応用数理解析

No.

Date

ID：1116191012　東田悠希

演習問題1

(1) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}-2\dfrac{dx(t)}{dt}-3x(t)=0$

$x(t)=e^{\lambda t}$ とおくと

$\lambda^2e^{\lambda t}-2\lambda e^{\lambda t}-3e^{\lambda t}=0$

$(\lambda^2-2\lambda-3)e^{\lambda t}=0$

$(\lambda-3)(\lambda+1)e^{\lambda t}=0$ より $\lambda=3,-1$。$\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$ とおくと

このときロンスキアンは

$$\Delta t=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}=-4e^{2t}\neq 0$$

より一次独立な解であり、解の基本形を作る。

従って一般解は $\underline{x(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}}_{//}$ (c_1, c_2は任意定数)

(2) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+2\dfrac{dx(t)}{dt}+5x(t)=0$

(1)と同様にすると

$\lambda^2e^{\lambda t}+2\lambda e^{\lambda t}+5e^{\lambda t}=0$

$(\lambda^2+2\lambda+5)e^{\lambda t}=0$

$\{\lambda-(-1+2i)\}\{\lambda-(-1-2i)\}=0$ より $\lambda=-1\pm 2i$

$\lambda_1=-1+2i$, $\lambda_2=-1-2i$ とおくと、このときロンスキアンは

$$\Delta t=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}=-4ie^{-2t}\neq 0$$

より一次独立な解であり、解の基本形を作る。

従って一般解は

$$\begin{aligned} x(t)&=c_1e^{(-1+2i)t}+c_2e^{(-1-2i)t} \\ &=\bar{c}_1e^{-t}\cos 2t+\bar{c}_2e^{-t}\sin 2t \\ &=c_0e^{-t}\sin(2t+\phi)_{//} \end{aligned}$$

c_1, c_2：任意定数

$\bar{c}_1=c_1+c_2$, $\bar{c}_2=i(c_1-c_2)$, $c_0=\sqrt{\bar{c}_1^{\,2}+\bar{c}_2^{\,2}}$

$\tan\phi=\dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$ とおいた。

No.

Date

(3) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}$

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおき、次の式をとく

$\lambda^2 e^{\lambda t} - 3\lambda e^{\lambda t} + 2e^{\lambda t} = 0$

$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda t} = 0$, $(\lambda - 1)(\lambda - 2)e^{\lambda t} = 0$ より

$\lambda = 1, 2$ 。 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ とおくと

ロンスキアンは

$\Delta t = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} = e^{3t} \neq 0$

であるから一次独立な解であり、解の基本形を作る。

解は

$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$ // $(c_1, c_2$: 任意定数$)$

(4) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 1$

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおき、次の式をとく

$\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0$

$(\lambda^2 + 4)e^{\lambda t} = 0$

$(\lambda + 2i)(\lambda - 2i)e^{\lambda t} = 0$ より $\lambda = \pm 2i$ 。 $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$ とおくと

解の基本形は、 $x_1(t) = e^{2it}$, $x_2(t) = e^{-2it}$ である

従って解は、

$x(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}$

$= \bar{c}_1 \cos 2t + \bar{c}_2 \sin 2t$

$= A\sin(2t + \phi)$ //

c_1, c_2 : 任意定数

$\bar{c}_1 = c_1 + c_2$, $\bar{c}_2 = i(c_1 - c_2)$, $A = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}$

$\tan\phi = \frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$ とおいた。

No.

Date

(5) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+9x(t)=\sin 2t$

$x(t)=e^{\lambda t}$とおき、次の式をとくと

$\lambda^2e^{\lambda t}+9e^{\lambda t}=0$

$(\lambda^2+9)e^{\lambda t}=0$

$(\lambda+3i)(\lambda-3i)e^{\lambda t}=0$ より $\lambda=\pm 3i$。$\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$とおくと

解の基本形は $x_1(t)=\cos 3t$, $x_2(t)=\sin 3t$ である

ロンスキアンは $\Delta t=\begin{vmatrix}\cos 3t & \sin 3t\\ -3\sin 3t & 3\cos 3t\end{vmatrix}=3\neq 0$ である。

非同次方程式の解は

$x(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t-\cos 3t\int\frac{\sin 2t\sin 3t}{3}dt+\sin 3t\int\frac{\sin 2t\cos 3t}{3}dt$

$=A\sin(3t+\phi)+\frac{1}{30}\sin 5t\cos 3t-\frac{1}{6}\sin t\cos 3t-\frac{1}{30}\sin 3t\cos 5t+\frac{1}{6}\sin 3t\cos t$

$=A\sin(3t+\phi)+\frac{1}{30}\sin 2t+\frac{1}{6}\sin 2t$

$=A\sin(3t+\phi)+\frac{1}{5}\sin 2t$ // $\left(\begin{array}{l}c_1, c_2:\text{任意定数}\\ A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\ \tan\phi=\frac{c_1}{c_2}\end{array}\right)$

(6) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+10\dfrac{dx(t)}{dt}+9x(t)=10\sin 3t$

$x(t)=e^{\lambda t}$とおき、次の式をとくと

$\lambda^2e^{\lambda t}+10\lambda e^{\lambda t}+9e^{\lambda t}=0$

$(\lambda^2+10\lambda+9)e^{\lambda t}=0$

$(\lambda+9)(\lambda+1)e^{\lambda t}=0$ より $\lambda=-9,-1$。$\lambda_1=9$, $\lambda_2=-1$とおくと

ロンスキアンは $\Delta t=\begin{vmatrix}e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t}\\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\end{vmatrix}=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}=8e^{-10t}\neq 0$

より一次独立な解であり解の基本形を作る。

解は $x(t)=c_1e^{-9t}+c_2e^{-t}-e^{-9t}\int\frac{10\sin 3t\,e^{-t}}{8e^{-10t}}dt+e^{-t}\int\frac{10\sin 3t\,e^{-9t}}{8e^{-10t}}dt$

$=c_1e^{-9t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{8}\sin 3t+\frac{1}{24}\cos 3t+\frac{1}{8}\sin 3t-\frac{3}{8}\cos 3t$

$=c_1e^{-9t}+c_2e^{-t}-\frac{1}{3}\cos 3t$ // (c_1, c_2:任意定数)