微分方程式

未知関数とその導関数を含んだ方程式を微分方程式という.

例

常微分方程式：独立変数の数が1つ

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \quad \cdots ①$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a(t)\frac{dx(t)}{dt} + b(t)x(t) = u(t) \quad \cdots ②$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\sin x(t) = 0 \quad \cdots ③$$

$$\frac{d^4x(t)}{dt^4} = -x(t) \quad \cdots ④$$

偏微分方程式：独立変数の数が2つ以上

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \cdots ⑤$$

微分方程式に含まれる導関数の最高階のものがn階の導関数であるとき，それをn階微分方程式という.

例：①は1階，②，③は2階，④は4階の微分方程式.

tを変数とする関数$x(t)$に対し，その微分方程式は，一般にある$(n+2)$変数関数Fを用いて

$$F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0 \tag{1}$$

と表される．これを満たす未知関数$x(t)$を微分方程式の解といい，この解を求めることを微分方程式を解くという.

式(1)のn階微分方程式について，$\dfrac{dF}{dx^{(n)}} \neq 0$ならば陰関数の定理により，ある$(n+1)$変数関数$f$を用いて

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) \tag{2}$$

の形に一意に表すことができ，これを正規型という．
あるn階微分方程式が

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}(t) = u(t) \tag{3}$$

という形をしているとき，線形であるという．式(3)の形をしていないものは非線形の方程式といい，解くことは困難な場合が殆どである．

例：①，②，④は線形，③は非線形の微分方程式．

式(3)の微分方程式において，$u(t) = 0$のとき同次形，$u(t) \neq 0$のとき非同次形という．

同次形の方程式において，$x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_m(t)$ がその解であるとき，その線形結合 $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_mx_m(t)$（ただし，$c_1$，$c_2$，$\cdots$，$c_m$ は任意の定数）もまた方程式の解である．

重ね合わせの原理により，線形で同次形の方程式は比較的簡単に解けるものもあり，非同次形も同次形を応用して解くことが出来る．

演習問題１：同次形の n 階線形微分方程式 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}(t)=0$ の解が $x_1(t)$，$x_2(t)$ であるとき，$c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ も解であることを示せ．ただし，c_1，c_2 は任意定数とする．

n階の微分方程式の解には，n個の任意定数が含まれる．

任意定数を含んだ解を一般解，一般解における任意定数を特別な値にして得られる解を特殊解という．

例：$x(t) = Ce^t$（Cは任意定数）は，微分方程式$\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$を満たす．
1つの任意定数Cを含むので，$\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$の一般解である．

$x(t) = e^t$は，微分方程式$\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$を満たす．
$x(t) = e^t$は，一般解で$C = 1$としたものであり，$\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$の特殊解である．

演習問題２：C，D は任意定数とする．

(1) $x(t) = Ce^t$ は，$\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0$ の解であることを確かめよ．

(2) $x(t) = Ce^{-at}$ は，$\dfrac{dx(t)}{dt} + ax(t) = 0$（$a$ は定数）の解であることを確かめよ．

(3) $x(t) = Ct - t\log t$ は，$t\dfrac{dx(t)}{dt} - x(t) + t = 0$ の解であることを確かめよ．

(4) $x(t) = C\cos t + D\sin t$ は，$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$ の解であることを確かめよ．

(5) $x(t) = Ce^{\mathrm{i}t} + De^{-\mathrm{i}t}$ は，$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$ の解であることを確かめよ．

直接積分形

1階の微分方程式で最も簡単なものであり

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)$$

という形をしている．

両辺を t について積分すると

$$x(t) = \int f(t)dt + C$$

ここで，C は任意定数である．

例：微分方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt} - 2t - 1 = 0$ の一般解を求めよ.

直接積分形の形に整理して

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t + 1$$

両辺を t で積分すると

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (2t+1)dt + C \\ &= t^2 + t + C \end{aligned}$$

ただし，C は任意定数.

以上より，一般解 $x(t) = t^2 + t + C$ を得る.

演習問題３：次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dx(t)}{dt} - \cos^2 t = 0$

(2) $\dfrac{dx(t)}{dt} + ae^{-at} = 0$（ただし，$a \neq 0$である定数）

(3) $\dfrac{dx(t)}{dt} - \dfrac{1}{t}\log t = 0$

式(1)のn階の微分方程式に，t_0，x_i $(i=0,1,\cdots,n-1)$ を定数として$x^{(i)}(t_0)=x_i$ というn個の条件が付随しているとき，これを初期条件という．初期条件を満たす微分方程式の解$x(t)$を求める問題を初期値問題という．

例：微分方程式$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}=0$について，初期条件$x(0)=x_0$，$\dfrac{dx(0)}{dt}=v_0$を満たす解を求めよ．ただし，x_0，v_0は定数である．

$v(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$とおく．

このとき，微分方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}\\ &= \frac{dv(t)}{dt}=0\end{aligned}$$

従って，1階の微分方程式に変換される．

$\dfrac{dv(t)}{dt} = 0$ は，直接積分形で $f(t) = 0$ であるので，両辺を積分して

$$v(t) = C_1$$

ここで，C_1 は任意定数.

よって，

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_1$$

を得る．これは直接積分形で $f(t) = C_1$ であるので，両辺を積分して

$$\begin{aligned} x(t) &= \int C_1 dt + C_2 \\ &= C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

ここで，C_2 は任意定数.

以上より，一般解 $x(t) = C_1 t + C_2$ を得る．

初期条件に代入して

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 \times 0 + C_2 \\ &= C_2 = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(0)}{dt} &= \left. \frac{d}{dt}\left(C_1 t + C_2\right) \right|_{t=0} \\ &= C_1 = v_0 \end{aligned}$$

よって，求める解は，$x(t) = v_0 t + x_0$ である．

演習問題４：微分方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - a = 0$（ただし，$a$ は定数）について，次の問に答えよ．

(1) 一般解を求めよ．

(2) 初期条件 $x(0) = x_0$，$\dfrac{dx(0)}{dt} = v_0$ を満たす解を求めよ．ただし，x_0，v_0 は定数である．