# 1 階微分方程式

## 変数分離形

1 階の微分方程式のうち，次の形をした方程式を変数分離形という．

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x)g(t) \tag{1}$$

$f(x) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{f(x)}\frac{dx}{dt} = g(t)$$

として両辺を $t$ で積分すると，一般解は

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = \int g(t)dt + C$$

ここで，$C$ は任意定数である．

$f(x_0) = 0$ となる定数 $x_0$ があるならば，$x(t) = x_0$ は式（1）の解である．

**例 1** ：微分方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt} = -atx(t)$ の一般解を求めよ．ただし，$a$ は正の定数である．

［略解］

$$x(t) = Ce^{-\frac{a}{2}t^2}$$

$C$ は任意定数．

**例２**：微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = -a(x(t) - 1)$ について，初期条件 $x(0) = 0$ を満たす解を求めよ．ただし，$a$ は正の定数である．

［略解］

$$x(t) = 1 - e^{-at}$$

## 同次形

1 階の微分方程式のうち，次の形をした方程式を同次形という．

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{2}$$

変数変換 $x = tu$ を行うと

$$\begin{aligned} & u + t\frac{du}{dt} = f(u) \\ \rightarrow \quad & \frac{du}{dt} = \frac{f(u) - u}{t} \end{aligned}$$

$f(u) - u \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{f(u) - u}\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$$

両辺を $t$ で積分すると，一般解は

$$\int \frac{1}{f(u)-u}du = \log|t| + C_1, \quad x(t) = tu$$

$C_1$ は任意定数である．

$f(u)-u=0$ のとき，$f\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}$ であるので，式（2）は

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x}{t}$$

となるから，その一般解は $x(t) = Ct$（$C$ は任意定数）となる．

**例３**：微分方程式$x^2(t) - \{tx(t) - t^2\}\dfrac{dx(t)}{dt} = 0$の一般解を求めよ．

［略解］

$$x(t) - Ce^{\frac{x(t)}{t}} = 0$$

# 1 階線形微分方程式

関数 $p(t)$，$q(t)$ が与えられている．線形の微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) = q(t) \tag{3}$$

を 1 階線形微分方程式という．

同次方程式 $q(t) \equiv 0$ の場合，$x(t) \neq 0$ のとき

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -p(t)$$

両辺を $t$ で積分して

$$\int \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}dt = \log|x(t)| = -\int p(t)dt + C_1$$

$C_1$ は任意定数である．

$x > 0$のとき$e^{C_1}$を$C$，$x < 0$のとき$e^{C_1}$を$-C$とおくと，$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$で表すことが出来る．$x(t) = 0$のときは$C = 0$に対応する．従って，一般解は

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

定数変化法により非同次方程式の解を求める．非同次方程式の解を同次方程式の一般解における定数$C$を$t$の関数$C(t)$として

$$x(t) = C(t)e^{-\int p(t)dt}$$

と仮定する．

式（3）へ代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{dC(t)}{dt}e^{-\int p(t)dt} - p(t)x(t) + p(t)x(t) = q(t) \\ \rightarrow \quad &\frac{dC(t)}{dt}e^{-\int p(t)dt} = q(t) \end{aligned}$$

整理して両辺を$t$で積分すると

$$C(t) = \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C$$

$C$は任意定数である．従って，一般解は

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt}\left\{\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + C\right\}$$

初期条件$x(t_0) = x_0$が与えられたときの特殊解は，$C = x_0$とおき，不定積分を定積分として

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}\left\{\int_{t_0}^{t} q(\tau)e^{\int_{t_0}^{\tau} p(\xi)d\xi}d\tau + x_0\right\}$$

となる．

**例４**：微分方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = t$ の一般解を求めよ．

［略解］

$$x(t) = t - 1 + Ce^{-t}$$

$C$ は任意定数．

## ベルヌーイ形

1 階の線形微分方程式のうち，次の形をした方程式をベルヌーイ形という．

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) = q(t)x^n(t) \quad (n \neq 0, 1) \tag{4}$$

変数変換 $u = x^{1-n}$ を行うと

$$\begin{aligned} &(1-n)x^{-n}\frac{dx(t)}{dt} + (1-n)p(t)x^{1-n} = (1-n)q(t) \\ \to \quad &\frac{du}{dt} + (1-n)p(t)u = (1-n)q(t) \end{aligned}$$

これは，$u$ についての 1 階線形微分方程式である．

**例５**：微分方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt}+\dfrac{3}{4t}x(t)+\dfrac{1}{4}t^3e^tx^5(t)=0$ （$t>0$）の一般解を求めよ．

［略解］

$$\frac{1}{x^4(t)}=t^3(e^t+C)$$

$C$ は任意定数．

$n$個の関数$x_i(t)$（$i=1,2,\cdots,n$）が，$n$階同次線形微分方程式$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}(t)=0$の解ならば，重ね合わせの原理より，$c_i$（$i = 1,2,\cdots,n$）を任意定数として，$x(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$も解である．

$n$個の関数$x_i(t)$（$i=1,2,\cdots,n$）が，恒等的に$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)=0$となるような定数$c_i\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）が存在するとき，関数$x_i(t)$（$i=1,2,\cdots,n$）は一次独立であるという．

