応用数理解析

ID: 1116191012　氏名：東田悠希

演習問題3

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{2k}{m}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) = \frac{f_0}{m}\sin pt \\ \ddot{x}_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{2k}{m}x_2(t) = 0 \end{cases}$$

ここで $m=5, k=10, f_0=5, p=1$ であるとする

初期条件 $x_1(0)=0, x_2(0)=0, \dot{x}_1(0)=0, \dot{x}_2(0)=0$

連立微分方程式を行列・ベクトルにより表記すると微分方程式は

$\ddot{x}(t) = Mx(t) + u(t)$　と書くことができる。

ただし $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{bmatrix} \frac{f_0}{m}\sin pt \\ 0 \end{bmatrix}$

である。

係数行列 M の固有値は特性方程式より $\lambda = -\frac{k}{m}, -\frac{3k}{m}$ である。

$\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ に対する固有ベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ と $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ に対する固有ベクトル $v_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

から正則行列 $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ を用いて変数変換 $x(t) = Tz(t)$ を

行うと $\ddot{z}(t) = T^{-1}MTz(t) + T^{-1}u(t)$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \frac{k}{m}z_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_0}{m}\sin pt \\ \ddot{z}_2(t) + \frac{3k}{m}z_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_0}{m}\sin pt \end{cases}$$

このとき $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$, $r = \frac{f_0}{m}$ とおくと解は

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{r}{\sqrt{2}(\omega_1^2 - p^2)}\sin pt \\ z_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{r}{\sqrt{2}(\omega_2^2 - p^2)}\sin pt \end{cases}$$

が得られる。ただし、A_i, ϕ_i $(i=1,2)$ は任意定数である。

変数を戻すと

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2 - p^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - p^2}\right)\sin pt \\ x_2(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2 - p^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - p^2}\right)\sin pt \end{cases}$$

を得る。