ID：1116191012　氏名：東田悠希

演習問題4

・$f(x)=\sin x$ は x について何回でも微分可能であるので $x=0$ の近傍で

$$f(x)=\sin 0+\frac{\cos 0}{1!}x+\frac{(-\sin 0)}{2!}x^2+\frac{(-\cos 0)}{3!}x^3+\cdots$$
$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

(∵演習問題2(1))

・同様に $g(x)=\cos x$ として

$$g(x)=\cos 0+\frac{(-\sin 0)}{1!}x+\frac{(-\cos 0)}{2!}x^2+\frac{(\sin 0)}{3!}x^3+\frac{(\cos 0)}{4!}x^4+\cdots$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

(∵演習問題2(1))

・同様に $h(x)=e^x$ として

$$h(x)=e^0+\frac{e^0}{1!}x+\frac{e^0}{2!}x^2+\frac{e^0}{3!}x^3+\cdots=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

(∵演習問題3(1))

ここで $x=i\theta$ とすると

$$h(i\theta)=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{-\theta^2}{2!}+\frac{-i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\frac{i\theta^5}{5!}+\frac{-\theta^6}{6!}+\frac{-i\theta^7}{7!}+\cdots$$
$$=\left(i\theta-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{i\theta^5}{5!}-\frac{i\theta^7}{7!}+\cdots\right)+\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$=i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)+\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$=i\sin\theta+\cos\theta$$

となりオイラーの公式が得られる。