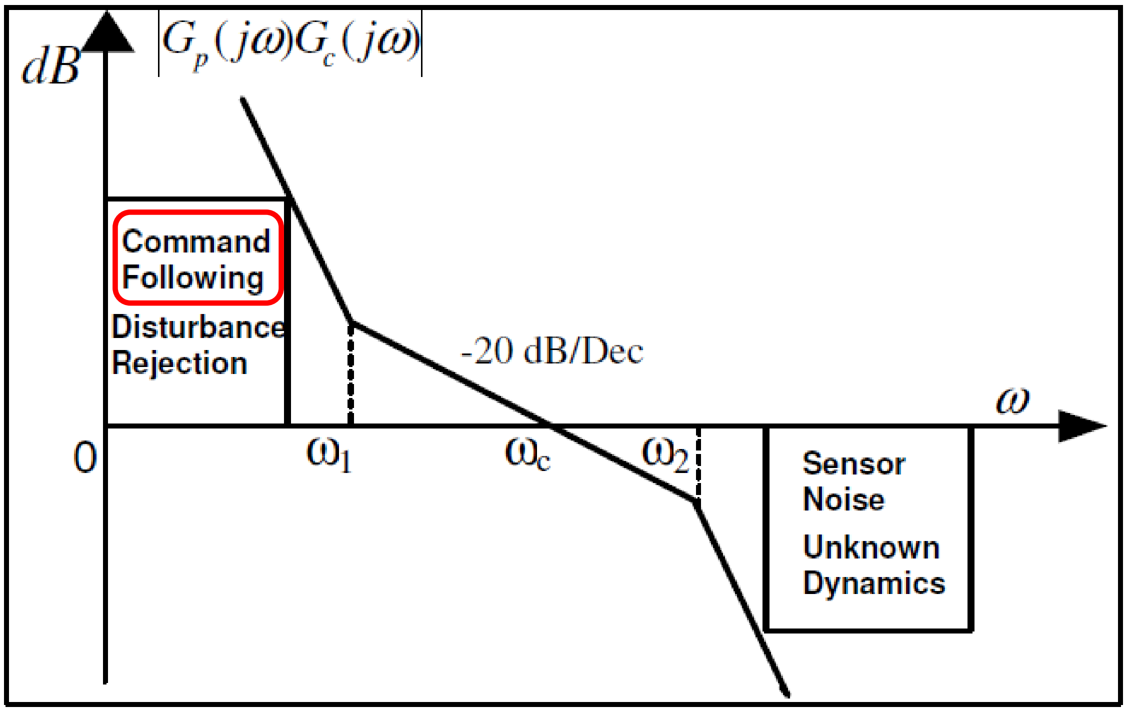
分析：计算动态误差，评估性能

设计：任务书给定了典型输入信号的幅值 r_m，一阶导（速度）v_m，二阶导（加速度）a_m 的最大值，同时给出该指令下误差指标，如最大误差$|e|<E$

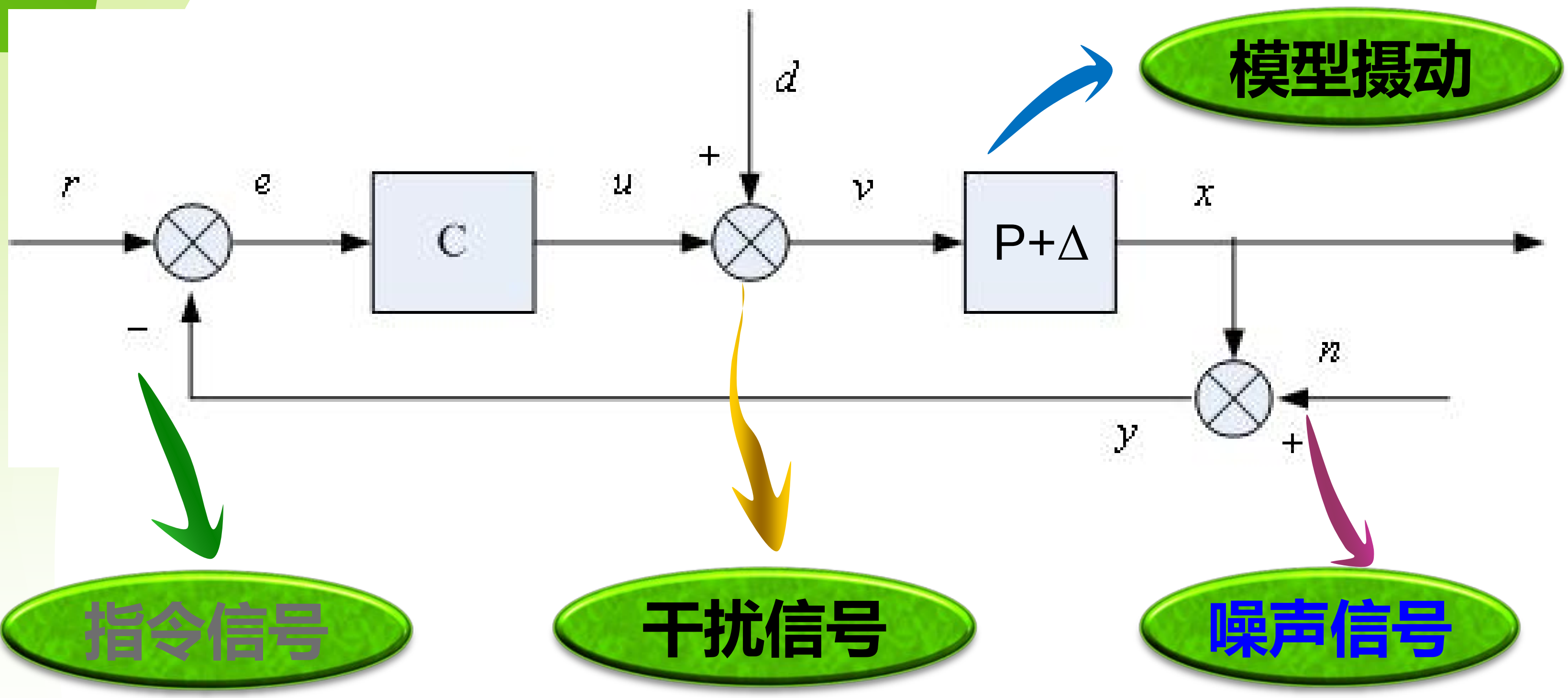
$$\boxed{C_0 r_m + C_1 v_m + \frac{C_2}{2!} a_m < E}$$

跟踪误差指标对开环期望特性的约束

根据系统误差要求确定下来的系统增益或型别是硬性要求，在系统设计中不允许改动；



抬头看路



$$G_{xr}=\frac{PC}{1+PC}$$

$$G_{xd}=\frac{P}{1+PC}$$

$$G_{xn}=\frac{-PC}{1+PC}$$

Contents

A1 输入信号和跟踪误差

A2 噪声和它引起的误差

A3 扰动响应及抑制

学习目标

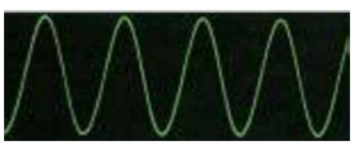
本节课需要掌握的内容

1. 了解噪声的形式和特性、作用形式、作用机理；
2. 掌握分析噪声这类随机信号的方法，复习概率论相关概念（均值、方差、协方差等）、掌握随机变量，随机向量，随机过程的基本概念；
3. 掌握平稳随机过程的特点、相关函数和功率谱密度等重要概念；

