第1章 控制系统的输入条件分析

——2023年春季学期

授课教师： 马　杰（控制与仿真中心）

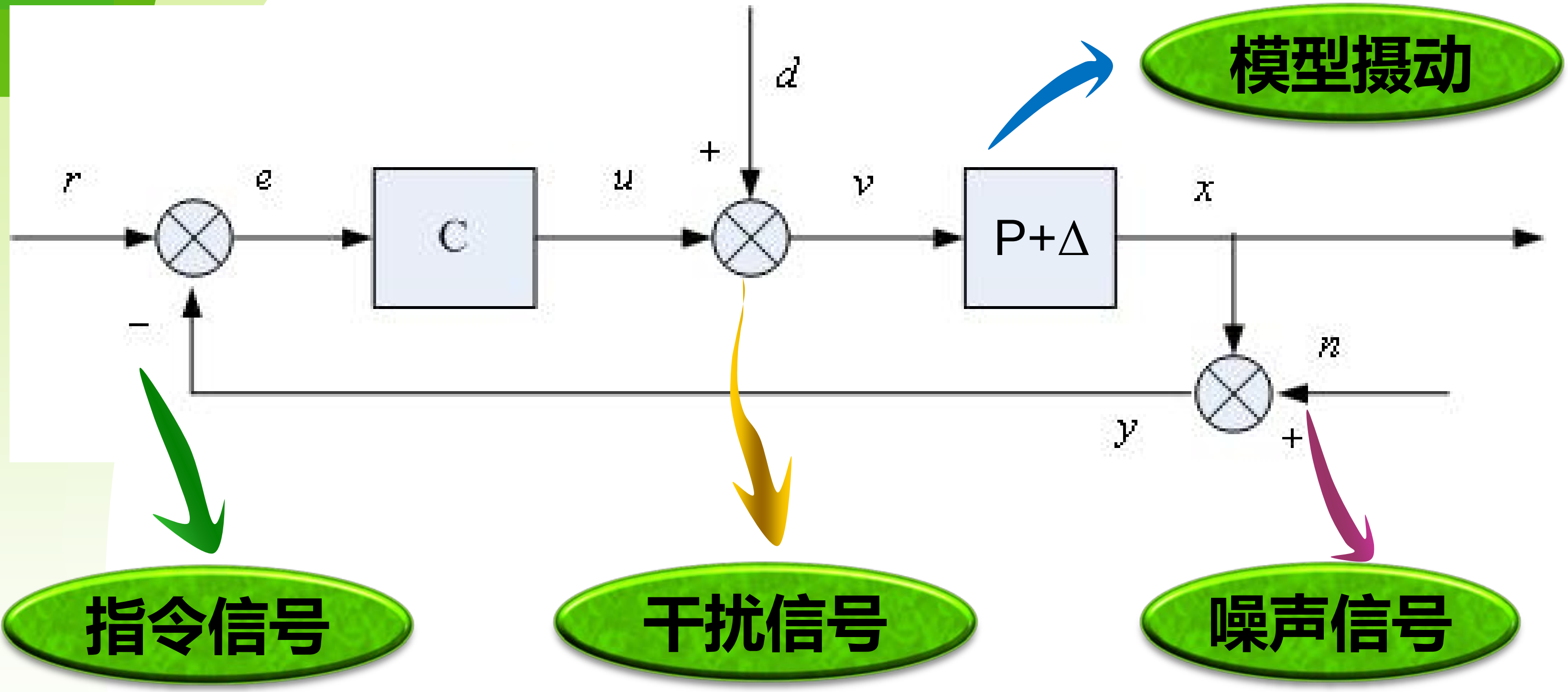
霍　鑫（控制与仿真中心）

马克茂（控制与仿真中心）

陈松林（控制与仿真中心）

哈尔滨工业大学控制与仿真中心

回顾篇

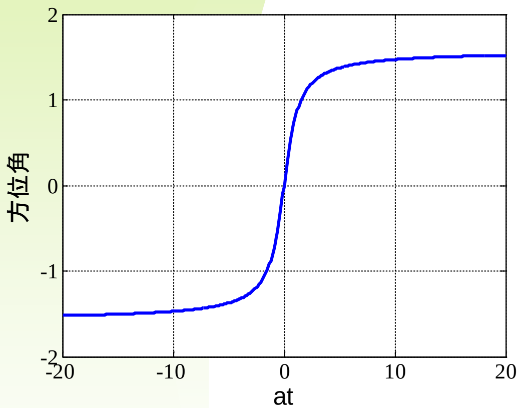


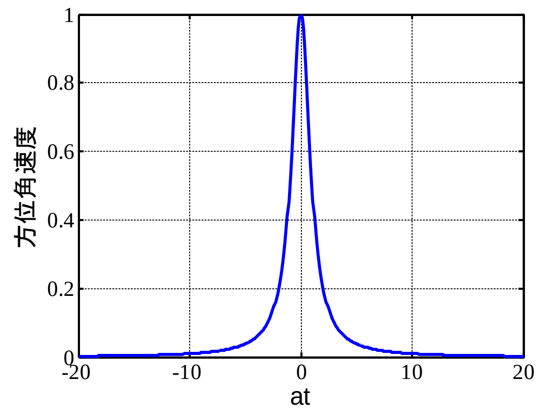
控制系统的性能是由多种因素决定的，我们把这些因素统称为控制系统的输入条件。在控制系统设计时，必须充分分析它们对控制性能的影响，并明确他们的形式和特性，以及它们与系统性能之间的关系，并据此设计有效的控制器（包括方案设计和元部件选型）。

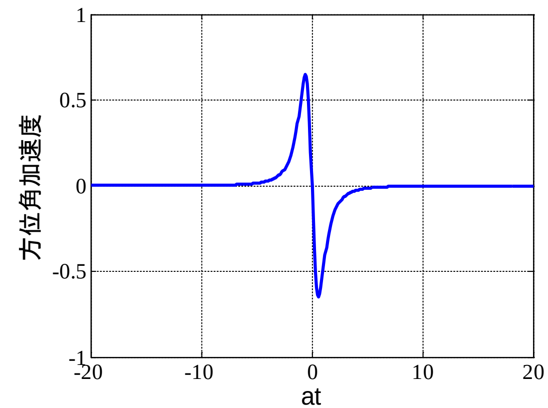
典型输入信号分析的内容和目的：

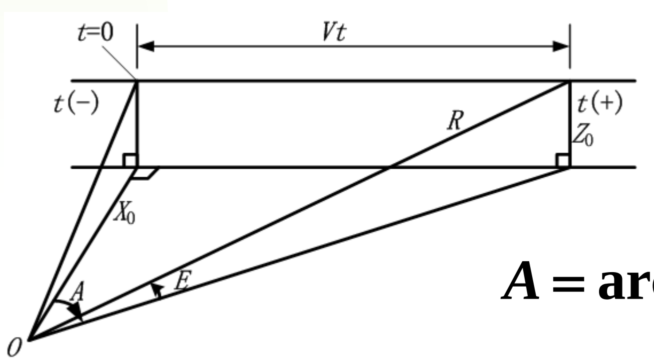
1. 根据典型输入信号的幅值、变化率及二阶或高阶导数**确定元件的参数**；
2. 根据典型输入信号的幅值、变化率及二阶或高阶导数**计算跟踪误差**，指导控制设计；
3. 分析输入信号的频带以确定**系统的带宽**。

2. 通过对信号的分析可以得到信号幅值及其导数信息，用于元器件选型（最大速度、最大力矩，量程等动静态参数）；









$$A = \arctan\frac{Vt}{X_0}$$

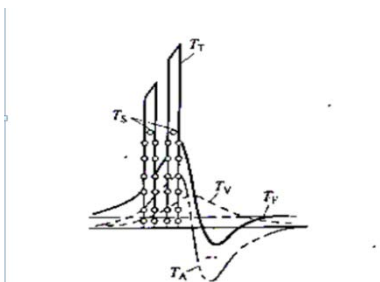


图 3-5 跟踪过程的力矩分量

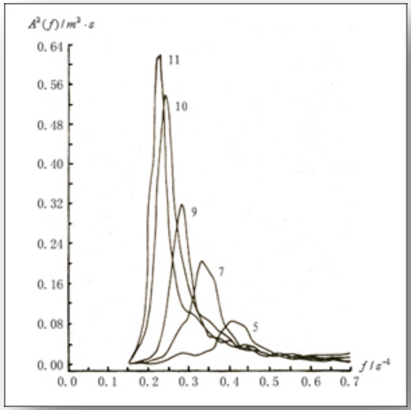
T_A—加速度力矩；T_V—速度力矩；T_F—摩擦力矩；T_S—冲击力矩；T_T—总负载力矩

