Lie 群の概説

あなたの名前

February 8, 2025

はじめに

Lie 群は、微分幾何学と群論が結びついた重要な概念であり、特に物理学や解析学において広く応用される。本稿では、Lie 群の定義、基本的な性質、具体例、コンパクト Lie 群の分類、および表現論との関係について概説する。

1 Lie 群の定義

定義 1 (Lie 群)**.** n 次元の ***Lie* 群** G とは、次の条件を満たす集合である：

- G は群の構造を持つ。
- G は n 次元の滑らかな多様体の構造を持つ。
- 群演算（積 $\mu : G \times G \to G$ と逆元 $\iota : G \to G, g \mapsto g^{-1}$）は C^∞ 級である。

2 基本的な性質

2.1 Lie 代数

Lie 群 G の単位元 e における接空間 $\mathfrak{g} = T_eG$ は、**Lie 代数**と呼ばれる。Lie 代数には次の性質がある：

- $\mathfrak{g}$ は G の局所的な構造を決定する。
- $\mathfrak{g}$ には自然な **Lie 括弧**（交換子ブラケット）$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が定義される。

2.2 指数写像

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から Lie 群 G への写像

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

は、Lie 群の局所的な構造を解析するのに有用である。

3 具体例

3.1 一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$

n 次正則行列全体の集合

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

は Lie 群であり、Lie 代数は n 次正方行列全体の集合 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ である。

3.2 特殊直交群 $SO(n)$

$$SO(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^T A = I, \det A = 1\}$$

は、回転群として知られ、Lie 代数は

$$\mathfrak{so}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$$

である。

4　コンパクト Lie 群の分類

コンパクト Lie 群は、次の 3 つのタイプに分類される：

- **トーラス群** $T^n = (S^1)^n$：n 次元の円周群
- **単純 Lie 群**：中心を除いて簡約できない群（例：$SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$）
- **有限被覆群**：単純 Lie 群の被覆群（例：$Spin(n)$）

コンパクト Lie 群の分類は、**Dynkin 図**を用いて記述される。特に、単純 Lie 群は $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ の 9 種類の系列に分類される。

5　Lie 群の表現論

Lie 群の表現論は、群の作用を線形変換として解析する理論であり、次の基本概念を含む。

5.1　既約表現

定義 2 (既約表現). *Lie* 群 G の**表現**とは、G からあるベクトル空間 V への群準同型 $\rho : G \to GL(V)$ である。特に、V の非自明な部分空間がすべて G の作用で不変であるならば、ρ は**既約表現**と呼ばれる。

5.2　指標

指標 $\chi(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ は、表現の情報を圧縮した関数であり、表現の分類や分解に用いられる。

5.3　重みとルート系

Lie 群 G の表現は、対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の**重み**と**ルート系**によって特徴づけられる。例えば：

- $SU(2)$ の表現は、整数スピン j によって分類される。
- $SU(3)$ の表現は、Young 図形や重みラティスを用いて分類できる。

6　重要な定理

定理 1 (Lie の第三定理). 任意の有限次元 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ に対して、局所 *Lie* 群 G が存在し、$\mathfrak{g}$ が G の *Lie* 代数として実現される。

定理 2 (Weyl の指標公式). コンパクト *Lie* 群 G の既約表現の指標 χ_λ は、次のように与えられる：

$$\chi_\lambda = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}$$

ここで、W はワイル群、ρ は半整数和、Δ^+ は正のルートの集合である。

7　まとめ

本稿では、Lie 群の定義から基本的な例、コンパクト Lie 群の分類、表現論との関係を概観した。特に、表現論において重みや指標が重要な役割を果たすことがわかった。