噪声的基本概念

乐声

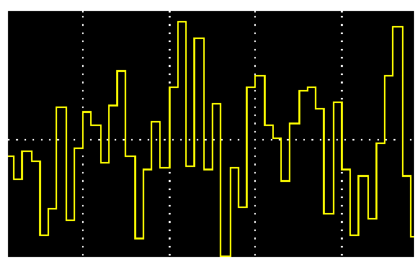
较有规律的振动所产生的周期性的声波组合而成。



噪声

物理学定义：

无规则、非周期性的杂乱声波。



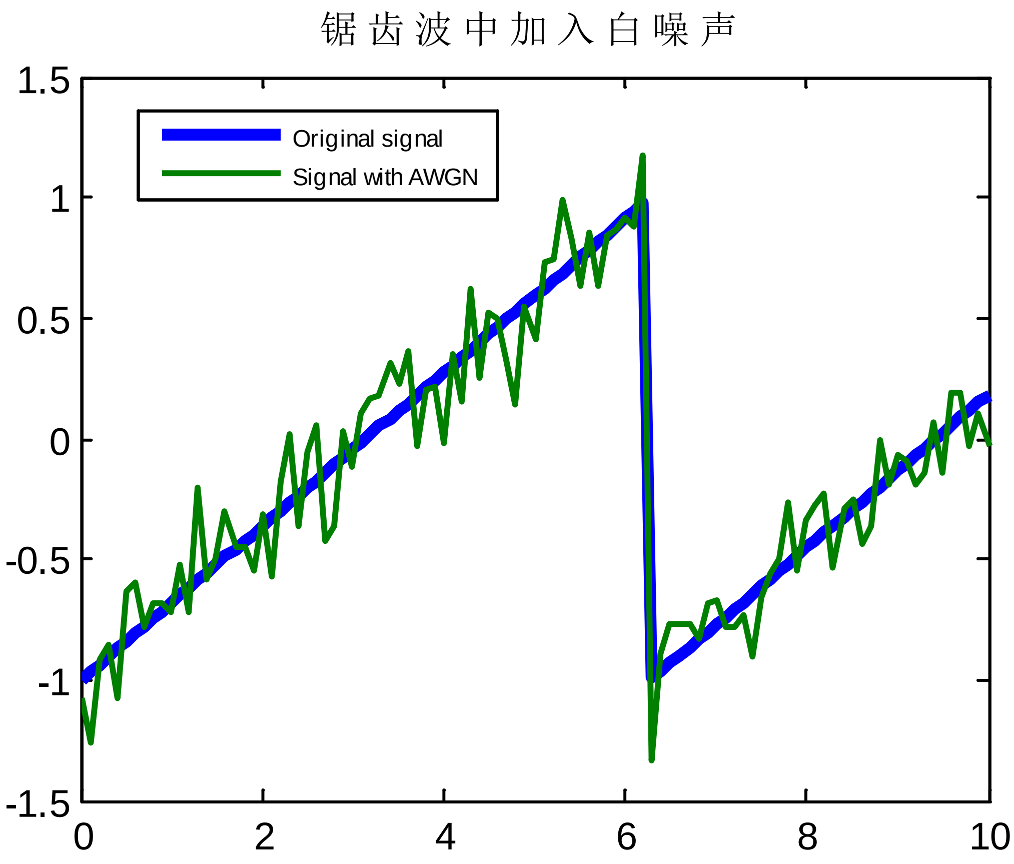
噪声

心理学定义：

一切“不需要的声音”。

前言

噪声的基本概念


锯齿波中加入白噪声
Original signal
Signal with AWGN
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
2
4
6
8
10

主观题 10分

设置

Logo

你认为信号噪声是如何产生的？请举例说明！

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

前言

量测噪声

运5飞机光纤惯组测得的飞行姿态曲线

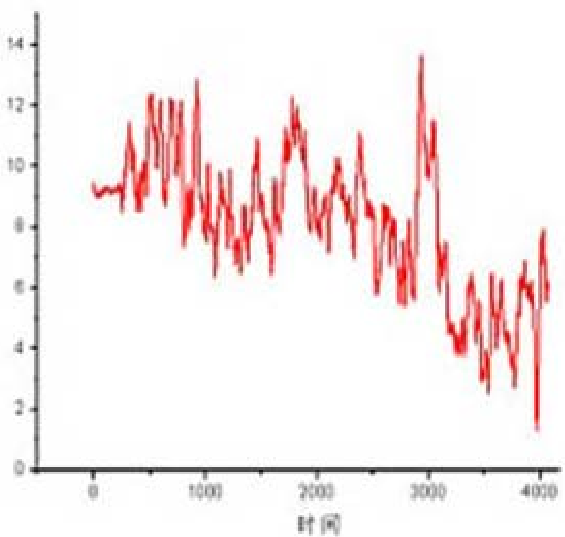


图 10: XW-ADU7600 横滚角曲线

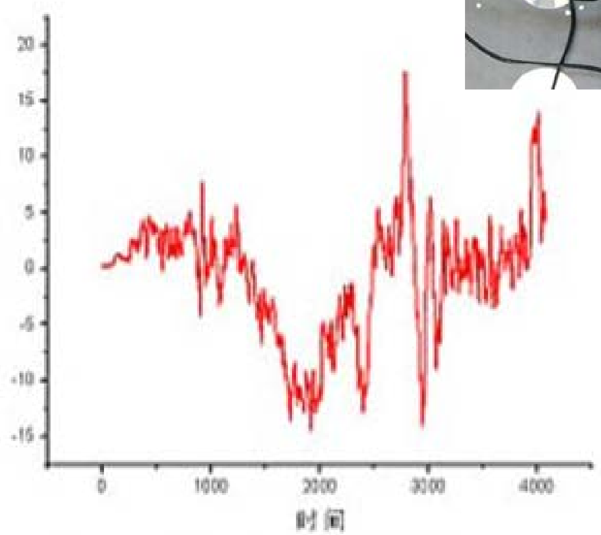
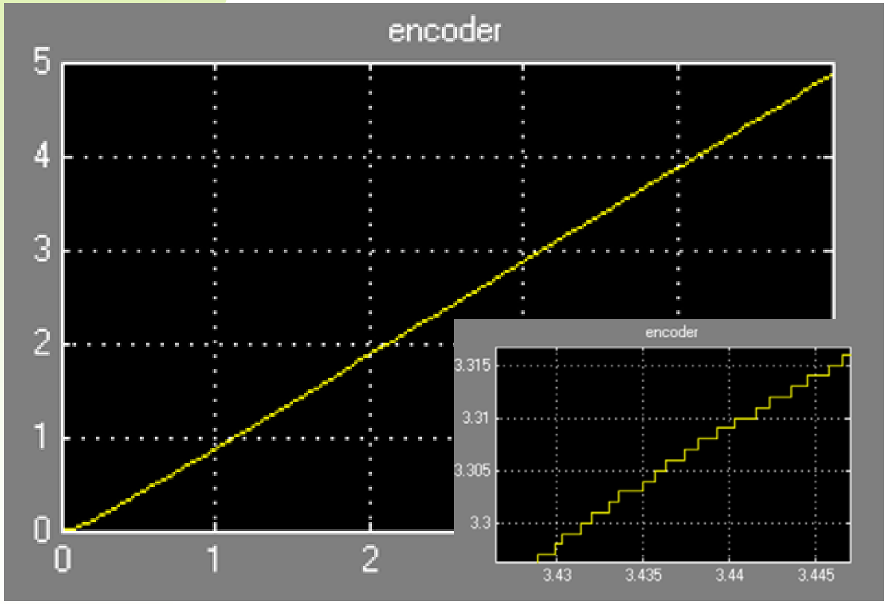


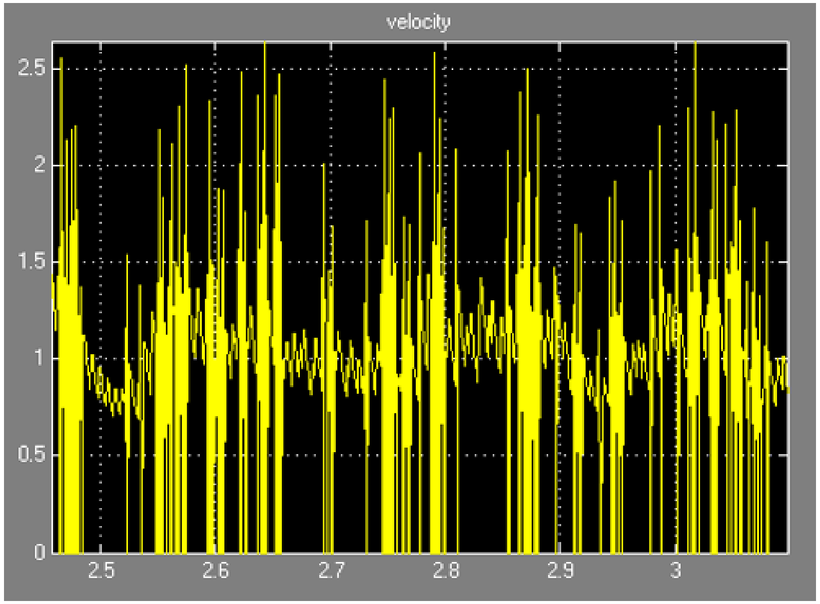
图 11: XW-ADU7600 俯仰角曲线

噪声主要通过测量元件引入系统，电信号采集、转换、传输和处理的环节都会引入噪声，只是形式不同。

前言

量化噪声





利用编码器获取的角位置信号来计算角速度时，会因编码器的有限分辨率，引入严重的噪声

前言

典型概率分布

随机变量 → 随机向量 | 随机过程

- 随机变量
  - 概率分布函数 → 典型概率分布
  - 概率密度函数
  - 矩
    - 零阶矩
    - 一阶矩 → 数学期望
    - 二阶中心矩 → 方差