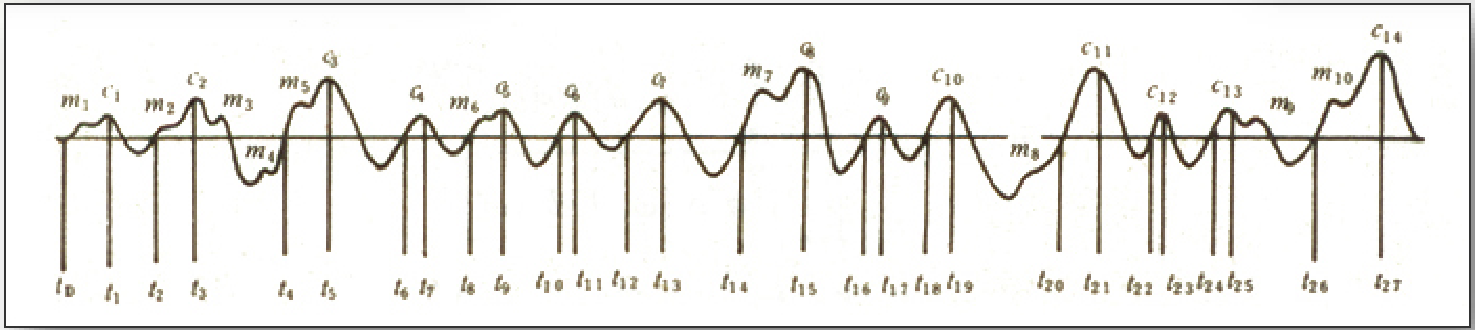
- 加速度力矩
- 速度力矩
- 摩擦力矩
- 冲击力矩
- 偏载力矩

回顾篇

3. 通过对典型信号的频谱分析可以获得信号的频谱成分，用于确定系统的带宽，也可用于确定元器件的动态参数。

对离散的数据采用差分和离散傅里叶分析





提升篇

1.根据系统的需求和功能要求，确定系统的典型输入信号

a. 根据系统特点确定（如阶跃指令是调节系统的典型输入）

b. 确定典型工况，进行机理分析，得到解析函数；

c. 通过实验测定（如海浪特性），得到离散的数据；

d. 通过仿真计算，得到典型条件下的离散的数据。

例子：温度控制系统，电梯系统，导弹，机械臂（串并联），空翻机器人，汽车悬架系统。

拓展篇

信息中的信息 （高阶信息）

- 幅值
- 范围
- 一阶导数
- 高阶导数
- 频谱

大数据，数据挖掘，数据定价，数据主义（教）

本节课的学习目标

1 理解时域和频率区别与联系；

2 理解傅里叶变换与反变换的物理意义以及数学形式；

3 掌握相关概念：傅里叶级数，傅里叶积分，离散傅里叶变换，快速傅里叶变换以及他们之间的关系；

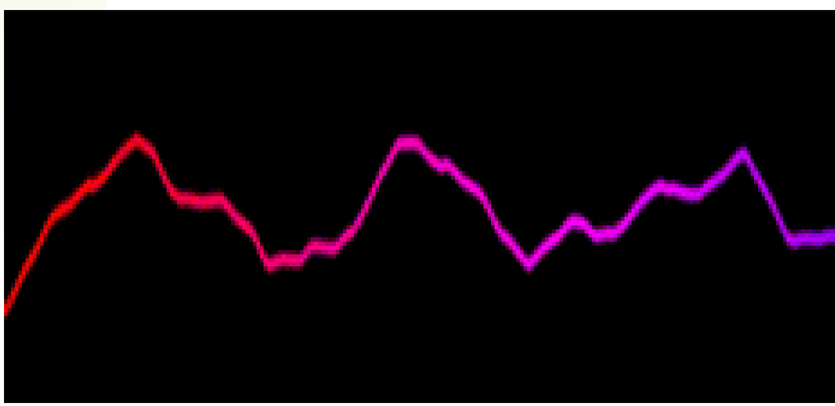
4 熟悉几种典型信号的傅里叶变换；

5 记住傅里叶变换在控制系统设计中用途；

6 学会使用MATLAB对给定信号进行FFT计算，绘制系统Bode图，辨识系统的模型参数；

时域与频率

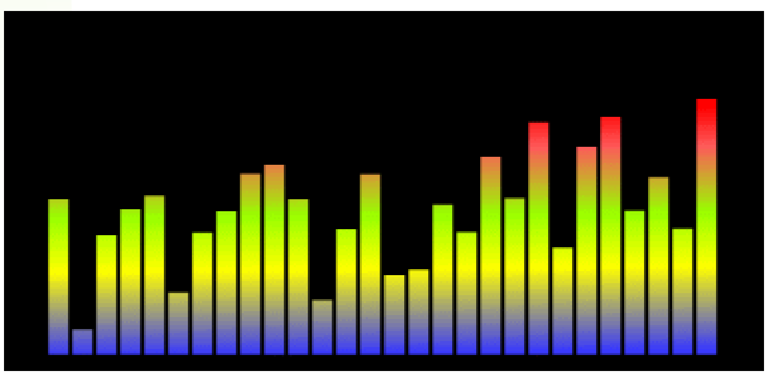
什么是时域？从我们出生，看到的世界都以时间贯穿，如昼夜交替，四季轮转、人的身高、汽车的轨迹都会随着时间发生改变。这种以时间作为参照来观察动态世界的方法我们称其为时域分析。而我们也想当然的认为，世间万物都在随着时间不停的改变，并且永远不会静止下来。

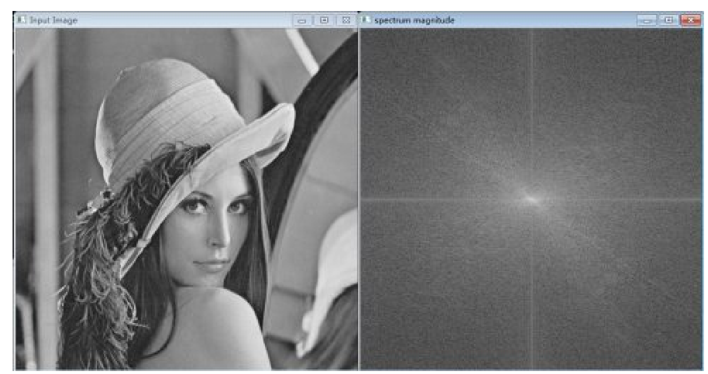


2 信号的傅里叶分析

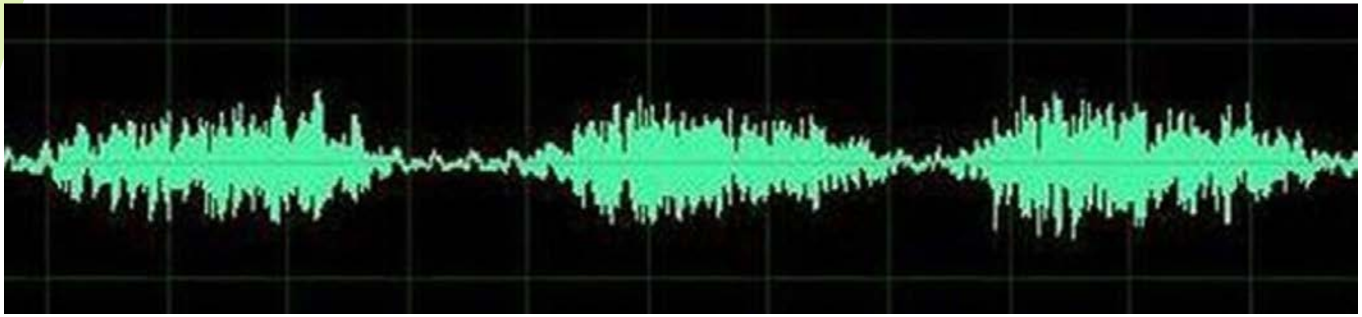
时域与频率

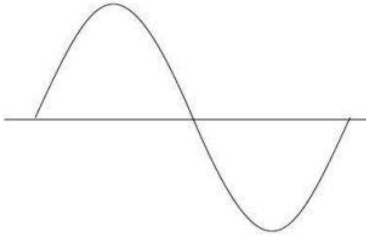
什么是频域？频域(frequency domain)是描述信号在频率方面特性时用到的一种坐标系。用线性代数的语言就是装着正弦函数的空间。频域最重要的性质是：它不是真实的，**而是一个数学构造。频域是一个遵循特定规则的数学范畴。**正弦波是频域中唯一存在的波形，这是频域中最重要的规则，即正弦波是对频域的描述，因为时域中的任何波形都可用正弦波合成。





时域与频率

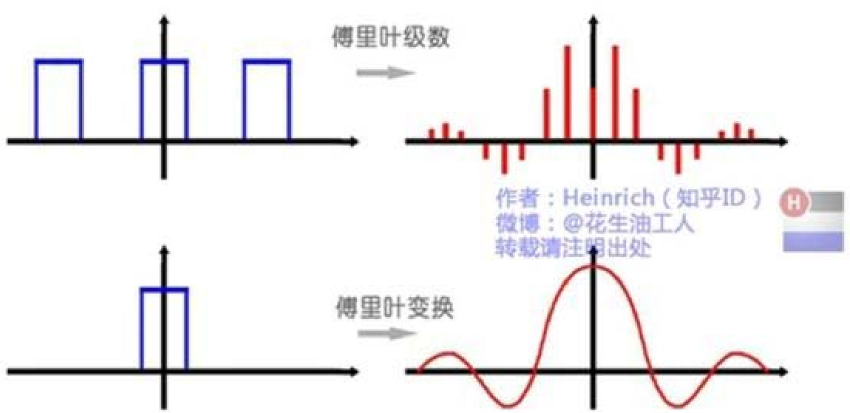




时域与频率

对于一个信号来说，信号强度随时间的变化规律就是**时域特性**，信号中所包含的单一频率的信号成分就是**频域特性**。

时域分析与频域分析是对信号的两个观察面。**一般来说，时域的表示较为形象与直观，频域分析则更为简练，剖析问题更为深刻和方便。**贯穿时域与频域的方法之一，就是传说中的傅里叶分析。傅里叶分析可分为傅里叶级数和傅里叶变换。



傅里叶变换的产生

傅里叶1768年生于法国,1807年提出“任何周期信号都可用正弦函数级数表示”，1822年在“热的分析理论”一书中再次提出。1829年狄里赫利给出傅里叶变换收敛条件。傅里叶变换得到大规模的应用，则是到了上世纪60年代之后。

傅里叶的两个最主要的贡献：

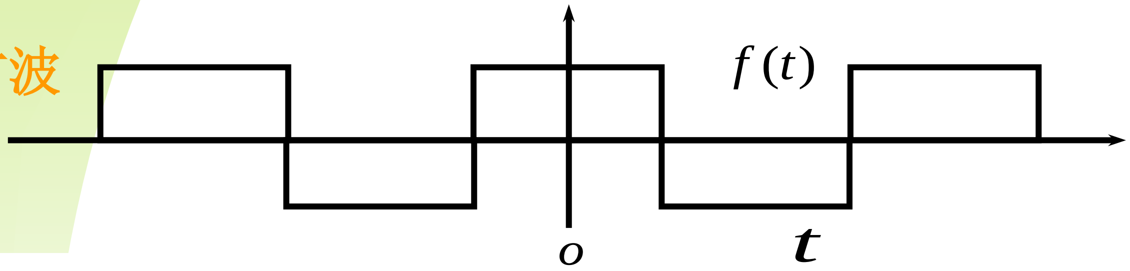
（1）“周期信号都可表示为谐波关系的正弦信号的加权和”；

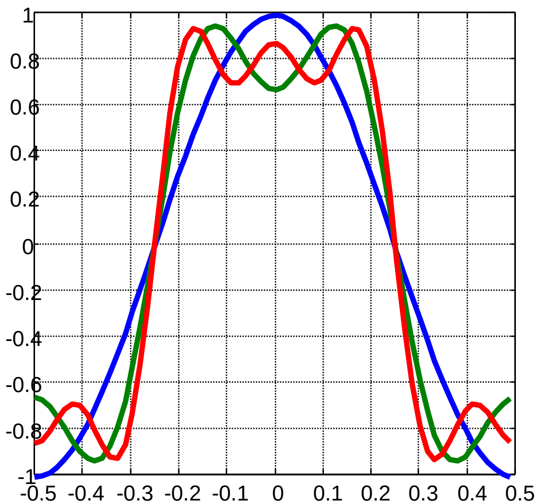
（2）“非周期信号都可用正弦信号的加权积分表示”.

