ZJU Summer 2024 Contest 6 By Group A

题解

浙江大学

7.12.2024

A. Bipartite Graph Matching

Description

一个大小为 n 的方阵 a，每行每列恰好选一个，要求选的非负，问总和 $\bmod m$ 有多少种。
First/Last to solve: NaN/NaN

设 $b(i,j) = [a(i,j) \neq -1]x^{a(i,j)}$，则总和为 k 的方案数是 $[x^k] \operatorname{per} B$。
$\operatorname{per} B$ 是 NPC 的，不可做。
由于我们不关心实际方案数，只关心是否有方案，可以改为计算 $[x^k] \det B$。
为了防止正负项相消，可以令 $b(i,j) = [a(i,j) \neq -1]r(i,j)x^{a(i,j)}$，其中 R 是一个随机矩阵。
直接计算 $\det B$ 的复杂度较高，且可能出现不可处理的情况，考虑代入 x 再插值。
如果直接插值最后的多项式，需要代入 nm 个数，复杂度为 $O(n^4 m)$，不能通过。
由于模数是自选的，可以考虑选 p 满足 $m|(p-1)$，则对于模 p 意义下的原根 g，设 $w_i \equiv g^{(p-1)/m} \pmod p$，则 $w_i^m \equiv 1 \pmod p$。
代入 w_i 插值时，相当于在模 $x^m - 1$ 意义下运算，因此只需要代入 m 个值。
复杂度 $O(n^3 m)$。

B. French Fries

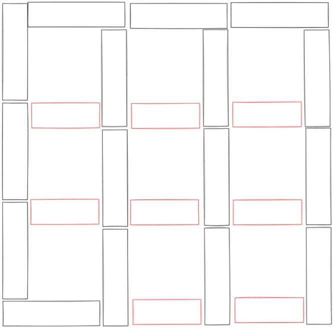
Description

将 a, b, c 个长度 $999, 1000, 1001$ 宽度 1 的矩形排成一个 $n \times m$ 的网格，求一种可能的排法，$1 \leq m, n \leq 500$。

First/Last to solve: 吴与伦/张志心

观察边和结点，若存在构造，则 (a, b, c) 满足
$a + b + c = n(m + 1) + m(n + 1)$ ，$b + 2c = (m + 1)(n + 1)$。

猜测，若 (a, b, c) 满足上述两个等式，则存在构造。$c = 0$ ，$a = mn - 1$ 时，一种构造如下图：



B. French Fries

Solution

从这个初始情况出发，每次将两个相邻的、长为 b 的矩形替换成 a 和 c ，若干次后可以让 b 降到 0 或 1 ，证明了猜测。

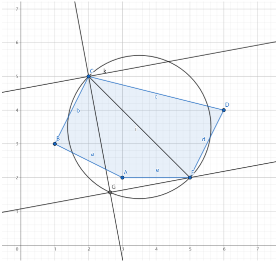
对于某一组 (a, b, c) ，从初始情况开始进行 c 次替换即可。

Bonus： checker 怎么写？

二维平面上给定 n 个点，整个点集以速度 v 想 x 轴正方向移动 ($v \in [v_1, v_2]$ 可以任选)，雨以 v_0 的速度竖直落下。你有一把伞，在平面上简化为一条长度为 D 的线段，你需要求出能遮住点集不被雨淋到的最小的 D。

First/Last to solve: 林丰/陈君林

再简化一下题意，求能夹住整个点集的一组平行线，这组平行线相隔距离最小。其中平行线的斜率在 $[v_0/v_2, v_0/v_1]$ 之间。
考虑没有斜率限制的情况，答案一定是这种情况：平行线的其中一条和点集的凸包某一个边重合。否则，如果出现以下只和点重合的情况：



画一个以 CE 为直径的园，CG 和 EG 垂直，则 CG 的长就是平行线之间的距离。
显然角 GCE 越小，CG 越短，而最小就是两侧和边重合的情况。
所以很明显可以旋转卡壳处理，这是不管斜率限制的做法。

