



第4章 控制系统的带宽设计(1)

——2023年春季学期

授课教师： 马 杰 (控制与仿真中心)
霍 鑫 (控制与仿真中心)
马克茂 (控制与仿真中心)
陈松林 (控制与仿真中心)



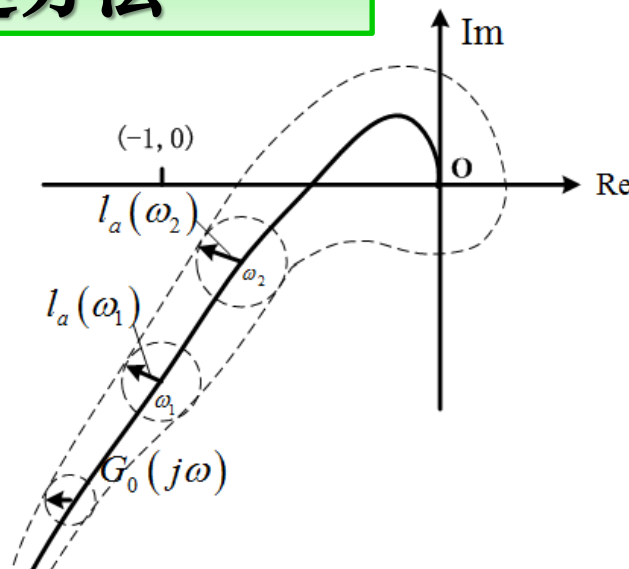
回顾篇

不确定性描述方法

➤ 加性不确定性描述方法

$$G(j\omega) = G_0(j\omega) + \Delta G(j\omega)$$

$$|\Delta G(j\omega)| < l_a(\omega)$$



➤ 乘性不确定性描述方法

$$G(j\omega) = [1 + L(j\omega)] G_0(j\omega) \quad |L(j\omega)| < l_m(\omega)$$

➤ 两种描述方法的转换，不确定性界函数的确定方法



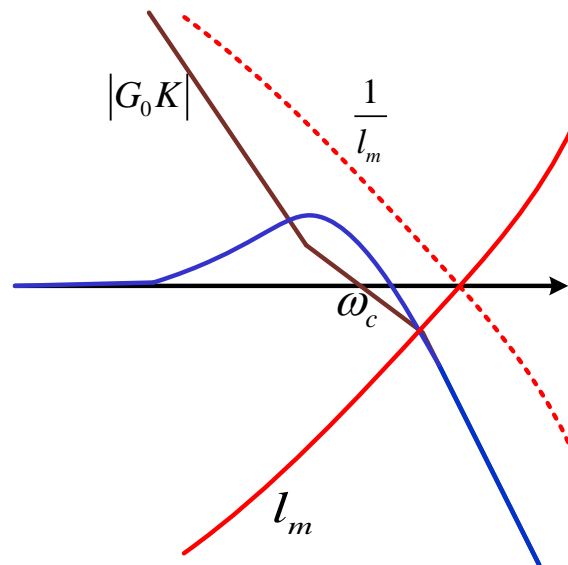
鲁棒稳定性条件

- 已知对象 G ，乘性摄动界函数 $|L(j\omega)| < l_m(\omega)$ ，若 K 和 G_0 满足如下条件时，闭环系统是鲁棒稳定的

$$\left| \frac{G_0 K}{1 + G_0 K} \right| < \frac{1}{l_m}$$

- 鲁棒稳定性的Bode图描述

高频段 $|G_0 K| < \frac{1}{l_m}$



找个准确的 G_0 ，找个合理的界函数（从方便性和保守性考虑）



处理不确定性的方法—定量分析

■ 找个准确的 G_0 ，得到准确的界，设计一个合理的界函数

从不确定性产生机理原因出发

- 系统中参数的变化（参数测不准，使用中有变化）；
- 高频的未建模动态（简化处理，认知度不够）；
- 模型的化简（忽略非线性，降阶，线性化）；
- 控制系统实现时引入（元件动态，延迟，采样离散化）；

界函数通过**理论分析**和**实验测试**来确定，兼顾方便性和保守性



处理不确定性的方法—减小摄动

■ 减小不确定性 Δ 的绝对大小

- 好器件，好环境（温湿度，电压稳定等）；
- 对于工作过程参数必然摄动的系统，估算出上下界，选中间的 G_0 ；
- 不对模型做过度简化处理（例如：增加线性化的工作点的密度）；
- 降低控制器实现时的摄动（提高采样频率，提升离散化算法精度）；
- 直接在典型工况下的实际系统上进行控制器设计；

■ 减小不确定性 Δ 的相对大小

- 设计时让 G_0 比较大（例如增大系统本身的惯量）；



处理不确定性的方法—其他方法

- 有些情况无需进行鲁棒性稳定性分析，根据情况灵活设计
 - 尽量**压低高频 GK** ，降低灵敏度最大值，提高稳定裕度；
 - 有些系统正常设计即可，为避免摄动带来稳定性问题，可以增加**在线稳定性监测**即可，一旦发现可能失稳及时停机；
 - 用**DOB, ADRC或多回路**等方法同样可以抑制模型摄动带来的影响，不过对高频摄动无效；
 - 采用**自校正或自适应控制**，在线测量或辨识出关键参数的变化，并进行控制器参数调整，抵消参数摄动影响；



提升篇

约束与限制

- 从性能出发，灵敏度应尽可能小，期望 G_0K 大

$$S = \frac{1}{1 + G_0K}$$

- Bode积分定理给出了**数学**上的约束

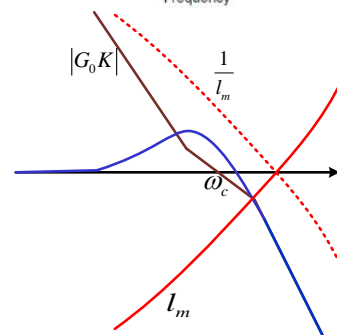
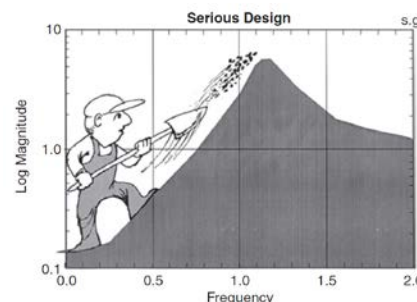
$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = 0, \quad \nu > 1 \quad G_0K \text{ 不能一直大}$$

- 鲁棒稳定性条件给出了**现实**的约束

不确定性必然存在， G_0K 高频必须往小设计

- 实际设计时还有躲不开的**物理**限制

执行器功率限制，系统高频 G_0K 必然衰减



$$\left| \frac{G_0K}{1 + G_0K} \right| < \frac{1}{l_m} \quad |G_0K| < \frac{1}{l_m}$$



拓展篇



如何面对不确定性

- 世界充满不确定性（天灾人祸，随机发生）；
- 人生充满不确定性（悲欢离合，不期而遇）；

意外、悬念、邂逅

- 减少自身的认知不确定性，努力增加人生的确定性
- 减少做人做事的不确定性，尽量成为一个靠谱的人

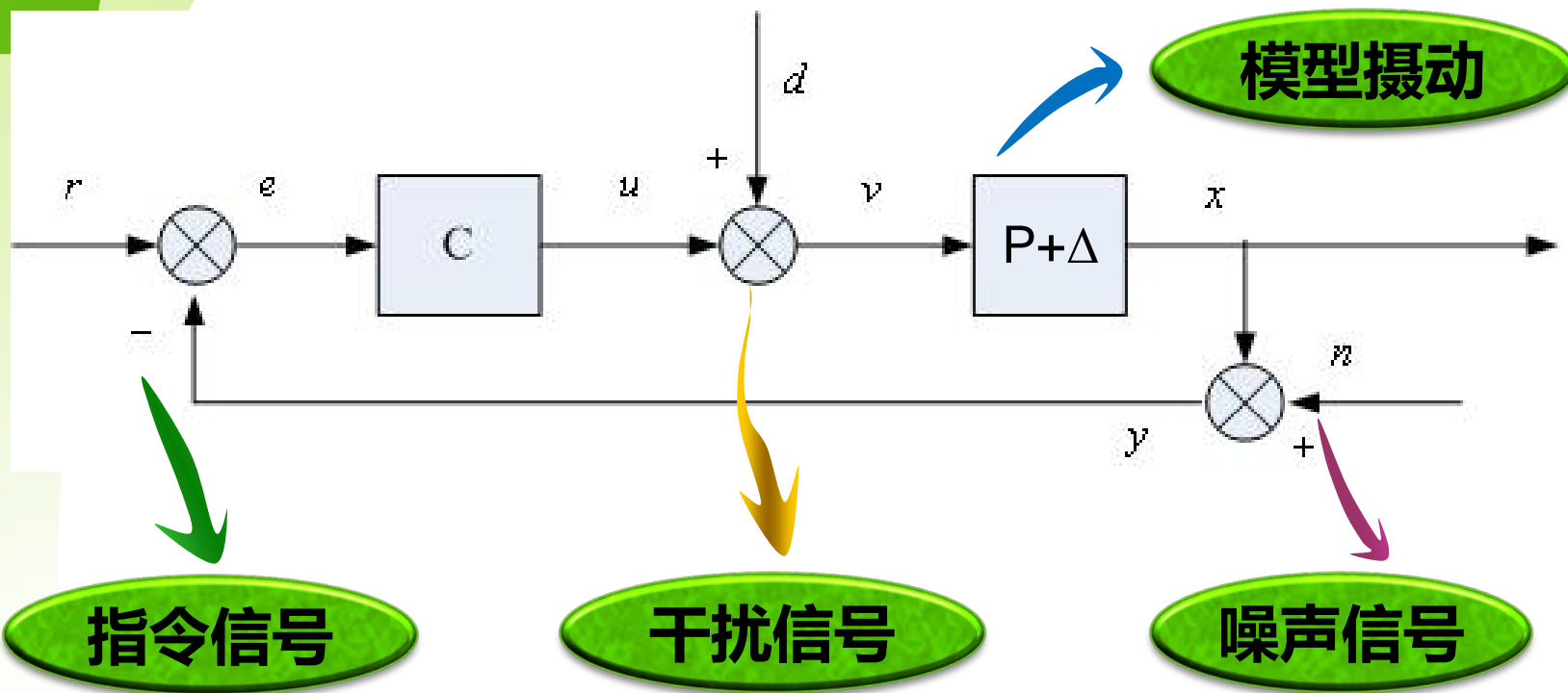
凡事有交代, 件件有着落, 事事有回音

- 敢于拥抱不确定性：找出规律，抓住机遇
- 善于制造不确定性：带来惊喜，超出预期

喜欢 = 熟悉 + 意外



总结篇



$$G_{xr} = \frac{PC}{1+PC}$$

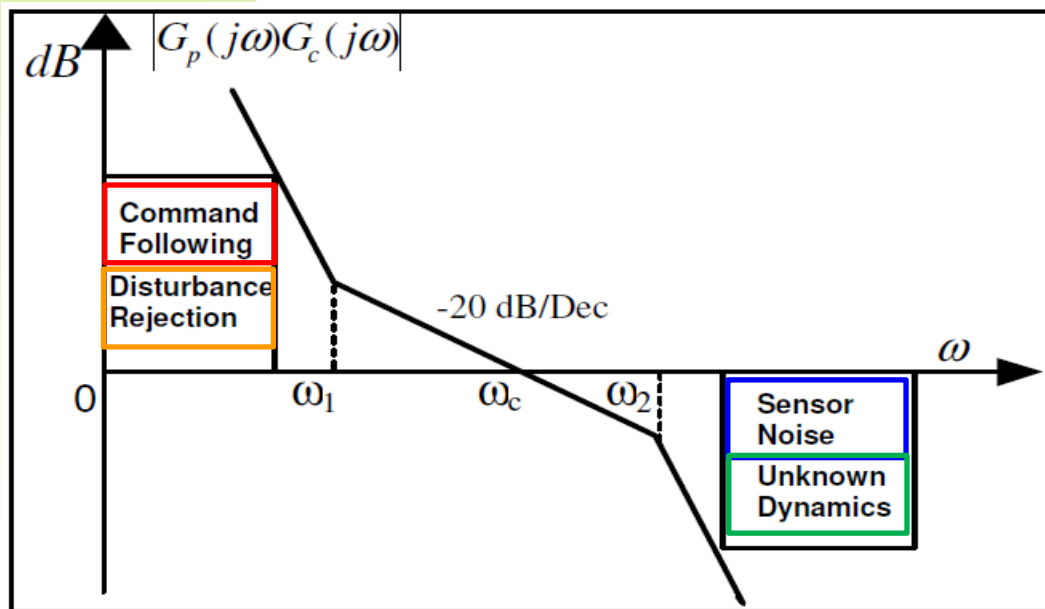
$$G_{xd} = \frac{P}{1+PC}$$

$$G_{xn} = \frac{-PC}{1+PC}$$



总结篇

控制系统的设计原则



$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_k(s)}$$

$$e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{u+1}D(s)}{K_1}$$

$$\overline{e_{ssn}^2} = \frac{K_N^2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\left| \frac{G_0 K}{1 + G_0 K} \right| < \frac{1}{l_m}, \quad \frac{G_0 K}{1 + G_0 K} \approx G_0 K$$

