調和振動

(1) 自由振動

おもりの質量m，バネ定数kである一自由度のバネ振動系において，時刻tにおけるおもりの基準位置からの変位を$x(t)$とすると運動方程式は$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$である．$\omega^2=\dfrac{k}{m}$とおくと

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t)=0$$

である．初期条件が，$x(0)=x_0$，$\dot{x}(0)=v_0$に対する解を求める．

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$として微分方程式をtについてラプラス変換すると

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+\omega^2X(s)=0$$

初期条件を代入して整理すると

$$X(s) = \frac{x_0s+v_0}{s^2+\omega^2}$$

sについてラプラス逆変換する．$s = \pm\mathtt{i}\omega$が1位の極であるので，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\
&= \mathtt{Res}\left(X(s)e^{st}, \mathtt{i}\omega\right) + \mathtt{Res}\left(X(s)e^{st}, -\mathtt{i}\omega\right) \\
&= \lim_{s\to\mathtt{i}\omega}(s-\mathtt{i}\omega)\frac{x_0 s + v_0}{s^2+\omega^2}e^{st} + \lim_{s\to-\mathtt{i}\omega}(s+\mathtt{i}\omega)\frac{x_0 s + v_0}{s^2+\omega^2}e^{st} \\
&= x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t
\end{aligned}
$$

(2) 強制振動

おもりの質量m，バネ定数kである一自由度のバネ振動系において，基準位置に静止した状態からおもりに$F_0 \sin pt$の周期的な外力が働く場合の運動方程式は$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \sin pt$である．$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$\gamma = \dfrac{F_0}{m}$とおいて

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \gamma \sin pt$$

である．初期条件が，$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$に対する解を求める．

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$として微分方程式をtについてラプラス変換すると

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \omega^2 X(s) \ = \ \frac{\gamma p}{s^2 + p^2}$$

初期条件を代入して整理すると

$$X(s) = \frac{\gamma p}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + p^2)}$$

sについてラプラス逆変換する．$s=\pm\mathtt{i}\omega$，$\pm\mathtt{i}p$が1位の極であるので，

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\
&= \mathtt{Res}\left(X(s)e^{st},\mathtt{i}\omega\right)+\mathtt{Res}\left(X(s)e^{st},-\mathtt{i}\omega\right) \\
&\qquad\qquad\qquad +\mathtt{Res}\left(X(s)e^{st},\mathtt{i}p\right)+\mathtt{Res}\left(X(s)e^{st},-\mathtt{i}p\right) \\
&= \lim_{s\to\mathtt{i}\omega}(s-\mathtt{i}\omega)\frac{\gamma p}{(s^2+\omega^2)(s^2+p^2)}e^{st}+\lim_{s\to-\mathtt{i}\omega}(s+\mathtt{i}\omega)\frac{\gamma p}{(s^2+\omega^2)(s^2+p^2)}e^{st} \\
&\quad +\lim_{s\to\mathtt{i}p}(s-\mathtt{i}p)\frac{\gamma p}{(s^2+\omega^2)(s^2+p^2)}e^{st}+\lim_{s\to-\mathtt{i}p}(s+\mathtt{i}p)\frac{\gamma p}{(s^2+\omega^2)(s^2+p^2)}e^{st} \\
&= \frac{\gamma}{\omega^2-p^2}\left(\sin pt-\frac{p}{\omega}\sin\omega t\right)
\end{aligned}$$

(3) 減衰強制振動

減衰係数cを持つ減衰力が作用する一自由度のバネ振動系において，おもりの基準位置に静止した状態からおもりに$F_0\delta(t)$のインパルス状の力が働く場合の運動方程式は$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_0\delta(t)$である．$\omega^2=\dfrac{k}{m}$，$2\beta=\dfrac{c}{m}$，$\gamma=\dfrac{F_0}{m}$とおいて

$$\ddot{x}(t)+2\beta\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=\gamma\delta(t)$$

である．初期条件が，$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$に対する解を求める．ただし，$\beta^2<\omega^2$とする．

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]$として微分方程式をtについてラプラス変換すると

$$s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)+2\beta\{sX(s)-x(0)\}+\omega^2X(s)=\gamma$$

初期条件を代入して整理すると

$$X(s)=\frac{\gamma}{s^2+2\beta s+\omega^2}$$

sについてラプラス逆変換する．$s = -\beta \pm \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2}$が1位の極であるので，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \\
&= \mathtt{Res}\left(X(s)e^{st}, -\beta + \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\right) + \mathtt{Res}\left(X(s)e^{st}, -\beta - \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\right) \\
&= \lim_{s \to -\beta + \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \{s - (-\beta + \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2})\} \frac{\gamma}{s^2 + 2\beta s + \omega^2} e^{st} \\
&\quad + \lim_{s \to -\beta - \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} \{s - (-\beta - \mathtt{i}\sqrt{\omega^2 - \beta^2})\} \frac{\gamma}{s^2 + 2\beta s + \omega^2} e^{st} \\
&= \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} e^{-\beta t} \sin \sqrt{\omega^2 - \beta^2} t
\end{aligned}
$$

波動方程式

有限区間 $x \in [0, L]$ において波動方程式 $\dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$ について，境界条件

$$\begin{cases} \psi(0,t) = u(t) \\ \psi(L,t) = w(t) \end{cases}$$

初期条件

$$\begin{cases} \psi(x,0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

に対する解をラプラス変換により求める.

