連成系

一端が壁に固定されたバネ定数k_1のバネ1の他端に質量mのおもり1が繋がれており，おもり1にはさらにバネ定数k_2のバネ2が繋がれ，バネ2の他端には質量mのおもり2が繋がれ，おもり2にはさらにバネ定数k_3のバネ3が繋がれ，バネ3の他端は壁に固定されている．摩擦や空気抵抗はないものとし，おもりは水平面内で左右にのみ運動するものとする．右向きを正にx軸をとり，時刻tにおけるおもり1の基準位置からの変位を$x_1(t)$，おもり2の基準位置からの変位を$x_2(t)$とする．また，3つのバネについて，バネ定数が全て同じ，$k_1 = k_2 = k_3 = k$であるとする．

この二自由度の連成系の運動方程式は次のように与えられる．

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = -k_1 x_1(t) + k_2 \{x_2(t) - x_1(t)\} \\ m\ddot{x}_2(t) = -k_2 \{x_2(t) - x_1(t)\} + k_3 \{-x_2(t)\} \end{cases} \tag{1}$$

$k_1 = k_2 = k_3 = k$ により整理すると

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \dfrac{2k}{m} x_1(t) - \dfrac{k}{m} x_2(t) = 0 & \cdots \text{ⓘ} \\ \ddot{x}_2(t) - \dfrac{k}{m} x_1(t) + \dfrac{2k}{m} x_2(t) = 0 & \cdots \text{ⓘⓘ} \end{cases}$$

$z_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$，$z_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$，$\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$，$\omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$ とすると

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \omega_1^2 z_1(t) = 0 \\ \ddot{z}_2(t) + \omega_2^2 z_2(t) = 0 \end{cases}$$

$z_1(t)$，$z_2(t)$ について調和振動の方程式であるので，解は

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ z_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

A_1，A_2，ϕ_1，ϕ_2 は任意定数である．

座標をzからxに戻すと

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = \dfrac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{A_2}{2}\sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} \tag{2}$$

$\omega_1 < \omega_2$であり，低い角周波数ω_1に対する変位を1次モード，高い角周波数ω_2に対する変位を2次モードと呼ぶ.

例題 1

ⓘ，ⓘⓘで記述された連成系の初期条件が$x_1(0)=0$，$x_2(0)=a$（$a\neq 0$），$\dot{x}_1(0)=0$，$\dot{x}_2(0)=0$であるとき，この初期条件に対する解を求めよ．

解は

$$\begin{cases} x_1(t) = a\sin\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \\ x_2(t) = a\cos\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \end{cases}$$

基準座標

連立微分方程式 ⓘ，ⓘⓘ を行列・ベクトルにより表記すると

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)$$

と書くことができる．

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & -\dfrac{2k}{m} \end{bmatrix}$ である．

係数行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値は，特性方程式

$$|\lambda \boldsymbol{I}_{2\times 2} - \boldsymbol{M}| = 0$$

を解いて，$\lambda = -\dfrac{k}{m}$，$-\dfrac{3k}{m}$ である．

i) $\lambda_1 = -\dfrac{k}{m}$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$ とする．

固有方程式 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ を解いて $\boldsymbol{v}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，ただし，$c_1$ は任意定数である．

ここで，$|\boldsymbol{v}_1| = 1$ となるように c_1 を決定すると，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ である．

ii) $\lambda_2 = -\dfrac{3k}{m}$ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$ とする．

固有方程式 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$ を解いて $\boldsymbol{v}_2 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，ただし，$c_2$ は任意定数である．

ここで，$|\boldsymbol{v}_2| = 1$ となるように c_2 を決定すると，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ である．

固有ベクトルにより行列$\boldsymbol{T}$を定義する.

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

変数変換を$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)$とする.

行列$\boldsymbol{T}$は正則であるので,

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{z}}(t) &= \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -\dfrac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3k}{m} \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) \end{aligned}$$

このとき，$\boldsymbol{z}(t)$は基準座標である.

$\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$，$\omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$ とおくと，微分方程式は,

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \omega_1^2 z_1(t) = 0 \\ \ddot{z}_2(t) + \omega_2^2 z_2(t) = 0 \end{cases}$$

$z_1(t)$，$z_2(t)$ についての調和振動の方程式であるので，解は

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ z_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

ただし，A_i，ϕ_i（$i = 1, 2$）は任意定数である.

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{z}(t)$ により変数を戻すと，解は

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{A_2}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{A_2}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

例題２

例題１と同じ初期条件 $x_1(0)=0$，$x_2(0)=a$（$a\neq 0$），$\dot{x}_1(0)=0$，$\dot{x}_2(0)=0$ に対する解を求めよ.

解は

$$\begin{cases} x_1(t)=a\sin\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\sin\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \\ x_2(t)=a\cos\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}t\cos\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t \end{cases}$$

強制振動の場合

連成系で変位が x_2 で表されるおもりに力 $f(t) = f_0 \sin pt$ が作用している場合の運動を調べる.