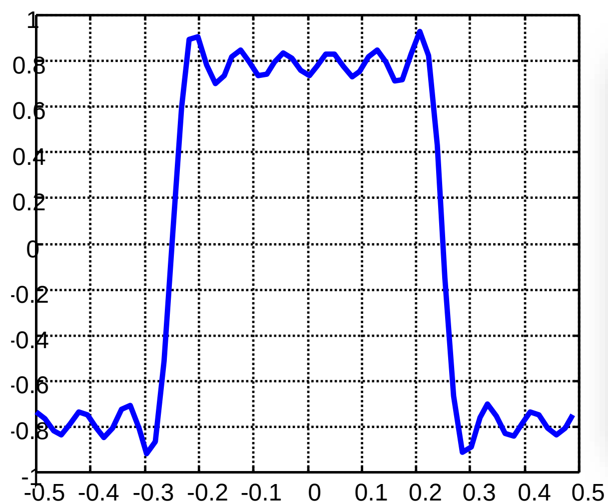
2 信号的傅里叶分析

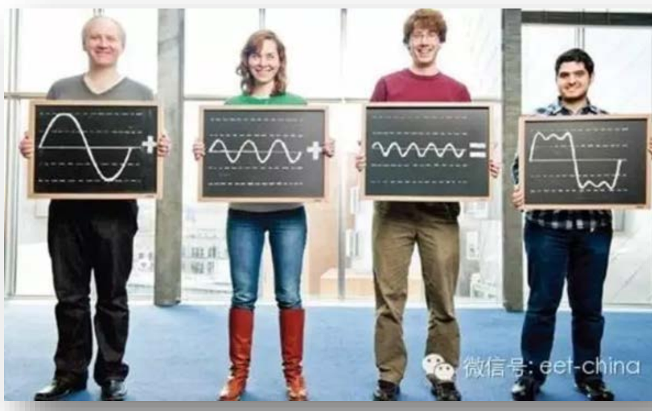
傅里叶变换的原理

周期方波





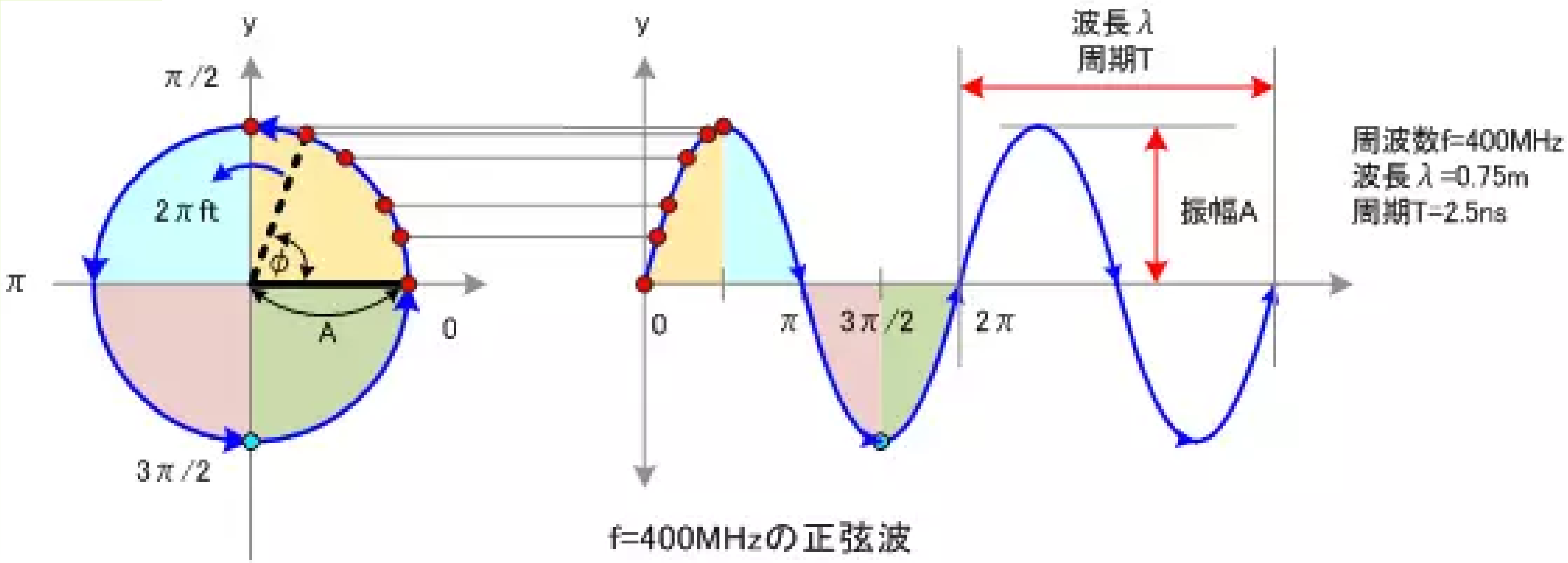




$$S_6 = \frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t)$$

2 信号的傅里叶分析

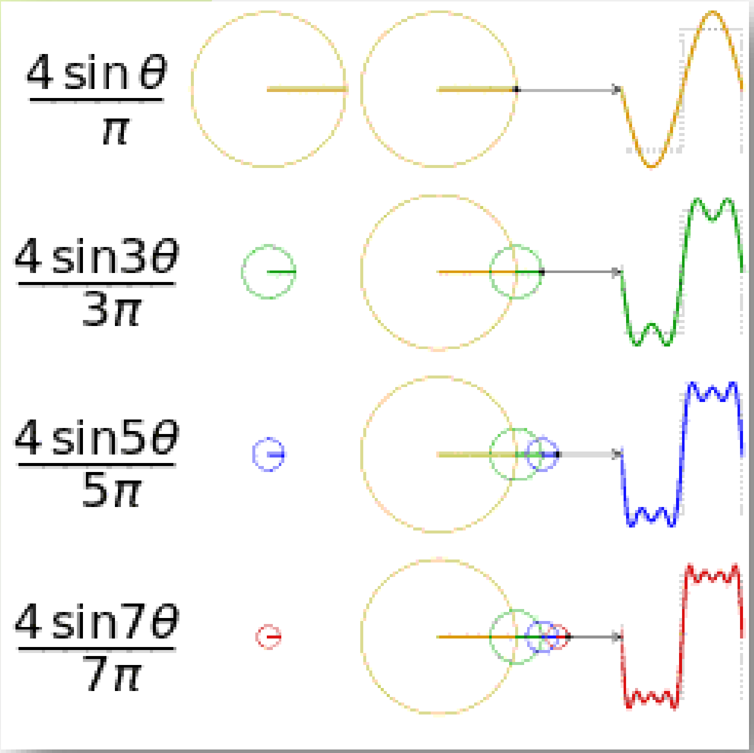
傅里叶变换的原理

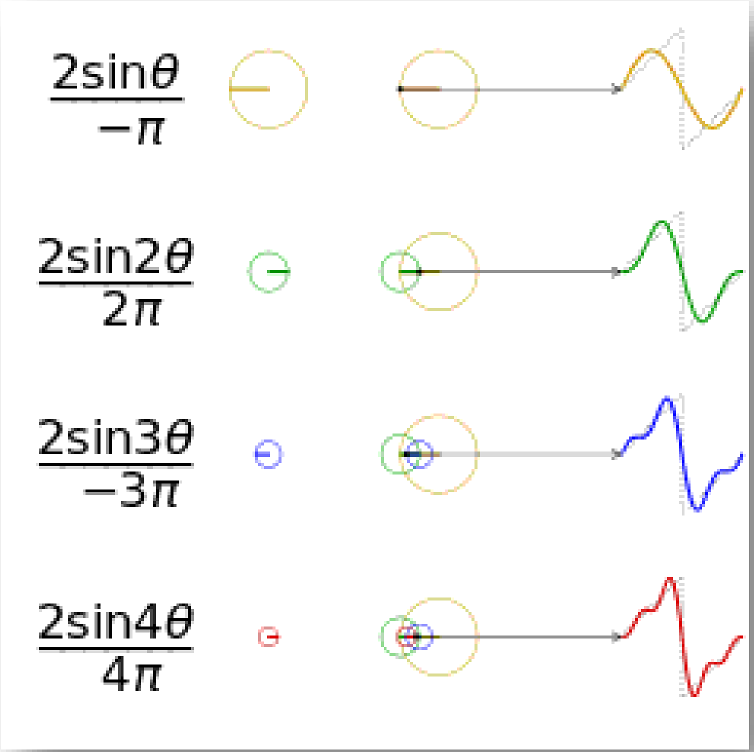


正弦波可以由圆周运动生成

2 信号的傅里叶分析

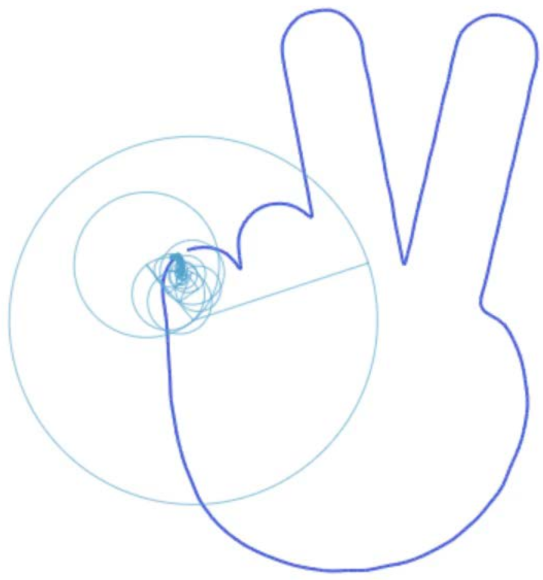
傅里叶变换的原理





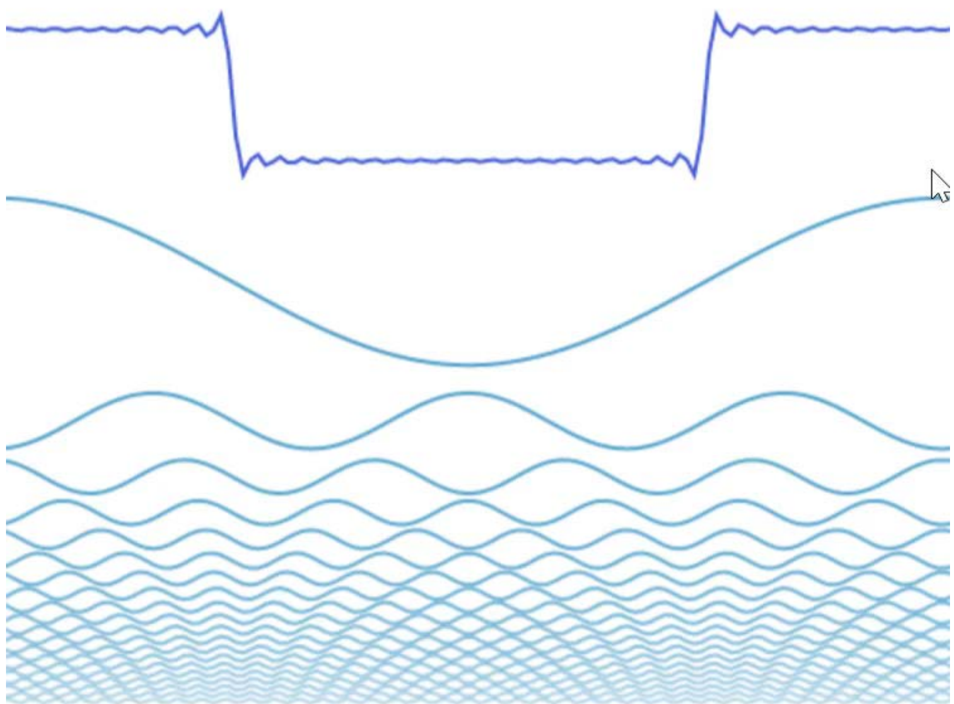
由4个频率的正弦曲线合成的近似方波和近似三角波

傅里叶变换的原理—运动



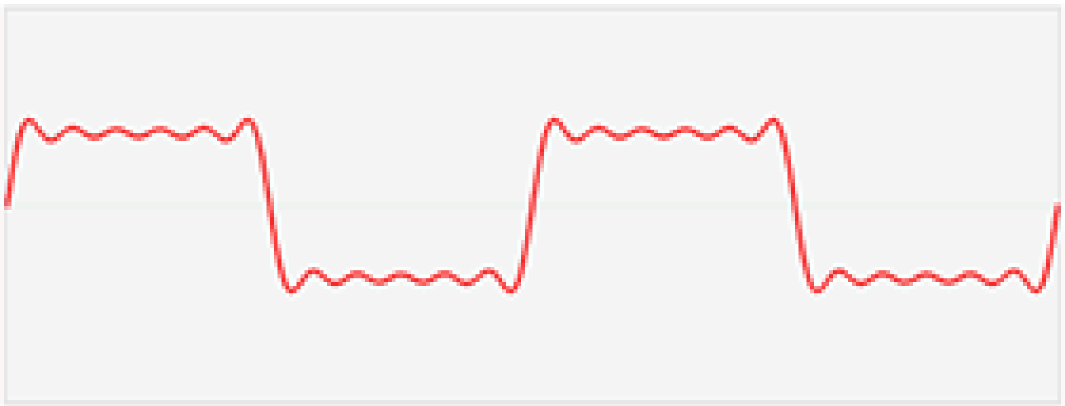
用简单的圆周运动画出任意图形（不同频率，不同半径）

傅里叶变换的原理—动图



用无限多个频率幅值不同的正弦波组合就可以无限逼近方波

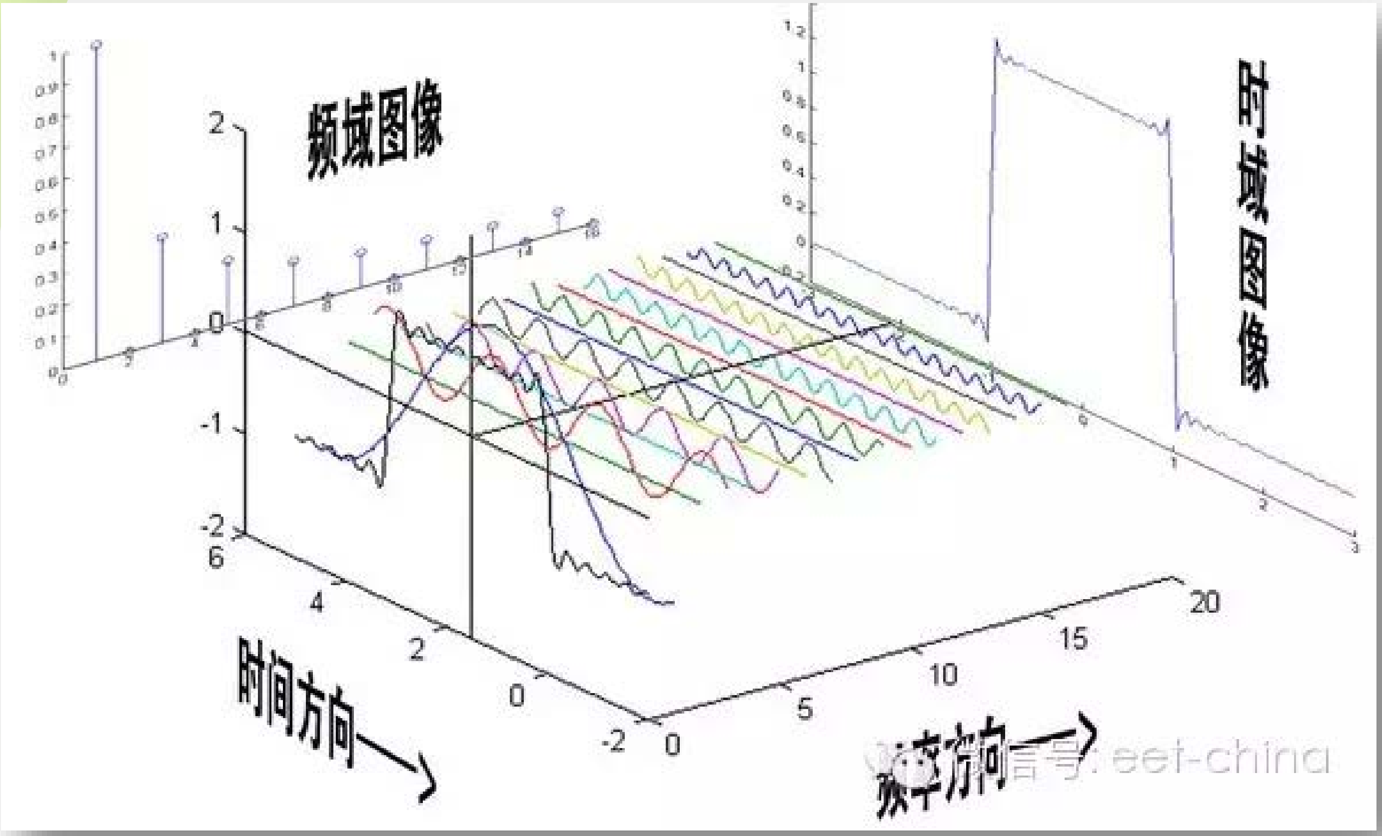
傅里叶变换的原理—动图



傅里叶变换：时域和频域的关系

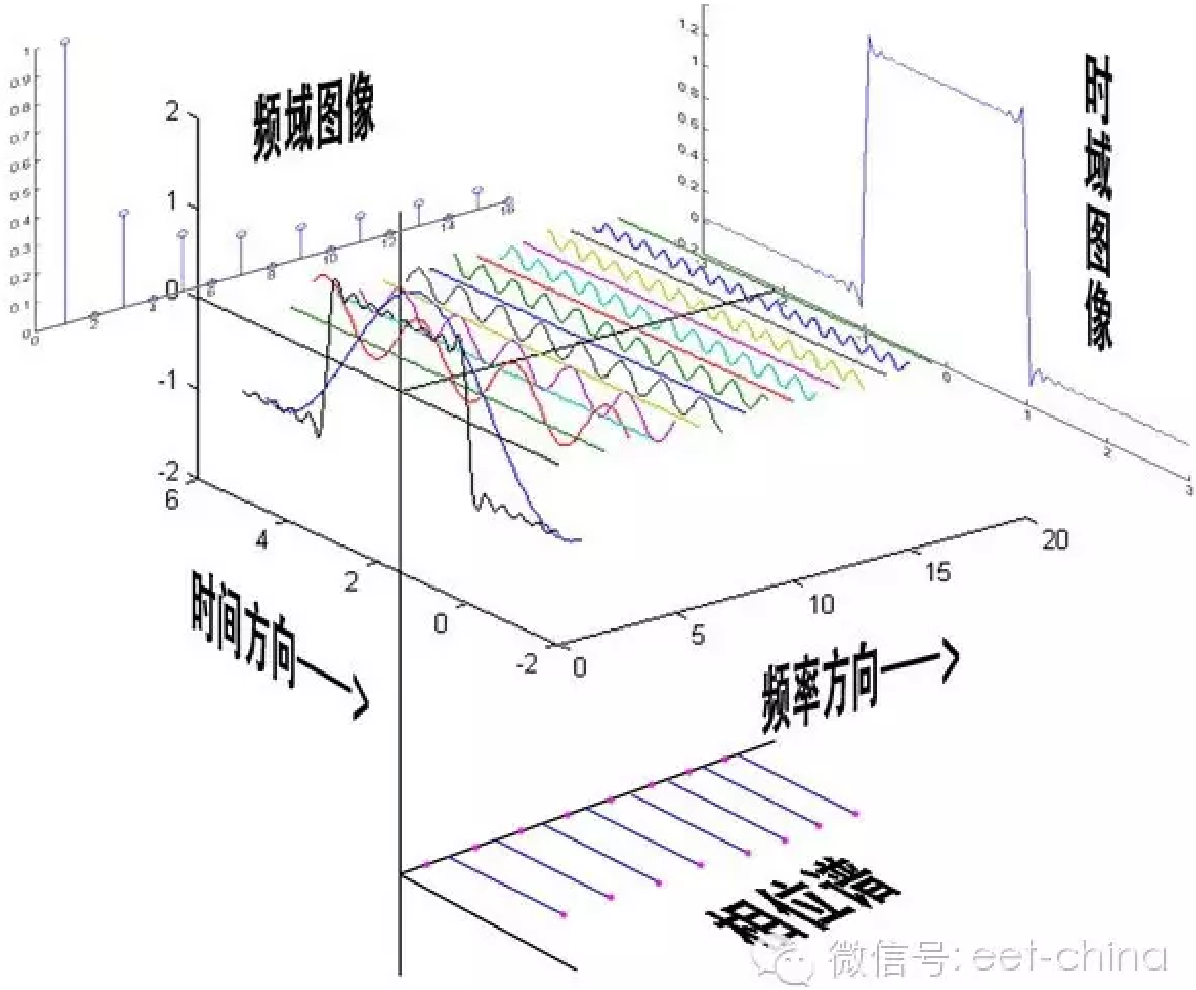
2 信号的傅里叶分析

傅里叶变换的原理—爆炸图



傅里叶变换：时域和频域的关系

傅里叶变换的原理—爆炸图



傅里叶变换的原理—数学形式

傅里叶级数的三角展开式

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\boxed{a_n}\cos n\omega_1 t + \boxed{b_n}\sin n\omega_1 t\right)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

T_1为信号的周期

为什么能分解成正弦余弦和的形式?

傅里叶变换的原理—理论基础

三角函数 $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cdots, \cos kt, \sin kt, \cdots$

就是一个标准的两两正交的函数空间。它满足下列完备正交函数的三个条件:

1. 归一化: $$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_i^*(t)\mathrm{d}t = 1$$

2. 归一正交化: $$\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_j^*(t)\mathrm{d}t = 0, \quad i \neq j$$