- 随机向量 / 随机过程
  - 联合概率密度函数
  - 协方差
  - 相关函数
  - 谱密度
  - 均方误差

等效噪声带宽

3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽

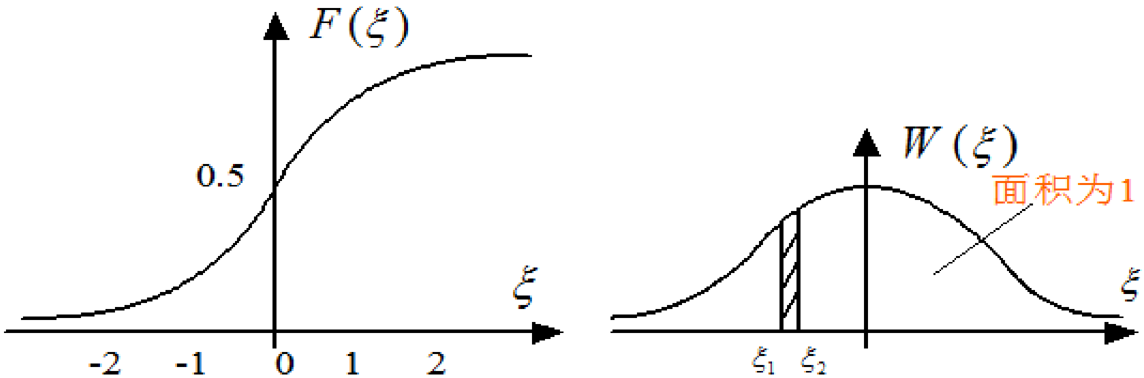
噪声是一种随机过程, 这就使状态向量和量测输出向量在噪声作用(污染)下, 也变成了随机过程。随机过程不同于确定性过程, 要用统计特性描述。

随机过程中，事物的变化过程没有确定的形式, 不能用确定性函数描述, 即对每一个自变量时间点可取不同的函数值。当然, 我们所研究的随机过程是具有统计规律的, 而不是任意的随机现象。

指令 $r = f(t)$　　　　噪声 $n = ?$

❖ 累积分布函数$F(\xi)$

以ξ为横坐标，取值在(-∞，ξ)的概率为$F(\xi)$。



概率分布函数曲线　　　　概率密度曲线

❖ 概率密度$W(\xi)$的定义

$$W(\xi)=\frac{\mathrm{d}F(\xi)}{\mathrm{d}\xi}$$

$$P(\xi_1\le\xi\le\xi_2)=\int_{\xi_1}^{\xi_2}W(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$P(\xi_1\le\xi\le\xi_1+\Delta\xi)=W(\xi_1)\cdot\Delta\xi$$

- 均值(数学期望值)：所有可能取值的加权平均值。

其几何意义为$W(\xi)$质量中心的ξ坐标： $\overline{\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi$

- 方差：随机变量偏离均值的程度： $\sigma_{\xi}^{2}=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\overline{\xi})^{2}\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi$
- 二阶原点矩： $m^{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{2}\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi$
- v 阶中心矩： $\sigma_{\xi}^{v}=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\overline{\xi})^{v}\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi$

零阶中心矩: $\sigma_{\xi}^{0}=\int_{-\infty}^{\infty}W(\xi)\mathrm{d}\xi=1$

一阶中心矩: $\sigma_{\xi}^{1}=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\overline{\xi})\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi=\overline{\xi}-\overline{\xi}=0$

二阶中心矩: $\sigma_{\xi}^{2}=\int_{-\infty}^{\infty}(\xi-\overline{\xi})^{2}\cdot W(\xi)\mathrm{d}\xi$

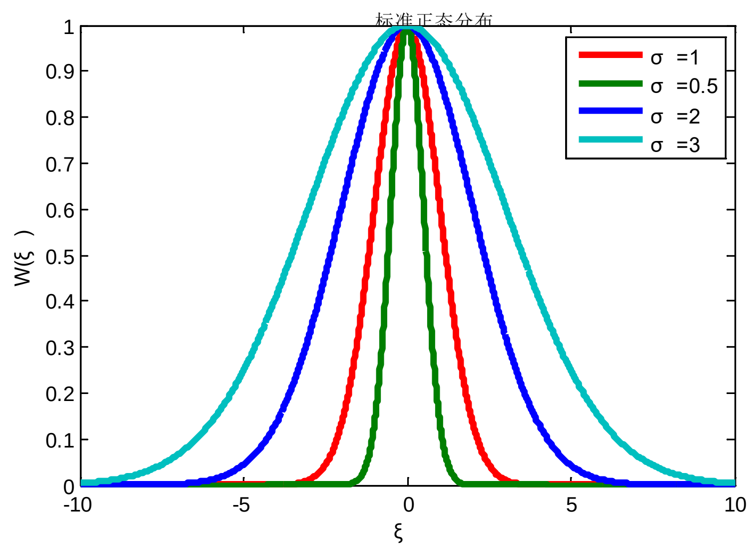
正态分布：具有两个参数 μ 和 σ^2 的连续型随机变量的分布，第一参数 μ 是服从正态分布的随机变量的均值，第二个参数 σ^2 是此随机变量的方差，所以正态分布记作 $N(\mu，\sigma^2)$。

