No.

Date

応用数理解析

ID: 1116191012　氏名: 東田悠希

演習問題2

$x_i(t)$ $(i=1,2,\ldots)$ は1次独立かどうか.

(3) $x_1(t)=\cos\omega t$, $x_2(t)=\sin\omega t$, $\omega\neq0$ は定数

ロンスキアンは

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} & \frac{dx_2(t)}{dt}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\end{vmatrix}$$

$$=\omega\cos^2\omega t-(-\omega\sin^2\omega t)=\omega\neq0$$

よって $x_1(t)$, $x_2(t)$ は一次独立である。

(4) $x_1(t)=e^t$, $x_2(t)=e^{-t}$, $x_3(t)=e^{it}$, $x_4(t)=e^{-it}$

ロンスキアンは

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} & \frac{dx_2(t)}{dt} & \frac{dx_3(t)}{dt} & \frac{dx_4(t)}{dt} \\ \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} & \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} & \frac{d^2x_3(t)}{dt^2} & \frac{d^2x_4(t)}{dt^2} \\ \frac{d^3x_1(t)}{dt^3} & \frac{d^3x_2(t)}{dt^3} & \frac{d^3x_3(t)}{dt^3} & \frac{d^3x_4(t)}{dt^3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & e^{it} & e^{-it} \\ e^t & -e^{-t} & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^t & e^{-t} & -e^{it} & -e^{-it} \\ e^t & -e^{-t} & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$=e^t\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -e^{-t} & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^{-t} & -e^{it} & -e^{-it} \\ -e^{-t} & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}+e^{-t}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^t & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^t & -e^{it} & -e^{-it} \\ e^t & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$+e^{it}\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & -ie^{-it} \\ e^t & e^{-t} & -e^{-it} \\ e^t & -e^{-t} & ie^{-it}\end{vmatrix}+e^{-it}\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & ie^{it} \\ e^t & e^{-t} & -e^{it} \\ e^t & -e^{-t} & -ie^{it}\end{vmatrix}$$

$$=e^t\times\left\{(-e^{-t})\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -e^{it} & -e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}+(ie^{it})\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{-it} \\ -e^{-t} & ie^{-it}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(-ie^{-it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{it} \\ -e^{-t} & -ie^{it}\end{vmatrix}\right\}-e^{-t}\left\{e^t\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e^{it} & -e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+ie^{it}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^t & -e^{-it} \\ e^t & ie^{-it}\end{vmatrix}+(-ie^{-it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^t & -e^{it} \\ e^t & -ie^{it}\end{vmatrix}\right\}$$