而加上限制只要在更新答案时加一个判断就行。
只不过这个限制还附带了一个 Boundary case，就是对于斜率是 v_0/v_1 或 v_0/v_2 的情况也有可能得到答案——即使可能这样没有卡住凸包的任何边。

首先考虑单独考虑每个数字，最终答案为所有数字的 sg 函数异或和

考虑取 ai 并选择 y 时，所转移到的状态为 $sg[1] \oplus sg[2] \oplus sg[3] ... \oplus sg[y]$

故 $sg[i] = mex\{sg[0], sg[1], sg[1] \oplus sg[2], ..., sg[1] \oplus sg[2] \oplus ...sg[i-1]\}$

可以观察发现对于 $i > 2$，所有 $sg[i] = 2$

First/Last to solve: 李俊睿/林滨

E. Flipping Cards

Description

长度 n 的 01 串，初始为全 0，每次可以选一个区间 flip，问选恰好 m 个两两不同的区间使得变成目标状态的方案序列总数。

First/Last to solve: NaN/NaN

先差分，然后写出答案的生成函数：$[y^m x^b] \prod_{i,j}(1 + yx^{2^i+2^j})$，其中 b 是差分后的 $n+1$ 位二进制数。
暴力的做法是以 x 为主元，y 为参数，直接 FWT 再 IFWT 回去，我们现在考虑如何快速做这件事。我们知道 FWT 的式子长这样：
$A'_x = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{|i \cap x|} A_i$，也就是 i 和 x and 结果的 popcount。

那么在本题中，$2^i + 2^j$ 对 c 的贡献也仅取决于 $c\&(2^i + 2^j)$ 的 popcount，最后的式子就会形如 $[y^m](1+y)^A(1-y)^B$。
由于这道题里的各个位是完全平等的，因此上述式子里的 A 和 B 仅仅和该下标的 popcount 有关。具体来讲，popcount 为 i 的位的 $A = i \cdot (n-i)$，因为需要选中一个 1 和一个 0。
同理再 IFWT 回去即可。复杂度为枚举 popcount 的 n 和后面算组合数系数时的 m，即为 $\Theta(nm)$。

F. 01 Circle Count

Description

求有多少长度为 n 的 01 循环串，使得不存在连续的 m 个 0
First/Last to solve: 张湫阳/吴与伦

为了方便计数，钦定起点为 1 （全 0 特判）。记 $dp_{i,j}$ 为长度为 i 的链，当前末尾延伸了 j 个 0 的方案数，转移如下：

$$dp_{i,j} = dp_{i-1,j-1}, j > 0$$

$$dp_{i,0} = \sum_{k=0}^{m} dp_{i-1,k}$$

那么对于一个长度为 len 的序列，如果它有 i 个 1 ，那么它会被计数 i 次，并不能很好地算出对答案的贡献。观察一个例子 10110100 ，它会被计数 4 次，而 100100100 只会被记录一次，因为这是一个长度为 3 的循环序列。

记 $g_i = \sum_{j=0}^{\min(i,m)} dp_{i,j} \times (j+1)$，那么当一个 1 作为序列中最后一个 1 出现时，会被计数 $1+$ 末尾 0 的个数次，这样一个序列恰好被计数 len 次，假如是循环序列，只会记录循环节长度次。g_i 在计数时包含了其约数长度循环节的计数，需要令 g_i 对自己的约数容斥。

F. 01 Circle Count

Solution

由于 g_i 是乘上了长度 i 的，计算答案的时候需要除掉 i ，即 $ans = \sum_{i|n} \frac{g_i}{i}$

再考虑优化第一部分的 dp。发现这个 dp 就是把 $[0, m]$ 后移一位，再在前面插入一个之前所有数的和，这个可以模拟做到 $\Theta(n)$ 。

Thanks!