一般来说，如果一个量是由许多微小的独立随机因素影响的结果，那么就可以认为这个量具有正态分布。

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$$

当$m=0,\sigma=1$时，为标准正态分布

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$



多选题 1分

设置

Logo

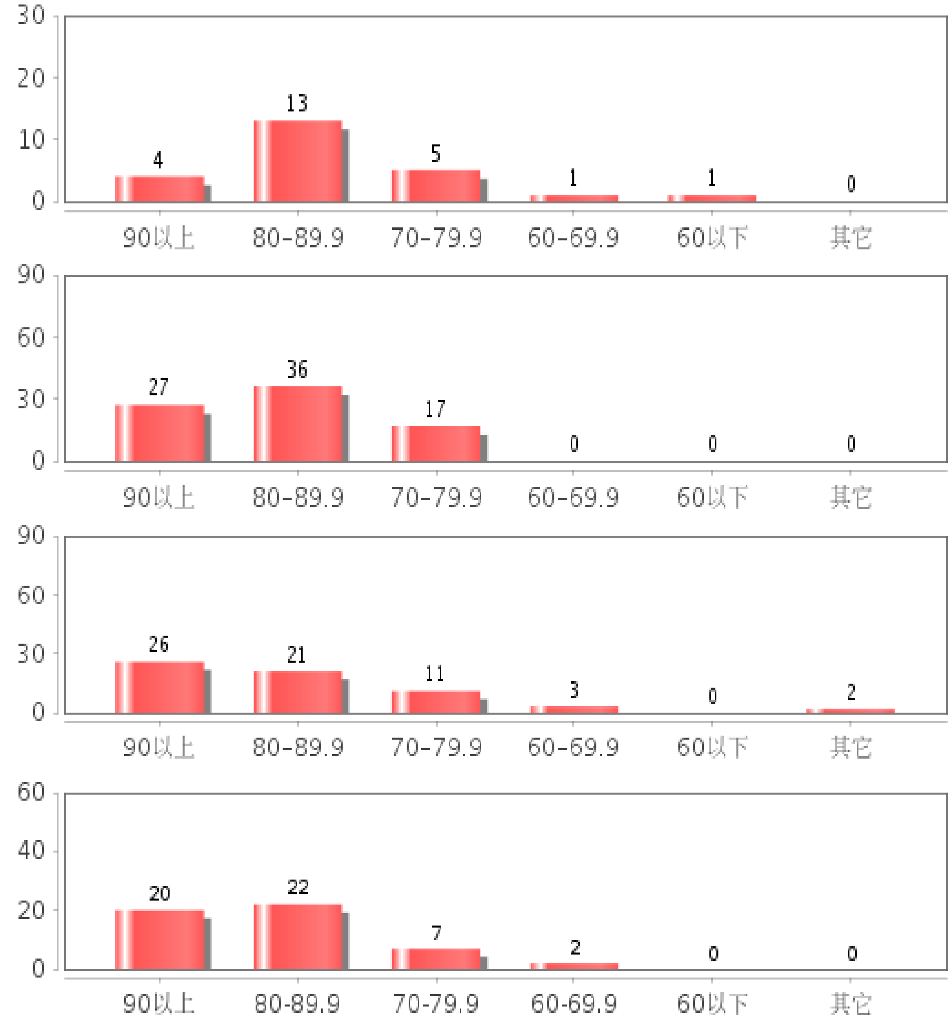
以下哪些符合正态分布

A 身高

B 白细胞数量

C 个人收入

D 学生的智力



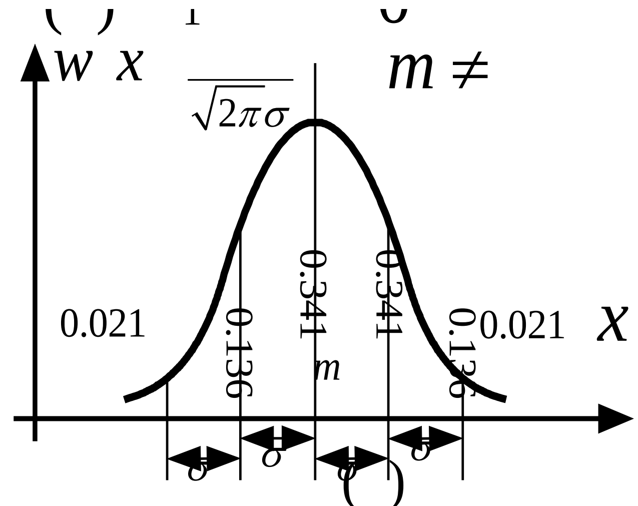
提交

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot W(x)\mathrm{d}x=m(\text{均值})$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\cdot W(x)\mathrm{d}x=\sigma^2(\text{方差})$$

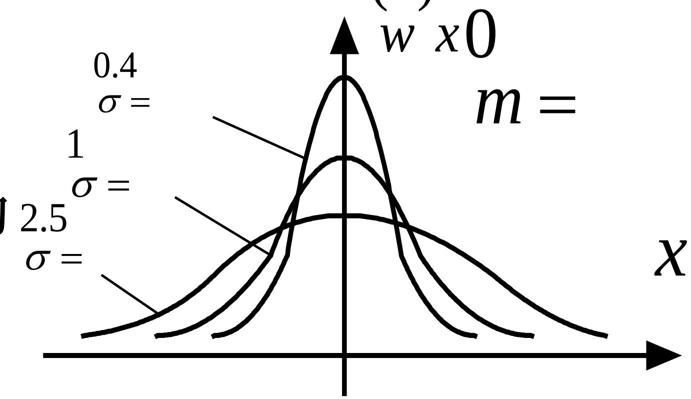


$m\pm\sigma, m\pm2\sigma, m\pm3\sigma$的概率为

$$p(|x-m|<\sigma)=0.6827$$

$$p(|x-m|<2\sigma)=0.9545$$

$$p(|x-m|<3\sigma)=0.9973$$

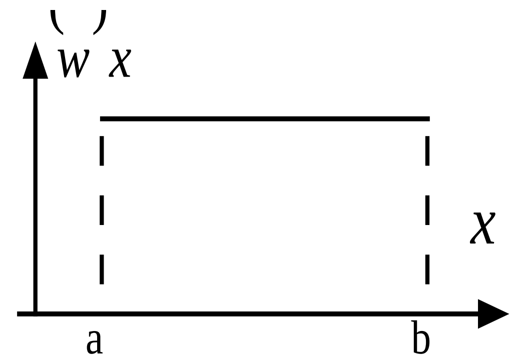


工程上，对正态分布的随机变量，有99.73% 的把握不会超出m 的3σ范围。

控制系统的误差指标

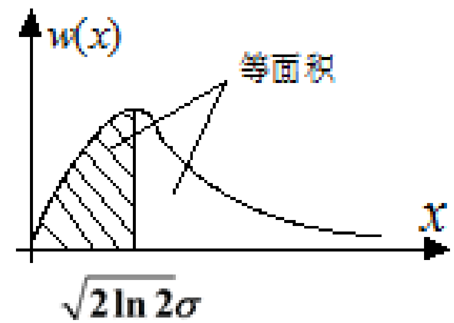
❖ 均匀分布

变量在a、b之间取值具有相同的概率分布



$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, x<a, x>b\end{cases}\quad E(x)=\frac{a+b}{2},\ D(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

❖ 瑞利分布



$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/(2\sigma^2)}, x\ge 0\\ 0, \qquad x<0\end{cases}\quad E(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma,\ D(x)=\frac{(4-\pi)\sigma^2}{2}$$

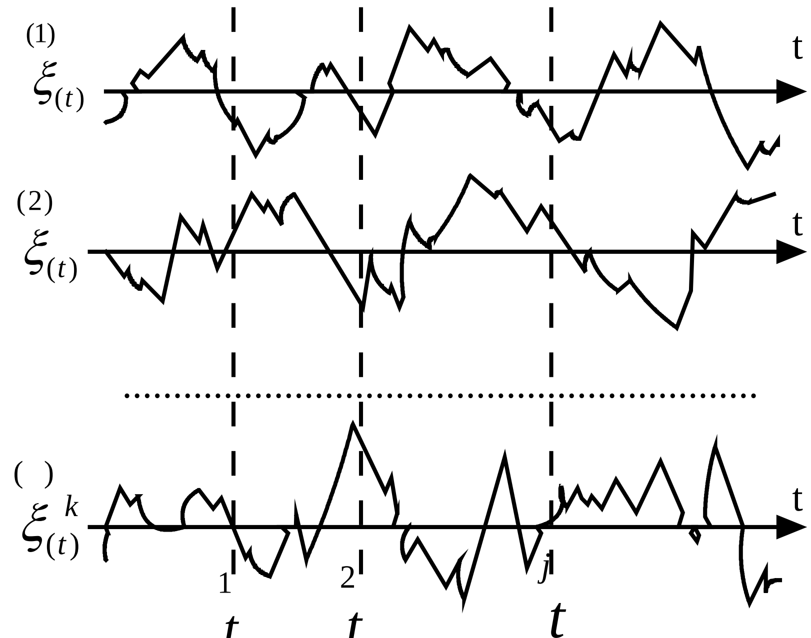
一个连续性随机变量满足正态分布，而它的能量又分布在一个很窄的频带上时，那么这个随机变量满足瑞利分布。不规则海浪的波幅幅度ξ_m符合瑞利分布。

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

用向量形式来表示的多维随机变量，称之随机向量。

每个 x_j 皆为一个一维随机变量。

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$$



( )