- **指令跟踪**对系统低频的斜率和增益提出了要求;
- **扰动抑制**对干扰作用点之前的特性提出了要求;
- **噪声抑制**对系统的带宽和高频特性提出了要求;
- **不确定性**对系统的带宽和高频特性提出了要求;



学习目标

本节课需要掌握的内容

- 理解**带宽**的概念，掌握几种相关的**频域指标**；
- 理解**反馈特性与响应特性**关系；
- 掌握影响系统带宽的**因素**；
- 掌握**机械谐振**产生的机理以及抑制方法；



本章主要内容

A1

灵敏度和Bode积分约束

A2

对象的不确定性和鲁棒稳定性约束

A3

带宽设计约束

A4

相对稳定性及其指标



4.3 带宽及带宽设计

4.3.1

控制系统的带宽

4.3.2

带宽设计



4.3.1 控制系统的带宽

1

带宽

2

机械谐振

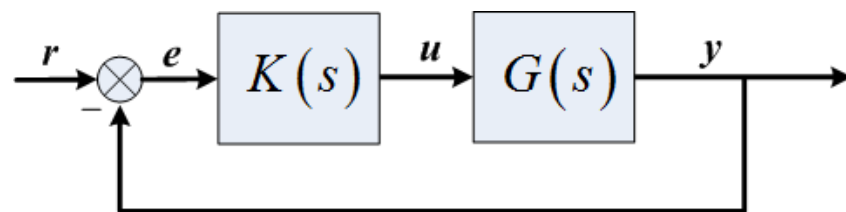


4.3.1 控制系统的带宽

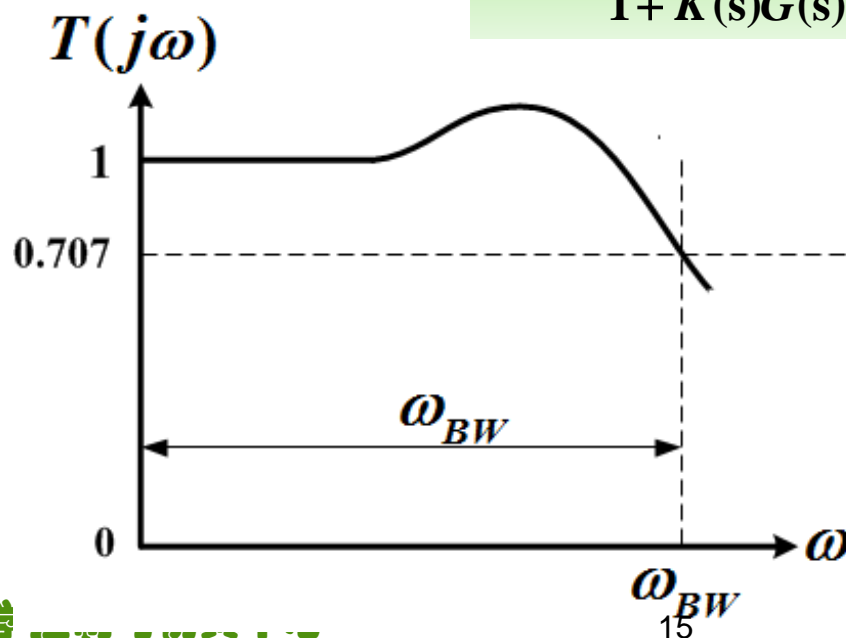
带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

给闭环系统输入不同频率的正弦信号，当系统输出信号幅值首次衰减到输入信号幅值的**0.707倍**时对应的频率 ω_{BW} 是系统可以通过的频带宽度，称为**带宽**。

带宽反映了系统的响应速度与精度；带宽越宽，输出信号的复现精度越高；



$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$



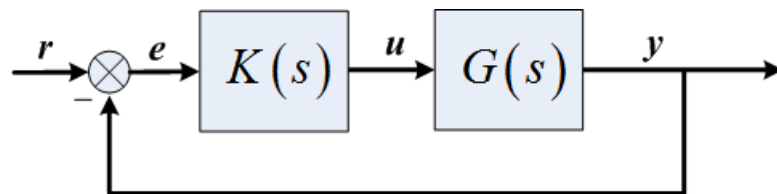


4.3.1 控制系统的带宽

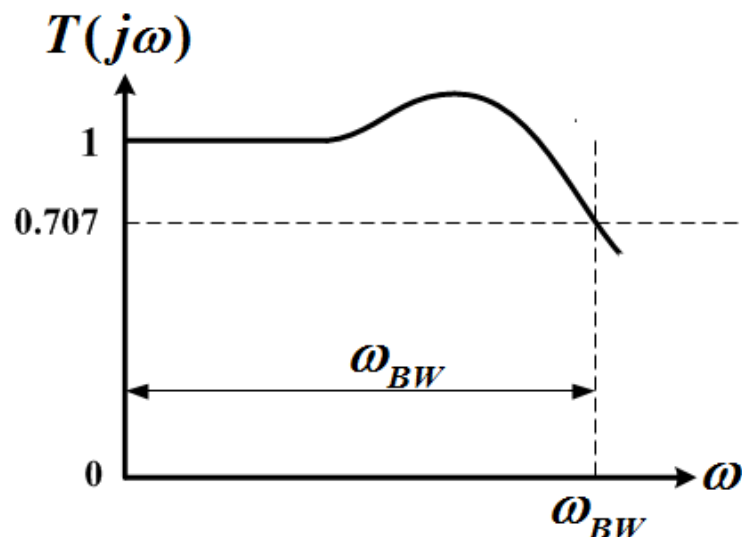
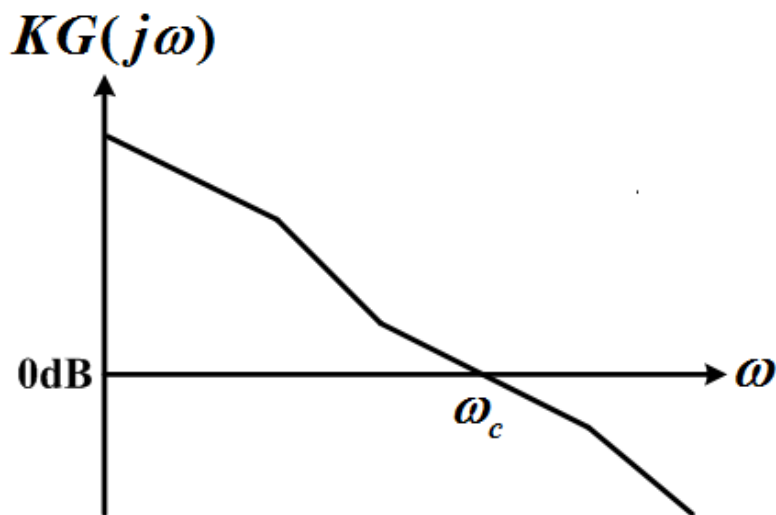
前提

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

对于右图所示系统，Bode图上开环幅频特性的穿越频率 ω_c 与闭环系统带宽 ω_{BW} 是同一数量级的，一般有 $\omega_c < \omega_{BW} < 2\omega_c$ 的关系，所以也常把 ω_c 称作带宽。



$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

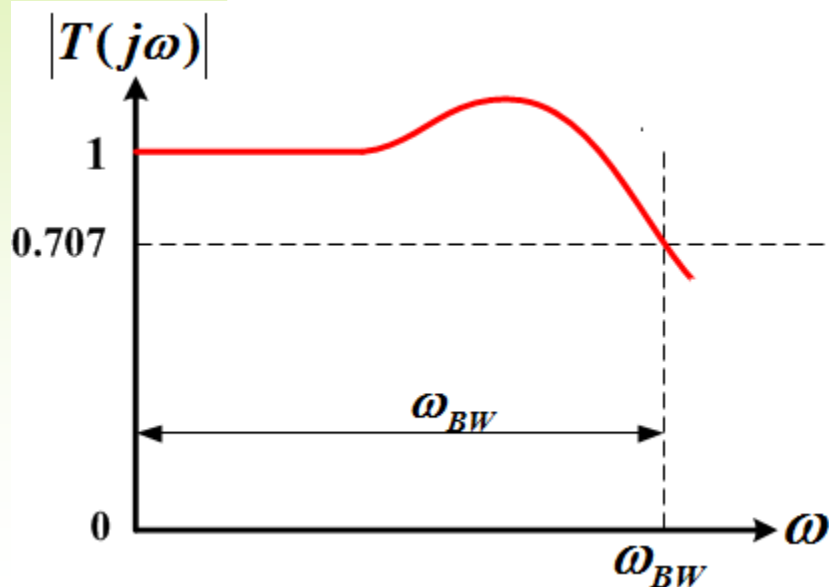




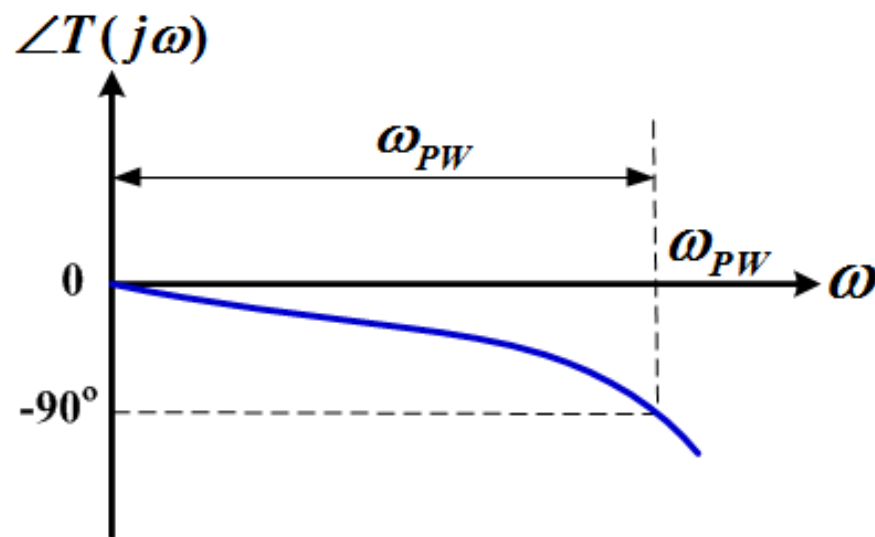
4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

