Testat 2

Vinzenz Götz

2517 32 23

1| $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\|A_1\|_1 = \max_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ji}| = \max \{6, 4\} = 6$$

$$\|A_1\|_\infty = \max_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ji}| = \max \{3, 7\} = 7$$

$$\|A_1\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A_1^T A_1)} = 5,12$$

$$\det(A_1^T A_1 - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 5 & 25-\lambda \end{vmatrix} = 125 - 30\lambda + \lambda^2 - 25$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{30}{2} + \sqrt{225-100} = 26,18$$

$$\|A_2\|_1 = \max \{5, 3\} = 5$$

$$\|A_2\|_\infty = \max \{4, 4\} = 4$$

$$\|A_2\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A_2^T A_2)} = 4,19$$

$$\det(A_2^T A_2 - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -8 \\ -8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 80 - 18\lambda + \lambda^2 - 64$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} = 9 + \sqrt{81-8} = 17,54$$

$$\|A_3\|_1 = \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ji}| = \max \{3, 3, 7\} = 7$$

$$\|A_3\|_\infty = \max_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ji}| = \max \{3, 3, 7\} = 7$$

$$\|A_3\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A_3^T A_3)} = 5$$

$$\det(A_3^T A_3 - \lambda \underline{I}) \stackrel{!}{=} 0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 8 \\ 4 & 5-\lambda & 8 \\ 8 & 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda_{max} = 25$$

2/ (a) $\underline{N=0}$ $\to p(t) = a_0$, $p(t_0) = y_0 \Rightarrow a_0 = y_0$

$\underline{N=1}$ $\to p(t) = a_0 + a_1 t$, $p(t_0) = y_0$, $p(t_1) = y_1$

$y_0 = a_0 + a_1 t_1$

$y_1 = a_0 + a_1 t_2$

$\underline{N=2}$ $\to p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$y_0 = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2$

$y_1 = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2$

$y_2 = a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_1^2$

$\vdots$

$\underline{N=n}$ $\to p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$

$\vec{y}, \vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\quad V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_0^2 \\ t_1^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} t_0^n \\ t_1^n \\ \vdots \\ t_n^n \end{pmatrix} \right]$

$V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$

$\vec{y} = V\vec{a} \iff \vec{a} = V^{-1}\vec{y}$

(C) Die Polynome an den Rändern weichen mit größerem Grad immer stärker von den Mittelwerten von $\vec{y}$ ab. Die interpolation ist nur „gut" in den mittleren Punkten

Konditionszahlen liegen im Bereich von $10^3 \dots 10^{28}$

(d) die Sinusfunktion funktioniert gut

Das Polynom approximiert Werte zwischen den y_i gut.

Die Ränder divergieren nicht

3 (a) $D_2 T(x_i) = \dfrac{T(x_i+h) - 2T(x_i) + T(x_i-h)}{h^2}$

D_2 ... zentraler Diffquotient für 2. Ableitung

$T_i = T(x_i)$, $T_{i+1} = T(x_{i+1}) = T(x_i+h)$

$\Rightarrow (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})\dfrac{1}{h^2} + T_i = f_i$

$\Rightarrow \quad (1-\frac{2}{h^2})T_1 + \frac{T_2}{h^2} = f_1 - \frac{T_0}{h^2}$

$1 - \frac{2}{h^2} = a$

$\frac{1}{h^2} = b$

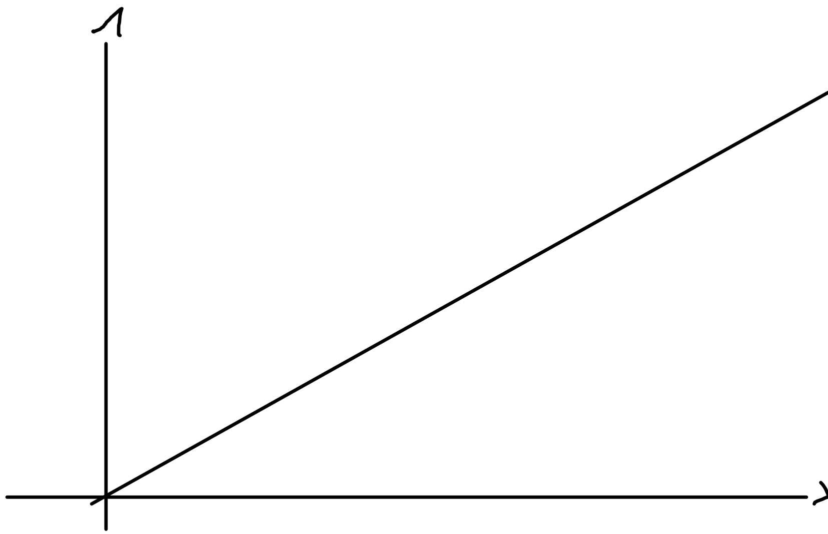
$\frac{T_1}{h^2} + (1-\frac{2}{h^2})T_2 + \frac{T_3}{h^2} = f_2$

$\vdots$

$\frac{T_{N-1}}{h^2} + (1-\frac{2}{h^2})T_N = f_N - \frac{T_{N+1}}{h^2}$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & & 0 \\ b & a & b & & & \vdots \\ 0 & b & a & b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

(c)



$\hookrightarrow$ Die Konditionszahl steigt an, je feiner h gewählt wird