$\Psi(x,s) = \mathcal{L}[\psi(x,t)]$ として波動方程式を t についてラプラス変換すると

$$s^2\Psi(x,s) - s\psi(x,0) - \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = v^2 \frac{d^2\Psi(x,s)}{dx^2}$$

初期条件を代入して整理すると

$$\frac{d^2\Psi(x,s)}{dx^2} - \left(\frac{s}{v}\right)^2 \Psi(x,s) = 0$$

$\Psi(x,s) = e^{\lambda x}$ とすると，特性方程式の解は $\lambda = \pm\dfrac{s}{v}$ であるから，解は

$$\Psi(x,s) \;=\; C_1 e^{\frac{s}{v}x} + C_2 e^{-\frac{s}{v}x}$$

ただし，C_1，C_2 は任意定数である．

境界条件より

$$\begin{cases} \Psi(0,s) = C_1 + C_2 = U(s) \\ \Psi(L,s) = C_1 e^{\frac{s}{v}L} + C_2 e^{-\frac{s}{v}L} = W(s) \end{cases}$$

これを解くと，$C_1 \;=\; \dfrac{-e^{-2\frac{s}{v}L}U(s) + e^{-\frac{s}{v}L}W(s)}{1 - e^{-2\frac{s}{v}L}}$，$C_2 \;=\; \dfrac{U(s) - e^{-\frac{s}{v}L}W(s)}{1 - e^{-2\frac{s}{v}L}}$ である

から，

$$
\begin{aligned}
\Psi(x,s) &= \frac{-e^{-2\frac{s}{v}L}U(s)+e^{-\frac{s}{v}L}W(s)}{1-e^{-2\frac{s}{v}L}}e^{\frac{s}{v}x}+\frac{U(s)-e^{-\frac{s}{v}L}W(s)}{1-e^{-2\frac{s}{v}L}}e^{-\frac{s}{v}x} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\frac{s}{v}Lk}\left\{(e^{-\frac{s}{v}x}-e^{\frac{s}{v}(x-2L)})U(s)+(e^{\frac{s}{v}(x-L)}-e^{-\frac{s}{v}(x+L)})W(s)\right\} \\
&= U(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{v}(x+2Lk)s}-U(s)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{v}(-x+2Lk)s} \\
&\qquad +W(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{v}(-x+L+2Lk)s}-W(s)\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{v}(x-L+2Lk)s}
\end{aligned}
$$

ラプラス逆変換すると

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}[\Psi(x,s)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[U(s)e^{-\frac{1}{v}(x+2Lk)s}] - \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[U(s)e^{-\frac{1}{v}(-x+2Lk)s}] \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[W(s)e^{-\frac{1}{v}(-x+L+2Lk)s}] - \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}[W(s)e^{-\frac{1}{v}(x-L+2Lk)s}] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} u(t-\frac{1}{v}(x+2Lk))\theta(t-\frac{1}{v}(x+2Lk)) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} u(t-\frac{1}{v}(-x+2Lk))\theta(t-\frac{1}{v}(-x+2Lk)) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} w(t-\frac{1}{v}(-x+L+2Lk))\theta(t-\frac{1}{v}(-x+L+2Lk)) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} w(t-\frac{1}{v}(x-L+2Lk))\theta(t-\frac{1}{v}(x-L+2Lk))
\end{aligned}
$$

ここで，$\theta(t)$ は単位ステップ関数である．

演習問題１：次の微分方程式の解をラプラス変換，ラプラス逆変換を用いて求めよ．

1) $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=6$，$y(0)=0$，$\dot{y}(0)=4$

2) $\ddot{x}+4x=\sin t$，$x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$

3) $\ddot{y}+2\dot{y}+8y=1$，$y(0)=1$，$\dot{y}(0)=0$

演習問題２：有限区間 $x\in[0,L]$ において，波動方程式 $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$（$v$ は定数）の初期条件が $\psi(x,0)=0$，$\left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，であり，境界条件が，$\psi(0,t)=0$，$\psi(L,t)=e^{-t}\sin pt$（$p$ は定数）で与えられている．$\psi(x,t)$ の t に関するラプラス変換を $\Psi(x,s)$ とするとき，波動方程式をラプラス変換し，$\Psi(x,s)$ について解きなさい．