Master - Numerik	WiSe2324
Wibmer	
Testat III	

Aufgabe 1: LU-Zerlegung Berechnen Sie die LU-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die einzelnen Eliminationsschritte, die Matrizen L_{ij} und die Berechnung von L an. Hinweis: Gehen Sie bei der Elimination so vor, dass in jeder der Matrizen L_{ij} eine 1 in der Diagonalen steht (siehe Skript, Beispiel Seite 40). Hinweis: Eine LU-Zerlegung ist nicht eindeutig. Gehen Sie vor wie im Skript. MATLAB liefert Matrizen L ohne 1 auf der Diagonalen, dafür aber numerisch stabiler. Stabilität ist aber in unserem Falle nicht relevant.

Aufgabe 2: Nichtlineares Gleichungssystem. Betrachten Sie die Funktion

$$g(x,y) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\left(5x^2 + 5y^2 + 3xy - x - 2y\right) e^{-(x^2+y^2)}.$$

Die Aufgabe besteht darin, mittels dem Newton-Verfahren Extremwerte von g zu finden, d.h. Nullstellen der Gleichung

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Plotten Sie die Funktion g im Bereich $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2.5$ und $0 \leq z \leq 0.5$.
2. Implementieren Sie nun das Newton-Verfahren für die Gleichung (1). Berechnen Sie symbolisch den Gradienten und die Jacobi-Matrix $J_{\vec{F}}(\vec{x})$ von $\vec{F}$. Siehe Hinweis.
3. Wählen Sie nun als Startwert den Punkt $\vec{x}^{(0)} = (-0.8, -0.8)^T$. Gegen welchen Wert konvergiert das Verfahren? Welcher Punkt ist das?
4. Wählen Sie nun als Startwert den Punkt $\vec{x}^{(0)} = (-0.9, -0.9)^T$. Was beobachten Sie?
5. Wählen Sie nun als Startwert den Punkt $\vec{x}^{(0)} = (0.5, -0.5)^T$. Konvergiert das Newton-Verfahren gegen einen Extremwert?
6. Wählen Sie einen Startwert so, dass Sie in einem lokalen Maximum landen.

Hinweis: Das Newton-Verfahren mit gegebenem Startwert $\vec{x}^{(0)} = (x^0, y^0)$ für die Funktion $\vec{F}(\vec{x})$ erzeugt eine Folge $\vec{x}^{(k)}, k = 1, 2, \ldots$ mittels der Vorschrift:

1. Löse in jedem Iterationsschritt k das lineare Gleichungssystem

$$J_{\vec{F}}(\vec{x}^{(k)})\Delta\vec{x}^{(k)} = -\vec{F}(\vec{x}^{(k)}) \tag{2}$$

2. Berechne aus der Lösung $\Delta\vec{x}^{(k)}$ von (2) die neue Näherung $\vec{x}^{(k+1)}$ mittels

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \Delta\vec{x}^{(k)}.$$

3. Abbruchkriterium: Die Iteration soll stoppen, falls die Bedingung

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|_2 \leq TOL$$

   erfüllt ist. TOL ist eine vorgegebene Toleranz. Wählen Sie $TOL = 10^{-5}$.

Die Berechnung der entsprechenden Ableitungen muss nicht händisch angeben werden, es reicht die Berechnung per Computer (Z.B. Matlab Symbolic Toolbox).

In MATLAB können Sie sich die Ableitungen symbolisch berechnen und dann numerisch Auswerten. Zum Beispiel können Sie sich mit den Befehlen

```
syms x y g gx gxy
g=2/5-1/10*exp(-(x^2+y^2))*(5*x^2+5*y^2-x-2*y+3*x*y);
gx=diff(g,x)
gxy=diff(gx,y)
```

die partielle Ableitung g_x und g_{xy} symbolisch berechnen. Wenn Sie nun diese numerisch auswerten möchten, z.Bsp. $g_x(1,2)$ und $g_{xy}(-1,-2)$, dann schreiben Sie einfach

```
double(subs(gx,{x,y},[1,2]))
double(subs(gxy,{x,y},[-1,-2]))
```