Testat 1 Abgabe Vinzent Götz

1) $x(t) = U_0 \sin(2\pi f t)$

$U_0 = 325\,V$; $f = 50\,Hz$, $T = \frac{1}{f} = 0{,}02\,s$

Mittelwert:

$$\bar{x}_m = \frac{1}{T} U_0 \int_0^T \sin(2\pi f t)\,dt$$

$$= \frac{f U_0}{2\pi f}\left[-\cos(2\pi) + \cos(0)\right] = 0 \qquad = 0\,V$$

Gleichrichtwert:

$$\bar{x}_g = \frac{1 U_0}{T} \int_0^T |\sin(2\pi f t)|\,dt$$

$$\sin(x) = -\sin(x+\pi) \Rightarrow |\sin(x)| = |\sin(x+\pi)|$$

$$\Rightarrow |\sin(2\pi f t)| = |\sin(2\pi f t + \pi)| = |\sin(2\pi f(t + \tfrac{1}{2f}))|$$

$$= |\sin(2\pi f(t + \tfrac{T}{2}))| \quad \text{I}$$

$$\sin(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0;\pi]$$

$$\Rightarrow \sin(x) = |\sin(x)| \quad \forall x \in [0;\pi] \quad \text{II}$$

I + II $\Rightarrow$ wir können das Integral $\frac{U_0}{T}\int_0^T |\sin(2\pi f t)|\,dt = I$

zu $I = \frac{2U_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f t)\,dt$ umschreiben

$$I = \frac{2U_0}{2\pi f T}\left(-\cos(\pi) + \cos(0)\right) = \frac{2U_0}{\pi} = \bar{x}_g = \frac{350\,V}{\pi}$$

Effektivwert:

Merziger FS S. 114:

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \sin^2(2\pi f t)\,dt\, u_0^2}$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \sin^2(2\pi f t)\,dt}$$

Merziger FS

$$= \frac{u_0}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{\sin(0)}{8\pi f} - \frac{0}{2} + \frac{\sin(2\pi)}{8\pi f}}$$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2}} = \frac{u_0}{\sqrt{2}} = 229{,}81\,V$$

Bem. Die numerischen Formeln sind teilw. falsch

2) IEEE Darstellung: 32-bit $(b_0 \dots b_{31})$

b_{31} : Vorzeichen $s = (-1)^{b_{31}} \Rightarrow b_{31} = 0$, da $\sqrt{2} > 0$

$b_{30} \dots b_{23}$: Exponent $e = \sum_{i=30}^{23} 2^{i-23} b_i$

$b_{22} \dots b_0$: Mantisse $m = \sum_{i=22}^{0} 2^{i-23} b_i$

Zahl z im Dezimalsystem:

$$z = (-1)^s \, 2^{e-127} \left(1 + \sum_{i=22}^{0} 2^{i-23} b_i\right)$$

$\Rightarrow \sqrt{2} = 1{,}414 \dots$

$\Rightarrow e - 127 = 0$

$s = 0$

geom. Reihe

$m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

Falls gilt: $m \leq \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \Rightarrow b_{22} = 0$

$\Rightarrow m' = 2m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ dann für b_{21}

sonst:

$m - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \Rightarrow b_{22} = 1$

$\Rightarrow m'' = 2(m - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots \Rightarrow$ dann für b_{22}

Falls $m \leq \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} \Rightarrow b_{22} = 0$

$\Rightarrow m' = 2m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$, dann für b_{21}

Falls $m \geq \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2} \Rightarrow b_{22} = 1$

$\Rightarrow m'' = 2(m - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} + \dots = 1$, dann für b_{21}

nach diesem algorithmus ist

$(\sqrt{2})$ in binär also:

$$\overset{s}{0} \quad \overbrace{01111111}^{e} \quad \overbrace{0110\ 1010\ 0000\ 1001\ 1110\ 0}^{m}$$

Fehler: absolut: $2{,}42 \cdot 10^{-8}$

relativ: $1{,}71 \cdot 10^{-8}$

3) (a)

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{d}{dt} \sin(t)\Big|_{t_0} = \cos(t_0)$$

Rest der Aufgabe in Matlab

(b) Matlab

(c) für kleiner werdendes Δt wird der Fehler
bis $\Delta t = 10^{-8}$ kleiner, dann wieder größer.
Es existiert also ein Optimum

(d) hier ist das Optimum breiter und
der Fehler nimmt schneller mit Δt ab
Der Fehler steigt allerdings hier auch wieder

4) (d) ein Fehler taucht erst auf wenn $\varepsilon < \varepsilon_g$, sonst macht es in der Approximation keinen Unterschied.

Das Ergebnis aus $1-\cos(\varepsilon)$ ist also für $\varepsilon < \varepsilon_g$ so klein, dass die Maschinenzahlen nicht genau genug sind um noch einen Unterschied darzustellen