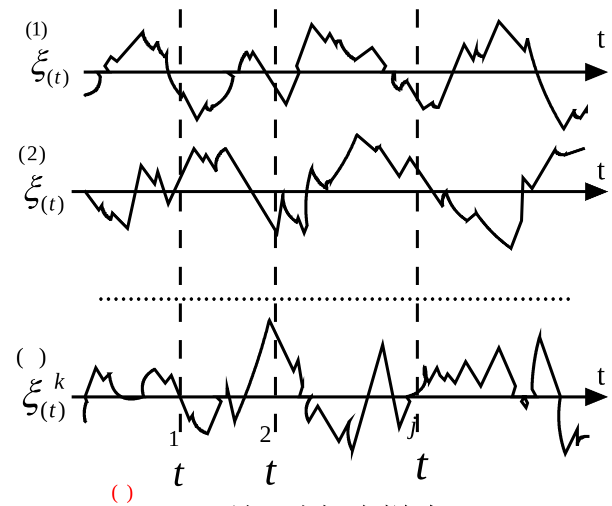
不规则海浪样本

$\xi^{i}_{(t)}$ 表示第i记录点的波形曲线

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

以二维为例：

$$X = [x_1, x_2]^T$$



不规则海浪样本

$\xi^{i}_{(t)}$ 表示第i记录点的波形曲线

两个分量分别取值在$\left[x_1, x_1 + \mathrm{d}x_1\right]$和$\left[x_2, x_2 + \mathrm{d}x_2\right]$中的概率是$w(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$，则$w(x_1, x_2)$是随机变量$x_1$，$x_2$的联合概率密度函数。

k 维随机变量 $X=[x_1,x_2,\ldots,x_k]^T$ 的统计特征

- 均值(一阶矩)

$$\boldsymbol{m_i=\mathrm{E}(x_i),\qquad i=1,2,\ldots,k}$$

向量形式： $\boldsymbol{M=(m_1,m_2,\ldots,m_i,\ldots,m_k)^T}$

- 协方差（二阶中心矩）

$$\boldsymbol{r_{ij}=\mathrm{cov}(x_i,x_j)=\mathrm{E}\left[(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right]}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-m_i)(x_j-m_j)w(x_i,x_j)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}$$

$$\boldsymbol{R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & \cdots & r_{kk} \end{bmatrix},}$$

$$\boldsymbol{r_{ij}=r_{ji}}$$

k维随机变量 $X=[x_1,x_2,\ldots,x_k]^T$ 的统计特征

给定 M 和 R，X 的联合概率密度为

$$w(X)=(2\pi)^{-k/2}(\det R)^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(X-M)^T R^{-1}(X-M)\right]$$

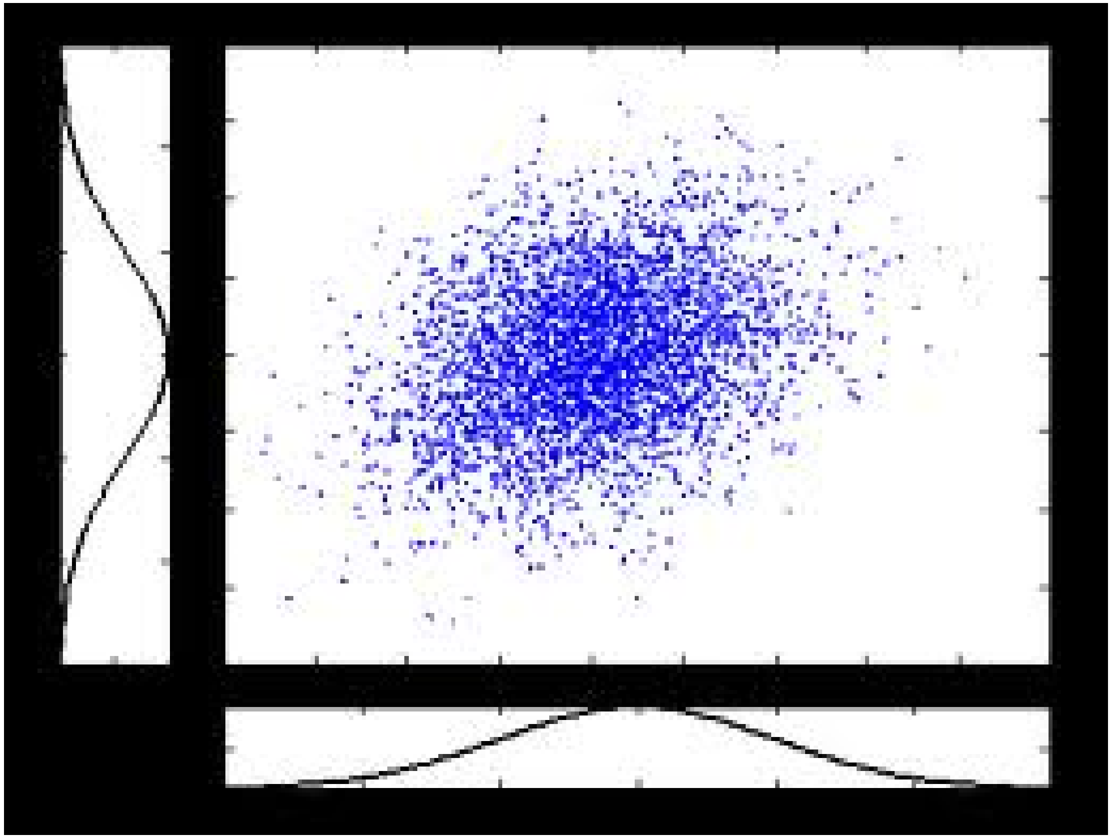
以二维为例（k=2）：

$$M=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \qquad R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

二维的联合概率密度函数为

$$w(x_1,x_2)=\left(2\pi\sqrt{r_{11}r_{22}-r_{12}^2}\right)^{-1}\cdot\exp\left[-\frac{r_{22}(x_1-m_1)^2-2r_{12}(x_1-m_1)(x_2-m_2)+r_{11}(x_2-m_2)^2}{2\left(r_{11}r_{22}-r_{12}^2\right)}\right]$$

二维正态分布示意图



3.2 噪声和它引起的误差

3.2.1 正态随机变量和正态随机向量

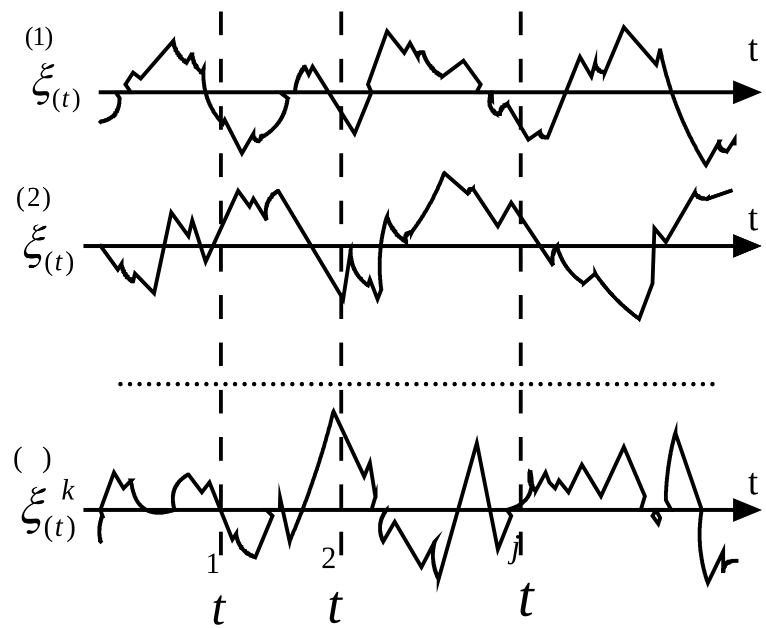
3.2.2 随机过程及相关函数

3.2.3 谱密度

3.2.4 均方误差

3.2.5 系统的等效噪声带宽

以海浪幅值这个随机过程为例，观察不同点处的波幅随时间的变化$\xi_{(t)}^{(1)},\xi_{(t)}^{(2)},\ldots,\xi_{(t)}^{(k)}$，它们不仅是测量点的随机变量，而且还是时间的函数 $\xi_{(t_1)}^{(i)},\xi_{(t_2)}^{(i)},\ldots,\xi_{(t_j)}^{(i)},\ldots$ 称随时间变化而随机取值的函数为随机过程。



( )

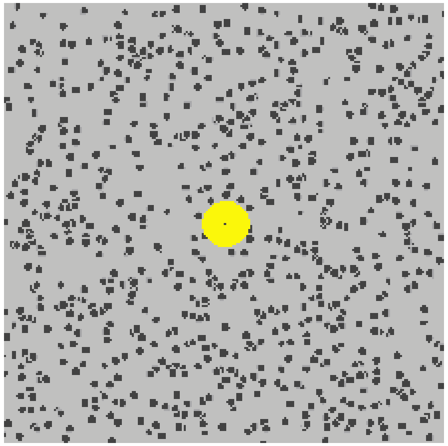
不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^{i}$表示第i记录点的波形曲线