運動を表す方程式は

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1(t) + \dfrac{2k}{m}x_1(t) - \dfrac{k}{m}x_2(t) = 0 & \cdots \text{ⓘ}' \\[2ex]
\ddot{x}_2(t) - \dfrac{k}{m}x_1(t) + \dfrac{2k}{m}x_2(t) = \dfrac{f_0}{m}\sin pt & \cdots \text{ⓘⓘ}'
\end{cases}
$$

連立微分方程式を行列・ベクトルにより表記すると微分方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t)$$

と書くことができる.

ただし，$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2k}{m} & \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{k}{m} & -\dfrac{2k}{m} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{f_0}{m}\sin pt \end{bmatrix}$である．

係数行列$\boldsymbol{M}$の固有値に対応する固有ベクトルから構成した正則行列$\boldsymbol{T}$を用いて変数変換$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t)$を行うと

$$\ddot{\boldsymbol{z}}(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{u}(t)$$

このとき，$\omega_1^2 = \dfrac{k}{m}$，$\omega_2^2 = \dfrac{3k}{m}$，$\gamma = \dfrac{f_0}{m}$とおくと

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \omega_1^2 z_1(t) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}\sin pt \\[2ex] \ddot{z}_2(t) + \omega_2^2 z_2(t) = -\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}}\sin pt \end{cases}$$

解は

$$
\begin{cases}
z_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}(\omega_1^2 - p^2)} \sin pt \\[2ex]
z_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) - \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}(\omega_2^2 - p^2)} \sin pt
\end{cases}
$$

が得られる．ただし，A_i，ϕ_i（$i = 1, 2$）は任意定数である．

変数を戻すと

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{A_2}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dfrac{\gamma}{2} \left(\dfrac{1}{\omega_1^2 - p^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2 - p^2} \right) \sin pt \\[2ex]
x_2(t) = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}} \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{A_2}{\sqrt{2}} \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dfrac{\gamma}{2} \left(\dfrac{1}{\omega_1^2 - p^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2 - p^2} \right) \sin pt
\end{cases}
$$

を得る．

例題３：同じ質量の3つのおもりが，同じバネ定数の4つのバネで結ばれた連成系を考える．ただし，両端のバネの端は固定されているものとする．釣り合いの位置からの各おもりの変位をそれぞれ$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$とすと，運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = -kx_1(t) - k\{x_1(t) - x_2(t)\} \\ m\ddot{x}_2(t) = -k\{x_2(t) - x_1(t)\} - k\{x_2(t) - k_3(t)\} \\ m\ddot{x}_3(t) = -k\{x_3(t) - x_2(t)\} - kx_3(t) \end{cases}$$

と書くことができる．連立微分方程式の解$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$を求めよ．

［略解］

基準座標に変換するための行列は$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$である．

変数変換$\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t)$により，基準座標$\boldsymbol{z}(t)$での微分方程式は

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \omega_1^2 z_1(t) = 0 \\ \ddot{z}_2(t) + \omega_2^2 z_1(t) = 0 \\ \ddot{z}_3(t) + \omega_3^2 z_2(t) = 0 \end{cases}$$

ただし，$\omega_1^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})k}{m}$，$\omega_2^2 = \dfrac{2k}{m}$，$\omega_3^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})k}{m}$である．

座標を戻して，解は

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \phi_1) + \dfrac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dfrac{A_3}{2}\sin(\omega_3 t + \phi_3) \\ x_2(t) = \dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{A_3}{\sqrt{2}}\sin(\omega_3 t + \phi_3) \\ x_3(t) = \dfrac{A_1}{2}\sin(\omega_1 t + \phi_1) - \dfrac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \dfrac{A_3}{2}\sin(\omega_3 t + \phi_3) \end{cases}$$

演習問題１

ⓘ，ⓘⓘ で記述された連成系の初期条件が，$x_1(0) = d$，$x_2(0) = -d$，$\dot{x}_1(0) = 0$，$\dot{x}_2(0) = 0$であるとき，初期条件を満たす解を求めよ．ここで，$d \neq 0$である．

演習問題２

ⓘ，ⓘⓘ で記述された連成系において，$m = 5$，$k = 10$であるとき，系の運動方程式を行列表記で表し，係数行列の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ．ただし，固有ベクトルはその大きさが1となるようにすること．

演習問題３

強制力の働く連成系の方程式が次のように与えられている．

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \dfrac{2k}{m}x_1(t) - \dfrac{k}{m}x_2(t) = \dfrac{f_0}{m}\sin pt \\[2ex] \ddot{x}_2(t) - \dfrac{k}{m}x_1(t) + \dfrac{2k}{m}x_2(t) = 0 \end{cases}$$

ここで，$m = 5$，$k = 10$，$f_0 = 5$，$p = 1$であるとする．基準座標を用いて連立

微分方程式を解き，初期条件 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ に対する解を求めよ.