応用数理解析

No.

Date

ID：1116191012　氏名：東田 悠希

演習問題3

$\dot{x}+2x=1+te^{-t}$　, 初期条件 $x(0)=-1$

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$ として微分方程式の両辺をラプラス変換すると、

$$sX(s)-x(0)+2X(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

初期条件 $x(0)=-1$ より、X について整理すると

$$(s+2)X(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}-1$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s+2)}+\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}-\frac{1}{(s+2)}$$

$s=0,-2$ が1位の極，$s=-1$ が2位の極であるので

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]$$

$$=\mathrm{Res}\left[\frac{1}{s(s+2)}e^{st},0\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{s(s+2)}e^{st},-2\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}e^{st},-1\right]+\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}e^{st},-2\right]$$

$$-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{s+2}e^{st},-2\right]$$

$$=\lim_{s\to0}(s-0)\frac{1}{s(s+2)}e^{st}+\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{1}{s(s+2)}e^{st}+\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}e^{st}\right\}$$

$$+\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}e^{st}-\lim_{s\to-2}(s+2)\frac{1}{(s+2)}e^{st}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}+(t-1)e^{-t}+e^{-2t}-e^{-2t}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}+(t-1)e^{-t}$$