工程中，为了简化分析，通常会做一些假设，突出主要矛盾。

❖ 马尔科夫随机过程

随机过程未来的进展和我们所取得的某一开始的时刻有关，而与这时刻以前的特性无关。即过去即使知道得再多，也无助于了解未来。比较容易进行数学处理，且结果与实际比较吻合。



❖ 平稳随机过程

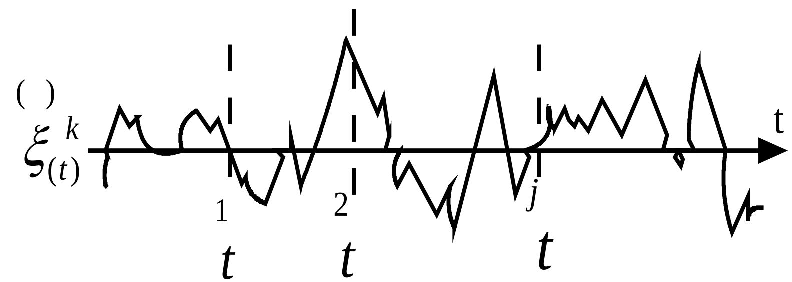
前一段的统计，可以用来估计其未来的发展。其本质特点是：概率密度函数的形状不随时间而变化，即其形状不随时间轴上的**计时起点**而变化。

- **平稳随机过程：** 概率密度函数的形状**不随时间而变化**。即：其形状不随时间轴上的计时起点而变化。（许多工程实际符合该假设，海浪）

对第 k 个测量点 $\xi_{(t)}^{(k)}$ 所决定的随机过程是平稳随机过程，则有两组值，

$$(1):\xi_{(t_1)}^{(k)},\xi_{(t_2)}^{(k)},\dots,\xi_{(t_k)}^{(k)}$$

$$(2):\xi_{(t_1+\tau)}^{(k)},\xi_{(t_2+\tau)}^{(k)},\dots,\xi_{(t_k+\tau)}^{(k)}$$



它们的概率密度函数相同，与时刻 t、测量点位 k 及组数 n 无关。即

$$w(\xi_{(t_1)}^{(k)},t_1;\xi_{(t_2)}^{(k)},t_2;\dots;\xi_{(t_n)}^{(k)},t_n)$$
$$=w(\xi_{(t_1)}^{(k)},t_1+\tau;\xi_{(t_2)}^{(k)},t_2+\tau;\dots;\xi_{(t_n)}^{(k)},t_n+\tau)$$

❖ 平稳随机过程的两个特点：

- 平稳性

过程的统计特征值与 τ 无关，可以用过去对该过程的**认识预报未来和现在。**

- 遍历性（各态历经性）

过程的统计特征值与测量点 k 无关，可以**用某一点的测量数据来统计整个过程的概率分布。**

主观题 10分

设置

Logo

平稳随机过程的上述特点能够带来什么好处?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

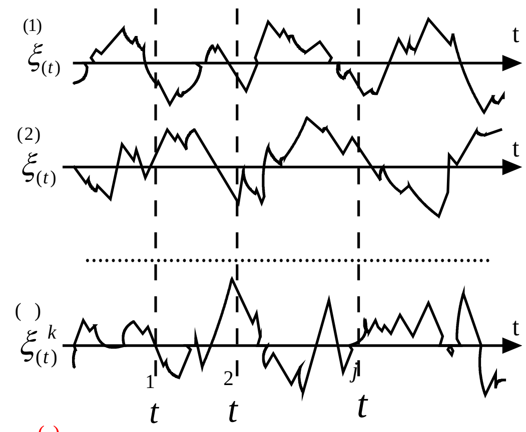
❖ **“各态历经”的含义：**

随机过程中的任一实现都经历了随机过程的所有可能状态。因此，我们无需（实际中也不可能）获得大量用来计算统计平均的样本函数，而只需从任意一个随机过程的样本函数中就可获得它的所有的数字特征，从而使“统计平均”转化为“时间平均”，使实际测量和计算的问题大为简化。

利用平稳随机过程的这两个特点，可以使其实现空间（集合）到时间的转化。

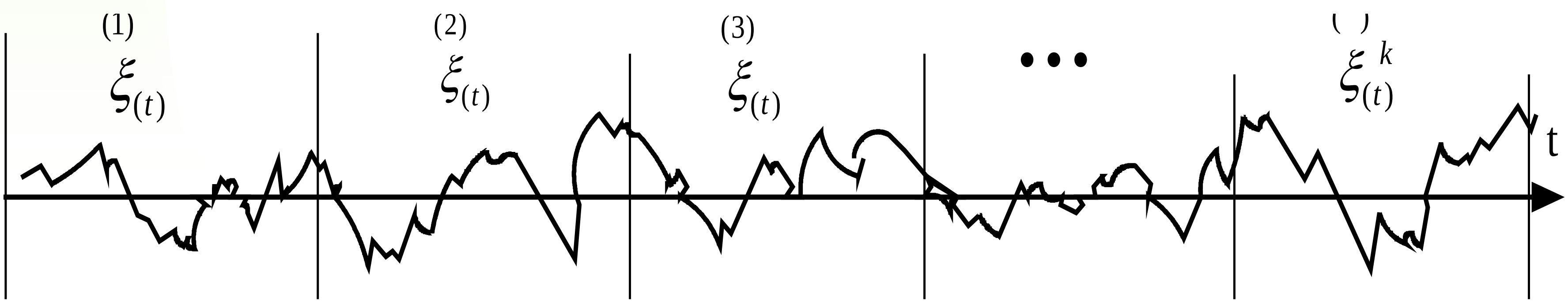
例：考察海浪的平稳随机过程

此时的海浪是一个平稳随机过程，可以在某个测量点处记录波幅 $\xi(t)$ 的足够长(相对于海浪的周期而言，一般测量200个波形)的变化，把记录分成一定长度的若干段，把其中的每一段记作 $\xi_{(t)}^{(k)}$，其中 k=1, 2 , …

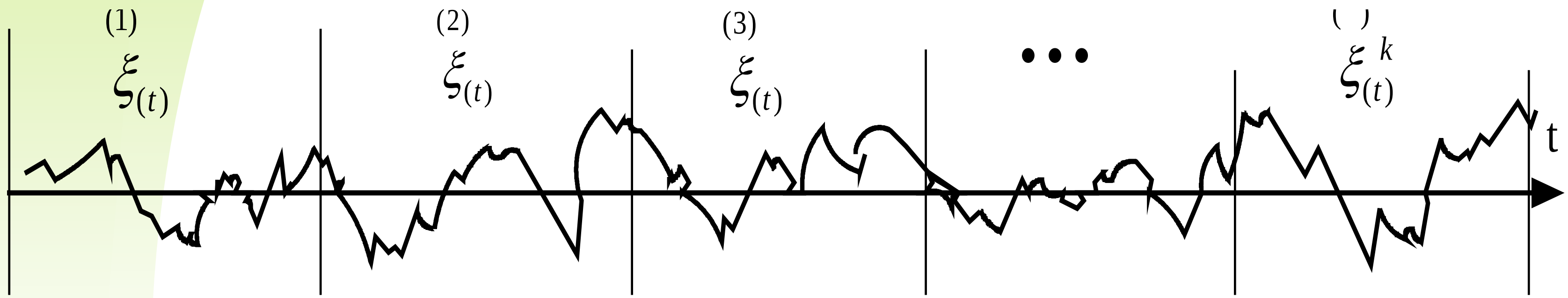


不规则海浪样本

$\xi_{(t)}^{i}$ 表示第i记录点的波形曲线



例：考察海浪的平稳随机过程



均值:

$$\overline{\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}\xi\cdot W(\xi,t)\mathrm{d}\xi \xrightleftharpoons[\text{遍历性}]{\text{平稳性}} \overline{\xi}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\mathrm{d}t$$

对时间的统计平均。 $\overline{\xi_{\text{平稳}}}=0$

二阶原点矩:

$$m^2=\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2\cdot W(\xi,t)\mathrm{d}\xi \xrightleftharpoons[\text{遍历性}]{\text{平稳性}} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\xi(t)]^2\mathrm{d}t,\quad m^2{}_{\text{平稳}}=\sigma_\xi^2$$

Logo

虽然容易获得平稳随机过程的均值和方差，但仍然写不出具体的时间函数，还有没有更好的方法来分析平稳随机过程?

