ZJU Summer 2024 Contest 1
题解

Group A

07.06.2024

A. Permutation Problem (Plus Version)

Description

给定排列 p，求 $(i+j)|(p_i+p_j)$ 的 (i,j) 对数。$n \le 5 \cdot 10^5$

枚举商 k，有 $(i+j)k = p_i + p_j$，对于每一个 k，令 $a_i = p_i - ki$，相当于求 $a_i + a_j = 0$ 的 (i, j) 对数，双指针或直接扫一遍解决。
注意到 $ik \leq n$，总复杂度 $O(n \log n)$。

B. Counting Sets

Description

给定 n, m, p, 集合 S 包含 $1 \ldots n \cdot p$，在其中恰好选出 m 个使得集合的和被 p 整除，求方案数。$1 \le q \le n \cdot m \le 10^7$.

考虑对所有的选择（不论合不合法）划分等价类。假设我们画出一个 n 行 p 列的矩形，如果在集合选中了 x，就把 x/p 行 $x \bmod p$ 列的方格涂黑。下面我们定义两种选择等价，当且仅当两者的第一个非空非满行循环同构，并且剩下的所有行都完全相同。
可以验证它的确是一个等价关系。注意有些涂色方案可能没有非空也非满的行，这些方案可以额外再算。

由于 p 是质数，我们知道它不可能有子循环节，也即每个等价类的元素数量都是 p。考虑同个等价类里，相当于是从一个代表元开始，将它的非空非满的一行循环位移 p 次，每位移一次，总和就会加上一个非 p 的常数。因此，等价类内的 p 个方案里有且仅有一个是合法的。
再额外考虑那些无法被划分进等价类的情况即可。注意 2 要特判。

在一个三维欧氏空间内随机游走，每次可以给三维坐标都 $+1-1$，或者对某一维 $+1-1$，问恰好 n 步走到 $\bmod m$ 意义下 (A, B, C) 的方案数。

考虑在二维的时候，对于类似的随机游走问题，我们会希望能对坐标做一个线性变换，使得两个维度是独立的。从这个思路开始构造，我们可以找到一组线性变换，将 (x, y, z) 变成 $(x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$。这样变换过后，可以验证，原来给的两种操作等价于对每一维坐标都任选 $+1$ 或 -1。这样三个维度就独立了。
但是，要注意在模意义下，(x, y, z) 相等和 $(x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$ 相等是不等价的，实际上 $(x+y-z, x-y+z, -x+y+z)$ 相等只能推出 $(2x, 2y, 2z)$ 相等以及 $x+y+z$ 相等。在模数为偶数的情况下就需要另外处理。

注意如果直接算，那会算到的实际上是
$(x, y, z), (x + m/2, y + m/2, z), (x + m/2, y, z + m/2), (x, y + m/2, z + m/2)$
这么几种。
令 $M = 2m$，在模 M 意义下计算，就会算到
$(x, y, z), (x + m, y + m, z), (x + m, y, z + m), (x, y + m, z + m)$，再对
$(x + m, y + m, z + m)$ 计算，算得的是
$(x + m, y + m, z + m), (x + m, y, z), (x, y + m, z), (x, y, z + m)$，这样就算到
全部的答案了。

给出一个数组 a 长度为 n，一共 q 个询问，询问有两种，一种是查询 $[l,r]$ 区间中是否存在一个和为 x 的子段；一种是将 $a[i]$ 改为 v。

$n,q \le 10^5$, $\sum_{i=1}^{n} a[i] \le 2 \cdot 10^5$

D. Segment
Solution

对于第一种询问，可以转化为：在前缀和数组 s 中，是否存在 $s_j - s_i = x$. 加上第二种修改，可以用树状数组维护这个前缀和。

进一步，由于 $a[i]$ 的和始终不超过 $2 \cdot 10^5$，可以用一个 bitset 维护前缀和，bitset 叫做 s，每次询问相当于问 $s >> x \& s$ 是否为 0。

- 对于 x 不为零，如果 $s >> x \& s$ 也不为零，说明有解，二分找到左右边界即可。
- 对于 x 为零，用一个 *set* 存所有 $a[i] = 0$ 的点来判断。

对于修改，将 bitset 移位，并维护 *set* 和树状数组。
注意 $a[i] = 0$ 时特判，bitset 移位要保留第 s_i 位，因为 $s_i = s_{i-1}$，移位后 s_{i-1} 仍然存在。

E. Special Distance

Description

给定树上一种新的距离的定义：

- 所有节点到自己的距离为 0。
- 对于任意一条边 (x, y, w) ， $dis(x, y) = w$ 。
- 否则距离为路径上每一个无序点对距离之和（除自己）。

最后 q 次询问一对点的距离模 2^{32} ， $n, q \leq 5 \cdot 10^5$

E. Special Distance
Solution

考虑一条长度大于 3 的链 $a - b - ... - c - d$ 。
我们可以得到递推式 $dis(a, d) = 2 * dis(a, c) + 2 * dis(b, d) - 2 * dis(b, c)$
由此我们可以知道链长度为 $4, 5$ 的 dis 一定是 2 的倍数，长度为 $6, 7$ 的 dis 一定是 4 的倍数...... 以此类推，当链长度大于 65 时，答案就是 0 。

现在问题变成了怎么快速算链长度较小时的情况。
显然链上的每条边（根据所在位置的不同）对于答案都有一个贡献系数，我们可以把这个系数预处理出来，然后每次询问将对应的那条链提取出来将权值乘上对应系数即可。
至于预处理具体怎么做方式很多，甚至可以 $O(n^4)$ 。

给 k 个盒子，每个盒子 t 个球，要求构造一种染色方案，使得:

- 一个盒子中出现的颜色各不相同。
- 任意两种颜色的组合不会出现在不同的盒子中。

F. We need more colors
Solution

本题做法很多，这里只介绍 std 的做法，
首先考虑 $K \leq T+1$ 的情况，
对于第一个盒子，显然只能用颜色 1 到 T 。
接下来对于第 i 个盒子，我们可以从前面的每个盒子中各挑一种颜色，
更具体地，我们可以挑每个盒子的第 i 个球的颜色，然后剩余没染色的球各用一个新的颜色。
可以证明以上构造是合法的，且用的颜色数为 $KT - \frac{K(K-1)}{2}$ ，在 $K = T+1$ 时正好是 $\frac{KT}{2}$ 。

至于 $K \geq T+1$ 的情况，
可以把 K 个盒子分成若干组，每组 $T+1$ 个盒子或者余下一些，这样在极限数据下共用 499000 种颜色。

Thanks!