3. 归一化完备性：可以用其线性组合表示任意周期信号

傅里叶变换的原理—理论基础

$$1, \cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \cdots, \cos k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t, \cdots$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos n\omega_1 t \cos m\omega_1 t dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$$

以上分三种情况验证这组三角函数的**正交性**，**归一性**可以通过乘个系数$2/T_1$来实现，**完备性**则可以利用前面的表达式推导来证明。

主观题 10分

设置

Logo

问题来了

为什么用正弦信号，而不用其他信号组合?

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

主观题 10分

设置

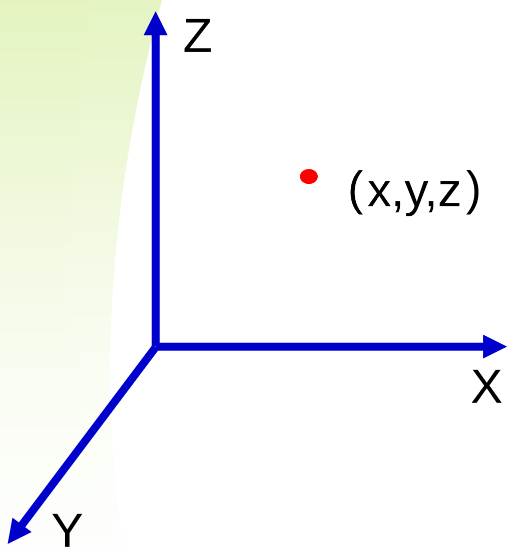
Logo

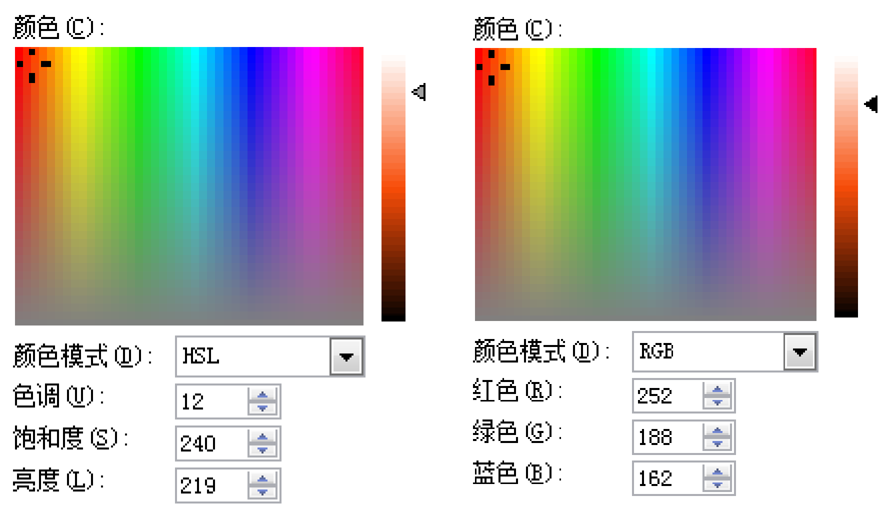
你还能想到那些类似的分解？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

傅里叶变换的原理


Z
(x,y,z)
X
Y


颜色(C):
颜色模式(D):
HSL
色调(U):
12
饱和度(S):
240
亮度(L):
219
颜色(C):
颜色模式(D):
RGB
红色(R):
252
绿色(G):
188
蓝色(B):
162

傅里叶变换的原理—数学

! 并非任意周期信号都能进行傅里叶级数展开！

$f(t)$ 可展开为傅里叶级数的条件：

(1) $f(t)$ 绝对可积，即：$\int_0^T |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$

(2) $f(t)$ 在区间内有有限个间断点；

(3) $f(t)$ 在区间内有有限个极值点。

Direchlet条件

傅里叶级数存在的充要条件

一般周期信号都满足这些条件

2 信号的傅里叶分析

几种不同的形式

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \\ f(t)=\dfrac{c_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n) \\ f(t)=\dfrac{d_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}d_n\sin(n\omega_1 t+\theta_n) \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\cos(n\omega_1 t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1} f(t)\sin(n\omega_1 t)dt$$