作答

对于平稳随机过程而言，它的自相关函数是特别重要的一个函数：

其一，平稳随机过程的统计特性，如数值特征等，可通过自相关函数来描述；

其二，自相关函数与平稳随机过程的谱特性有着内在的联系。

因此，我们有必要了解平稳随机过程自相关函数的性质。

考虑具有各态历经的**零均值**平稳随机过程。

以海浪为例。考察$\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)$的均值，令：$\xi(t)=\xi_1,\xi(t+\tau)=\xi_2$
有：

$$R(\tau)=\overline{\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_1\xi_2\cdot W(\xi_1,\xi_2,\tau)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t+\tau)\xi(t)\mathrm{d}t$$

$R(\tau)$称为相关函数。表征$\xi(t)$和$\xi(t+\tau)$的关联程度。

用$R(\tau)$描述平稳随机过程：一个随机过程均值为常数，而它的相关函数只与时间间隔τ有关，这样的随机过程为平稳随机过程。

① 零均值的随机过程如果 τ 趋于无穷时 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 相互独立，则

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau)=R(\infty)=0$$

② 初值

$$R(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\xi(t+0)\mathrm{d}t=\sigma_{\xi}^{2}$$

③ 相关函数是偶函数，即 $R(\tau)=R(-\tau)$

$$R(\tau)=\overline{\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)}=\overline{\xi(t)\cdot\xi(t-\tau)}=R(-\tau)$$

④ 对于两个$\xi(t)$与$\eta(t)$之间的互相关函数不是偶函数，而是τ的共轭函数。

$$R_{\xi,\eta}(\tau)=\overline{\xi(t+\tau)\cdot\eta(t)}=\overline{\xi(t)\cdot\eta(t-\tau)}$$

$$=\overline{\eta(t-\tau)\cdot\xi(t)}=R_{\eta,\xi}(-\tau)$$

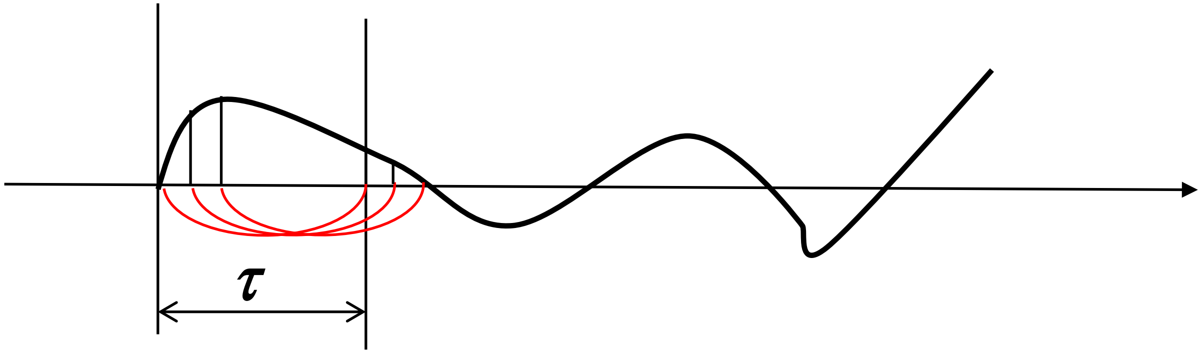
⑤ 自相关函数 $\left|R(\tau)\right|\le R(0)$

互相关函数 $\left|R_{\xi,\eta}(\tau)\right|^2\le R_{\xi}(0)\cdot R_{\eta}(0)$

❖ 依据试验记录曲线求取相关函数

按定义:

$$R(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t) \cdot x(t+\tau)] \mathrm{d}t$$



$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)\cdot x(t+\tau)]dt$$

用数值法: $x(t), x(t+\tau)$ 取离散值

$$R(\tau)=R(n\cdot\Delta t)=\frac{1}{M-n}\sum_{l=1}^{M-n-1}x(l\cdot\Delta t)x(l\cdot\Delta t+n\cdot\Delta t)$$

数据点不多时，可简写为： $R(n)=\frac{1}{M-n}\sum_{l=1}^{M-n-1}x(l)x(l+n)$

注意:

M 为全部采样点数，且有 $n\cdot\Delta t=\tau, l\cdot\Delta t=t$ ；

数据长度$M\Delta t$应大于 $x(t)$ 中最大周期的10倍以上;

采样间隔 Δt 要小于 $x(t)$ 中最小周期的1/4。

3.2 噪声和它引起的误差

- 3.2.1 正态随机变量和正态随机向量
- 3.2.2 随机过程及相关函数
- 3.2.3 **谱密度**
- 3.2.4 均方误差
- 3.2.5 系统的等效噪声带宽

定义：设 $x(t)$ 为平稳随机过程，取 $-T\sim T$ 段，拓展之后有

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -T\le t\le T \\ 0, & t<-T, t>T \end{cases}$$

对 x_T 进行傅里叶变换

$$X_T(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

当 $T\to\infty$ 时，定义 $\frac{1}{2T}|X_T(j\omega)|^2$ 的极限值为 $x(t)$ 的谱密度函数，即

$$\Phi(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_T(j\omega)\right|^2$$

定义：设$x(t)$为平稳随机过程，取$-T \sim T$段，拓展之后有

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t), & -T \le t \le T \\ 0, & t<-T, t>T \end{cases}$$

$$X_T(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$x_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

其功率表示为

$$\int_{-T}^{T} x(t)^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(-j\omega)X_T(j\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j2\pi f)|^2\mathrm{d}f$$

3.2.3 谱密度

谱密度定义 | 谱密度与相关函数 | 计算方法 | 典型谱密度函数

信号 $x(t)$ 的**平均功率**表示为

$$\Phi(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_T(j\omega)\right|^2$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)^2\mathrm{d}t=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left|X_T(j\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(2\pi f)\mathrm{d}f$$

可见，信号$x(t)$的平均功率为其谱密度函数沿频率轴的积分，谱密度函数 $\Phi(2\pi f)$ 表示了在频率 f 处的平均功率密度，故称为功率谱密度或谱密度。

$$X_T(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$x_T(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$\Phi(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|x_T(j\omega)\right|^2$$

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t), & -T\le t\le T\\ 0, & t<-T,t>T\end{cases}$$

$x(t)$的相关函数为

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_T(t)x_T(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(j\omega)e^{j\omega(t+\tau)}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi 2T}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x_T(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t\right)X_T(j\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi 2T}\int_{-\infty}^{\infty}X_T(-j\omega)X_T(j\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left|X_T(j\omega)\right|^2e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \quad =\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

3.2.3 谱密度

谱密度定义 | **谱密度与相关函数** | 计算方法 | 典型谱密度函数

考虑总体平均值与时间均值相等，且 $T\to\infty$，有

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega \qquad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

可见，$\Phi(\omega)$就是$R(\tau)$的傅里叶变换。可以推出：

$$R(0)=\sigma_x^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega,$$ 是$\Phi(\omega)$与ω围成面积的$\frac{1}{2\pi}$

因此，对于一个平稳随机过程，可以用实验数据来求取其相关函数，然后用傅里叶变换得到谱密度函数。

3.2.3 谱密度

谱密度定义 | **谱密度与相关函数** | 计算方法 | 典型谱密度函数

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega,\qquad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\Phi(\omega)=S(f)$$

$$\omega=2\pi f$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}f,\qquad S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

变换公式说明

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega,\qquad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

第二种

第二种可以写成如下形式：

$$\omega=2\pi f\qquad \Phi(\omega)=S(f)$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)e^{j2\pi f\tau}\mathrm{d}f,\qquad S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$R(0)=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\mathrm{d}f$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}S(f)$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega,\qquad \Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