幅值首次衰减到-3dB对应的频率为 ω_{BW}
相角滞后首次达到-90度对应的频率为 ω_{PW}



$$\omega_{BW} \geq \omega_G$$



$$\omega_{PW} \geq \omega_G$$

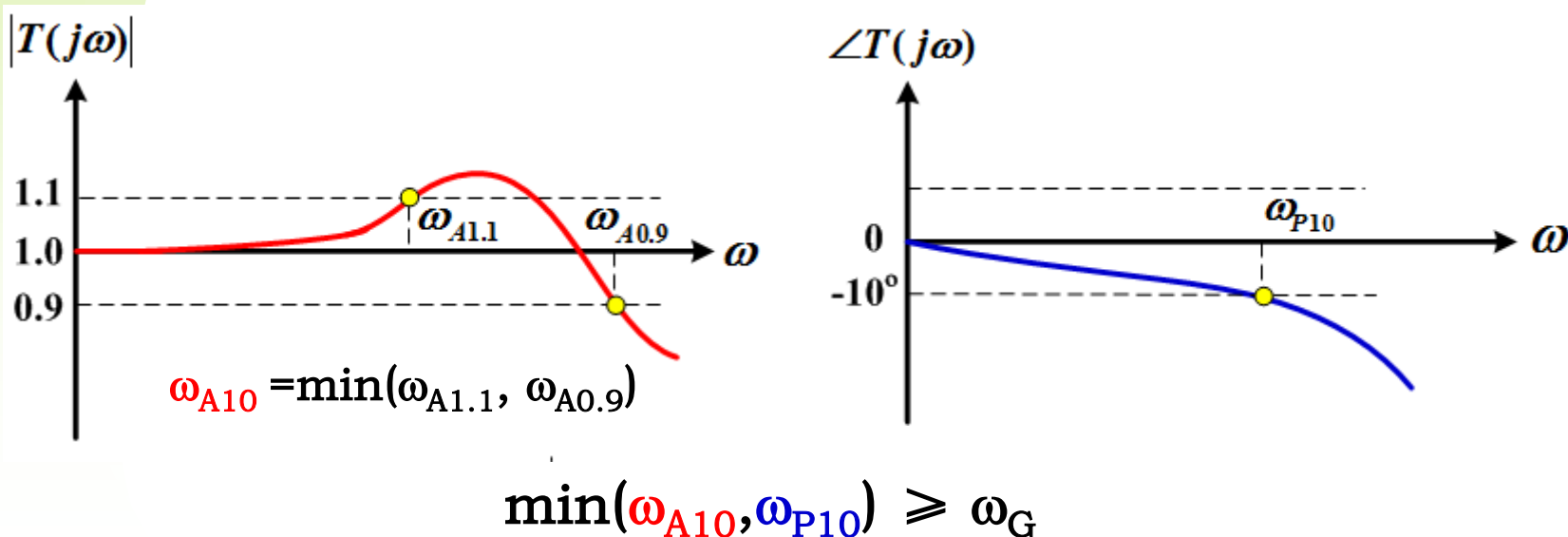
有时会对-3dB和-90度相移对应的频率同时提出要求



4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

还有更为苛刻的带宽指标要求，双十频响指标，即在给定频段 ω_G 内，幅值误差不大于10%，相位误差不大于 10°



类似的还有**双五**，**双三**等带宽性能指标。
该指标与时域的典型信号的跟踪误差相关。



4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | **带宽设计** | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

◆ 如何提出合理的闭环系统带宽要求？

低了，满足不了指标要求；

高了，实现困难，成本提高，周期变长；

熟悉系统应用背景，从确定典型的**输入信号和干扰信号**入手，分析两种信号的**频率成分**，并结合**跟踪精度**要求来确定闭环系统的带宽要求。



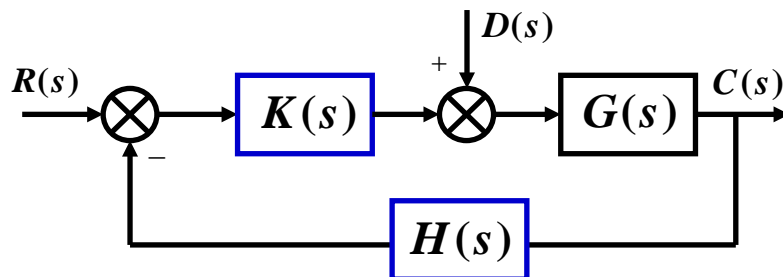
4.3.1 控制系统的带宽

多样

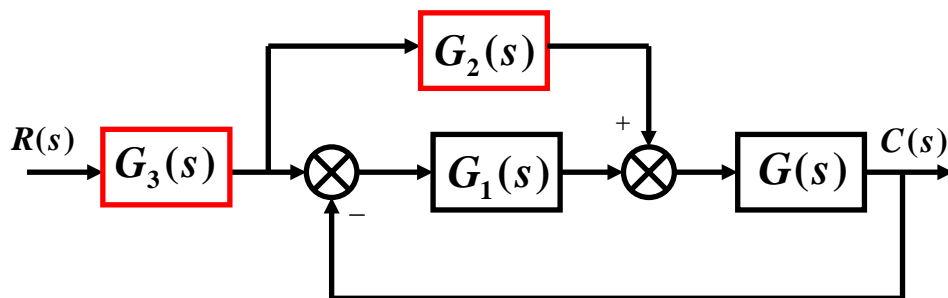
带宽定义 | 相关指标 | **带宽设计** | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

◆ 两种扩展系统带宽的方法

1 闭环校正：串联校正和反馈校正



2 开环校正：顺馈环节和前置滤波环节（指令预处理环节）





关于开环校正和闭环校正，哪个正确

A

闭环校正能够提升系统综合性能；

B

开环校正应该尽量少用；

C

开环校正只能拓展带宽，不能减小静态误差

D

开环校正正在模型摄动时会起副作用；

提交

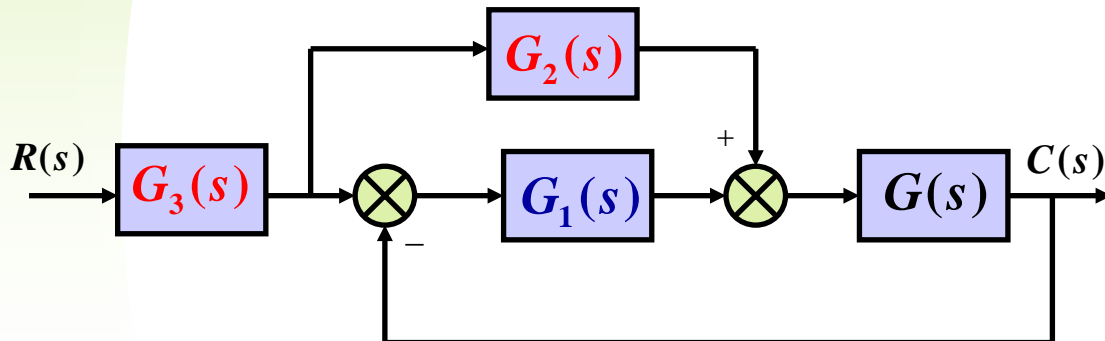


4.3.1 控制系统的带宽

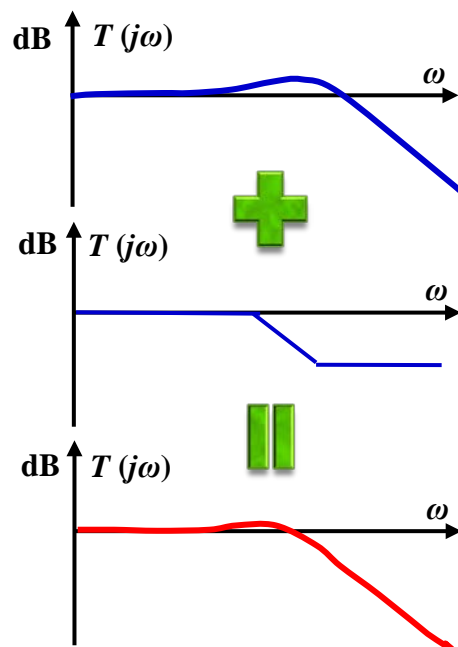
硬币

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | **响应特性与反馈特性**** | 设计原则

响应特性是反映了控制系统对输入信号的响应能力，可以用输入输出的传递函数特性来表征，可以用来描述开环系统和闭环系统（或复合控制系统）的特性。



$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_3(s) \left[\frac{G_2(s)G(s) + G_1(s)G(s)}{1 + G_1(s)G(s)} \right]$$

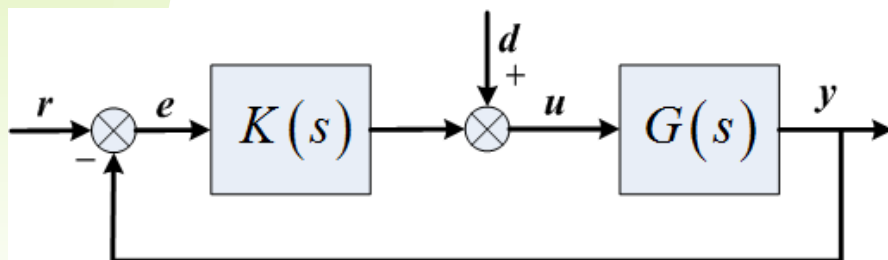




4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | **响应特性与反馈特性**** | 设计原则

反馈特性是由闭环校正引入，反馈特性反映了对**干扰抑制能力**、**跟踪给定信号**的能力，对模型摄动的**敏感程度**。



$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + K(j\omega)G(j\omega)}$$

$$\omega < \omega_c, |KG| > 1$$

**系统的灵敏度很低，
具有很好的跟踪性能**

- 如果系统的反馈特性好，系统的响应特性一定好；
- 但是系统的响应特性好，并不意味着反馈特性一定好；

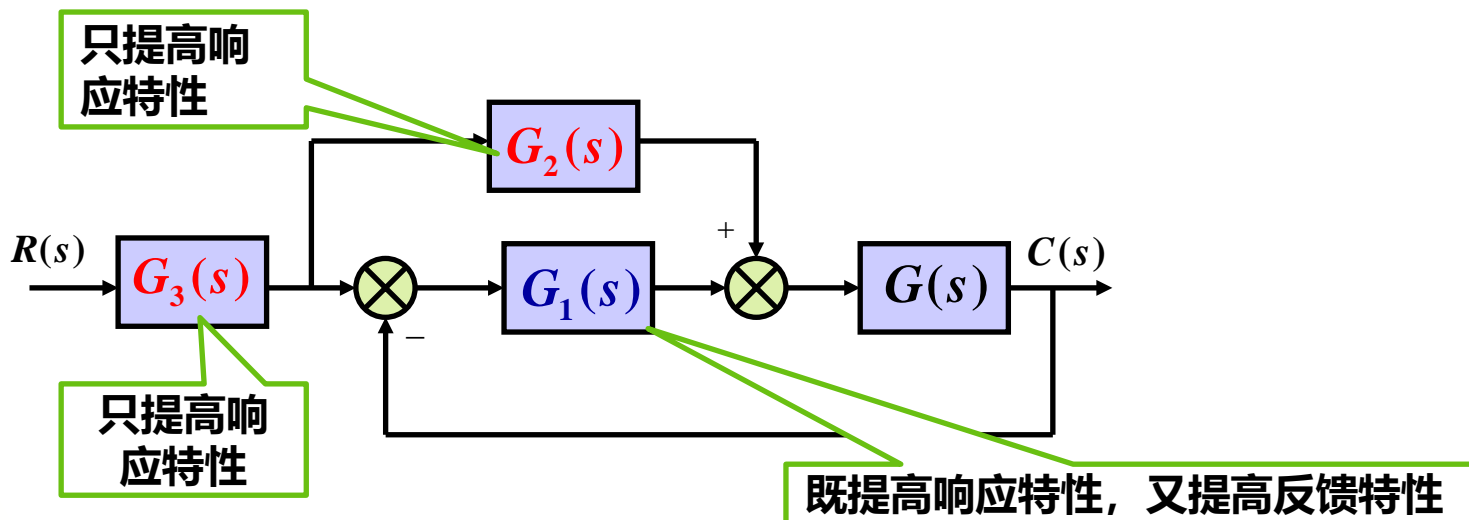


4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | **响应特性与反馈特性**** | 设计原则

反馈特性好的前提是 $\omega < \omega_c, KG > 1$

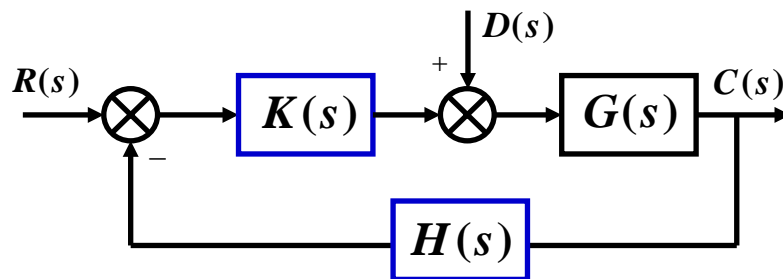
因此开环系统的带宽越宽，系统性能越好，设计原则为



最大限度的通过反馈校正环节来拓展系统的带宽
少用顺馈和前置滤波这样的开环校正方式



闭环校正的副作用有哪些？



如何用一句话概括反馈的关键作用？

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂



反馈机制究竟能够对付多大的不确定性？

郭雷，中科院院士，被IEEE控制系统学会授予2019年Hendrik W.Bode Lecture Prize.(目前全球只有30人，郭院士是获得此奖的第一个中国人)



“对自适应控制和系统辨识研究做出了真正根本性贡献，对反馈机制最大能力研究做出了真正原创性贡献”。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

