京都大学 2024 前期理系

各問題の内容と感想

問題番号	内容	感想	なかけん難易度
1	??	??	
2	不定方程式	変形だけでなく、最小値を求める意識も必要だった。	★★★☆☆
3	??	??	
4	??	??	
5	??	??	

ここは、脚注の文

1　剰余環における冪

$\mathbb{Z}_3$ の表

x	0	1	2
x^2	0	1	1

$\mathbb{Z}_5$ の表

x	0	1	2	3	4
x^2	0	1	4	4	1
x^3	0	1	3	2	4
x^4	0	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_7$ の表

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
x^3	0	1	1	6	1	6	6
x^4	0	1	2	4	4	2	1
x^5	0	1	4	5	2	3	6
x^6	0	1	1	1	1	1	1

$\mathbb{Z}_4$ の表

x	0	1	2	3
x^2	0	1	0	1
x^3	0	1	0	3
x^4	0	1	0	1

$\mathbb{Z}_6$ の表

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	3	4	1
x^3	0	1	2	3	4	5
x^4	0	1	4	3	4	1
x^5	0	1	2	3	4	5

問 2

正整数 x, y, z に対して、$N = 9z^2 = x^6 + y^4$ と定める。
N の最小値を求めよう。

考え方・疑問点

● 剰余を使って、条件を絞り込むしかなさそう。
● 全ての整数解を求めることは難しそう。Siegel の定理 (整数解) や Mordell の定理 (有理点) から、整数解は有限個しかないとわかるのか？
● 途中で出てくる式 $X^2 = 9Y^2 + Z^2$ は、Pell 方程式などを使って解けるか？ 二次不定方程式の一般論が気になるところ

解き方

(1) $9z^2 = x^6 + y^4$ を $\mathbb{Z}_3$ で考えると

$$0 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 \qquad \text{in} \ \ \mathbb{Z}_3$$

となるけど、$\overline{x} = 0$ or 1 なので、$\overline{x} = \overline{y} = 0$ がわかる。
そこで、$x = 3x_1, y = 3y_1$ とおいて、元の式に代入すると

$$\begin{aligned} 9z^2 &= (3x_1)^6 + (3y_1)^4 \\ z^2 &= 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4 \end{aligned}$$

右辺は、3 で割り切れるので、z も 3 で割り切れる。そこで、$z = 3z_1$ とおく。

$$\begin{aligned} (3z_1)^2 &= 3^4{x_1}^6 + 3^2{y_1}^4 \\ {z_1}^2 &= 9{x_1}^6 + {y_1}^4 \end{aligned} \tag{1}$$

変数の関係は $(x, y, z) = 3(x_1, y_1, z_1)$ となる。${z_1}^2 \geq 9 + 1 = 10$ で、$z_1 \geq 4$ となる。
z_1 が最小となれば、$N = (3z_1)^2$ も最小となる。
$z_1 = 4$ としてみると、式 (1) は

$$16 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$$

となるが、$x_1 = 1$ となるしかなくて、${y_1}^4 = 7$ となるが、これは矛盾。
次に、$z_1 = 5$ とすると

$$25 = 9{x_1}^6 + {y_1}^4$$

$x_1 = 1$ となるしかなくて、${y_1}^4 = 16$ となり、$y_1 = 2$ となる。
したがって、N が最小になるのは、$(x, y, z) = 3(1, 2, 5) = (3, 6, 15)$ のときで

$$N = 9z^2 = 9 \cdot 15^2 = 45^2 = 2025$$

未分類、どこかで発見した問題

駿台の整数完全攻略の見本画像より

10 進法の数 $\dfrac{12}{13}$ を 3 進数で表したとき、小数第 100 位の数を求めたい

解き方

3 進数で表すと、$\dfrac{12}{13} = (0.\dot{2}\dot{2}\dot{0}220220\cdots)_{(3)}$ となるため、小数は周期的に変化する。
小数第 $3k$ 位 $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ は 0 となっているので、小数点第 99 位の数は 0。そして、小数点第 100 位は、2 となる。

