拡散方程式

右向きを正にx軸をとり，位置x，時間tにおける状態量（例えば，気体中の粒子の濃度，固体中の温度）を$\phi(x,t)$とすると

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

により拡散方程式が与えられる．ここで，cは拡散係数である．

フーリエ変換による解

無限区間における拡散方程式

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}$$

について，初期条件

$$\psi(x,0) = p(x)$$

に対する解をフーリエ変換により求める．

拡散方程式，初期条件を x についてフーリエ変換する．

$\Phi(\omega,t) = \mathcal{F}[\phi(x,t))]$，$P(\omega) = \mathcal{F}[p(x)]$ とすると，フーリエ変換した拡散方程式は

$$\frac{d\Phi(\omega,t)}{dt} = -c^2\omega^2\Phi(\omega,t)$$

初期条件は

$$\Phi(\omega, 0) = P(\omega)$$

$\Phi(\omega, t) = e^{\lambda t}$ とすると，特性方程式の解は $\lambda = -c^2\omega^2$ より，解は

$$\Phi(\omega, t) = Ce^{-c^2\omega^2 t}$$

ただし，C は任意定数である．

初期条件より

$$\Phi(\omega, 0) = C = P(\omega)$$

であるから

$$\Phi(\omega, t) = P(\omega)e^{-c^2\omega^2 t}$$

フーリエ逆変換により解$\phi(x,t)$を求める.

ガウス関数$f(t)=e^{-at^2}$のフーリエ変換（第９回参照）を利用して

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-c^2\omega^2 t}] = \sqrt{\frac{1}{4\pi c^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}$$

よって，たたみ込みの性質を用いると，拡散方程式の解は

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\Phi(\omega,t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\sqrt{\frac{1}{4\pi c^2 t}}e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4c^2 t}}d\tau\end{aligned}$$

境界条件に対する解

有限区間$0 \le x \le L$における拡散方程式

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}$$

について，境界条件が

$$\begin{cases} \phi(0,t) = 0 \\ \phi(L,t) = 0 \end{cases}$$

初期条件が

$$\phi(x,0) = p(x)$$

により与えられている．

解を$\phi(x,t) = \xi(x)\zeta(t)$と仮定して拡散方程式へ代入して整理すると

$$\frac{1}{c^2 \zeta(t)} \frac{d\zeta(t)}{dt} = \frac{1}{\xi(x)} \frac{d^2 \xi(x)}{dx^2}$$

お互いに無関係なものが等しいのは，定数の場合である．

(i) 定数が正の場合，定数を ω^2 として

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta(t)}{dt} = (c\omega)^2\zeta(t) \\ \dfrac{d^2\xi(x)}{dx^2} = \omega^2\xi(x) \end{cases}$$

第 1 式の解は，c_0 を任意定数として

$$\zeta(t) = c_0 e^{(c\omega)^2 t}$$

第 2 式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\xi(x) = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$$

よって，解は

$$\phi(x,t) = \left(c_1' e^{\omega x} + c_2' e^{-\omega x}\right) e^{(c\omega)^2 t}$$

ここで，$c_i' = c_0 c_i$（$i = 1, 2$）としている．

解を境界条件に代入すると

$$\begin{cases} c_1' + c_2' = 0 \\ c_1' e^{\omega L} + c_2' e^{-\omega L} = 0 \end{cases}$$

よって，$c_1' = 0$，$c_2' = 0$ であるが，拡散方程式の解として不適である．

(ii) 定数が零の場合

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\zeta(t)}{dt} = 0 \\
\dfrac{d^2\xi(x)}{dx^2} = 0
\end{cases}
$$

第1式の解は，c_0 を任意定数として

$$\zeta(t) = c_0$$

第2式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\xi(x) = c_1 x + c_2$$

よって，解は

$$\phi(x,t) = c_1' x + c_2'$$

ここで，$c_i' = c_0 c_i$ （$i = 1, 2$） としている．

解を境界条件に代入すると

$$\begin{cases} c_2' = 0 \\ c_1' L + c_2' = 0 \end{cases}$$

よって，$c_1' = 0$，$c_2' = 0$であるが，拡散方程式の解として不適である．

(iii) 定数が負の場合，定数を $-\omega^2$ として

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta(t)}{dt} = -(c\omega)^2\zeta(t) \\ \dfrac{d^2\xi(x)}{dx^2} = -\omega^2\phi(x) \end{cases}$$

第 1 式の解は，c_0 を任意定数として

$$\zeta(t) = c_0 e^{-(c\omega)^2 t}$$

第 2 式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\xi(x) = c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x$$

よって，解は

$$\phi(x,t) = \left(c_1' \cos\omega x + c_2' \sin\omega x\right) e^{-(c\omega)^2 t}$$

ここで，$c_i' = c_0 c_i$（$i = 1, 2$）としている．

解を境界条件に代入すると

$$\begin{cases} c_1' = 0 \\ c_1' \cos \omega L + c_2' \sin \omega L = 0 \end{cases}$$

$c_2' \sin \omega L = 0$ より $\omega L = n\pi$ （$n = 1, 2, \cdots$）である．

$\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$ に対応する解は

$$\phi_n(x,t) \;=\; c_{2n}' \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}$$

ただし，$n = 1, 2, \cdots$ である．

以上より，与えられた境界条件を満たす拡散方程式の解は

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x,t)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}\end{aligned}$$

ここで，$c_n = c'_{2n}$ は初期状態によって決まる定数である．

初期条件に解を代入して

$$\phi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi x}{L} = p(x)$$

上式の両辺に $\sin\frac{m\pi x}{L}$ を掛けて $0 \le x \le L$ で積分することにより

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

以上より，与えられた境界条件，初期条件を満たす拡散方程式の解は

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{L} \int_0^L p(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right\} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(\frac{n\pi c}{L})^2 t}$$