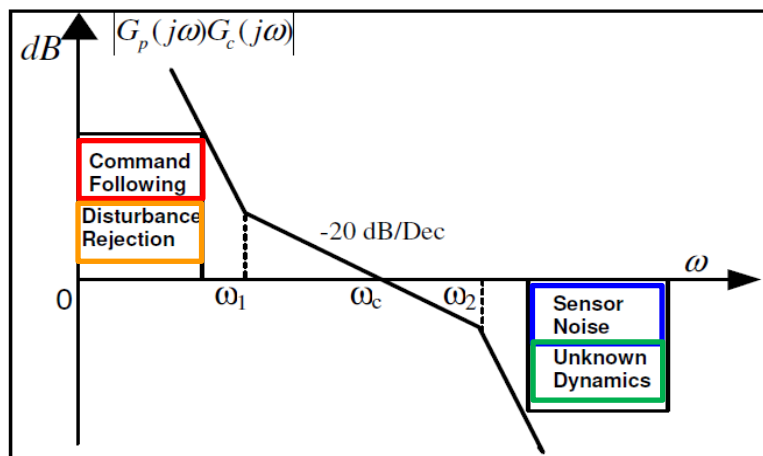
作答



4.3.1 控制系统的带宽

带宽定义 | 相关指标 | 带宽设计 | 响应特性与反馈特性 | 设计原则

带宽的拓展是受到限制的，从某种意义上说，一个系统的带宽是设计出来的，反映了控制系统设计者的设计水平。



带宽的拓展具体受到那些限制？如何处理？



带宽拓展受到哪些约束和限制？

A

数字控制中采样周期的限制；

B

鲁棒稳定性的约束；

C

高频噪声的限制；

D

Bode积分定理的约束；

E

元部件特性的限制

提交



4.3.1 控制系统的带宽

1

带宽

2

机械谐振



4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

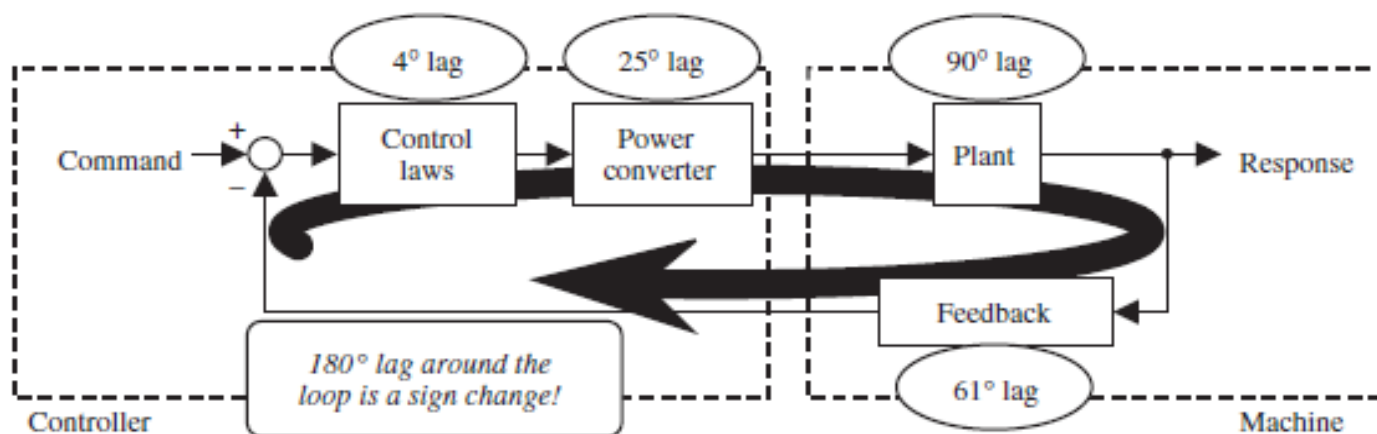
◆ 主要因素有

- 系统元部件的带宽（执行器、传感器、控制器）；
- 传动间隙、负载惯量等

执行器有
时间常数
限制

传感器测
量有延迟
和滞后

采样带来
延迟





4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

◆ 主要因素有

● 未建模动态特性;

如果只把谐振当做不确定性来处理, 则会增大大系统的不确定性界 l_m , 增大控制系统设计难度 (带来保守性)

机械谐振

机械谐振是拓展机电系统频带的一个主要瓶颈。机械谐振的特性一般比较容易分析和测试, 因此可以采取有效的措施对谐振进行抑制, 从而达到拓展系统频带的目的 (增大 ω_c)

机电伺服系统特有



4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

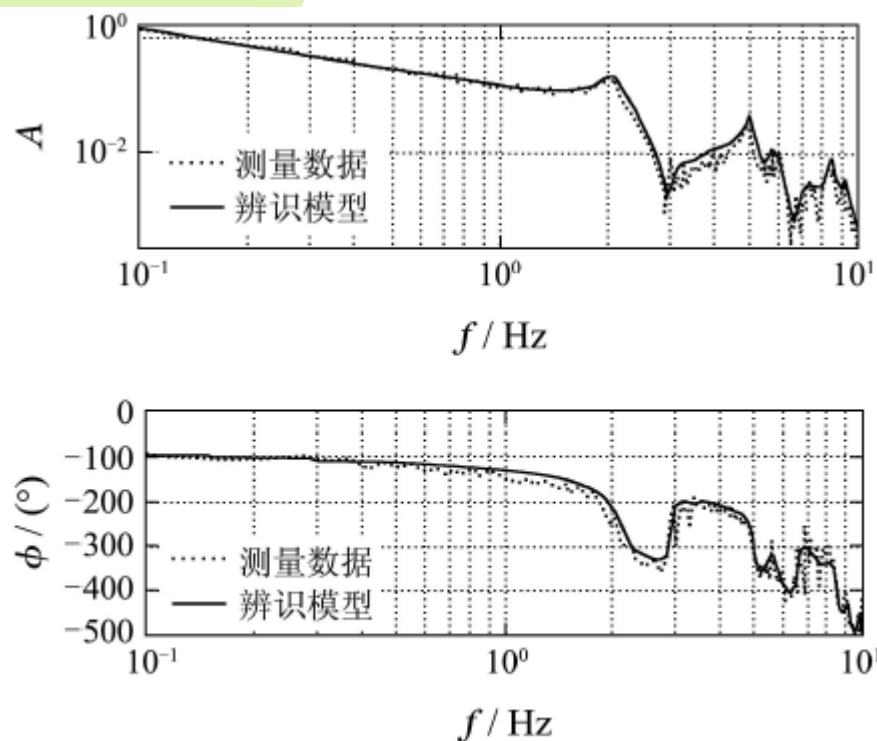


图2 天线伺服系统的频率响应

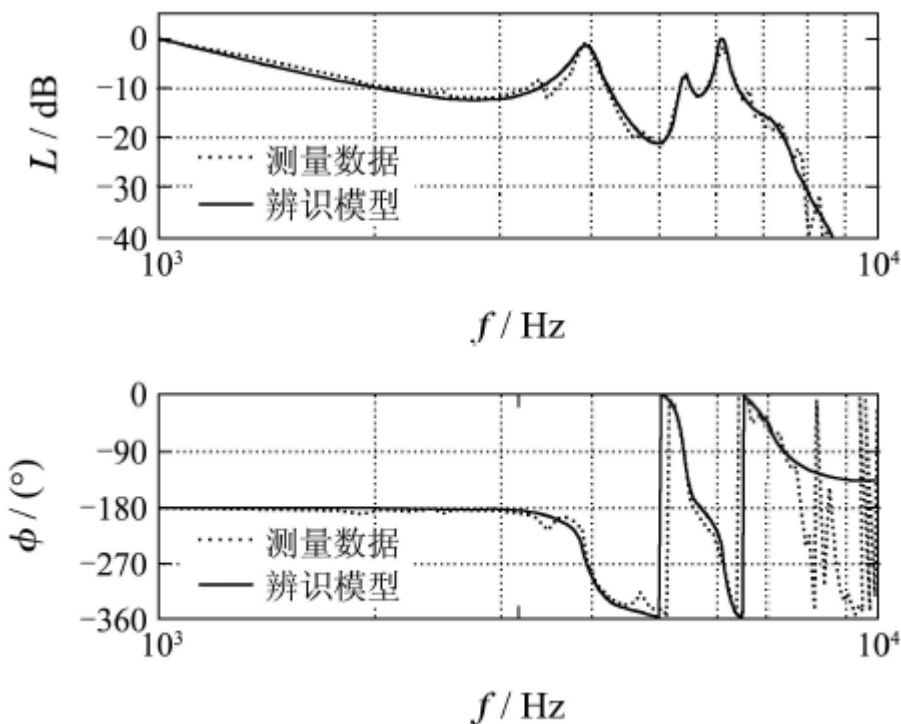


图3 硬盘驱动伺服系统的频率响应

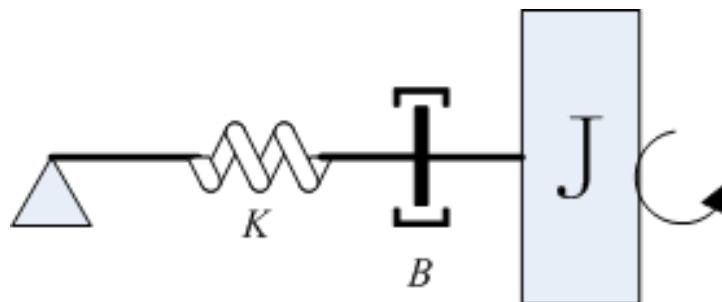
$$G(s) = \frac{K}{ms^2 + bs + k} \times \sum_{i=1}^n \frac{s^2 + 2\zeta_{ri}\omega_{ri}s + \omega_{ri}^2}{s^2 + 2\zeta_i\omega_i s + \omega_i^2}$$



4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

等效结构图



运动方程

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B \frac{d \theta}{dt} + K \theta = 0$$

固有频率

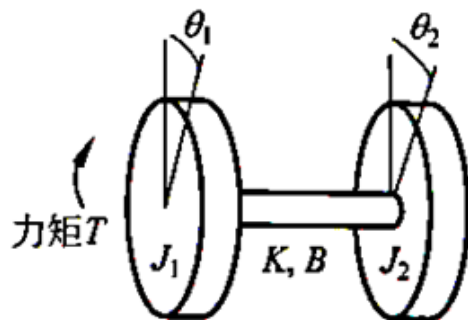
$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{J}}$$



4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

自由转子



运动方程

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) &= T \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

传递函数

$$\frac{\theta_1(s)}{T(s)} = \frac{\left[\frac{s^2}{\omega_{ar}^2} + 2 \frac{\zeta_{ar}s}{\omega_{ar}} + 1 \right]}{(J_1 + J_2) \left[\frac{s^2}{\omega_r^2} + 2 \frac{\zeta_r s}{\omega_r} + 1 \right]}$$

