フーリエ変換

$T=2P$ の周期関数 $f(t)$ の複素形式のフーリエ級数展開

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathtt{i}\frac{k\pi}{P}t}$$

ただし，

$$c_k=\frac{1}{2P}\int_{\tau}^{\tau+2P} f(t)e^{-\mathtt{i}\frac{k\pi}{P}t}dt$$

において，$\tau=-P$，$\Delta\omega=\dfrac{\pi}{P}$ とすると

$$f(t) \ = \ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-P}^{P} f(\tau)e^{-\mathtt{i}k\Delta\omega\tau}d\tau\right\}e^{\mathtt{i}k\Delta\omega t}$$

$T \to \infty$とすると，リーマン積分の定義より$\Delta\omega \to d\omega$，$k\Delta\omega \to \omega$，総和を積分に書き換えて

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-\mathtt{i}\omega\tau}d\tau e^{\mathtt{i}\omega t}d\omega$$

非周期関数$f(t)$に対し，フーリエ変換を次式で定義する．

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}\left[f(t)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathtt{i}\omega t}dt \end{aligned} \tag{1}$$

フーリエ逆変換を次式で定義する．

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{\mathtt{i}\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{2}$$

フーリエの積分定理

任意の実数に対して定義された関数 $f(t)$ が,

1) $f(t)$ は任意の閉区間 $[a, b]$ において区分的に滑らかである

2) $f(t)$ は $(-\infty, \infty)$ において絶対可積分, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

を満たすとき, $f(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ が存在し,

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

が成り立つ.

$f(t)$ が t で連続で $f(t+0) = f(t-0) = f(t)$ が成り立つ場合, フーリエの積分定理は反転公式 $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ となる.

フーリエ変換の性質

関数 $f(t)$，$g(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$，$\mathcal{F}[g(t)] = G(\omega)$ とする．

(1) 線形性

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega)$$

ただし，a，b は任意の複素定数である．

(2) 対称性

$$\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)$$

(3) 原関数における変数の変換

$$\mathcal{F}[f(t-L)] = e^{-L\omega}F(\omega)$$

ただし，L は実数定数.

(4) 像関数における変数の変換

$$\mathcal{F}[f(t)e^{\mathrm{i}\omega_0 t}] = F(\omega - \omega_0)$$

ただし，ω_0 は実数定数.

(5) 畳み込み積分

2つの関数 $f(t)$，$g(t)$ に対して，$f(t) * g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ を畳み込みといい，$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ が成り立つ.

- $\mathcal{F}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(\omega)G(\omega)$
- $\mathcal{F}[f(t)g(t)] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(\omega-u)du$

(6) 微分に関する性質

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (\mathtt{i}\omega)^n F(\omega)$$

(7) 複素共役に関する性質

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(t)}\right] = \overline{F(-\omega)}$$

(8) パーシバルの等式（t 領域おける関数の二乗積分と ω 領域における二乗積分の等価性）

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

例題 1

次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ．ただし，$\alpha > 0$ とする．

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

［略解］

$$F(\omega) = \frac{1}{\alpha + \mathtt{i}\omega}$$

例題２

次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ．ただし，α は定数とする．

$$f(t) = \begin{cases} \alpha & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t < 0, t > 1) \end{cases}$$

［略解］

$$F(\omega) \ = \ \frac{\alpha}{\mathtt{i}\omega}(1 - e^{-\mathtt{i}\omega})$$

例題３

次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ．ただし，$T > 0$ とする．

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

［略解］

$$F(\omega) \ = \ \frac{2\sin\omega T}{\omega}$$

例題４

例題３の関数 $f(t)$ に対して $f(t)\cos\alpha t$ としたときのフーリエ変換を求めよ．

［略解］

$$F(\omega) \ = \ \frac{\sin(\omega-\alpha)T}{\omega-\alpha}+\frac{\sin(\omega+\alpha)T}{\omega+\alpha}$$

フーリエ正弦変換

$$F_s(\omega) = \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega t d\omega$$

フーリエ余弦変換

$$F_c(\omega) = \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega t d\omega$$

デルタ関数

面積が1のまま $t \neq 0$ で0，$t = 0$ で ∞ となるパルス状の関数をデルタ関数と呼び，次式で定義される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

時間軸を移動させると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-L) f(t) dt = f(L)$$

デルタ関数のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$$

ガウス関数

$a \in \mathbb{R}$として関数e^{-at^2}をガウス関数という.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

このとき,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

ガウス関数のフーリエ変換は

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

演習問題 1 ：次の関数 $f(t)$ のフーリエ変換を求めよ.

(1) $\alpha > 0$ として

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}$$

(2)

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T} & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

(3)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & |t| \leq \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$