$$a_0=c_0=d_0$$

$$c_n=d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$tg\theta_n=\frac{a_n}{b_n} \qquad tg\phi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

Logo

问题又来了

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$f(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n)$$

这种描述的有什么不足吗?

周期函数的傅里叶级数

复指数函数式的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\phi_n)$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}2\alpha_n\cos(\omega_1 nt+\beta_n)$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt$$

$$\boxed{e^{j\omega_1 nt}=\cos(\omega_1 nt)+j\sin(\omega_1 nt)}$$

$$=\sum_{\boxed{n=0}}^{\infty}\left(c_n e^{j\omega_1 nt}+c_{-n}e^{-j\omega_1 nt}\right)$$

$$=\sum_{\boxed{n=-\infty}}^{\infty}c_n e^{j\omega_1 nt}$$

引入复数和负频率只是为了简化数学描述和计算

周期函数的傅里叶级数

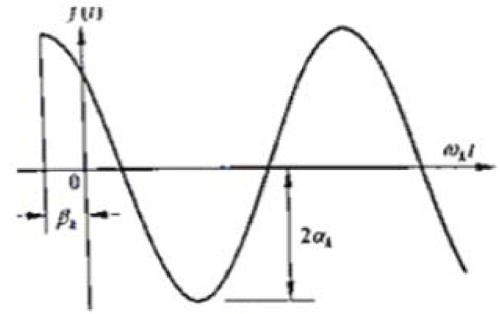
复指数函数式的傅里叶级数

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt}$$

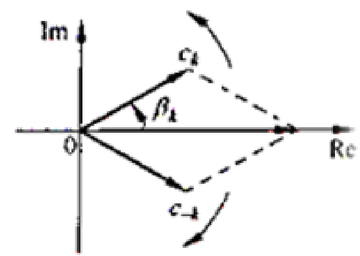
$$\Updownarrow$$

$$f(t) = \sum_{\boxed{n=0}}^{\infty} 2\alpha_n \cos(\omega_1 nt + \beta_n)$$

$$= \sum_{\boxed{n=-\infty}}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 nt}$$



(a)