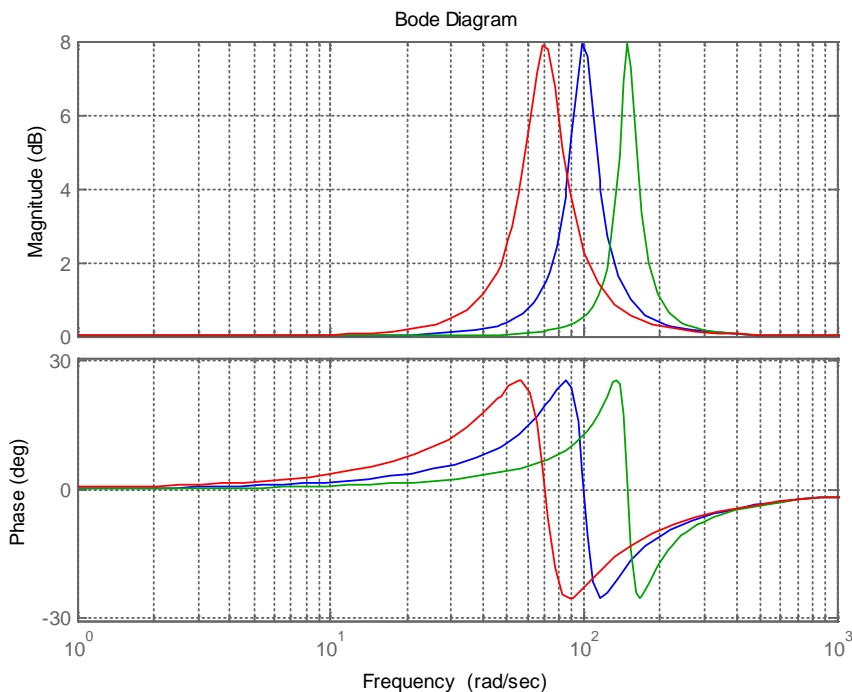
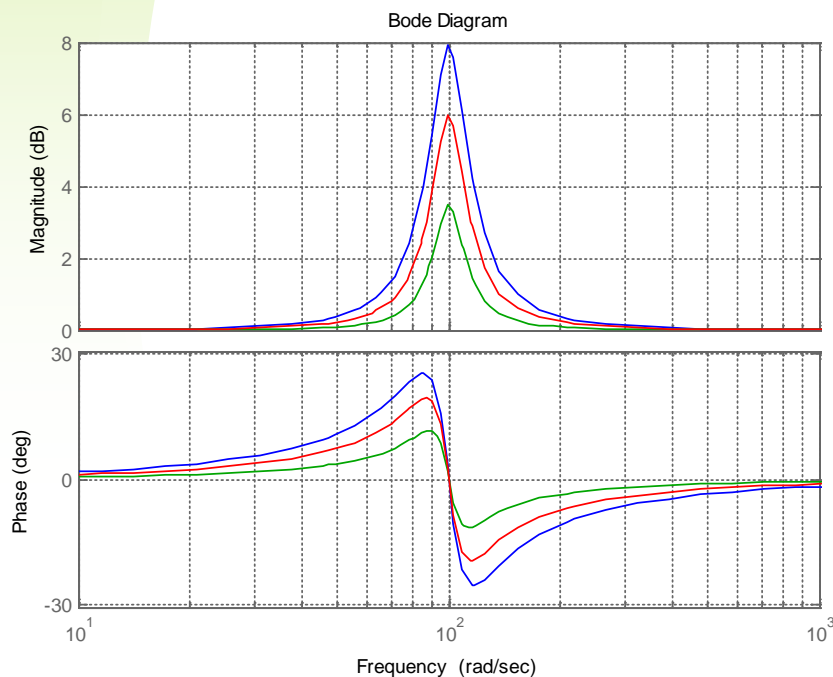
$$\omega_r = \sqrt{\frac{K(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}},$$
$$\omega_{ar} = \sqrt{\frac{K}{J_2}}, \omega_r > \omega_{ar}$$



4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

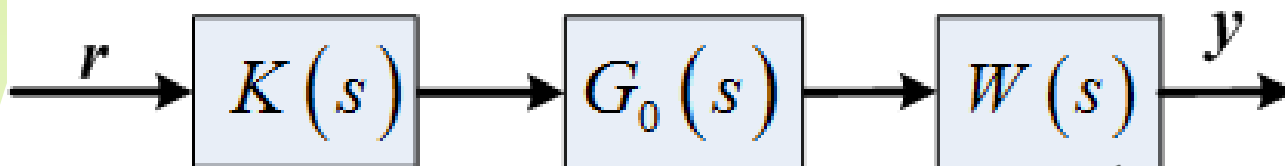
机械谐振: $W(s) = \frac{s^2 + as + \omega_m^2}{s^2 + bs + \omega_m^2}, \quad a > b$





4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

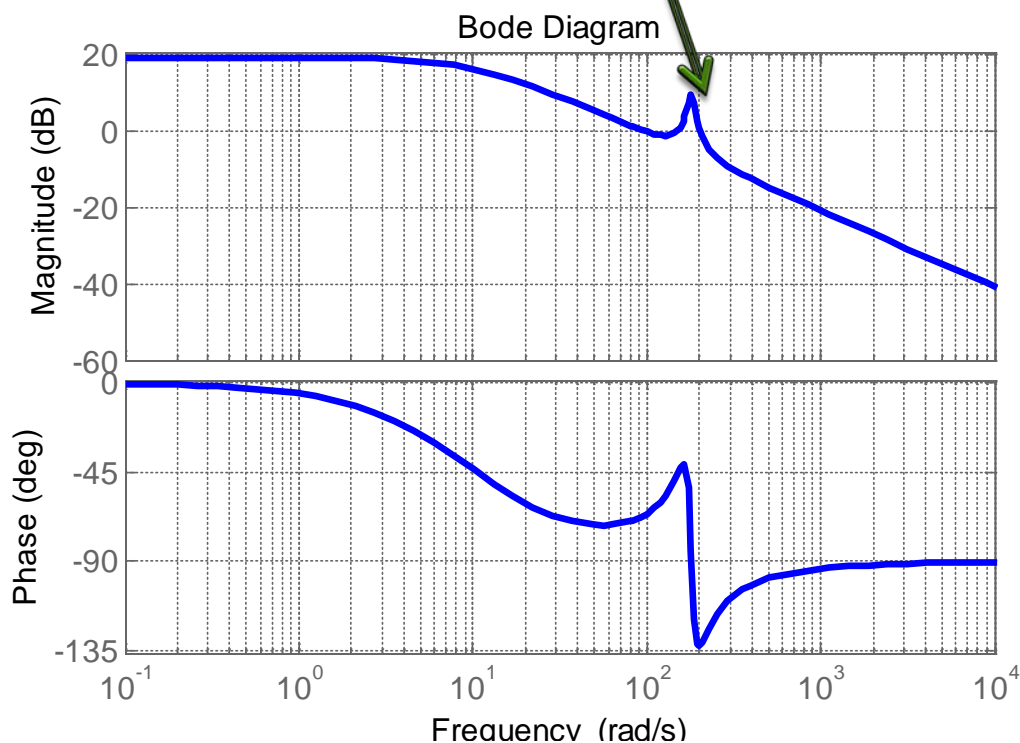
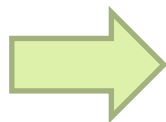


$$K(s) = 9$$

$$G_0(s) = \frac{1}{0.1s + 1}$$

$$W(s) = \frac{s^2 + 90s + 180^2}{s^2 + 15s + 180^2}$$

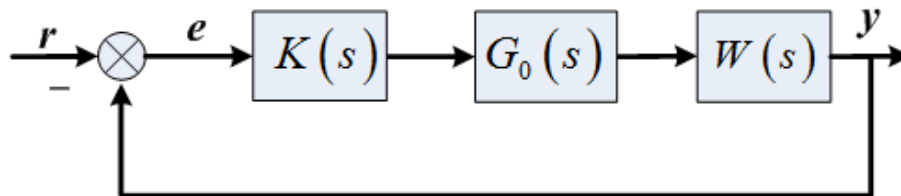
开环频率特性



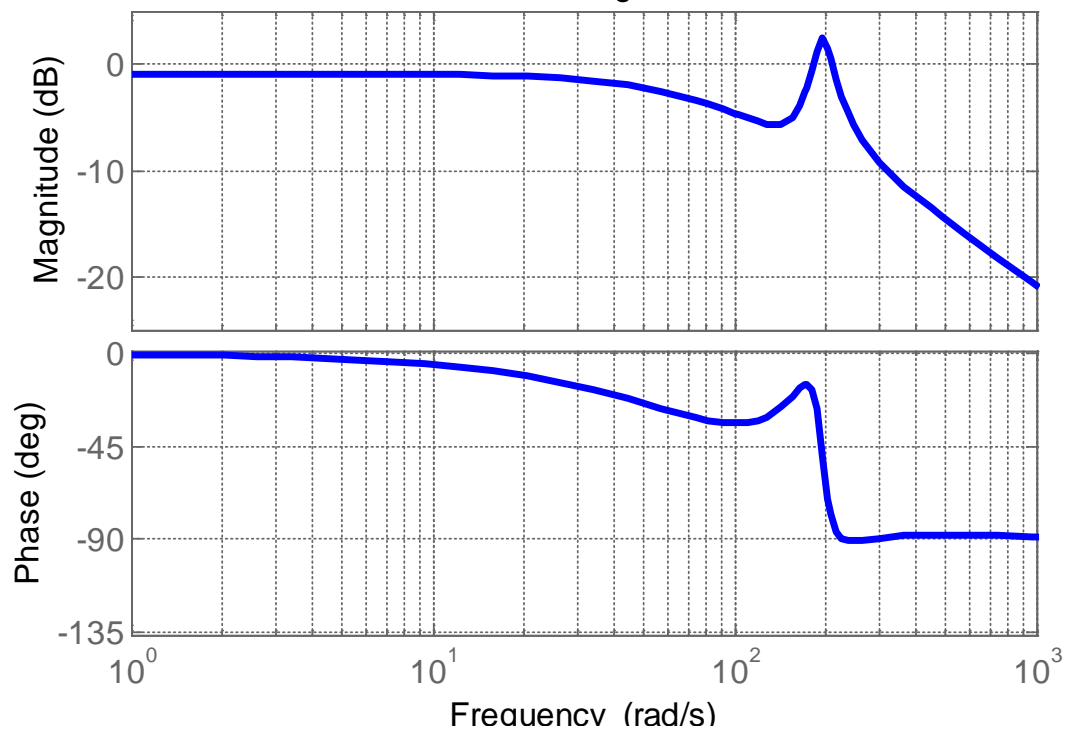


4.3.1 控制系统的带宽

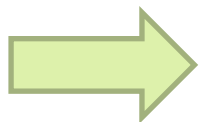
机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法



Bode Diagram



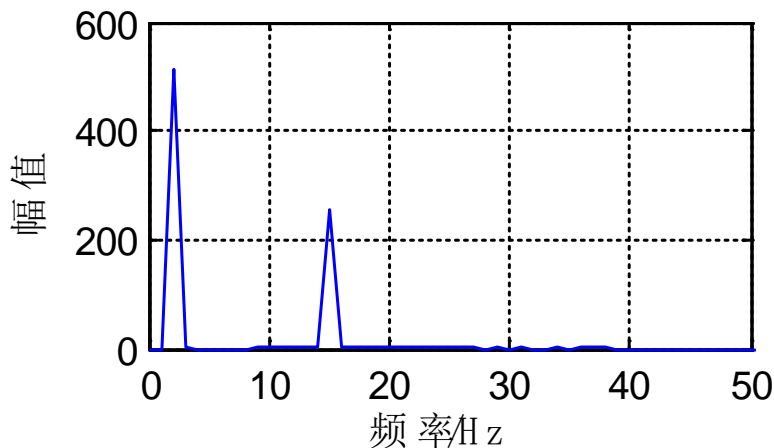
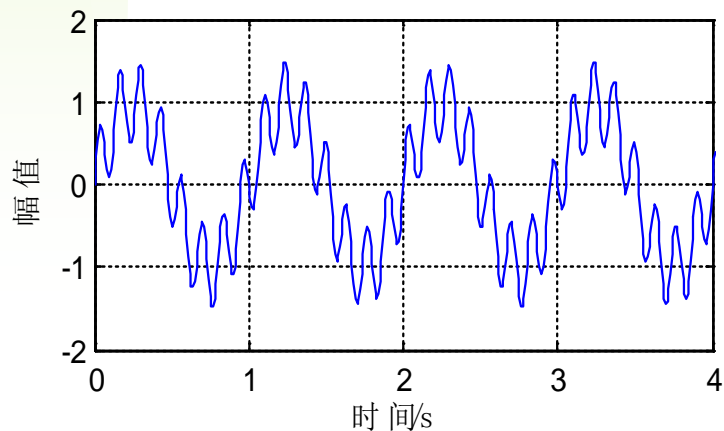
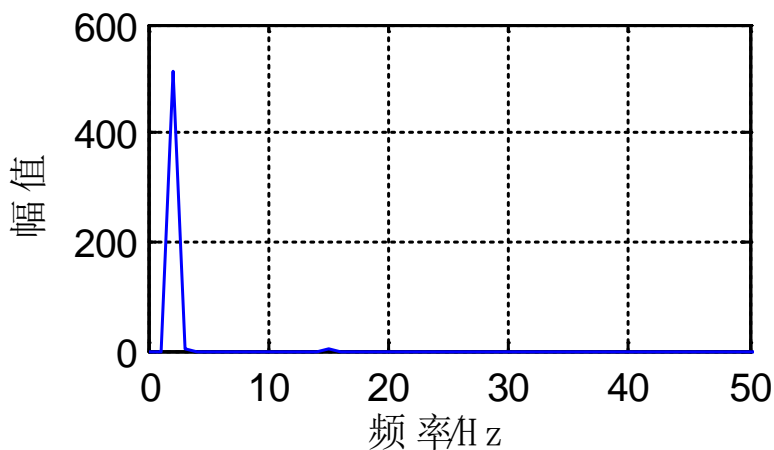
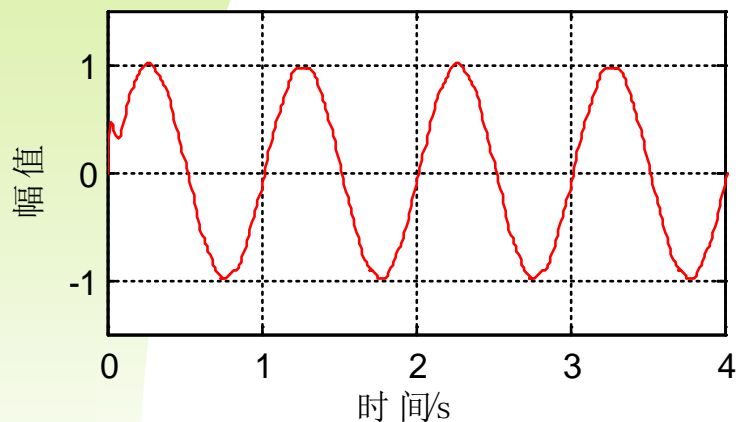
闭环
频率
特性





