2024 Summer Training, Contest 1, Group H

CUHK-Shenzhen

July 8, 2024

F. Pig Language

Problem

- 给定一个由 x 和 y 组成的字符串 s。你可以花费 1 个代价将一个字符从 x 变成 y 或从 y 变成 x。求所需的最小代价使得修改后的字符串中每个 xy 之前都有一个 x。
- $1 \leq |s| \leq 10^6$。

F. Pig Language

- 观察发现，修改过后的字符串任意两个 y 之间都有一个 x。于是可以贪心的从左到右替换每一个非法的 x 为 y，容易证明这样子做是最优的。
- 一些实现需要对以 xy 开头的字符串特殊处理。
- 时间复杂度: $O(n)$.

A. Kindergarten Trip

Problem

- 有 $2n$ 个学生，现在要组织最少次数的郊游，每次郊游可以选 n 个学生一起去玩，要求使用最少的次数使得两两学生至少一起玩一次。
- $1 \le n \le 1000$。

A. Kindergarten Trip

- 不难发现，答案一定是 6。
- 首先证明答案必须大于 5，因为一个学生至少要去玩 3 次。

n 为偶数

- n 是偶数的时候构造是显然的，首先将数据分成大小为 $\frac{n}{2}$ 的四组，$A=(1\sim\frac{n}{2})$，$B=(\frac{n}{2}+1\sim n)$，$C=(n+1,n+\frac{n}{2})$，$D=(n+\frac{n}{2}+1,2n)$。
- 那么就可以构造出以下六组旅行：$A\cup B$, $A\cup C$, $A\cup D$, $B\cup C$, $B\cup D$, $C\cup D$。

A. Kindergarten Trip

- n 为奇数的时候没有那么显然，不妨先考虑 $n=3$。一种方案是 $(1,2,3)$, $(1,4,5)$, $(1,3,6)$, $(2,4,6)$, $(2,5,6)$, $(3,4,5)$。

n 为奇数

- 取前 6 个数用 $n=3$ 的方法构造，剩下的 $2n-6$ 个数对应到 n 是偶数的情况，将之前的做法合理的拼接到 $n=3$ 的解上即可。
- $(1,2,3,A,B)$, $(1,4,5,A,C)$, $(1,3,6,B,D)$, $(2,4,6,A,D)$, $(2,5,6,C,D)$, $(3,4,5,B,C)$。

B. Pig Race

Problem

- Alice 和 Bie 在玩田忌赛猪，双方各有 n 只猪，能力值分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \ldots, b_n$。双方每次可以派出一只之前为选过的猪，能力值高的一方获得一点积分，求双方在混合策略纳什均衡下的积分差的期望。
- $1 \le n \le 10^5$, $1 \le a_i, b_i \le 10^9$。

B. Pig Race

- 观察发现，如果任意一方选择的策略是按照一个均匀的随机排列出猪，无论另一方选择的策略是什么期望的积分差都是固定的。
- 因此，一个符合条件的混合策略是双方都按照一个均匀的随机排列出猪，问题转化为求这个策略下的积分差期望。
- 本质上是求满足 $a_i > b_j$ 的 (i, j) 对数，排序后双指针即可。
- 时间复杂度：$O(n \log n)$。

题意

- 构造二维平面上的 n 个点 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, 3, \cdots, n$，满足 $x_i^2 + y_i^2 = e_i^2$ 且 e_i 单调不降．最大化序列 $\{|x_i| + |y_i|\}_{i=1}^{n}$ 的逆序对数，输出这个值。

C. Euclidean vs Taxicab

- 不失一般性，假设 $x_i, y_i \geq 0$. 注意到 $e_i \leq x_i + y_i \leq \sqrt{2}e_i$，且可以取遍 $[e_i, \sqrt{2}e_i]$ 中所有值。则问题转化为求序列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 满足 $e_i \leq a_i \leq \sqrt{2}e_i$ 的逆序对数最大值。

引理

- 考虑序列中任意两个相邻的极长连续下降段 $a_i > a_{i+1} > \cdots > a_j, a_{j+1} \geq a_{j+2} > \cdots > a_k, i \leq j \leq k$. 则必定有 $a_i < a_k$ 成立。

