京都大学 2024 前期理系

各問題の内容と感想

問題番号	内容	感想	なかけん難易度
1	??	??	
2	不定方程式	変形だけでなく、最小値を求める意識も必要だった。	★★★☆☆
3	??	??	
4	??	??	
5	??	??	

あああ

ここは、脚注の文

1　剰余環における冪

$\mathbb{Z}_3$ の表

x	0	1	2
x^2	0	1	1

$\mathbb{Z}_5$ の表

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_7$ の表

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^3	0	1	1	6	1	6	6
x^4	0	1	2	4	4	2	1
x^5	0	1	4	5	2	3	6
x^6	0	1	1	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_4$ の表

x	0	1	2	3
x^2	0	1	0	1
x^3	0	1	0	3
x^4	0	1	0	1

$\mathbb{Z}_6$ の表

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	3	4	1
x^3	0	1	2	3	4	5
x^4	0	1	4	3	4	1
x^5	0	1	2	3	4	5

問 2

正整数 x, y, z に対して、$N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と定める。
N の最小値を求めよう。

考え方・疑問点

● 剰余を使って、条件を絞り込むしかなさそう。
● 全ての整数解を求めることは難しそう。Siegel の定理 (整数解) や Mordell の定理 (有理点) から、整数解は有限個しかないとわかるのか？
● 途中で出てくる式 $X^2 = 9Y^2 + Z^2$ は、Pell 方程式などを使って解けるか？ 二次不定方程式の一般論が気になるところ

解き方

(1) $9z^2 = x^6 + y^4$ を $\mathbb{Z}_3$ で考えると

$$0 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 \qquad \text{in} \ \ \mathbb{Z}_3$$

となるけど、$\overline{x} = 0$ or 1 なので、$\overline{x} = \overline{y} = 0$ がわかる。
そこで、$x = 3x_1, y = 3y_1$ とおいて、元の式に代入すると

$$\begin{aligned} 9z^2 &= (3x_1)^6 + (3y_1)^4 \\ z^2 &= 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4 \end{aligned}$$

右辺は、3 で割り切れるので、z も 3 で割り切れる。そこで、$z = 3z_1$ とおく。

$$\begin{aligned} (3z_1)^2 &= 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4 \\ {z_1}^2 &= 9{x_1}^6 + {y_1}^4 \qquad (1) \end{aligned}$$

変数の関係は $(x, y, z) = 3(x_1, y_1, z_1)$ となる。${z_1}^2 \geq 9 + 1 = 10$ で、$z_1 \geq 4$ となる。
z_1 が最小となれば、$N = (3z_1)^2$ も最小となる。
$z_1 = 4$ としてみると、式 (**??**) は

$$16 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$$

となるが、$x_1 = 1$ となるしかなくて、${y_1}^4 = 7$ となるが、これは矛盾。
次に、$z_1 = 5$ とすると

$$25 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$$

$x_1 = 1$ となるしかなくて、${y_1}^4 = 16$ となり、$y_1 = 2$ となる。
したがって、N が最小になるのは、$(x, y, z) = 3(1, 2, 5) = (3, 6, 15)$ のときで

$$N = 9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 45^2 = 2025$$