行列式

正方行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式を $|\boldsymbol{A}|$ または $\mathtt{det}\boldsymbol{A}$ と表す.
n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ について，行展開または列展開で行列式を求めることができき

$$i\text{ 行で展開：}|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\left|\bar{\boldsymbol{A}}_{ij}\right| \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$j\text{ 列で展開：}|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\left|\bar{\boldsymbol{A}}_{ij}\right| \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{A}}_{ij}$ は $\boldsymbol{A}$ の第 i 行，第 j 列を除いて作った $(n-1)$ 次の小行列である.

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

例：$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ の行列式を求めよ.

第1行で展開すると $|\boldsymbol{A}| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times |\bar{\boldsymbol{A}}_{11}| + a_{12} \times (-1)^{1+2} \times |\bar{\boldsymbol{A}}_{12}|$ より

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (-1)^{1+1} \times (-2) + (-1) \times (-1)^{1+2} \times 3 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

演習問題 1 ：次の行列の行列式を求めよ.

(1) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

固有値と固有ベクトル

$\boldsymbol{A}$ を n 次の正方行列，$\boldsymbol{x}$ を n 次の列ベクトル，λ をスカラーとするとき，次の方程式は明らかに自明な解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を持つ．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$$

この方程式が $\boldsymbol{0}$ 以外の解 $\boldsymbol{x}$ を持つような λ の値を行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値といい，その固有値 λ に対応する解 $\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルという．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列であり，$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 以外の解を持つためには

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$$

を満たさねばならない．この方程式を $\boldsymbol{A}$ の固有方程式という．

定理：n 次の正方行列 $\boldsymbol{A}$ の相異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立である.

性質

固有値λに対応する固有ベクトルは，一意に定まらない．λに対応する固有ベクトルの1つを$\boldsymbol{x}$，スカラーをkとすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x}) &= k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\ &= k(\lambda\boldsymbol{x}) \\ &= \lambda(k\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

であるから，$k\boldsymbol{x}$も固有ベクトルとなる．また，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$が固有値λに属する2つの固有ベクトルならば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \\ &= \lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda\boldsymbol{x}_2 \\ &= \lambda(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

従って，$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$も$\lambda$に対応する固有ベクトルになる．
また，固有値は実数とは限らない．それに対応する固有ベクトルも実ベクトルとは限らない．

例：$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ．

固有方程式は

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって，固有値は$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 1$である．

$\lambda_1 = -1$のとき，対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$とおくと，固有方程式

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1$より

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x_{11} - x_{21} = 0 \\ 3x_{11} - x_{21} = 0 \end{cases}$$

よって，$x_{21} = 3x_{11}$ であり，これより，$\boldsymbol{x}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ （$c_1 \neq 0$，定数）.

$\lambda_2 = 1$ のとき，対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix}$ とおくと，固有方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$ より

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = 1 \times \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{12} - x_{22} = 0 \\ 3x_{12} - 3x_{22} = 0 \end{cases}$$

よって，$x_{22} = x_{12}$ であり，これより，$\boldsymbol{x}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ （$c_2 \neq 0$，定数）.

演習問題２：演習問題 1 の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

行列の対角化

正方行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ に対して，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ を満たす正則行列 $\boldsymbol{T}$ が存在するとき，行列 $\boldsymbol{B}$ は行列 $\boldsymbol{A}$ に相似であるという．

行列 $\boldsymbol{A}$ と対角行列が相似であるとき，行列 $\boldsymbol{A}$ は対角化可能であるという．

$\boldsymbol{A}$ の相異なる n 個の固有値が λ_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）であり，λ_i に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{x}_i$（$i = 1, 2, \cdots, n$）であるとき，固有ベクトルを並べて正則行列 $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ より

$$\begin{aligned}
① &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 & \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{T}$ は正則であるから逆行列が存在するので，次式が得られる．

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理：n次の正方行列$\boldsymbol{A}$が対角化可能であるための必要十分条件は，n個の一次独立な固有ベクトルが存在することである．

例：$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$が対角化可能な場合は対角化せよ．

例に示した通り，2次の行列に対して2つの相異なる固有値と固有ベクトルが存在するので対角化可能である．固有ベクトルで$c_1 = c_2 = 1$と選び，$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$とする．このとき

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

演習問題３：演習問題1の行列が対角化可能な場合は対角化せよ．