

## 京都大学 2024 前期理系

### 各問題の内容と感想

問題番号	内容	感想	なかけん難易度
1	??	??	
2	不定方程式	変形だけでなく、最小値を求める意識も必要だった。	★★★☆☆
3	??	??	
4	??	??	
5	??	??	

# 1 剰余環における冪

$\mathbb{Z}_3$  の表

$x$	0	1	2
$x^2$	0	1	1

$\mathbb{Z}_5$  の表

$x$	0	1	2	3	4
$x^2$	0	1	4	4	1
$x^3$	0	1	3	2	4
$x^4$	0	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_7$  の表

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2$	0	1	4	2	2	4	1
$x^3$	0	1	1	6	1	6	6
$x^4$	0	1	2	4	4	2	1
$x^5$	0	1	4	5	2	3	6
$x^6$	0	1	1	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_4$  の表

$x$	0	1	2	3
$x^2$	0	1	0	1
$x^3$	0	1	0	3
$x^4$	0	1	0	1

$\mathbb{Z}_6$  の表

$x$	0	1	2	3	4	5
$x^2$	0	1	4	3	4	1
$x^3$	0	1	2	3	4	5
$x^4$	0	1	4	3	4	1
$x^5$	0	1	2	3	4	5

## 問2

正整数  $x, y, z$  に対して、 $N = 9z^2 = x^6 + y^4$  と定める。  
 $N$  の最小値を求めよう。

### 考え方・疑問点

- 剰余を使って、条件を絞り込むしかなさそう。
- 全ての整数解を求めることは難しそう。Siegel の定理 (整数解) や Mordell の定理 (有理点) から、整数解は有限個しかないとわかるのか？
- 途中で出てくる式  $X^2 = 9Y^2 + Z^2$  は、Pell 方程式などを使って解けるか？ 二次不定方程式の一般論が気になるところ

### 解き方

(1)  $9z^2 = x^6 + y^4$  を  $\mathbb{Z}_3$  で考えると

$$0 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \quad \text{in } \mathbb{Z}_3$$

となるけど、 $\bar{x} = 0$  or  $1$  なので、 $\bar{x} = \bar{y} = 0$  がわかる。  
そこで、 $x = 3x_1, y = 3y_1$  において、元の式に代入すると

$$\begin{aligned} 9z^2 &= (3x_1)^6 + (3y_1)^4 \\ z^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \end{aligned}$$

右辺は、3 で割り切れるので、 $z$  も 3 で割り切れる。そこで、 $z = 3z_1$  とおく。

$$\begin{aligned} (3z_1)^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \\ z_1^2 &= 9x_1^6 + y_1^4 \end{aligned} \tag{1}$$

変数の関係は  $(x, y, z) = 3(x_1, y_1, z_1)$  となる。 $z_1^2 \geq 9 + 1 = 10$  で、 $z_1 \geq 4$  となる。

$z_1$  が最小となれば、 $N = (3z_1)^2$  も最小となる。

$z_1 = 4$  としてみると、式 (1) は

$$16 = 9x_1^6 + y_1^4$$

となるが、 $x_1 = 1$  となるしかなくて、 $y_1^4 = 7$  となるが、これは矛盾。

次に、 $z_1 = 5$  とすると

$$25 = 9x_1^6 + y_1^4$$

$x_1 = 1$  となるしかなくて、 $y_1^4 = 16$  となり、 $y_1 = 2$  となる。

したがって、 $N$  が最小になるのは、 $(x, y, z) = 3(1, 2, 5) = (3, 6, 15)$  のときで

$$N = 9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 45^2 = 2025$$

## 未分類、どこかで発見した問題

### 駿台の整数完全攻略の見本画像より

10進法の数  $\frac{12}{13}$  を3進数で表したとき、小数第100位の数を求めたい

#### 解き方

3進数で表すと、 $\frac{12}{13} = (0.\dot{2}\dot{2}0220220\cdots)_{(3)}$  となるため、小数は周期的に変化する。  
小数第  $3k$  位 ( $k = 1, 2, 3, \cdots$ ) は0となっているので、小数点第99位の数は0。そして、小数点第100位は、2となる。

### 東大実践模試？ の動画

- (1)  $n$  が偶数であって、 $n!$  は  $n^2$  の倍数となるものを求めると、 $n \geq 6$ 。
- (1)'  $n$  が奇数ならば、 $n!$  は  $(n-1)^2$  の倍数となる。
- (2)  $(n+1)^k = n! + 1$  を満たす  $(n, k)$  の組をすべて求めたい。

#### 解き方

(2)  $n! < n! + 1 < (n+1)!$  であるから、仮定の方程式より  $n! < (n+1)^k < (n+1)!$  となる。  
ここで、 $n$  と  $k$  の大小で場合分けして考える。  
 $k \geq n$  だと、 $(n+1)^k > (n+1)!$  となり矛盾してしまう。よって、 $k < n$  は分かる。  
 $n! = (n+1)^k - 1 \equiv nk \pmod{n^2}$  だけでも、 $n$  が6以上だと  $n! \equiv 0 \pmod{n^2}$  であるから、 $n < 6$  でないといけない。

$n$	1	2	3	4	5
$n! + 1$	2	3	7	$25 = 5^2$	121
$k$	1	1	—	2	—

$(n, k) = (1, 1), (2, 1), (4, 2)$  が答えになる。

### 東大過去問？ の動画の改良

- (1) 自然数  $a, b, c$  で、任意の2つの和は残りの一つで割り切れるものをすべて求めたい。
- (2) 自然数  $a_1, \cdots, a_n$  で、任意の  $n-1$  個の和が、残りの一つで割り切れるものを全て求めたい。

#### 解き方

(SyberMath) Factorial

(1)  $2^a + 2^b = c!$

(2)  $(2n)! > n^n$

(3)  $n! = n^3 - n$

(4)  $x! + y! + z! = w!$

(5)  $abc = a! + b! + c!$

(6)  $n^2 - 19n - n! = 0$

(7)  $(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$

(8)  $x! + y! = z!$  ,  $x + y = z$

(8)  $a! + b! = c!$

(9)  $n! = n^2 + 11n + 40$

(10)  $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{8}$

(11)  $a! + b! + c! = 2^n$

(12)  $24 \cdot n! = k!$

(13)  $m! + 12 = n^2$

(14)  $\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{x}{8!}$

(15)  $x! = 6!7!$

(16)  $n! = 2^n$

(17)  $m! = 120n!$

(18)  $n! + (n - 2)! = n^3 + 1$

(19)  $x! = x^3 - x$

(20)  $x^2 - y! = 2001$

(21)  $\frac{1!2! \cdots 100!}{m!} = k^2$

(22)  $10! = 2^a 3^b 5^c 7^d$

(23)  $n! = n^3 + n^2 - 30$

(24)  $n! = n^3 + n - 10$

(25)  $n! = 6!7!$

(26)  $x! + 1 = y^2$

(27)  $(n - 1)! + 1 = n^2$

(28)  $n! + 8 = 2^k$

(SyberMath) Factorial and series

次の級数の和を求めたい。

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k!}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!}$$

$$(4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$$