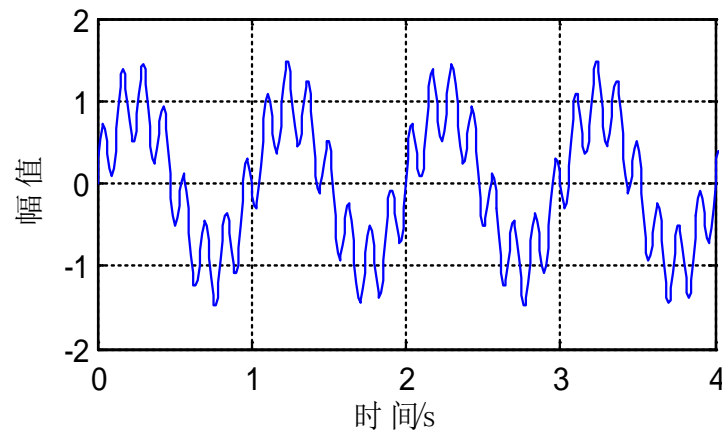
4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法





谐振有哪些危害？



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂



谐振的危害有哪些？

- ☒ A 增加能耗
- ☒ B 增加系统的维护成本
- ☒ C 加速元部件老化和磨损，降低寿命
- ☒ D 降低控制系统的精度

提交

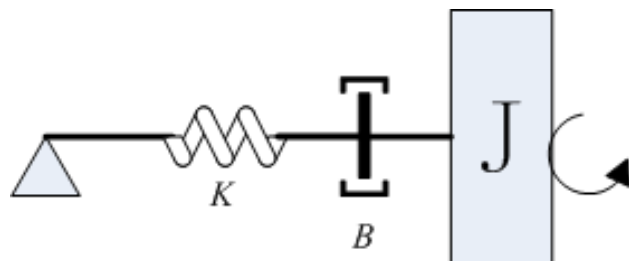


4.3.1 控制系统的带宽

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | **抑制方法**

固有频率:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{J}}$$



一般来说系统的带宽应该满足如下条件

如果机械系统**还未设计**，要根据带宽指标对结构刚度提出下面的要求

$$\omega_m > 5\omega_{BW}$$

如果机械系统**已经设计完成**，则要根据系统实际的谐振频率来确定系统的带宽。

$$\omega_{BW} < \frac{\omega_m}{5}$$

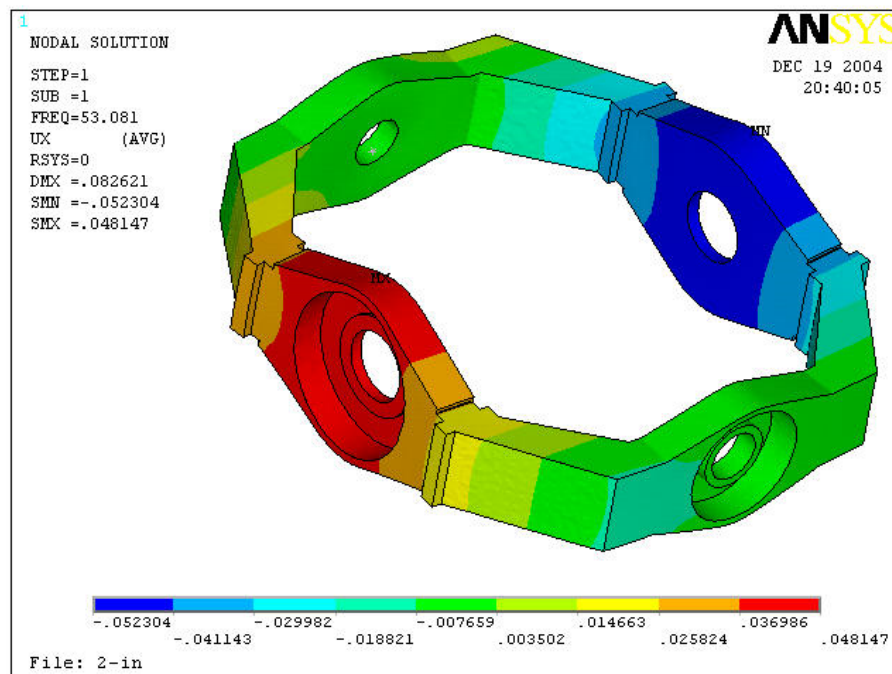
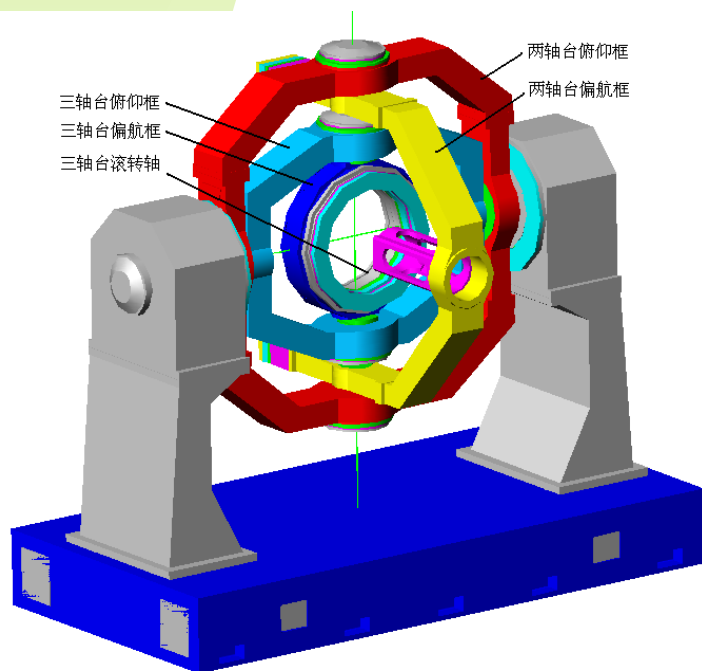


4.3.2 未建模动态和机械谐振

事前

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

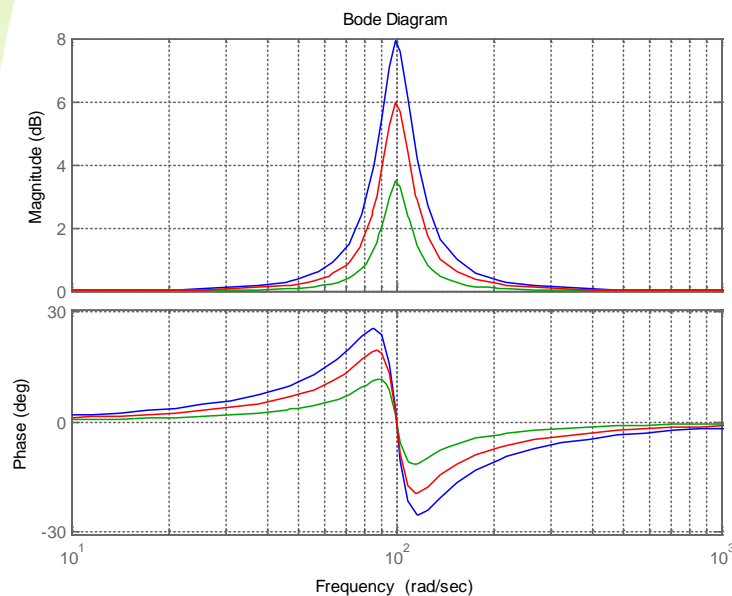
最合理的做法是：系统设计之前，根据带宽对机械结构刚度提出要求



要求过高会导致结构复杂、成本高、甚至实现不了，有时计算值很好，但是实测结果很差，此时必须从控制角度对谐振进行抑制



对于谐振，你能想到哪些方法来进行抑制？



$$W(s) = \frac{s^2 + as + \omega_m^2}{s^2 + bs + \omega_m^2},$$

$$a > b$$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

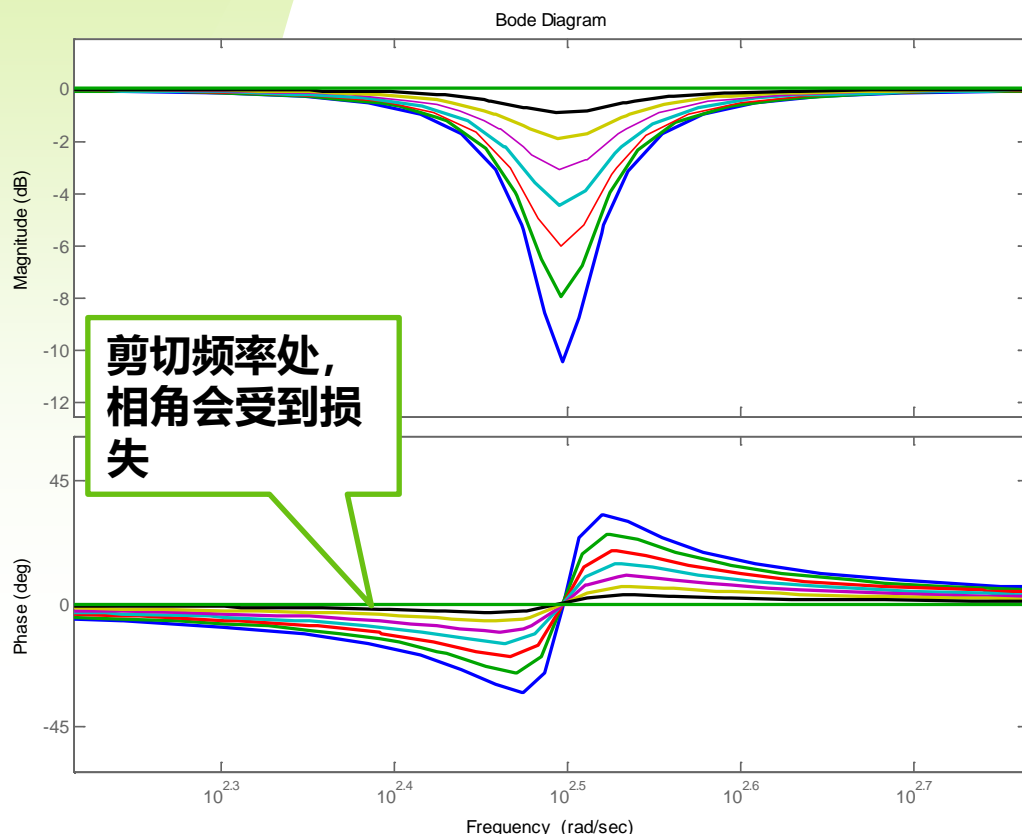


4.3.2 未建模动态和机械谐振

利弊

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

对于机械谐振，可以采用二阶环节进行抑制，形式为谐振模型的倒数：



带阻滤波器（陷波滤波器）：

$$G(s) = \frac{s^2 + as + \omega_m^2}{s^2 + bs + \omega_m^2}$$

$$a < b$$

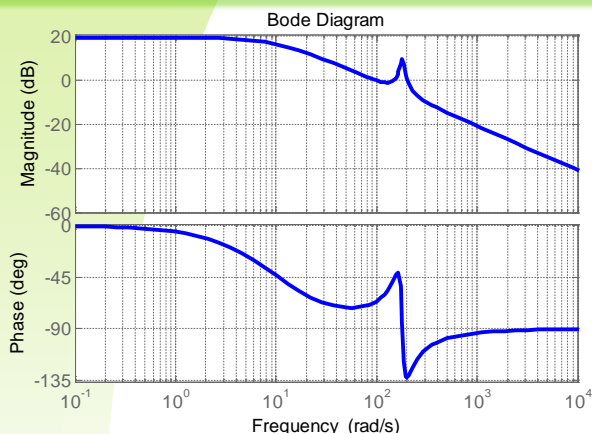
注意，应用限波（带阻）滤波器可能带来的相位滞后和幅值衰减（系统剪切频率一般都在谐振频率之前，因此添加带阻滤波器一定会损失剪切频率处的相角，减小系统的稳定裕度）