東大実践模試？ の動画

(1) n が偶数であって、$n!$ は n^2 の倍数となるものを求めると、$n \geq 6$。
(1)' n が奇数ならば、$n!$ は $(n-1)^2$ の倍数となる。
(2) $(n+1)^k = n! + 1$ を満たす (n, k) の組をすべて求めたい。

解き方

(2) $n! < n! + 1 < (n+1)!$ であるから、仮定の方程式より $n! < (n+1)^k < (n+1)!$ となる。
ここで、n と k の大小で場合分けして考える。
$k \geq n$ だと、$(n+1)^k > (n+1)!$ となり矛盾してしまう。よって、$k < n$ は分かる。
$n! = (n+1)^k - 1 \equiv nk \mod n^2$ だけども、n が 6 以上だと $n! \equiv 0 \mod n^2$ であるから、$n < 6$ でないといけない。

n	1	2	3	4	5
$n! + 1$	2	3	7	$25 = 5^2$	121
k	1	1	$-$	2	$-$

$(n, k) = (1, 1), (2, 1), (4, 2)$ が答えになる。

東大過去問？ の動画の改良

(1) 自然数 a, b, c で、任意の 2 つの和は残りの一つで割り切れるものをすべて求めたい。
(2) 自然数 $a_1, \cdots, a_n$ で、任意の $n-1$ 個の和が、残りの一つで割り切れるものを全て求めたい。

解き方

(SyberMath) Factorial

(1) $2^a + 2^b = c!$

(2) $(2n)! > n^n$

(3) $n! = n^3 - n$

(4) $x! + y! + z! = w!$

(5) $abc = a! + b! + c!$

(6) $n^2 - 19n - n! = 0$

(7) $(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$

(8) $x! + y! = z!\ ,\ x + y = z$

(8) $a! + b! = c!$

(9) $n! = n^2 + 11n + 40$

(10) $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{8}$

(11) $a! + b! + c! = 2^n$

(12) $24 \cdot n! = k!$

(13) $m! + 12 = n^2$

(14) $\dfrac{1}{6!} - \dfrac{1}{7!} = \dfrac{x}{8!}$

(15) $x! = 6!7!$

(16) $n! = 2^n$

(17) $m! = 120n!$

(18) $n! + (n-2)! = n^3 + 1$

(19) $x! = x^3 - x$

(20) $x^2 - y! = 2001$

(21) $\dfrac{1!2! \cdots 100!}{m!} = k^2$

(22) $10! = 2^a 3^b 5^c 7^d$

(23) $n! = n^3 + n^2 - 30$

(24) $n! = n^3 + n - 10$

(25) $n! = 6!7!$

(26) $x! + 1 = y^2$

(27) $(n-1)! + 1 = n^2$

(28) $n! + 8 = 2^k$

(SyberMath) Factorial and series

次の級数の和を求めたい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k!}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k+1)!}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

数の大小関係の評価

(1) $2^{100!}$ VS $2^{100}!$ [えびまラボ @evimalab]
(2) 99^{100} VS 100^{99} [`@yukkuri_suugaku/shorts`]

(2) log を取って、対称性から関数に落とし込む。

$$(A)=\frac{\log 99^{100}}{\log 100^{99}}=\frac{100\log 99}{99\log 100}=\frac{99^{-1}\log 99}{100^{-1}\log 100}$$

そこで、$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を考えると、これは $x\geq 1$ で単調減少なので、$99^{-1}\log 99>100^{-1}\log 100$ となり、$(A)>1$ となる。
つまり、$\log 99^{100}>\log 100^{99}$ がわかる。これより、$99^{100}>100^{99}$
指数が大きい方が、でかくなるか！ という直感と一致する。
また、$\log x$ と x^n の関係を整理しておくと、後で使えそう。
例えば、$\log x$ の $x=1$ での接線は $y=x-1$ とか、$\log x-x<0$ if $x\geq 1$ などなど。