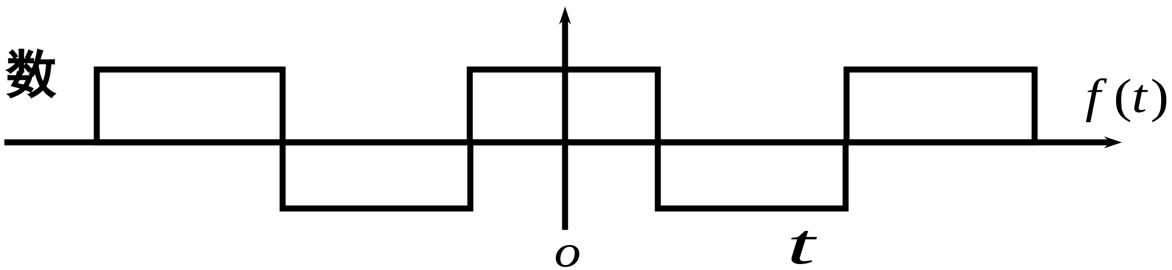


(b)

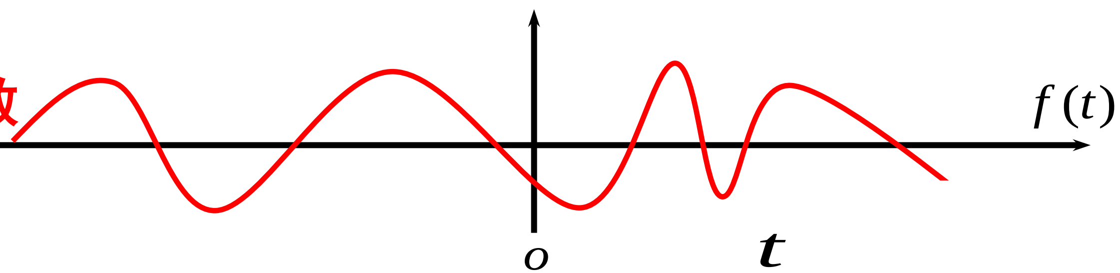
用复系数可以方便求得各个频率成分的幅值和相位

问题双来了

周期函数



非周期函数



周期函数毕竟是少数的，非周期函数怎么办?

傅里叶积分登场了

非周期函数的傅里叶积分

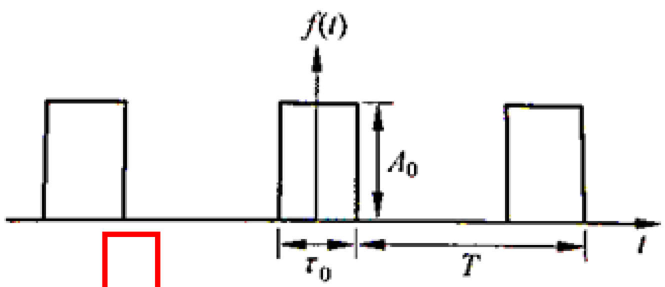


图 2-4 方波序列

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_1 nt}$$

$$c_k=\frac{A_0\tau_0}{T}\,\frac{\sin(\pi k\tau_0/T)}{\pi k\tau_0/T}$$

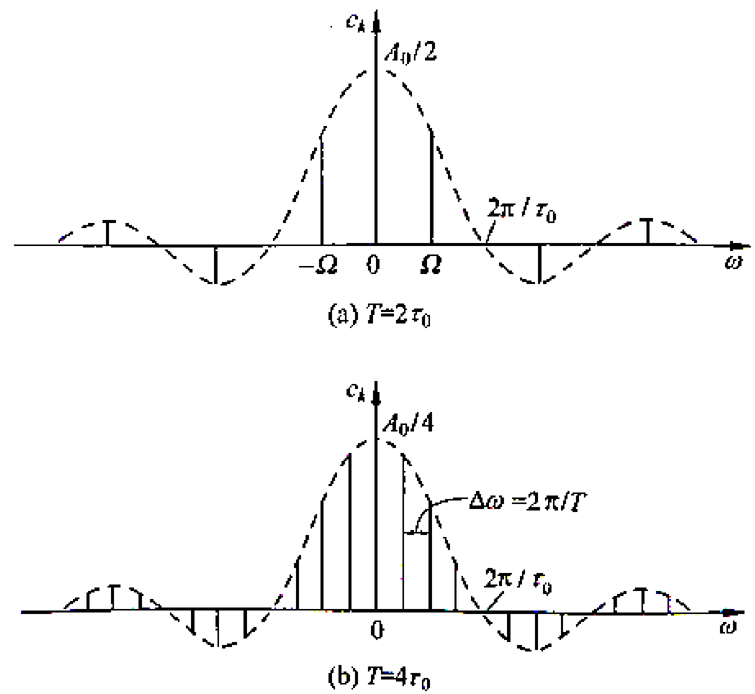


图 2-5 方波的频谱

随着周期 T 趋于无穷，线谱之间的频率间隔将趋于零

非周期函数的傅里叶积分

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\omega_1 nt}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\omega_1 nt}dt$$

$$T\to\infty$$

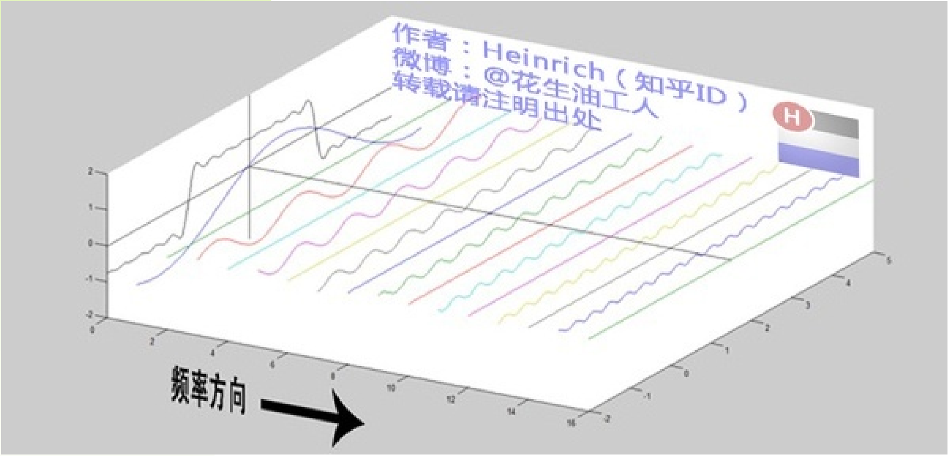
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

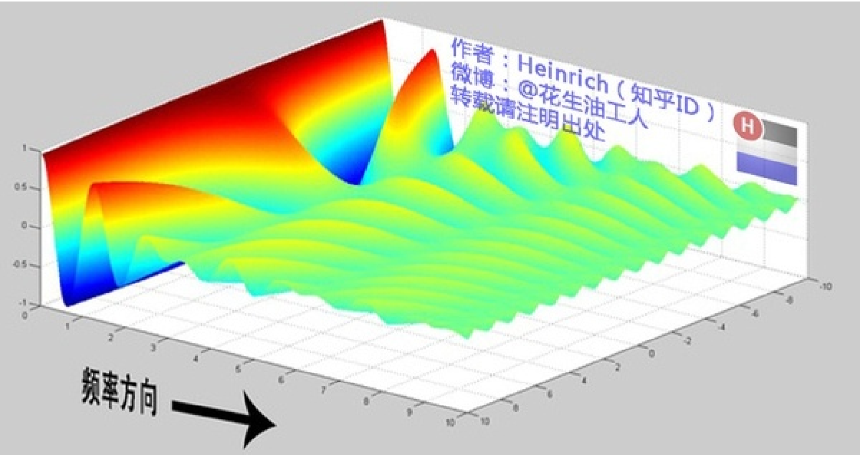
$$\boxed{F(j\omega_n)=c_nT}$$

随着函数周期 T 趋于无穷，傅里叶级数转变为傅里叶积分

非周期函数的傅里叶积分



离散谱



连续谱

随着函数周期 T 趋于无穷，傅里叶级数转变为傅里叶积分

2 信号的傅里叶分析

典型信号的频谱特性---理想脉冲信号

$$\begin{cases}\delta(t)=0, t\neq 0\\ \delta(t)=\infty, t=0\end{cases}$$

$$\delta_\lambda(t)=\frac{\lambda}{\pi(1+\lambda^2t^2)}$$

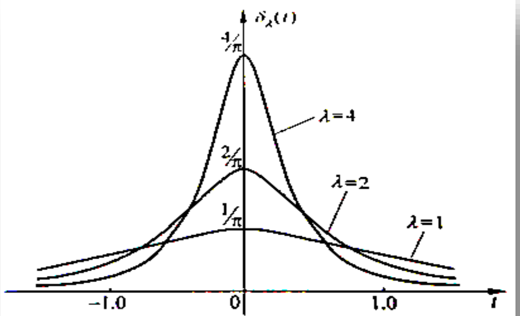


图 2-11 连续函数 $\delta_\lambda(t)$

理想脉冲傅里叶变换

$$F_\lambda(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta_\lambda(t)e^{-j\omega t}dt=e^{-|\omega|/\lambda}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}F_\lambda(j\omega)=1$$

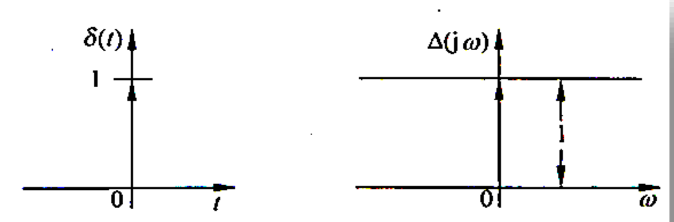


图 2-12 脉冲函数及其频谱

由理想脉冲信号作用下的系统输出可获得系统的频率特性

典型信号的频谱特性---实际脉冲信号

图 2-16 脉冲波形

三角波和方波

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right|$$

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{\sin^2(\omega T/4)}{(\omega T/2)^2}\right|$$