4.3.2 未建模动态和机械谐振

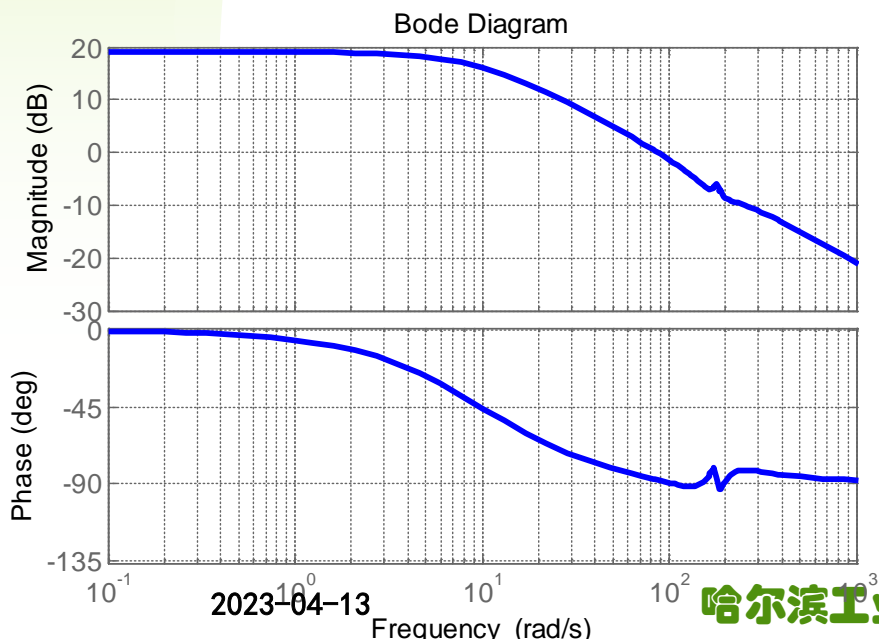
手术刀

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法



谐振:
$$W(s) = \frac{s^2 + 90s + 180^2}{s^2 + 15s + 180^2}$$

陷波:
$$W_f(s) = \frac{s^2 + 20s + 180^2}{s^2 + 120s + 180^2}$$



滤波器的宽度一般要比谐振宽

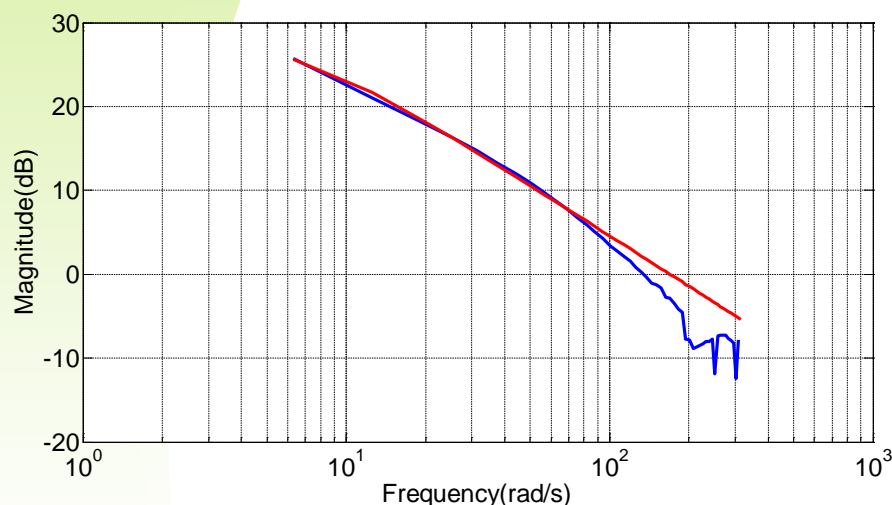
注意：应用限波（带阻）滤波器可能带来的相位滞后和幅值衰减



6.1.2 未建模动态和机械谐振

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

谐振抑制的两种方式



$$G(s) = \frac{s^2 + as + \omega_m^2}{s^2 + bs + \omega_m^2}$$

$$a < b$$

- 一种是开环测出谐振特性，利用滤波器进行补偿（校正），使补偿后对象特性Bode图中的谐振特性消失；（这种方法更加规范）
- 另一种开环校正时不做处理，闭环后出现谐振再进行补偿。对反馈信号进行傅里叶分析，确定是否存在谐振，如果存在，则确定谐振频率，添加陷波滤波器进行抑制，直至谐振现象消失；（这种方法更加实用）

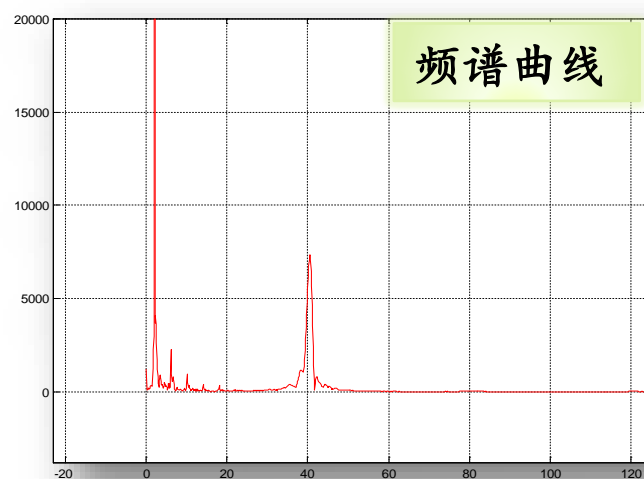
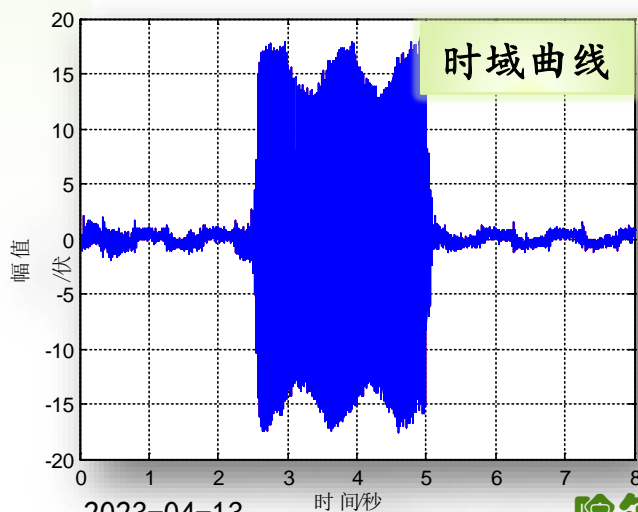


4.3.2 未建模动态和机械谐振

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

在实际应用中，元部件老化，松动，惯量的变化常常会引起引起谐振频率点发生变化。所以，伺服系统使用过程中，谐振抑制往往是一项经常性的维护工作。

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} + K\theta = 0 \quad \omega_m = \sqrt{\frac{K}{J}}$$





4.3.2 未建模动态和机械谐振

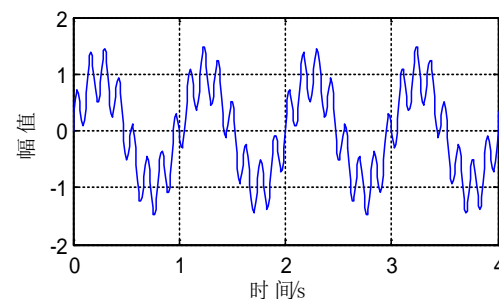
机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

机电伺服系统抑制谐振的实例





谐振在哪个信号中表现得最明显



A

系统的输出

B

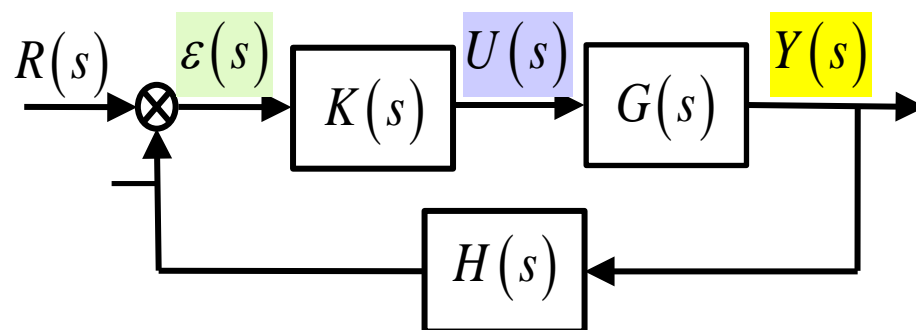
系统的偏差

C

系统控制量

D

具体要看 $H(s)$ 和 $K(s)$ 增益



提交



4.3.2 未建模动态和机械谐振

创新

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法

为保证实时性，采用滑动FFT实现实时分析谐振频率，获取谐振频率和幅值信息，自动调整限波环节参数，对谐振进行动态抑制。

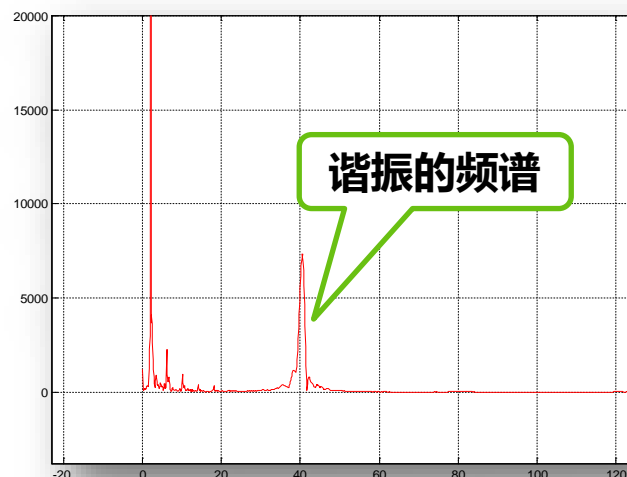
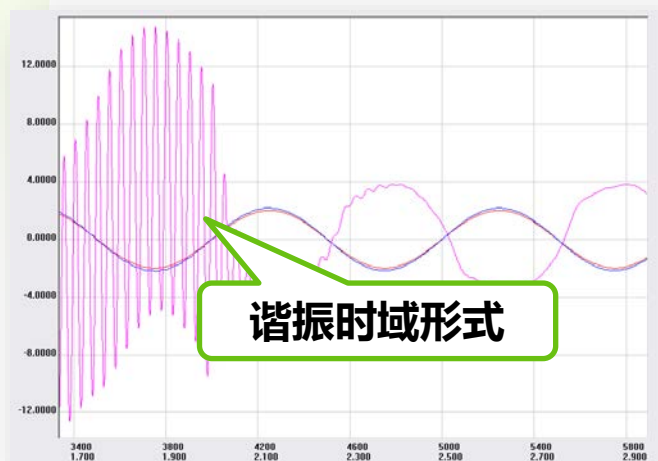
$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-jnk 2\pi/N},$$

