応用数理解析

ID：1116191012 氏名：東田悠希

問2

(1) $p(x) = e^{-ax^2}$ ($a \in \mathbb{R}$は定数)、$q(x) = 0$

波動方程式をフーリエ変換すると

$$\frac{d^2 \Psi(w,t)}{dt^2} = -w^2 \Psi(w,t)$$

初期条件は

$$\begin{cases} \Psi(w,0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{w^2}{4a}} \\ \left.\frac{d\Psi(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$\Psi(w,t) = e^{\lambda t}$とすると特性方程式の解は$\lambda = \pm wi$より、

$\Psi_1(w,t) = \cos wt$, $\Psi_2(w,t) = \sin wt$は基本解系であるから、

$$\Psi(w,t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

初期条件より

$$\begin{cases} \Psi(w,0) = c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{w^2}{4a}} \\ \left.\frac{d\Psi(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = c_2 w = 0 \end{cases}$$

であるから

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{w^2}{4a}}$$

$$\underline{\Psi(w,t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{w^2}{4a}} \cos wt}$$ //

(2) $p(x) = 0$, $q(x) = e^{-a^2|x|}$ ($a \in \mathbb{R}$は定数)

(1)と同様にし、フーリエ変換すると初期条件は

$$\begin{cases} \Psi(w,0) = 0 \\ \left.\frac{d\Psi(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{2a^2}{a^4 + w^2} \end{cases}$$

$\Psi(w,t) = e^{\lambda t}$とし(1)と同様にすると

$$\Psi(w,t) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt$$

初期条件より

$$\begin{cases} \Psi(w,0) = c_1 = 0 \\ \left.\frac{d\Psi(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = c_2 w = \frac{2a^2}{a^4 + w^2} \end{cases}$$

であるから、$c_1 = 0$, $c_2 = \frac{2a^2}{w(a^4 + w^2)}$

$$\underline{\Psi(w,t) = \frac{2a^2}{w(a^4 + w^2)} \sin wt}$$ //