- 根据这个引理，逆序对只产生在极长下降段的内部。
- 因此我们可以得到一个 DP：设 f_i 表示前 i 个数，i 是一个极长下降段结尾的情况下，前 i 个数的逆序对个数的最大值。
- 由于下标在 $[l, r]$ 内的数可以组成一段极长下降段的充要条件是 $\sqrt{2}e_l > e_r$，则 DP 的转移式是：

$$f_i = \max_{1 \le j < i, \sqrt{2}e_{j+1} > e_i} \left\{ f_j + \binom{i-j}{2} \right\}$$

- 这可以写成斜率优化的形式：

$$f_i = \frac{1}{2}(i^2 - i) + \max_{1 \le j < i, \sqrt{2}e_{j+1} > e_i} \left\{ f_j + \left(-j \cdot i + \frac{1}{2}\left(j^2 + j\right) \right) \right\}$$

C. Euclidean vs Taxicab

- 由于每个 j 对应的直线只对一段区间的 i 生效，我们可以将这条直线插入在李超树的对应区间上，并对每个 i 直接在李超树上查询，完成转移。
- 此外，观察到生效区间的左右端点都随着 j 的递增而单调右移，我们也可以使用 CDQ 分治，每次先计算左半区间的 DP 值，再考虑左半区间向右半区间的转移。转移时每个右半区间的 i 可以从左半区间一段后缀的 j 转移而来。随着 i 左移，对应的后缀不断变长。随着 j 左移，直线的斜率不断变大。因此我们可以从右向左扫描每个 i。这样，维护的目标变为：支持添加斜率单调变大的直线，并进行横坐标单调变小的查询。可以用一个凸包轻松维护。
- 两种做法的时间复杂度都是 $O(n \log n)$.

D. Counterspell

题意

- 给定 n 个物品的价值，$1 \leq a_1, \ldots, a_n \leq 10^9$. 要将总共 m_1 点重量分配到每个物品，使得一个大小为 m_2 的背包能装下的价值尽可能少。
- $1 \leq n, m_1, m_2 \leq 50$.

D. Counterspell

- 不难发现，若有两个物品满足 $a_i > a_j$，分配重量为 $w_i < w_j$ 一定不优。因此，若将所有物品按照 a_i 递增排序，分配的重量序列一定是一个不降的序列。
- 由此可知，可行的分配方案数至多为 $P(50) \approx 2 \times 10^5$.
- 枚举拆分数，用背包验证即可。
- 时间复杂度： $O(nm_2P(m_1))$。

E. Bracket

题意

- 给定一个长度为 n 的 01 串 s，保证 n 是偶数，要求构造尽可能少的 01 括号串，使得所有构造串按位异或得到的结果和 s 一致。
- $2 \le n \le 10^6$。

E. Bracket

- 不难发现，当 s 中 1 的个数是奇数时，一定无解。
- 如果答案为 1，只需要检查是否为合法括号序列
- 如果答案为 2，容易发现开头不是 1 和结尾不是 1 一定有解。构造方法为将前一半 0 的位置都放（，后一半 0 的位置都放）。对于 1 的位置，两个串分别放（和）与放 ）（ 交替，容易证明这样是合法的。
- 否则只要开头不是 1 并且有偶数个 0，答案为 3，先选择一个 （((...))） 即可变成答案为 2 的情况。
- 其他情况无解
- 时间复杂度 $O(n)$

G. A Long-lost Feeling

题意

- 维护一个可重集合，支持以下两种操作，操作次数 $n \leq 10^6$
- 加入一个数 x
- 给定 k，询问每次将 k 个数 -1，最多操作多少次

G. A Long-lost Feeling

- 考虑只有一组询问怎么做，二分答案 mid
- 我们要将所有数分为 mid 组，每组都有 k 个数，一个数 x 存在的组数不超过 x，每个数不能在一个组里出现两次，总共要有 $mid \times k$ 这么多数
- 对于 $x > mid$，直接将其分配到每一组里一次，贡献为 mid
- 对于 $x \leq mid$，我们将这些数依次放入不同的组，因为 $x \leq mid$，所以不会有一组里出现两次，贡献为 x
- 我们只需要知道 $\leq mid$ 的数的和与 $> mid$ 的数的个数即可
- 用线段树维护集合，在线段树上二分，时间复杂度为 $O(n \log n)$，小常数的 $O(n \log^2 n)$ 也有可能通过

Thank you!