

初等関数

三角関数 $\sin x, \cos x$

基本的な性質

(1) $n \in \mathbb{Z}$ について, $\sin(x + 2n\pi) = \sin x, \cos(x + 2n\pi) = \cos x$

(2) 定理 : $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

系 :

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2) \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$3) \sin x \sin y = -\frac{1}{2}\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\}$$

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) - \sin(x-y)\}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\}$$

(4) 合成

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi), \quad \tan \phi = \frac{a}{b}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \phi), \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ と定義する.

(5) 微分・積分

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \quad \int \cos x dx = \sin x$$

演習問題 1

(1) 三角関数の合成（基本的な性質(4)) を確かめよ。

(2) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ を示せ。

関数 $f(x)$ が x について何回でも微分可能であるとき, $x = x_0$ の近傍で $f(x)$ は

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

るべき級数展開することができる (テーラー展開). 特に $x_0 = 0$ (原点) であるとき, 関数 $f(x)$ のべき級数展開 (マクローリン展開) は

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

で与えられる.

演習問題 2

(1) $\sin x, \cos x$ を $x = 0$ 近傍でそれぞれべき級数展開せよ.

(2) $\sin x, \cos x$ を $x = \frac{\pi}{2}$ 近傍でそれぞれべき級数展開せよ.

指数関数 e^x

基本的な性質

$$(1) e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$(2) e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$(3) (e^x)^y = e^{xy}$$

(4) 微分・積分

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (a \neq 0)$$

対数関数 $\log x$ (底を e とする自然対数)

基本的な性質

$$(1) \log xy = \log x + \log y$$

$$(2) \log \frac{1}{x} = -\log x$$

(3) $\log x^y = y \log x$

(4) 微分・積分

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log x$$

演習問題3

(1) e^x を $x = 0$ 近傍でべき級数展開せよ。

(2) $\log(1 + x)$ を $x = 0$ 近傍でべき級数展開せよ。

複素数

$i^2 = -1$ である虚数単位 i と $x, y \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} は実数全体の集合) により

$$s = x + iy$$

で表される数 s を複素数という。複素数 s の実部 x を $x = \operatorname{Re}(s)$, 虚部 y を $y = \operatorname{Im}(s)$ と書く。複素数全体の集合は、 \mathbb{C} と表す。

基本的な性質

$s_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, 2$) とする

$$(1) s = x + iy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{かつ} y = 0$$

$$(2) s_1 = s_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{かつ} y_1 = y_2$$

$$(3) s_1 \pm s_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$(4) s_1 s_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$(5) \frac{s_1}{s_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$$

複素数の演算について、交換律、結合律、分配律が成立する。

オイラーの公式： $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

演習問題4

演習問題2(1)と演習問題3(1)の結果を用いて、 $x = i\theta$ とすることにより、オイラーの公式が得られることを確認せよ。

演習問題5

オイラーの公式を用いて $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ を示せ。(ド・モアブルの定理)

演習問題6

オイラーの公式を用いて $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ を示せ。