ID: 1116191012　氏名：東田悠希

問3

定数が負の場合、定数を $-\omega^2$ として

$$\begin{cases} \frac{d^2\varsigma(t)}{dt^2} = -\omega^2\varsigma(t) & \cdots ① \\ \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\omega^2\phi(x) & \cdots ② \end{cases}$$

①,②式の解は C_1, C_2, C_3, C_4 を任意定数として

$$\begin{cases} \varsigma(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \\ \phi(x) = C_3\cos\omega x + C_4\sin\omega x \end{cases}$$

よって解は

$$\psi(x,t) = (C_3\cos\omega x + C_4\sin\omega x)(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) \cdots ③$$

境界条件を③式に用いると

$$\begin{cases} C_3 = 0 \\ C_3\cos\omega + C_4\sin\omega = 0 \end{cases}$$

$C_4\sin\omega = 0$ より $\omega = n\pi\ (n=1,2,\cdots)$ である。

$\omega_n = n\pi$ に対応する解は、

$$\psi(x,t) = C_{4n}\sin n\pi x(C_{1n}\cos n\pi t + C_{2n}\sin n\pi t)$$
$$= \sin n\pi x(d_{1n}\cos n\pi t + d_{2n}\sin n\pi t)$$

ただし、$n=1,2,\cdots$ であり、$d_{1n} = C_{1n}C_{4n}$、$d_{2n} = C_{2n}C_{4n}$ とおいた。

以上より、与えられた境界条件を満たす波動方程式の解は、

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x(d_{1n}\cos n\pi t + d_{2n}\sin n\pi t) \cdots ④$$

初期条件の式に④を代入すると

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{1n}\sin n\pi x = p(x)$$

ここで両辺に $\sin m\pi x\ (m=1,2,\cdots)$ をかけ、$0 \leq x \leq 1$ で積分すると

$$(\text{左辺}) = \int_0^1 d_{1n}\sin n\pi x\sin m\pi x\,dx = \frac{d_{1n}}{2}\int_0^1\{\cos(n-m)\pi x - \cos(n+m)\pi x\}dx$$

よって $m \neq n$ のとき、

$(\text{左辺}) = 0$

$m = n$ のとき

$$(\text{左辺}) = \frac{d_{1n}}{2}\int_0^1\{1 - \cos 2n\pi x\}dx = \frac{d_{1n}}{2}$$

また $(\text{右辺}) = \int_0^1 p(x)\sin n\pi x\,dx = \frac{9a}{2n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}$

よって $d_{1n} = \frac{9a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}$

No. 問3.2

Date

ID：1116191012 氏名：東田悠希

同様に初期条件の式に代入し、

$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} d_{2n}\, n\pi \sin n\pi x = q(x)$

ここで両辺に $\sin m\pi x\ (m=1,2\cdots)$ をかけ、$0 \leq x \leq 1$ で積分すると

先程と同様にて $m=n$ のとき、

$(\text{左辺}) = \frac{d_{2n}\, n\pi}{2}$

$(\text{右辺}) = \int_0^1 q(x)\sin n\pi x\, dx = 0$

よって $d_{2n} = 0$

以上より初期条件を満たす波動方程式の解は、

$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \left(\frac{9a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\cdot\cos n\pi t$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \cdot \frac{9a}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{3}\cdot\cos n\pi t$ //