

ZJU Summer 2024 Contest 10

Contest Analysis

Group S

Special Thanks to Harry Zhang
and his fellows for their amazing problems!

07.17.2024

A. Mysterious Oscar II

Description

给定一棵树，问你删除 k 个点之后，最大的连通块最小是多少。

A. Mysterious Oscar II

Solution

二分答案 w 。

我们进行一个 DFS，当前包含 x 和子树内的连通块的大小超过，就把 x 删除，将连通块大小设为 0。可以用 DP 的角度来理解这个贪心的正确性。

Bonus: 怎么对所有 k 求答案。

时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

B. The Mystery of Forgotten Realms

Description

求 n 个数所有子集和的 k 次幂和, $k \in [0, m] \cap \mathbb{Z}$

B. The Mystery of Forgotten Realms

Solution

对于单个的 k , 答案是 $k! \cdot [x^k] \prod_{i=1}^n (1 + e^{a_i x})$

有多种方法可以证明这一点, 一种想法是考虑 $f_{i,j}$ 表示前 i 个数的所有子集的 j 次幂的和, 由二项式定理知转移为

$f_{i,j} = f_{i-1,j} + \sum_{k=0}^j f_{i-1,k} \cdot \binom{j}{k} a_i^{j-k}$, 将 $f_{i,j}$ 写成 egf 形式为

$F_i(x) = \sum_j \frac{f_{i,j} x^j}{j!}$, 容易说明转移即为卷积上 $(1 + e^{a_i x})$.

B. The Mystery of Forgotten Realms

Solution

直接卷积复杂度是 $O(nm \log m)$ 的，难以通过

考虑将 $(1 + e^{ax})$ 按 L 个分段，段内展开所有的 2^L 项，则我们要计算的是 2^L 个 e^{bx} 的和的前 m 项。如果直接计算是 $2^L \cdot m$ 的，平衡复杂度可以得到 $O(\frac{nm \log m}{\log \log m})$ 。

考虑本质上求的是 2^L 个数的所有 k 次幂和，其中 $k = 0, 1, 2 \dots m$ ，这只要要求我们计算 $\frac{1}{1-bx}$ 的和，分治 NTT 即可做到 $n \log^2 n$ ，即为 $2^L \cdot L^2$ 。总复杂度 $O(\frac{n}{L}(m \log m + 2^L L^2))$ ，平衡复杂度即为 $O(nm)$ 。

C. Puzzle: Ice

Description

给一个 $n \times m$ 的网格，上面有一些 x ，初始都为黑色。
从某个起点出发，每次只能上下左右到一个相邻的 x ，到了之后会将颜色反转。你需要把所有点变成白色。
同时有一些测试点要求回到原点。 x 的数量不超过 20000，要求次数 10^5 。

C. Puzzle: Ice

Solution

考虑找任意一个生成树，写一个递归函数，首先将这个点所有子树变成白色，如果当前点为黑色，走到父亲节点再走回来。注意到这个点需要进行调整当且仅当子树大小为偶数。这样点的次数不超过 $\frac{K}{2}$ ，所以总次数为 $3K$ 。对于根节点，如果最后根节点为白色，我们最后不回到根节点即可。

如果强制要求回到根节点，此时根节点不合法当且仅当整棵树点数为奇数，如果我们要改变操作的奇偶性，那么我们就需要找一个奇环，如果没有奇环一定是无解。这部分次数为 $2K$ 。

时间复杂度 $O(nm + K)$ 。

D. Bipartite Graph Matching Again

Description

给一个两侧都是 n 个点的二分图， m 次连边，每次都是从左边 $1, 2, \dots, n$ 每一个点，向某个集合 S 中独立的随一个点连边。
问完美匹配数量的期望。

D. Bipartite Graph Matching Again

Solution

左边的每个点是独立的，考虑左边第 i 个点如果和右边第 j 个点匹配，那么它们之间的连边的贡献为 $\sum_{j \in S_x} \frac{1}{|S_x|}$ 。

对于任意一个匹配概率都相同，所以 $n! \cdot \prod_{j=1}^n \sum_{j \in S_x} \frac{1}{|S_x|}$

时间复杂度 $O(n + m)$ 。

E. Love Snow

Description

给 n 个树，每个树有若干个树枝，选择 k 个保护起来，使得保护的积雪数量最多。具体可以看原题。
对于 $k = 1, 2, \dots, n$ 求出答案。

注意到答案关于 k 是凸的（证明留作练习），设 $f_{l,r,k,0/1,0/1}$ 为考虑区间 $[l, r]$ ，选了 k 个，左右断点是否选取的最大值。分治求解，转移是 $\max, +$ 卷积，用闵可夫斯基和合并两个数组即可。
时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

F. Video Game

Description

有 n 个怪，每次攻击力最低的 k 个会攻击你，然后你可以选择干掉一个怪或者创建一个攻击力为 m 的怪。问你干掉所有怪最少承受伤害。

先排序，枚举加多少个怪，一定是先加怪，然后从大到小打。预处理一些前缀和即可 $O(1)$ 计算。
时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

G. Sugar Sweet Ex

Description

给定一个树和树上 m 个路径，问是否存在一个顺序使得所有人依次走，每个人不会经过其他人的起点。

G. Sugar Sweet Ex

Solution

注意到限制其实是从 $u \rightarrow v$ 的路径上除了 u 之外的起点的人都要在这个人之前，如果我们能建图就可以直接拓扑排序

做法 1：直接倍增/树剖优化建图，时间复杂度 $O(n \log n)$ 或 $O(n \log^2 n)$ 。

做法 2：将所有包含 a 的点断开，那么如果 a 到 b 的路径上除了 a 之外都是联通的，就可以走过去。维护连通块以及连通块内部的 b 和连通块相邻的 a 即可。启发式合并时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

Thanks!