第一种

❖ 直接求取法（基于定义的数值法）

$$x(t)$$

傅里叶变换

$$X_T(j\omega_k) = \Delta t \cdot F(k)$$

求和平均

$$\Phi(\omega) = \overline{\Phi(\omega_k)} = \frac{\Delta t}{N}\overline{F(k)}$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T(n) e^{-jnk2\pi/N},$$

$$(k = 0, \cdots, N-1)$$

$$\Phi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| X_T(j\omega) \right|^2$$

❖ 相关函数法

对于一个平稳随机过程，可以用实验数据来求取其相关函数，然后用傅氏变换得到谱密度函数。

$$x(t)$$

$\Downarrow$ 求和平均 $R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x_T(t)x_T(t+\tau)\mathrm{d}t$

$$R(\tau)$$

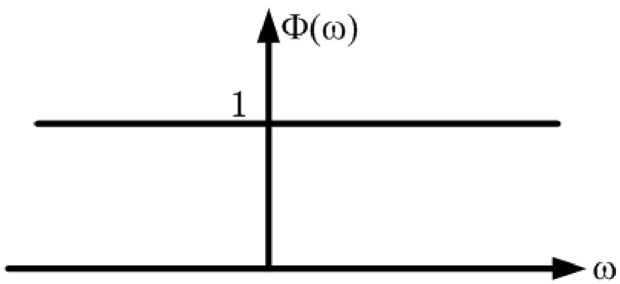
$\Downarrow$ 傅里叶变换 $\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$

$$\Phi(\omega)$$

❖ 常值谱密度——白噪声：

一种随机噪声，能量均匀沿ω分布，其相关函数是$R(\tau)=\delta(\tau)$。

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau=1$$



特点：$X(t)$的过去与未来之间没有任何关系（很好的干扰信号），其相关函数除$\tau=0$，$R(0)\rightarrow\infty$外，其余$R(\tau)=0$。

白噪声能量无穷大。工程上，白噪声不能实现。但可以取远大于系统带宽的噪声近似代替。

3.2.3 谱密度

谱密度定义 | 谱密度与相关函数 | 计算方法 | **典型谱密度函数**

❖ 指数相关的随机过程谱密度—风载扰动谱密度

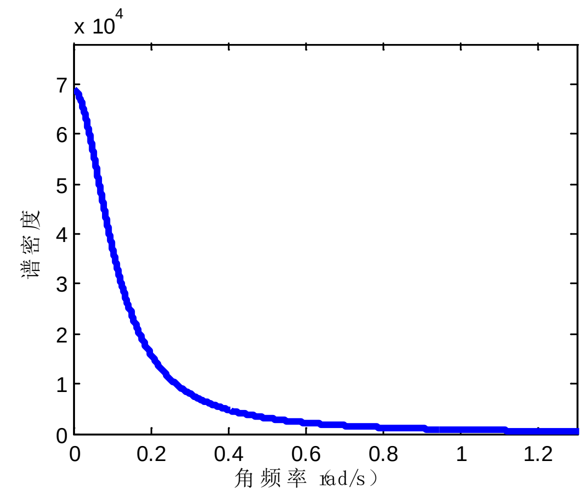
例：p68, 4-2

相关函数：$R(\tau)=\tilde{a}^2\cdot e^{-\alpha|\tau|}$， α 为信号在单位时间内的变化次数

$$谱密度：\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|}e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\tilde{a}^2\cdot\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}$$



主观题 10分

设置

Logo

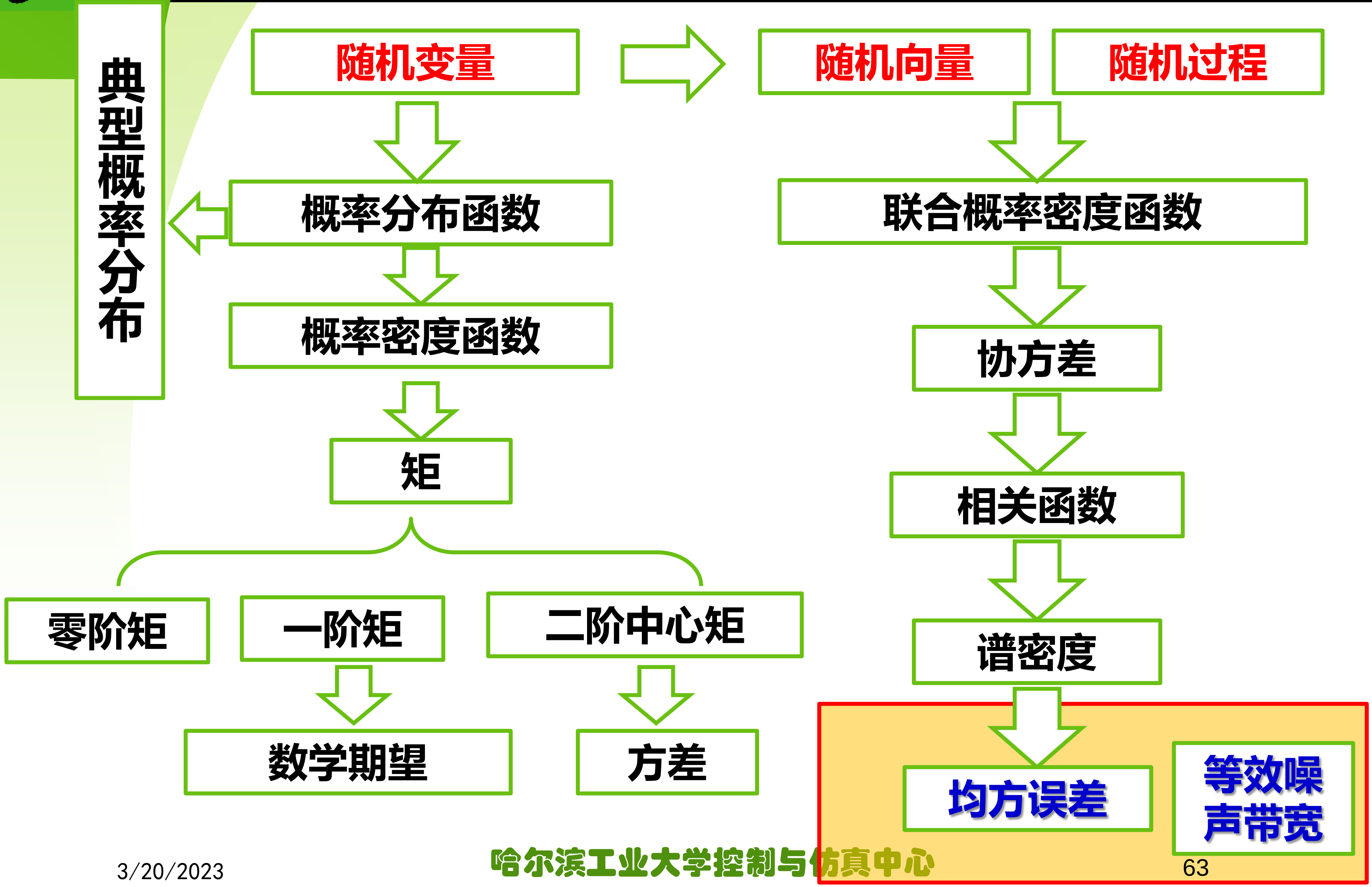
相关函数和谱密度有什么用?

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\omega)e^{j\omega\tau}\mathrm{d}\omega,\qquad \Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

总结预告篇



典型概率分布
随机变量
随机向量
随机过程
概率分布函数
联合概率密度函数
概率密度函数
协方差
矩
相关函数
零阶矩
一阶矩
二阶中心矩
谱密度
数学期望
方差
均方误差
等效噪声带宽

第五周 课后作业

2 可选作业

9.1 仿真题：在已搭建的仿真模型中（用上一周作业搭建的系统）在反馈回路加入白噪声（Matlab中有相应的模块，注意不要加的太强（白噪声能量小于0.001），看到效果就可以），观察系统输出和误差的变化，理解噪声对系统的影响？然后，再试着调整系统的增益的大小，再观察。

9.2 思考题：正弦信号的相关函数是周期函数吗，周期是多少？

9.3 思考题：总结信号噪声产生的机理，给出减小噪声对控制系统影响的方法（不限于控制上的方法）。

9.4 思考题：如何理解相关性和因果性。

Thank You！

授课教师： 马　杰（控制与仿真中心）

霍　鑫（控制与仿真中心）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）