ZJU Summer 2024 Contest 4

Contest Analysis

Group S

07.10.2024

A. Maze Construction

Description

给定一个网格图和上面的起点终点，每次挡住一个位置，如果起点到终点不四连通则撤销，问最终状态。

A. Maze Construction

Solution

观察：白格四连通即为八连通的黑格不会把白格切开。

观察 2：如果将网格外全部视作黑格，然后在起点和终点之间连一条折线，则黑格将白格切开当且仅当存在一个黑格形成的八连通环“穿过”折线奇数次。

因此可以用带权并查集维护黑格是否形成奇环。

时间复杂度 $O(nm\alpha(nm))$ 。

给定一个网格，用三种图形填充，要求横竖斜四个方向必须是连续三个相同图形，或者是连续三个互不相同图形。多次修改限制，问每次修改前后有多少种填法。

B. No Set in a Row

Solution

观察：可行的 pattern 不会很多（不超过 $3^4 = 81$ 种）
对于两维都 ≤ 2 的情况，任意填充方式均合法。
对于有一维 ≤ 2 的情况，另一维一定三格一循环，且根据开始的两格可以确定后面所有。因此只需要枚举左上角不超过 2×2 的区域，动态维护当前有多少个条件可以在每种 pattern 下被满足即可。
对于其余情况，可以发现两维分别三格一循环，且根据左上角 2×2 的区域可以确定后面所有。因此仍然只需要枚举左上角不超过 2×2 的区域，动态维护当前有多少个条件可以在每种 pattern 下被满足即可。注意这种情况下只有 27 种 pattern 。
时间复杂度 $O(3^4 q)$ 。

两个人博弈，设 $f(k)$ 为，有 n 个石子，每次可以拿 $1, 2, \ldots, k$ 个，两个人轮流操作，钦定若干个点先手必胜的情况下，$s = 1, 2, \ldots, n$ 胜负情况的哈希值。
对所有 $1 \leq k \leq n$ 输出对于 $f(k)$。

假设当前还有 m 个石子先手必败，那么 $m+1, m+2, \ldots, m+k$ 这些状态都是先手必胜。
我们从 $x=0$ 个石子开始，每次寻找下一个先手必败的状态，那么就是找到最小的 $\geq x+k+1$ 的并且没有被指定为先手必胜的状态。
这样时间复杂度为 $O(\frac{n}{1}+\frac{n}{2}+\cdots+\frac{n}{n})=O(n\log n)$，可以通过。

给出一个长度为 n 的小写字母串，你需要计算有多少对非空字符串 (A, B) 满足：

- AB 是原串的子串
- 每次 A 在原串中作为子串出现后，要么紧跟着出现一个子串 B，要么 A 后面放不下一个子串 B。

我们考虑在后缀数据结构上思考这个问题。不妨我们在后缀树上枚举串 A 所在的节点 x，那么 AB 串所在的位置一定是 x 子树内的某个节点 y。那么原题的限制接可以描述为，AB 串的长度要大于 x 子树内除了 y 所在子树对应后缀的长度最大值，不妨设这个最大值为 $g(x,y)$。那么我们直接暴力枚举 x,y，设节点 x 对应的后缀长度区间为 $[l_x,r_x]$，贡献为：

- $x=y$, $\frac{(r_x-l_x)(r_x-l_x+1)}{2}$
- $g(x,y)<l_y$, $(r_x-l_x+1)(r_y-l_y+1)$
- $g(x,y)\geq l_y$, $(r_x-l_x+1)(r_y-g(x,y))$

注意到限制是根 l_y 有关，那么我们不妨枚举 y。如果我们将某个祖先节点 x 的信息存储在 $g(x, y)$ 的位置，那么根据 l_y 的限制就对应了两次区间询问。注意到从 x 的信息到某个儿子 v 的信息，那么需要将所有信息的位置与 $g(x, v)$ 取最大值，就对应了将某个区间的所有值移动到单点，以及需要单点插入 x 的信息。

在后缀树上 DFS 并且维护 y 到根链上的信息，这些操作都可以使用线段树维护。因为撤销操作实现起来较为复杂，所以我们可以直接使用可持久化线段树。时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

给定 $2n$ 个单位向量，角度都在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之间，你需要将他们两两匹配，使得形成的三角形总面积最小。

假设四个向量的角度为 $a \le b \le c \le d$，我们注意到一定不会出现 a, c 匹配，b, d 匹配的情况，因为夹角为 α 的三角形面积为 $\frac{1}{2}\sin\alpha$，而 $\sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 为增函数，这样匹配一定比 a, b 匹配，c, d 匹配更劣。
对于 $1, 2, \ldots, 2n$ 匹配，假设我们枚举 1 和 k 匹配，那么剩下的匹配一定和 $1, k$ 这一对不会交叉，也就是划分为 $2, 3, \ldots, k-1$ 和 $k+1, k+2, \ldots, 2n$ 两个子问题。
不妨设 $f_{l,r}$ 为 $[l, r]$ 这个区间匹配 0 的 0 最. 小值，那么枚举 l 和谁匹配转移即可，即 $f_{l,r} = \min_{i=l+1}^{r}\{f_{l+1,i-1} + f_{i+1,r} + w_{l,i}\}$。
时间复杂度 $O(n^3)$。

F. Inescapable Fate

Description

给定一棵树，初始 0 时刻在 s，有若干个形如：在 t_i 时刻必须在距离 x_i 小于等于 d_i 的点的限制，问速度最少是多少能做到

首先二分答案 v，转化为速度为 v 判断是否可行。
在 0 时刻，我们在 s，那么在 t_1 时刻，可以在的点就是距离 s 小于等于 $v \cdot t_1$ 的点，根据限制，我们需要将这个范围与距离 x_1 小于等于 d_1 的点求交。

结论

树上距离点 c_1 的距离 $\leq r_1$，距离点 c_2 的距离 $\leq r_2$ 的点，要么为空集，要么可以表示为距离某个点 c 的距离 $\leq r$ 的所有点

证明留作练习。

首先在树上所有边的中点加一个点，避免出现小数。假设要求距离点 c_1 的距离 $\leq r_1$，距离点 c_2 的距离 $\leq r_2$ 的点，不妨设 $dis(c_1, c_2) = D, r_1 \leq r_2$，分类讨论：

- $r_1 + r_2 < D$，这种情况交集为空
- $r_2 \geq r_1 + D$，这种情况交集就是 (c_1, r_1)
- 否则，设 p 为 c_1 到 c_2 路径上第 $\frac{(D-r2+r1)}{2}$ 个点，那么交集为 $(p, \frac{r1+r2-D}{2})$。

使用欧拉序求 LCA 和长链剖分求 k 级祖先可以做到总复杂度 $O(n \log n + q \log n)$。

G. Meaningless Existence
Description

给一个序列 a，求有多少个子序列满足：假设 l, r 为子序列 S 中第一个和最后一个元素，满足 $\sum\limits_{i \in S} a_i = \sum\limits_{i=l}^{r} a_i$

将条件转化为子序列中不存在的元素和为 0，那么假设选取一个和为 0 的子序列 $i_1, i_2, \ldots, i_k$，满足 $\sum_{j=1}^{k} a_{i_j} = 0$，那么满足条件的原题意中的子序列数量为 $(i_1 - 1) \cdot (n - i_k)$。
我们用背包统计这样的子序列数量，在加入 a_i 时如果是第一个元素，贡献为 $i - 1$，然后枚举最后一个元素 j，乘上贡献 $(n - j)$ 即可。
时间复杂度 $O(n^2 \max(|a|))$。

Thanks!