Test af 1 Vinzenz Götz

1) $x(t) = U_0 \sin(2\pi f t)$

$U_0 = 325V$; $f = 50Hz$; $T = \frac{1}{f} = 0{,}02s$

<u>Mittelwert:</u>

$$\bar{x}_m = \frac{1}{T} U_0 \int_0^T \sin(2\pi f t)\, dt$$

$$= \frac{f U_0}{2\pi f} \left(\cos(0) - \cos(2\pi)\right) = \underline{\underline{0}} \qquad = 0V$$

<u>Gleichrichtwert:</u>

$$\bar{x}_g = \frac{U_0}{T} \int_0^T |\sin(2\pi f t)|\, dt$$

$$\sin(x) = -\sin(x+\pi) \Rightarrow |\sin(x)| = |\sin(x+\pi)|$$

$$\Rightarrow |\sin(2\pi f t)| = |\sin(2\pi f t + \pi)| = |\sin(2\pi f (t + \frac{1}{2f}))|$$

$$= |\sin(2\pi f (t + \frac{T}{2}))| \quad \text{I}$$

$$\sin(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$$

$$\Rightarrow \sin(x) = |\sin(x)| \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \text{II}$$

I + II $\Rightarrow$ wir können $\bar{x}_g$ als $\frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f t)\, dt$ schreiben

$$\Rightarrow \bar{x}_g = \frac{2U_0}{2\pi f T} \left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) = \underline{\underline{\frac{2U_0}{\pi}}} \approx \frac{650V}{\pi}$$

Effektivwert:

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \sin^2(2\pi f t)\,dt\, U_0^2}$$

Merziger FS S. 114

$$\int \sin^2(ax) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

Merziger FS

$$= \frac{U_0}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{\sin(0)}{8\pi f} - \frac{0}{2} + \frac{\sin(2\pi)}{8\pi f}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}} \approx \frac{325}{\sqrt{2}}\,V = 229{,}81\,V$$

Bem: Die numerischen Verfahren auf dem ÜB sind teilweise falsch

2] IEEE Darstellung: 32-bit ($b_0 \dots b_{31}$)

b_{31}: Vorzeichen $s = (-1)^{b_{31}} \Rightarrow b_{31} = 0$, da $\sqrt{2} > 0$

$b_{30} \dots b_{23}$: Exponent $e = \sum_{i=30}^{23} 2^\wedge(i-23)\, b_i$

$b_{22} \dots b_0$: Mantisse $m = \sum_{i=22}^{0} 2^\wedge(i-23)\, b_i$

z im Dezimalsystem:

$$z = (-1)^{b_{31}}\, 2^\wedge(e-127)\, \left(1 + \sum_{i=22}^{0} 2^\wedge(i-23)\, b_i\right)$$

$\Rightarrow e = 127$, da $\sqrt{2} = 1,\dots$, 1 bis vor dem Komma

$\Rightarrow e = 127$

$s = 0$

$m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \overset{\text{geom. Reihe}}{=} 1$

Algorithmus für nächste Nachkommastellen

Falls $m \leq \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow b_n = 0$

$\Leftrightarrow m' = 2m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$

↳ dann weiter mit m' für $n-1$

Falls $m > \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow b_n = 1$

$\Rightarrow m'' = 2(m - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} + \dots = 1$

↳ dann weiter mit m'' für $n-1$ (*)

nach diesem Algorithmus ist $\sqrt{2}$ in binär:

$$\overset{s}{0} \quad \overbrace{01111111}^{e} \quad \overbrace{0110\ 1010\ 0000\ 1001\ 1110\ 011}^{m^*}$$

*berechnet mit Matlab

Fehler: absolut: $\sqrt{2}_{ex} - \sqrt{2}_{IEEE} = 2{,}42 \cdot 10^{-8}$

relativ: $|\sqrt{2}_{ex} - \sqrt{2}_{IEEE}|(\sqrt{2}_{ex})^{-1} = 1{,}71 \cdot 10^{-8}$

(*) Berechnung der ersten vier Nachkommastellen, Rest in Matlab nach Algorithmus:

$\sqrt{2} \bmod 1 = 0{,}414\ldots = m_0$

$2m_0 = m_0' = 0{,}818\ldots < 1 \Rightarrow b_{22} = 0$

$m_1 = m_0'$

$m_1' = 2m_1 = 1{,}626\ldots > 1$

$\hookrightarrow m_1'' = 2(m_1 - \frac{1}{2}) = 0{,}626\ldots < 1 \Rightarrow b_{21} = 1$

$m_2 = m_1''$

$m_2' = 2m_2 = 1{,}252\ldots > 1$

$\hookrightarrow m_2'' = 2(m_2 - \frac{1}{2}) = 0{,}252\ldots < 1 \Rightarrow b_{20} = 1$

$m_3 = m_2''$

$m_3' = 2m_3 = 0{,}504\ldots < 1 \Rightarrow b_{19} = 0$

$\vdots$

3) (a) $v(t_0) = s'(t_0) = \frac{d}{dt} \sin(t) \Big|_{t_0} = \cos(t_0)$

Rest in Matlab

(b) Matlab

(c) für kleinerwerdendes Δt wird der Fehler bis $\Delta t = 10^{-8}$ kleiner, es existiert also ein (lokales) optimum
Dies kommt durch das Phänomon der Auslöschung zustande. Die Subtraktion ist nicht gut konditioniert und führt so für kleine Differenzen auf ein falsches Ergebnis

(d) hier ist das Optimum breiter und der Fehler nimmt schneller mit Δt ab der Fehler steigt allerdings auch hier wieder Dies liegt am größeren Abstand der beiden Zahlen im Zähler welche von einander subtrahiert werden

4) (d) Ein Fehler taucht erst auf wenn $\varepsilon < \varepsilon_g$, sonst macht es in der Approximation keinen Unterschied

Das Ergebnis aus $1-\cos(\varepsilon)$ ist also für $\varepsilon < \varepsilon_g$ so klein, dass Maschinenzahlen nicht genau genug sind um einen Unterschied darzustellen

Da die Single-Zahlen weniger Nachkommastellen besitzen als die Double-Zahlen ist dort der Effekt der Auslöschung schon früher erkennbar