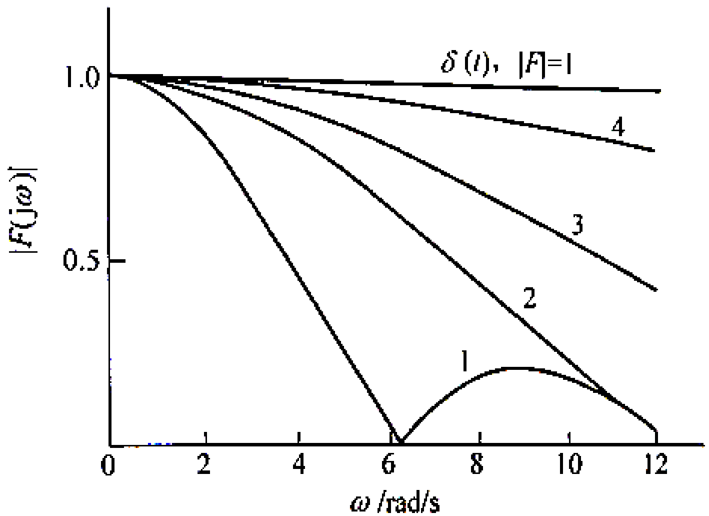


图 2-17 实际脉冲信号的频谱

1—T=1 s 方波；2—T=0.5 s 方波；

3—T=0.5 s 三角波；4—T=0.25 s 方波

- 如果脉冲信号是系统的典型输入信号，可由给定 T 对应的频率特性确定实际系统的**带宽指标**；
- 如果要选择脉冲信号对系统进行测试，可根据系统的带宽选择 **T 的宽度**。

典型信号的频谱特性---阶跃信号

$$1(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_{\varepsilon}(t)$$

$$f_{\varepsilon}(t)=\begin{cases} e^{-\varepsilon t}, t>0 \\ 0, \quad t<0 \end{cases}$$

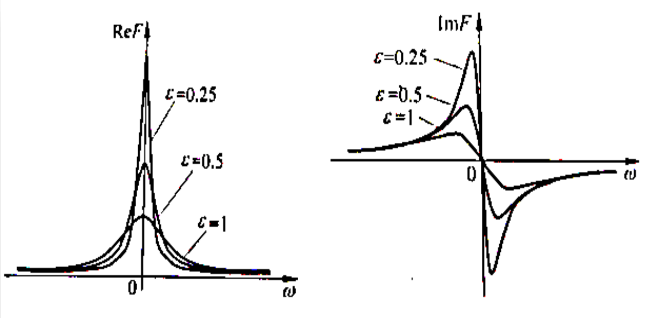


图 2-14　$F_{\varepsilon}(t)$的频谱

阶跃信号的频谱特性：

$$F(j\omega)=\lim_{e\to 0} F_{\varepsilon}(j\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

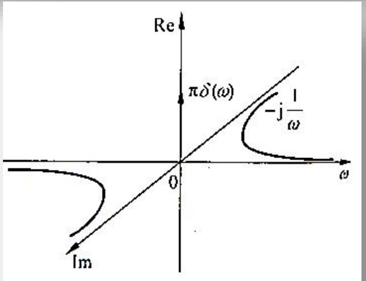
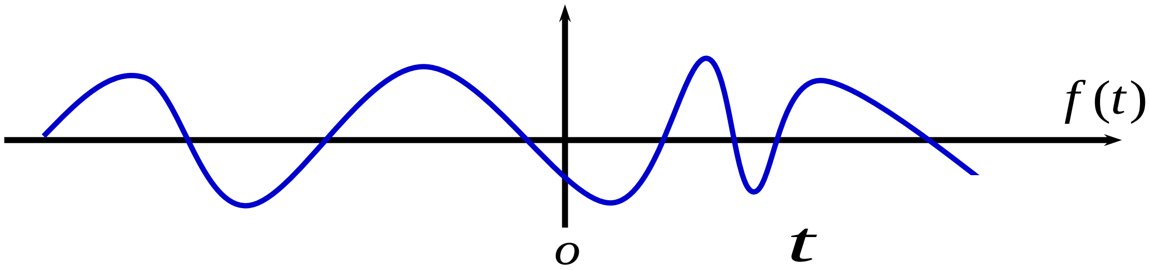


图 2-15　阶跃函数的频谱

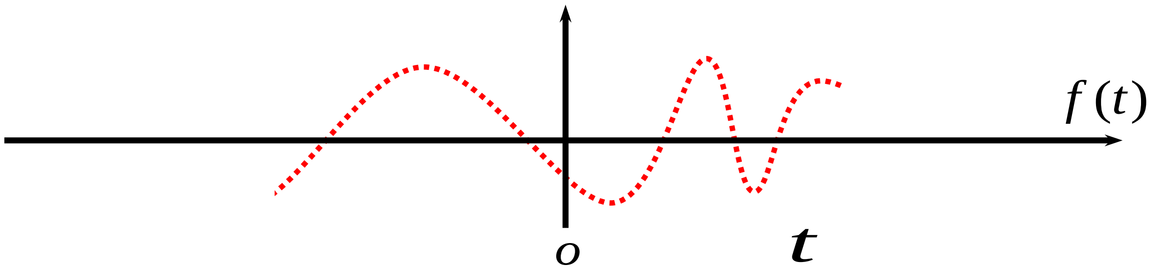
由频谱特性可知，阶跃信号频谱以低频信号为主。对于阶跃信号为典型输入的系统，带宽不必设计的太宽，而对于带宽比较高的系统，不适合用阶跃信号进行测试。

问题叒来了

无限长度
连续函数



有限长度
离散数据



面对实际工程中，有限长度的离散数据如何分析?

各种数学操作登场了

2 信号的傅里叶分析

有限长度离散信号的离散傅里叶变换DFT

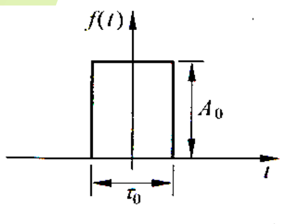


图 2-9 单个方波

$$F(j\omega)=\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

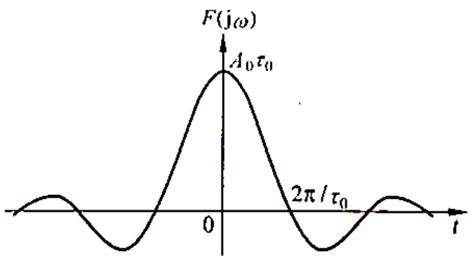
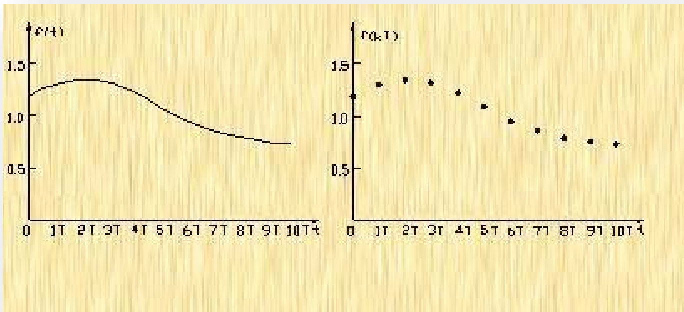


图 2-10 单个方波的频谱特性



实际信号是：**有限长度，非周期，没有解析表达式，离散**

希望得到一个结果是：**有限个线谱求和的离散变换**

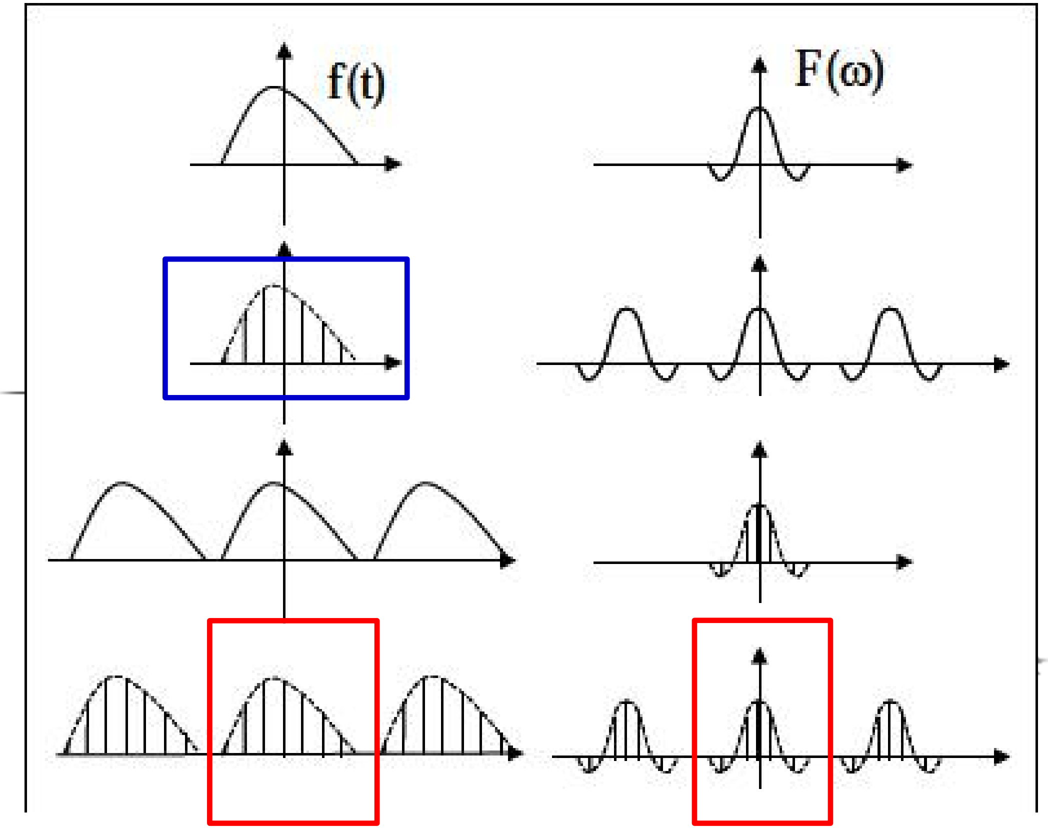
有限长度离散信号的散傅里叶变换 DFT

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jnk2\pi/N},$$

$$(k=0,\cdots,N-1)$$

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{jnk2\pi/N},$$

$$(n=0,\cdots,N-1)$$



对非周期信号进行延拓、采样、截断，最后得到离散傅里叶变换

问题叕来了

$$F(k)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-jnk2\pi/N},$$

$$(k=0,\cdots,N-1)$$

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{jnk2\pi/N},$$

$$(n=0,\cdots,N-1)$$

计算量太大，计算效率太低怎么办?

