

# 京都大学 2024 前期理系

## 各問題の内容と感想

問題番号	内容	感想	なかけん難易度
1	??	??	
2	不定方程式	変形だけでなく、最小値を求める意識も必要だった。	★★★☆☆
3	??	??	
4	??	??	
5	??	??	

# 1 剰余環における冪

$\mathbb{Z}_3$  の表

$x$	0	1	2
$x^2$	0	1	1

$\mathbb{Z}_5$  の表

$x$	0	1	2	3	4
$x^2$	0	1	4	4	1
$x^3$	0	1	3	2	4
$x^4$	0	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_7$  の表

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2$	0	1	4	2	2	4	1
$x^3$	0	1	1	6	1	6	6
$x^4$	0	1	2	4	4	2	1
$x^5$	0	1	4	5	2	3	6
$x^6$	0	1	1	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_4$  の表

$x$	0	1	2	3
$x^2$	0	1	0	1
$x^3$	0	1	0	3
$x^4$	0	1	0	1

$\mathbb{Z}_6$  の表

$x$	0	1	2	3	4	5
$x^2$	0	1	4	3	4	1
$x^3$	0	1	2	3	4	5
$x^4$	0	1	4	3	4	1
$x^5$	0	1	2	3	4	5

## 問2

正整数  $x, y, z$  に対して、 $N = 9z^2 = x^6 + y^4$  と定める。  
 $N$  の最小値を求めよう。

### 考え方・疑問点

- 剰余を使って、条件を絞り込むしかなさそう。
- 全ての整数解を求めることは難しそう。Siegel の定理 (整数解) や Mordell の定理 (有理点) から、整数解は有限個しかないとわかるのか？
- 途中で出てくる式  $X^2 = 9Y^2 + Z^2$  は、Pell 方程式などを使って解けるか？ 二次不定方程式の一般論が気になるところ

### 解き方

(1)  $9z^2 = x^6 + y^4$  を  $\mathbb{Z}_3$  で考えると

$$0 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \quad \text{in } \mathbb{Z}_3$$

となるけど、 $\bar{x} = 0$  or  $1$  なので、 $\bar{x} = \bar{y} = 0$  がわかる。  
そこで、 $x = 3x_1, y = 3y_1$  において、元の式に代入すると

$$\begin{aligned} 9z^2 &= (3x_1)^6 + (3y_1)^4 \\ z^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \end{aligned}$$

右辺は、3 で割り切れるので、 $z$  も 3 で割り切れる。そこで、 $z = 3z_1$  とおく。

$$\begin{aligned} (3z_1)^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \\ z_1^2 &= 9x_1^6 + y_1^4 \end{aligned} \tag{1}$$

変数の関係は  $(x, y, z) = 3(x_1, y_1, z_1)$  となる。 $z_1^2 \geq 9 + 1 = 10$  で、 $z_1 \geq 4$  となる。

$z_1$  が最小となれば、 $N = (3z_1)^2$  も最小となる。

$z_1 = 4$  としてみると、式 (1) は

$$16 = 9x_1^6 + y_1^4$$

となるが、 $x_1 = 1$  となるしかなくて、 $y_1^4 = 7$  となるが、これは矛盾。

次に、 $z_1 = 5$  とすると

$$25 = 9x_1^6 + y_1^4$$

$x_1 = 1$  となるしかなくて、 $y_1^4 = 16$  となり、 $y_1 = 2$  となる。

したがって、 $N$  が最小になるのは、 $(x, y, z) = 3(1, 2, 5) = (3, 6, 15)$  のときで

$$N = 9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 45^2 = 2025$$

## 未分類、どこかで発見した問題

駿台の整数完全攻略の見本画像より

10進法の数  $\frac{12}{13}$  を3進数で表したとき、小数第100位の数を求めたい

### 解き方

3進数で表すと、 $\frac{12}{13} = (0.\dot{2}\dot{2}0220220\cdots)_{(3)}$  となるため、小数は周期的に変化する。

小数第  $3k$  位 ( $k = 1, 2, 3, \cdots$ ) は0となっているので、小数点第99位の数は0。そして、小数点第100位は、2となる。