

H30 東京大学 院試過去問

1 基礎問題

A1 (微分を用いた関数の解析)

$x > -1, x \neq 0$ として

$$f(x) = \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。

(1) 極限 $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を求めよ。

(2) (1) の α を用いて、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq 0), \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

で定義する。このとき、関数 $g(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。

(3) $g(x)$ を (2) で与えたものとするとき、以下が成り立つ実数 β, γ を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \{g(x) - (\alpha + \beta x + \gamma x^2)\} = 0.$$

必要な基礎知識、問題背景

A2 (行列の分解)

行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

とすると、3 次の実正方行列 T, D, U であって次の条件を満たすものを一組求めよ。

- (i) $A = TDU$ 。
- (ii) T は直交行列である。つまり TT^T が 3 次の単位行列となる。ここで、 T^T は T の転置を表す。
- (iii) D は対角行列で、その対角成分はすべて正である。
- (iv) U は上三角行列で、その対角成分はすべて 1 である。

2 専門問題

B1 (有限体 \mathbb{F}_p 上の多項式環について)

行列 A の固有値を求めよ。ただし...