$n$階同次線形微分方程式$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}(t)=0$の解全体は，$\mathbb{R}$上の$n$次元ベクトル空間をなす．$\Leftrightarrow$ $n$階同次線形微分方程式の互いに一次独立な解$x_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$の一次結合$x(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$は$n$階同次線形微分方程式の解であり，全ての解がこの形で表される（これ以外に解は存在しない）．

$n$個の関数$x_i(t)$（$i = 1, 2, \cdots, n$）に対して

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} & \dfrac{dx_2(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_n(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}x_1(t)}{dt^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}x_2(t)}{dt^{n-1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}x_n(t)}{dt^{n-1}} \end{vmatrix}$$

をこれらの関数のロンスキアンという．

ロンスキアン$\Delta(t) \neq 0$であれば，関数$x_i(t)$（$i = 1, 2, \cdots, n$）は一次独立である．

一次独立の解の組$\{x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\}$は解の基本系と呼ばれ，$x(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)$は同次方程式の一般解を与える．

**例６**：関数$x_1(t)=e^t$，$x_2(t)=e^{-t}$は一次独立であるかどうか調べよ．

［略解］
一次独立である．

## ２階線形微分方程式

関数 $p(t)$，$q(t)$，$f(t)$ が与えられている．線形の微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = f(t) \tag{5}$$

を２階線形微分方程式という．

同次線形方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + p(t)\dfrac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = 0$ の $2$ つの解を $x_1(t)$，$x_2(t)$ とするとき，重ね合わせの原理より，$c_1$，$c_2$ を任意定数として $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ も解である．

ロンスキアンは

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} & \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{vmatrix} = x_1(t)\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt}x_2(t)$$

である．

同次方程式の $2$ つの独立な解を $x_1(t)$，$x_2(t)$ とする．

$x_1(t)$，$x_2(t)$ は一次独立な解であるからロンスキアンは

$$\Delta(t) = x_1(t)\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt}x_2(t) \neq 0$$

定数変化法により非同次方程式（5）を解くため，方程式の解を

$$x(t) = \eta_1(t)x_1(t) + \eta_2(t)x_2(t) \quad \cdots ①$$

とおく．ただし

$$\frac{d\eta_1(t)}{dt}x_1(t) + \frac{d\eta_2(t)}{dt}x_2(t) = 0 \quad \cdots ②$$

を満たしているものとする．

①を式(5)へ代入し，式②を用いて整理すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx(t)}{dt}+q(t)x(t) \\
&\qquad\qquad =\eta_1(t)\left\{\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx_1(t)}{dt}+q(t)x_1(t)\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad +\eta_2(t)\left\{\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}+p(t)\frac{dx_2(t)}{dt}+q(t)x_2(t)\right\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{d\eta_1(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{d\eta_2(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt}=f(t)
\end{aligned}$$

ここで，$x_1(t)$，$x_2(t)$ は同次方程式の解より，$\{\ \}$ 内は 0 であるから

$$\frac{d\eta_1(t)}{dt}\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{d\eta_2(t)}{dt}\frac{dx_2(t)}{dt}=f(t)\quad\cdots③$$

②，③の連立方程式を $\dfrac{d\eta_1(t)}{dt}$，$\dfrac{d\eta_2(t)}{dt}$ について解くと

$$\frac{d\eta_1(t)}{dt} = -\frac{f(t)x_2(t)}{x_1(t)\dfrac{dx_2(t)}{dt} - \dfrac{dx_1(t)}{dt}x_2(t)}$$

$$\frac{d\eta_2(t)}{dt} = \frac{f(t)x_1(t)}{x_1(t)\dfrac{dx_2(t)}{dt} - \dfrac{dx_1(t)}{dt}x_2(t)}$$

$t$ で積分して

$$\eta_1(t) = -\int \frac{f(t)x_2(t)}{\Delta(t)}dt + C_1$$

$$\eta_2(t) = \int \frac{f(t)x_1(t)}{\Delta(t)}dt + C_2$$

$C_1$，$C_2$ は任意定数である．

従って，一般解は

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) - x_1(t) \int \frac{f(t) x_2(t)}{\Delta(t)} dt + x_2(t) \int \frac{f(t) x_1(t)}{\Delta(t)} dt \tag{6}$$

である．

**演習問題 1**：次の1階微分方程式の一般解を求めよ．

**(1)** $\dfrac{dx(t)}{dt} - 2t = 0$

**(2)** $\dfrac{dx(t)}{dt} - 2tx(t) = 0$

**(3)** $\dfrac{dx(t)}{dt} + 2tx(t) = t$

**(4)** $\dfrac{dx(t)}{dt} + \{x(t) - 3\}e^t = 0$

**演習問題２**：次の関数$x_i(t)$（$i=1,2,\cdots$）は，一次独立かどうか調べよ．

**(1)** $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$，$x_2(t)=e^{\lambda_2 t}$，$\lambda_i\neq 0$（$i=1,2$）は定数

**(2)** $x_1(t)=e^{\mathtt{i}\omega t}$，$x_2(t)=e^{-\mathtt{i}\omega t}$，$\omega\neq 0$は定数

**(3)** $x_1(t)=\cos\omega t$，$x_2(t)=\sin\omega t$，$\omega\neq 0$は定数

**(4)** $x_1(t)=e^{t}$，$x_2(t)=e^{-t}$，$x_3(t)=e^{\mathtt{i}t}$，$x_4(t)=e^{-\mathtt{i}t}$