

応用 数理角解析

ID: 1116(9/10/12)

氏名: 東田 悠希

演習問題2

周期が 2π である次の関数 $f(t)$ の Fourier 級数展開と複素形式の Fourier 級数展開をそれぞれ求めよ。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

Fourier 級数における Fourier 係数を求める

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dt = \frac{1}{2\pi} [t]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin kt \right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos kt \right]_0^{\pi} = \frac{1}{k\pi} (-(-1)^{k+1} + 1)$$

よって Fourier 級数展開は

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos kt + b_k \sin kt \} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k\pi} \{ (-1)^{k+1} + 1 \} \right] \sin kt \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi} \sin t + \frac{2}{3\pi} \sin 3t + \frac{2}{5\pi} \sin 5t + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right) \quad || \end{aligned}$$

また複素形式の Fourier 級数展開における Fourier 係数を求める

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{ik} e^{-ikt} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi ik} (e^{-ik\pi} - 1) = \frac{1}{2\pi ik} (e^{ik\pi} - 1) \end{aligned}$$

よって複素形式の Fourier 級数展開は

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{i(e^{-ik\pi} - 1)}{2\pi k} e^{ikt} \quad ||$$