関数の近似

$t \in [\tau, \tau + T]$ で与えられた関数 $f(t)$ を同じ区間 $t \in [\tau, \tau + T]$ で定義された N 個の標準的な関数 $g_k(t)$（$k = 1, 2, \cdots, N$）の重み付き線形和で表す.

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{N} a_k g_k(t)$$

$\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ は荷重係数である.

係数 a_k は

$$J = \int_{\tau}^{\tau+T} \left\{ f(t) - \sum_{k=1}^{N} a_k g_k(t) \right\}^2 dt$$

が最小になるように選ぶものとする.

Jを最小にする係数a_kは

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0$$

より

$$\int_{\tau}^{\tau+T} f(t)g_k(t)dt - a_1\left\{\int_{\tau}^{\tau+T} g_1(t)g_k(t)dt\right\} - a_2\{\int_{\tau}^{\tau+T} g_2(t)g_k(t)dt\}$$
$$- \cdots - a_N\{\int_{\tau}^{\tau+T} g_N(t)g_k(t)dt\} = 0$$

ただし，$k = 1, 2, \cdots, N$である．

標準関数$g_k(t)$の組を

$$\int_{\tau}^{\tau+T} g_i(t)g_k(t)dt = \begin{cases} 1 \ \ (k=i) \\ 0 \ \ (k \neq i) \end{cases}$$

を満たすように選ぶものとすると，係数は

$$a_k = \int_{\tau}^{\tau+T} f(t)g_k(t)dt$$

により与えられる．

このような性質を持つ標準関数の組を正規直交系いう．

フーリエ級数展開

標準関数の集合として，次の関数列を考える．

$$\left\{ 1,\ \cos\frac{\pi}{P}t,\ \cos\frac{2\pi}{P}t,\ \cdots,\ \cos\frac{k\pi}{P}t,\ \cdots, \sin\frac{\pi}{P}t,\ \sin\frac{2\pi}{P}t,\ \cdots,\ \sin\frac{k\pi}{P}t,\ \cdots \right\}$$

ただし，$P = \dfrac{T}{2}$ とする．

この関数列の性質として

$$\int_{\tau}^{\tau+2P} \left(1 \times \cos\frac{k\pi}{P}t\right) dt = \begin{cases} 2P & (k=0) \\ 0 & (k=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \cdots \text{ⓘ}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+2P} \left(1 \times \sin\frac{k\pi}{P}t\right) dt = 0 \quad (k=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots \text{ⓘⓘ}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+2P} \cos\frac{k\pi}{P}t \sin\frac{l\pi}{P}t dt = 0 \quad (k,l=0,1,2,\cdots) \qquad \cdots \text{ⓘⓘⓘ}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+2P} \cos\frac{k\pi}{P}t\cos\frac{l\pi}{P}t dt = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ P & (k = l \neq 0) \\ 2P & (k = l = 0) \end{cases} \quad \cdots \text{(iv)}$$

$$\int_{\tau}^{\tau+2P} \sin\frac{k\pi}{P}t\sin\frac{l\pi}{P}t dt = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ P & (k = l \neq 0) \\ 0 & (k = l = 0) \end{cases} \quad \cdots \text{(v)}$$

関数列$\left\{\, 1,\ \cos\frac{\pi}{P}t,\ \cos\frac{2\pi}{P}t,\ \cdots,\ \cos\frac{k\pi}{P}t,\ \cdots, \sin\frac{\pi}{P}t,\ \sin\frac{2\pi}{P}t,\ \cdots,\ \sin\frac{k\pi}{P}t,\ \cdots\,\right\}$の重み付線形和で任意の関数$f(t)$を表すことをフーリエ級数展開といい，次式で定義する．

$$f(t) \ = \ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k\cos\frac{k\pi}{P}t + b_k\sin\frac{k\pi}{P}t\right\} \tag{1}$$

ここで，係数はフーリエ係数とよばれ，以下で与えられる．

$$a_0 = \frac{1}{2P}\int_{\tau}^{\tau+2P} f(t)dt \tag{2}$$

$$a_k = \frac{1}{P}\int_{\tau}^{\tau+2P} f(t)\cos\frac{k\pi}{P}tdt \tag{3}$$

$$b_k = \frac{1}{P}\int_{\tau}^{\tau+2P} f(t)\sin\frac{k\pi}{P}tdt \tag{4}$$

関数 $f(t)$ に対してフーリエ級数展開が存在するための条件

(1) $\displaystyle\int_{\tau}^{\tau+T} |f(t)|^2\,dt < \infty$

(2) $f(t)$ は区間 $t = \tau \sim \tau + T$ において不連続でもよいが，その不連続点の個数が有限である．その不連続点 t ではフーリエ級数はその不連続部分の中間の値 $\dfrac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$ に収束する．

例題 1

周期が 2π である関数 $f(t) = f(t + 2\pi)$ のフーリエ級数展開を求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

［解］

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$$

例題２

周期が2である関数 $f(t)=f(t+2)$ のフーリエ級数展開を求めよ．

$$f(t)=1-|t| \quad (-1 \leq t < 1)$$

［解］

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t+\frac{1}{9}\cos 3\pi t+\frac{1}{25}\cos 5\pi t+\cdots\right)$$

例題３

$f(t)$ が周期 $2l$ の奇関数 $f(-t)=-f(t)$ の場合のフーリエ級数展開を示せ.

［解］

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi}{l}t$$

例題４

$f(t)$ が周期 $2l$ の偶関数 $f(-t) = f(t)$ の場合のフーリエ級数展開を示せ.

［解］

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}t$$

$f(t)$ が奇関数 $f(-t) = -f(t)$ であるとき，得られるフーリエ級数展開も奇関数である正弦関数のみからなっている．このような展開をフーリエ正弦展開とよぶ．

$f(t)$ が偶関数 $f(-t) = f(t)$ であるとき，得られるフーリエ級数展開は直流項とで余弦関数のみからなっている．このような展開をフーリエ余弦展開とよぶ．

フーリエ級数展開の複素形式

オイラーの公式で$T = 2P$の周期関数$f(t)$のフーリエ級数展開を書き直すと

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{P} t + b_k \sin \frac{k\pi}{P} t \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathtt{i} \frac{k\pi}{P} t} \end{aligned} \tag{5}$$

このとき，フーリエ係数は

$$c_k = \frac{1}{2P} \int_{\tau}^{\tau+2P} f(t) e^{-\mathtt{i} \frac{k\pi}{P} t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{6}$$

であり，複素形式のフーリエ級数展開という．

例題５

周期が2πである関数$f(t) = f(t+2\pi)$の複素形式のフーリエ級数展開を求めよ．

$$f(t) = \begin{cases} -1 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

［解］

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\mathtt{i}k\pi} e^{\mathtt{i}kt}$$

演習問題１

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ, ⓘⓥ, ⓥ が成り立つことを確認せよ.

演習問題２

周期が2πである次の関数$f(t)$のフーリエ級数展開と複素形式のフーリエ級数展開をそれぞれ求めよ.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$

演習問題３

周期が2πである次の関数$f(t)$の複素フーリエ級数展開を求めよ.

$$f(t) = e^t \ (-\pi < t < \pi)$$