

京都大学 2024 前期理系

各問題の内容と感想

問題番号	内容	感想	なかけん難易度
1	??	??	
2	不定方程式	変形だけでなく、最小値を求める意識も必要だった。	★★★☆☆
3	??	??	
4	??	??	
5	??	??	

\mathbb{Z}_3 の表

x	0	1	2
x^2	0	1	1

\mathbb{Z}_4 の表

x	0	1	2	3
x^2	0	1	0	1
x^3	0	1	0	3
x^4	0	1	0	1

\mathbb{Z}_5 の表

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

問2

正整数 x, y, z に対して、 $N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と定める。
 N の最小値を求めよう。

考え方・疑問点

- 剰余を使って、条件を絞り込むしかなさそう。
- 全ての整数解を求めることは難しそう。Siegel の定理 (整数解) や Mordell の定理 (有理点) から、整数解は有限個しかないとわかるのか？
- 途中で出てくる式 $X^2 = 9Y^2 + Z^2$ は、Pell 方程式などを使って解けるか？ 二次不定方程式の一般論が気になるところ

解き方

(1) $9z^2 = x^6 + y^4$ を \mathbb{Z}_3 で考えると

$$0 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 \quad \text{in } \mathbb{Z}_3$$

となるけど、 $\bar{x} = 0$ or 1 なので、 $\bar{x} = \bar{y} = 0$ がわかる。
そこで、 $x = 3x_1, y = 3y_1$ において、元の式に代入すると

$$\begin{aligned} 9z^2 &= (3x_1)^6 + (3y_1)^4 \\ z^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \end{aligned}$$

右辺は、3 で割り切れるので、 z も 3 で割り切れる。そこで、 $z = 3z_1$ とおく。

$$\begin{aligned} (3z_1)^2 &= 3^4 x_1^6 + 3^2 y_1^4 \\ z_1^2 &= 9x_1^6 + y_1^4 \end{aligned} \tag{1}$$

変数の関係は $(x, y, z) = 3(x_1, y_1, z_1)$ となる。 $z_1^2 \geq 9 + 1 = 10$ で、 $z_1 \geq 4$ となる。

z_1 が最小となれば、 $N = (3z_1)^2$ も最小となる。

$z_1 = 4$ としてみると、式 (1) は

$$16 = 9x_1^6 + y_1^4$$

となるが、 $x_1 = 1$ となるしかなくて、 $y_1^4 = 7$ となるが、これは矛盾。

次に、 $z_1 = 5$ とすると

$$25 = 9x_1^6 + y_1^4$$

$x_1 = 1$ となるしかなくて、 $y_1^4 = 16$ となり、 $y_1 = 2$ となる。

したがって、 N が最小になるのは、 $(x, y, z) = 3(1, 2, 5) = (3, 6, 15)$ のときで

$$N = 9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 45^2 = 2025$$