$$(k = 0, \dots, N-1)$$

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{jnk 2\pi/N},$$

$$(n = 0, \dots, N-1)$$

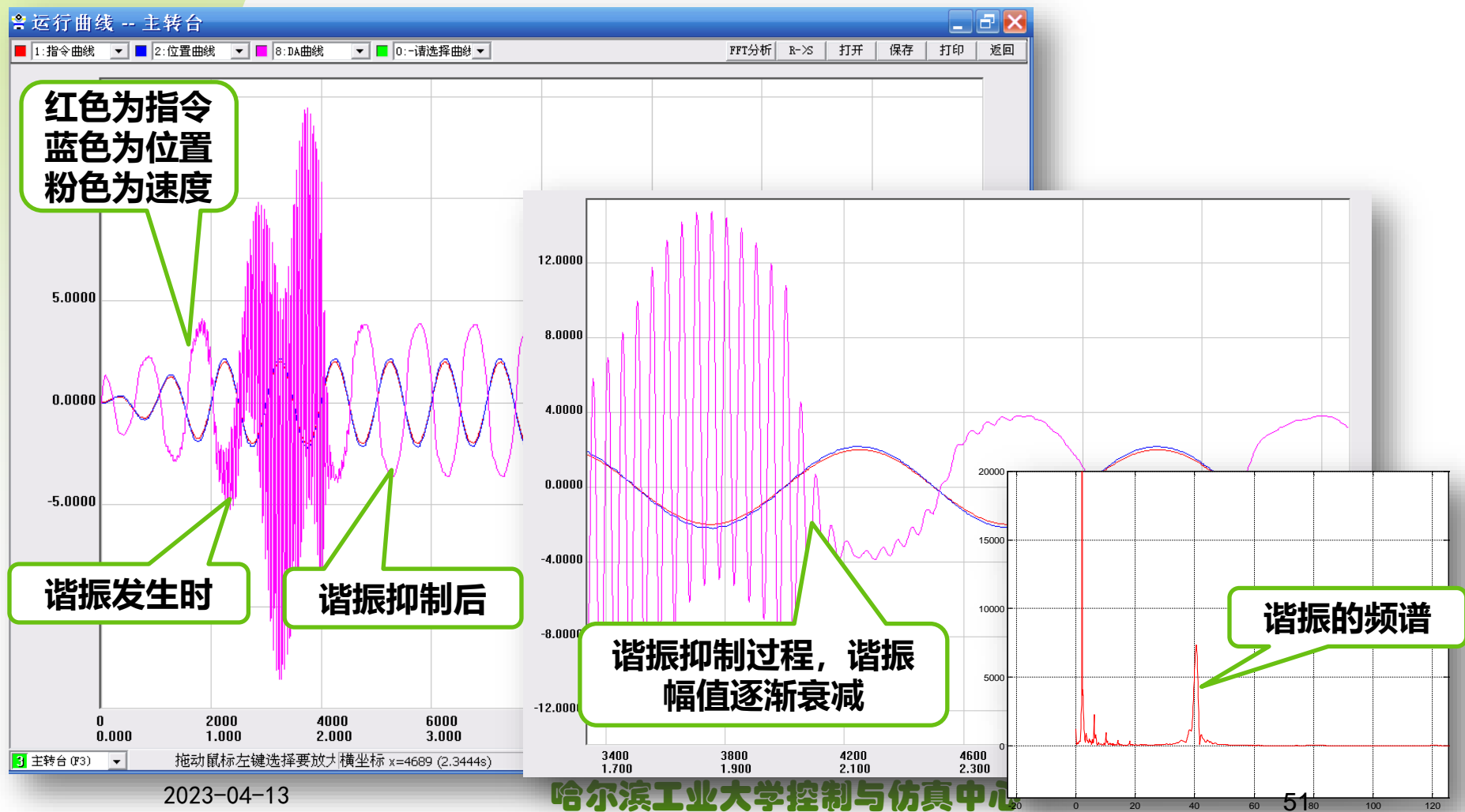
$$G(s) = \frac{s^2 + as + \omega_m^2}{s^2 + bs + \omega_m^2}$$
$$a < b$$





4.3.2 未建模动态和机械谐振

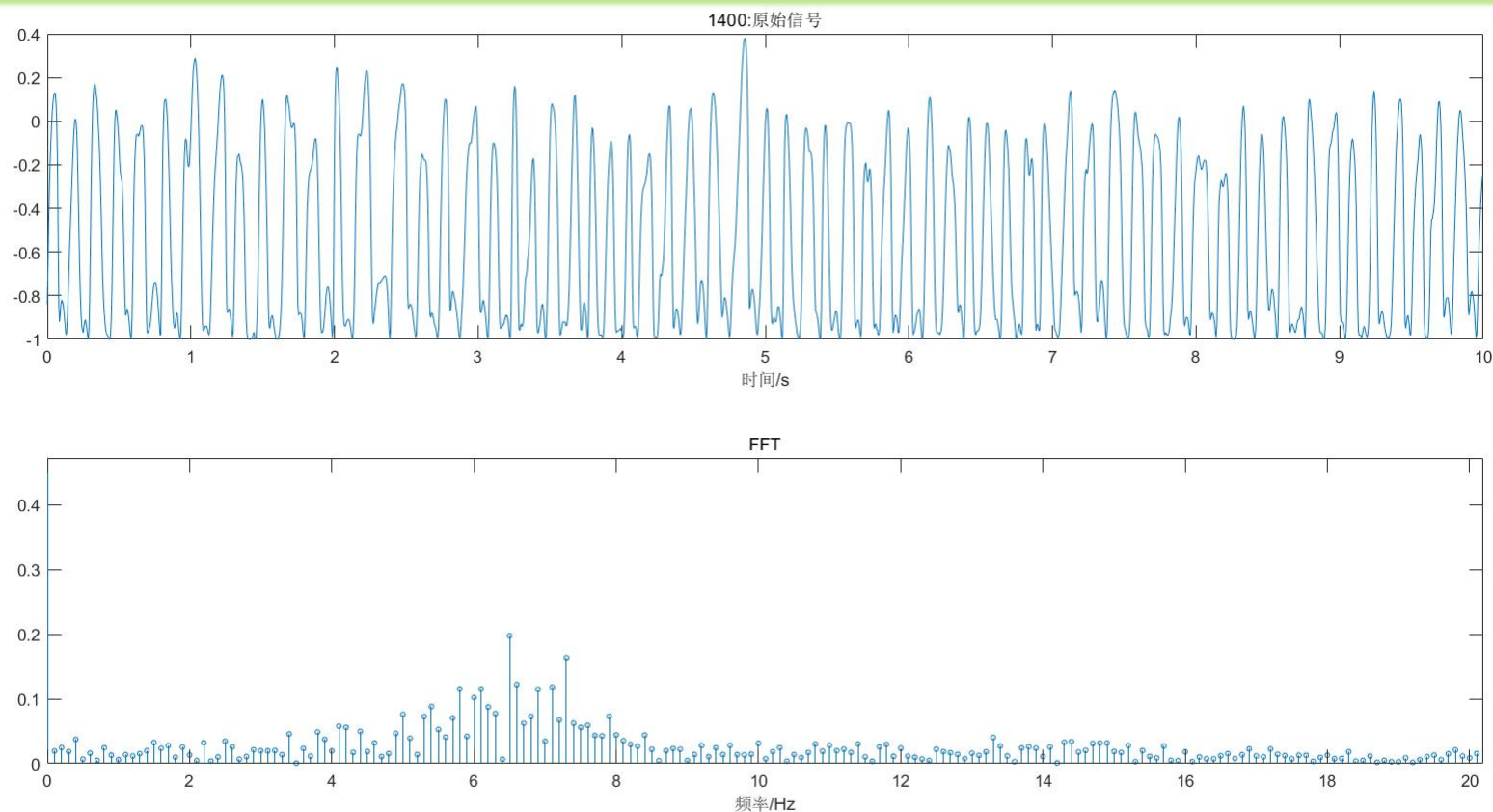
机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法





4.3.2 未建模动态和机械谐振

机械谐振 | 机理分析 | 表现形式 | 抑制方法



限波环节既可以用来抑制谐振，也可以用来抑制特定频率的噪声（比如工频噪声）



总结

本节课内容回顾

- 带宽的定义（开环，闭环， -3db ， -90° 相移，双十）；
- 带宽设计方法、带宽的设计原则；
- 响应特性和反馈特性；
- 机械谐振的机理，现象及辨识和抑制方法。

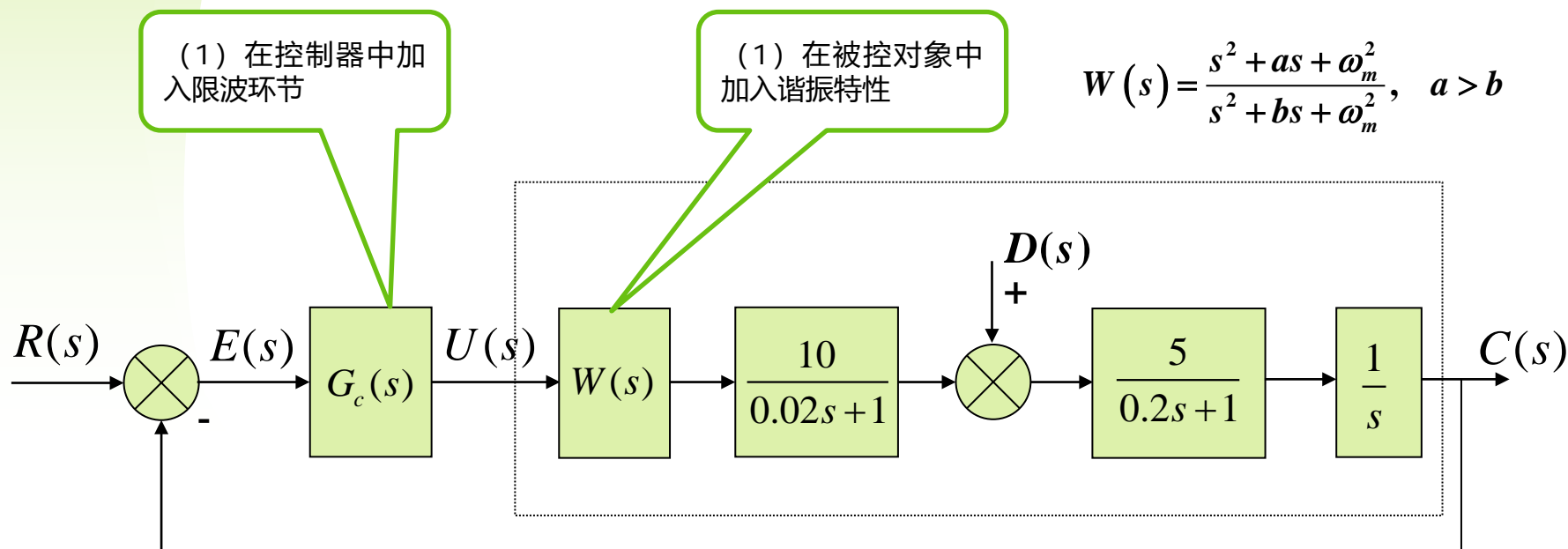


第16次 课后作业

1 必选作业

16-1 仿真题：在已经搭建好的系统中加入下面谐振和陷波环节。

- (1) 在被控对象中加入机械谐振环节，谐振频率 ω_m 高于剪切频率2倍，参数 b 可以从1到10调节， a/b 可以从2到10调节(也可以根据情况自行调节)，观察引入谐振环节后(参数改变后)系统输出(或控制量)的变化，分析机械谐振对系统性能的影响；
- (2) 应用同频率的限波环节(参数自行确定)，观察谐振的抑制效果。





第16次 课后作业

2 可选作业

- 16.1 思考题：噪声、干扰、测量偏差和模型摄动的联系与区别（从他们对系统性能和稳定性的影响角度考虑）；
- 16.2 思考题：你还能想到机械谐振辨识和抑制的其他方法吗？
- 16.3 思考题：请举出一些现实生活中运用到反馈思想或者反馈机制的例子；
- 16.4 思考题：如何判断一个实际系统在工作过程中是否已经失稳？
- 16.5 拓展阅读：查查郭雷院士的工作，了解一下怎么定量研究反馈对付不确定性的能力；



拓展思考

自己总结，无需上交

- a. 控制理论和方法的能力边界（控制不是万能的）；
- b. 每一种控制方法的利与弊（硬币总有正反两面）；
- c. 控制系统中的各种约束与限制（你不能随心所欲）；
- d. 各种方法都有自己的适用条件（看准了再用）
- e. 控制系统设计中的优化问题（处处有优化）；
- f. 哪些是针对信号的，哪些又是针对系统的，如何进行转化（信号与系统）；
- g. 控制系统中的各种性能指标（为什么这么多）；
- h. 控制系统设计中的各种概念和原理给我们的人生启发（你可以控制好人生）；
- i. 控制系统中各种概念的联系与区别（对比才能深刻理解）
- j. 控制系统中主动和被动的办法（上工治未病）；
- k. 分析仿真和实验，理论与实际的差别（纵然无法解决，也要给出解释）；
- l. 开环与闭环的特性（为什么一定要闭环）；
- m. 控制设计中可用的信息有哪些（信息有多重要）



Thank You !



哈尔滨工业大学控制与仿真中心