Test at 1 Vinzenz Götz

1) $x(t) = U_0 \sin(2\pi f t)$

$U_0 = 325V$; $f = 50Hz$; $T = \frac{1}{f} = 0{,}02s$

Mittelwert:

$$\bar{x}_m = \frac{1}{T} U_0 \int_0^T \sin(2\pi f t)\,dt$$

$$= \frac{f U_0}{2\pi f} \left(\cos(0) - \cos(2\pi)\right) = \underline{\underline{0}} \qquad = 0V$$

Gleichrichtwert:

$$\bar{x}_g = \frac{U_0}{T} \int_0^T |\sin(2\pi f t)|\,dt$$

$\sin(x) = -\sin(x+\pi) \Rightarrow |\sin(x)| = |\sin(x+\pi)|$

$\Rightarrow |\sin(2\pi f t)| = |\sin(2\pi f t + \pi)| = |\sin(2\pi f (t + \frac{1}{2f}))|$

$= |\sin(2\pi f (t + \frac{T}{2}))|$ I

$\sin(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \sin(x) = |\sin(x)| \quad \forall x \in [0, \pi]$ II

I + II $\Rightarrow$ wir können $\bar{x}_g$ als $\frac{2U_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi f t)\,dt$ schreiben

$$\Rightarrow \bar{x}_g = \frac{2U_0}{2\pi f T}\left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) = \underline{\underline{\frac{2U_0}{\pi}}} = \frac{650V}{\pi}$$

Effektivwert:

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T \sin^2(2\pi f t)\,dt\, U_0^2}$$

Merziger FS
S. 114

$$\int \sin^2(ax) = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

Merziger FS

$$= \frac{U_0}{\sqrt{T}} \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{\sin(0)}{8\pi f} - \frac{0}{2} + \frac{\sin(2\pi)}{8\pi f}}$$

$$= \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx \frac{325}{\sqrt{2}} \text{ V} = 229{,}81 \text{ V}$$

Bem: Die numerischen Verfahren auf dem ÜB sind teilweise falsch

2] IEEE Darstellung: 32-bit ($b_0 \dots b_{31}$)

b_{31}: Vorzeichen $s = (-1)^{b_{31}}$ $\Rightarrow b_{31} = 0$, da $\sqrt{2} > 0$

$b_{30} \dots b_{23}$: Exponent $e = \sum_{i=30}^{23} 2^{\wedge}(i-23)\, b_i$

$b_{22} \dots b_0$: Mantisse $m = \sum_{i=22}^{0} 2^{\wedge}(i-23)\, b_i$

z im Dezimalsystem:

$$z = (-1)^{b_{31}}\, 2^{\wedge}(e-127) \left(1 + \sum_{i=22}^{0} 2^{\wedge}(i-23)\, b_i\right)$$

$\Rightarrow e = 127$, da $\sqrt{2} = 1,\dots$, 1 bit vor dem Komma

$\Rightarrow e = 127$

$s = 0$

geom. Reihe

$m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$

Algorithmus für nächste Nachkommastellen

<u>Falls</u> $m \leq \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow b_n = 0$

$\Leftrightarrow m' = 2m \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 1$

↳ dann weiter mit m' für $n-1$

<u>Falls</u> $m > \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow b_n = 1$

$\Rightarrow m'' = 2(m - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2} + \dots = 1$

↳ dann weiter mit m'' für $n-1$ ✱

nach diesem Algorithmus ist $\sqrt{2}$ in binär:

$$\overset{s}{0} \quad \overbrace{01111111}^{e} \quad \overbrace{0110\ 1010\ 0000\ 1001\ 1110\ 011}^{m^*}$$

*berechnet mit Matlab

Fehler: absolut: $\sqrt{2}_{ex} - \sqrt{2}_{IEEE} = 2{,}42 \cdot 10^{-8}$

relativ: $|\sqrt{2}_{ex} - \sqrt{2}_{IEEE}| (\sqrt{2}_{ex})^{-1} = 1{,}71 \cdot 10^{-8}$

(*) Berechnung der ersten vier Nachkommastellen, Rest in Matlab nach Algorithmus:

$\sqrt{2} \bmod 1 = 0{,}414\ldots = m_0$

$2m_0 = m_0' = 0{,}828\ldots < 1 \Rightarrow b_{22} = 0$

$m_1 = m_0'$

$m_1' = 2m_1 = 1{,}626\ldots > 1$

$\hookrightarrow m_1'' = 2(m_1 - \frac{1}{2}) = 0{,}626\ldots < 1 \Rightarrow b_{21} = 1$

$m_2 = m_1''$

$m_2' = 2m_2 = 1{,}252\ldots > 1$

$\hookrightarrow m_2'' = 2(m_2 - \frac{1}{2}) = 0{,}252\ldots < 1 \Rightarrow b_{20} = 1$

$m_3 = m_2''$

$m_3' = 2m_3 = 0{,}504\ldots < 1 \Rightarrow b_{19} = 0$

$\vdots$

3) (a) $v(t_0) = s'(t_0) = \frac{d}{dt} \sin(t) \Big|_{t_0} = \cos(t_0)$

Rest in Matlab

(b) Matlab

(c) für kleinerwerdendes Δt wird der Fehler bis $\Delta t = 10^{-8}$ kleiner, es existiert also ein (lokales) optimum
Dies kommt durch das Phänomen der Auslöschung zustande. Die Subtraktion ist nicht gut konditioniert und führt so für kleine Differenzen auf ein falsches Ergebnis

(d) hier ist das Optimum breiter und der Fehler nimmt schneller mit Δt ab
der Fehler steigt allerdings auch hier wieder
Dies liegt am größeren Abstand der beiden Zahlen im Zähler welche von einander subtrahiert werden

4) (d)

Der relative Fehler nimmt mit kleiner werdendem ε zu. Dies liegt an der schlechten Konditionierung der Subtraktion bei zwei annähernd gleichgroßen Zahlen.
Hier lässt die extrem hohe Konditionszahl den Fehler in die Höhe wachsen