快速傅里叶变换FFT登场了

快速傅里叶变换FFT

1 采样点数进行限制 $N=2^r(\mathrm{r}=3)$

2 利用表达式指数函数的周期性

$$F(k)=\sum_{n}^{N-1} f(n)\varpi^{nk}$$

$$\varpi=e^{-j2\pi/N}$$

$$\varpi^{p+mN}=\varpi^{p}$$

3 将幂展开用二进制展开

$$n=n_1+2n_2+2^2n_3,\qquad n_i=0,1$$

$$k=k_1\times 2^2+k_2\times 2+k_3,\quad k_i=0,1$$

$$\begin{aligned}nk&=n_1(k_1\times 2^2+k_2\times 2+k_3)\\&+2n_2(k_1\times 2^2+k_2\times 2+k_3)\\&+2^2n_3(k_1\times 2^2+k_2\times 2+k_3)\\&=n_1(k_1\times 2^2+k_2\times 2+k_3)\\&+2n_2(k_2\times 2+k_3)\\&+2^2n_3k_3\end{aligned}$$

$$\varpi_3=\varpi=e^{-j\pi/4}$$

$$\varpi_2=\varpi^2=e^{-j\pi/2}$$

$$\varpi_1=\varpi^4=e^{-j\pi}$$

4 调整运算次序，用常值减少幂运算

$$F(k)=\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3} f(n)\varpi^{nk}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{1}\varpi_3^{n_1(k_1\times 4+k_2\times 2+k_3)}\sum_{n_2=0}^{1}\varpi_2^{n_2(k_2\times 2+k_3)}\sum_{n_3=0}^{1}\varpi_1^{n_3k_3} f(n)$$

信号频率特性分析在控制系统设计中的作用

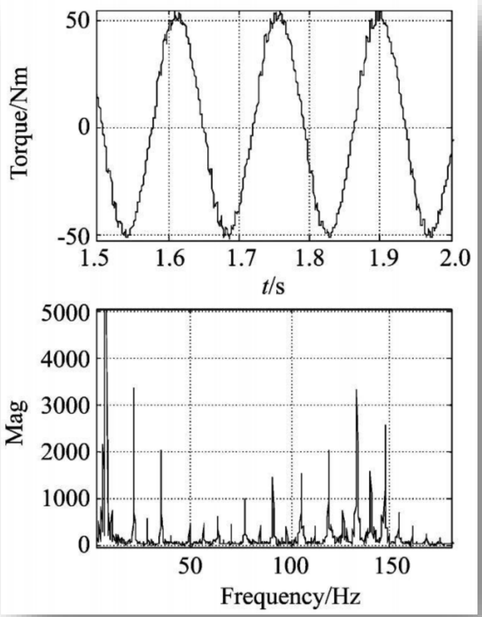
1 基于典型的输入信号分析，可以指导元部件选型；

2 基于典型的输入信号分析，可以对模型进行简化；

3 基于典型的输入信号分析，可以确定带宽和频响指标；

4 通过对系统输入和输出信号的频谱分析可以测得系统的频率特性；

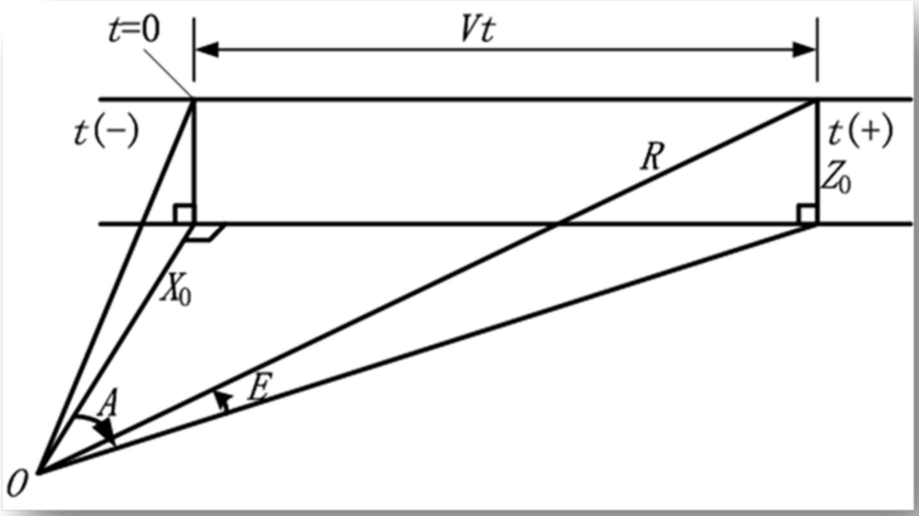
5 分析信号中各种特殊的频率成分（如谐振频率，波动力矩，间隙等）；



本周作业说明

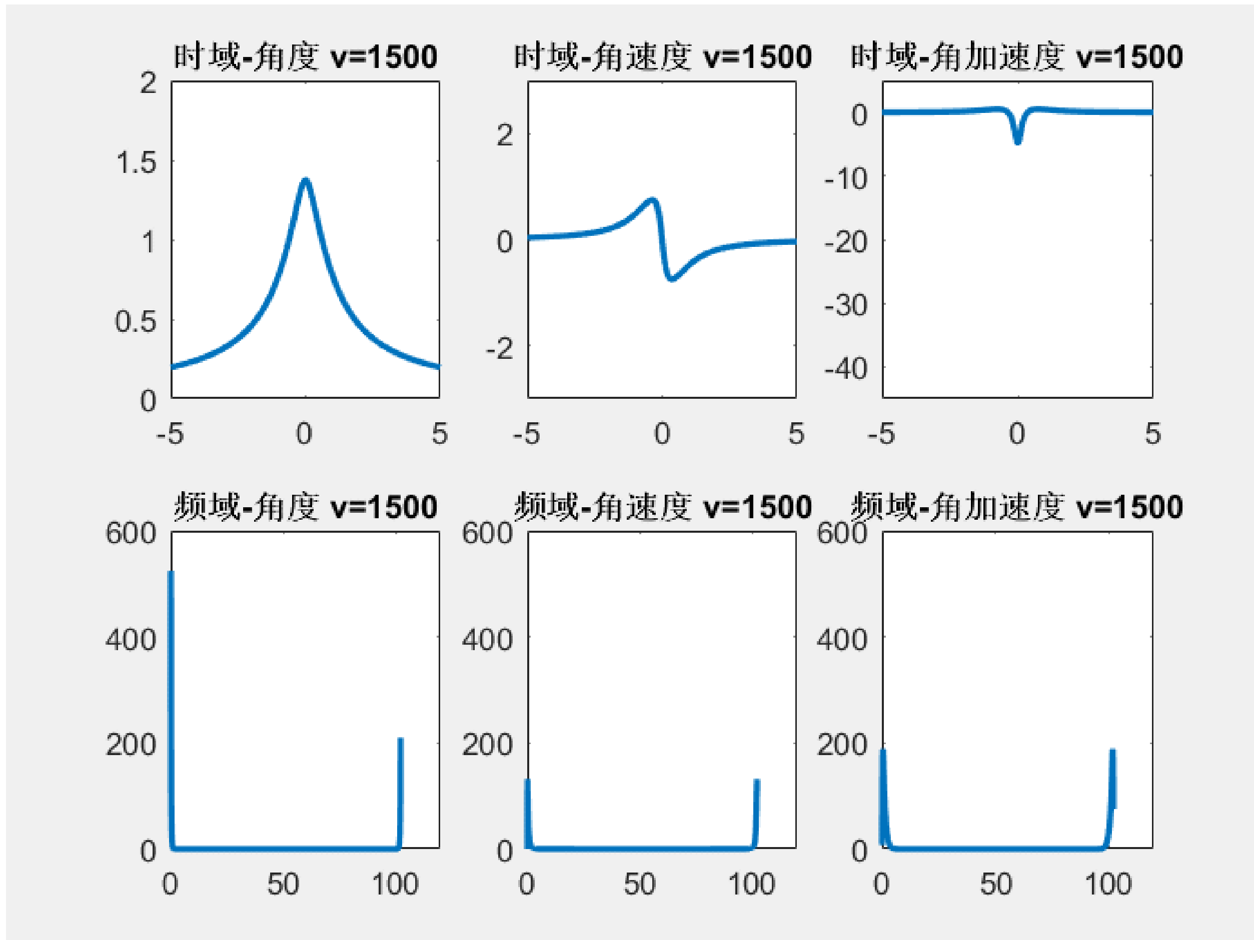
分析稳瞄系统**俯仰角**的角位置、角速度和角加速度的变化规律和频谱特性给出表达式并用MATLAB绘制曲线。并分析目标速度对俯仰角典型输入信号特性的影响。对得到典型信号进行傅里叶分析（用MATLAB函数），并画出频域曲线。

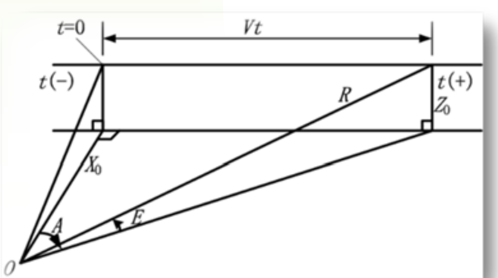
条件： $X_0 = 100m$
$Z_0 = 1000m$
$V_1 = 300m/s$
$V_2 = 3000m/s$



动图的魅力

如果可能，尽量让你画的曲线动起来。这个自愿，目的是锻炼大家的编程能力。





本周可选作业

傅里叶变换给我们提供了一个看世界的新视角，你能从中得到什么启发?

Thank You !

哈尔滨工业大学控制与仿真中心