応用数理解析

ID: 1116191012　氏名: 東田 悠希

演習問題3

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + \frac{2k}{m}x_1(t) - \frac{k}{m}x_2(t) = \frac{f_0}{m}\sin pt \\ \ddot{x}_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t) + \frac{2k}{m}x_2(t) = 0 \end{cases}$$

ここで $m=5, k=10, f_0=5, p=1$ であるとする

初期条件 $x_1(0)=0, x_2(0)=0, \dot{x}_1(0)=0, \dot{x}_2(0)=0$

連立微分方程式を行列・ベクトルにより表記すると微分方程式は

$\ddot{x}(t) = Mx(t) + u(t)$ と書くことができる。

ただし $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} \end{bmatrix}$, $u(t) = \begin{bmatrix} \frac{f_0}{m}\sin pt \\ 0 \end{bmatrix}$

である。

係数行列 M の固有値は特性方程式より $\lambda = -\frac{k}{m}, -\frac{3k}{m}$ である。

$\lambda_1 = -\frac{k}{m}$ に対する固有ベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ と $\lambda_2 = -\frac{3k}{m}$ に対する固有ベクトル $v_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

から正則行列 $T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ を用いて変数変換 $x(t) = Tz(t)$ を

行うと
$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= T^{-1}MTz(t) + T^{-1}u(t) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{3k}{m} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}_1(t) + \frac{k}{m}z_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_0}{m}\sin pt \\ \ddot{z}_2(t) + \frac{3k}{m}z_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_0}{m}\sin pt \end{cases}$$

このとき $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$, $r = \frac{f_0}{m}$ とおくと角解は

No.

Date

同次方程式の特性方程式 $\lambda^2+\omega^2=0$ の根が $\lambda=\pm i\omega$ であるから 解の基本系は $x_1(t)=\cos\omega t$ $x_2(t)=\sin\omega t$ である。

ロンスキアンは $\Delta(t)=\begin{vmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\end{vmatrix}=\omega\neq 0$

である. 非同次方程式の解は

$$x_1(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t-\cos\omega t\int\frac{r\sin pt}{\sqrt{2}\,\omega}\sin\omega t\,dt+\sin\omega t\int\frac{r\sin pt}{\sqrt{2}\,\omega}\cos\omega t\,dt$$

$$=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t+\frac{r\cos\omega t}{2\sqrt{2}\,\omega}\left(\frac{1}{p+\omega}\sin(p+\omega)t-\frac{1}{p-\omega}\sin(p-\omega)t\right)$$

$$+\frac{r\sin\omega t}{2\sqrt{2}\,\omega}\left(-\frac{1}{p+\omega}\cos(p+\omega)t-\frac{1}{p-\omega}\cos(p-\omega)t\right)$$

$$=A\sin(\omega t+\phi)+\frac{r}{2\sqrt{2}\,\omega}\left(\frac{1}{p+\omega}\sin pt-\frac{1}{p-\omega}\sin pt\right)$$

$$=A\sin(\omega t+\phi)+\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{1}{(\omega^2-p^2)}\sin pt$$

ここで A, ϕ は任意定数である。

よって解は

$$\begin{cases} z_1(t)=A_1\sin(\omega_1 t+\phi_1)+\dfrac{r}{\sqrt{2}(\omega_1^2-p^2)}\sin pt\\ z_2(t)=A_2\sin(\omega_2 t+\phi_2)+\dfrac{r}{\sqrt{2}(\omega_2^2-p^2)}\sin pt\end{cases}$$

が得られる。ただし A_i, ϕ_i $(i=1,2)$ は任意数である。

変数を戻すて $x(t)=Tz(t)$ より

$$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t+\phi_1)+\dfrac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t+\phi_2)+\dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-p^2}+\dfrac{1}{\omega_2^2-p^2}\right)\sin pt\\ x_2(t)=\dfrac{A_1}{\sqrt{2}}\sin(\omega_1 t+\phi_1)-\dfrac{A_2}{\sqrt{2}}\sin(\omega_2 t+\phi_2)+\dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-p^2}-\dfrac{1}{\omega_2^2-p^2}\right)\sin pt\end{cases}$$

を得る.

初期条件より

$$x_1(0) = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\sin\phi_1 + \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin\phi_2 = 0 \quad \cdots ①$$

$$x_2(0) = \frac{A_1}{\sqrt{2}}\sin\phi_1 - \frac{A_2}{\sqrt{2}}\sin\phi_2 = 0 \quad \cdots ②$$

$$\dot{x}_1(0) = \frac{A_1\omega_1}{\sqrt{2}}\cos\phi_1 + \frac{A_2\omega_2}{\sqrt{2}}\cos\phi_2 + \frac{rp}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2-p^2} + \frac{1}{\omega_2^2-p^2}\right) = 0 \quad \cdots ③$$

$$\dot{x}_2(0) = \frac{A_1\omega_1}{\sqrt{2}}\cos\phi_1 - \frac{A_2\omega_2}{\sqrt{2}}\cos\phi_2 + \frac{rp}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2-p^2} - \frac{1}{\omega_2^2-p^2}\right) = 0 \quad \cdots ④$$

①+②より $\frac{2}{\sqrt{2}}A_1\sin\phi_1 = 0 \quad \phi_1 = 0$

①−②より $\frac{2}{\sqrt{2}}A_2\sin\phi_2 = 0 \quad \phi_2 = 0$

③+④より $\frac{2A_1\omega_1}{\sqrt{2}}\cos\phi_1 + rp\left(\frac{1}{\omega_1^2-p^2}\right) = 0$

$\phi_1 = 0$より $\sqrt{2}A_1\omega_1 + rp\left(\frac{1}{\omega_1^2-p^2}\right) = 0$

$$A_1 = \frac{rp}{\sqrt{2}\,\omega_1(p^2-\omega_1^2)}$$

③−④より $\frac{2}{\sqrt{2}}A_2\omega_2\cos\phi_2 + rp\left(\frac{1}{\omega_2^2-p^2}\right) = 0$

$\phi_2 = 0$より $\sqrt{2}A_2\omega_2 + rp\left(\frac{1}{\omega_2^2-p^2}\right) = 0$

$$A_2 = \frac{rp}{\sqrt{2}\,\omega_2(p^2-\omega_2^2)}$$

$x_1(t), x_2(t)$ に代入すると

解は

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{rp}{2\omega_1(p^2-\omega_1^2)}\sin\omega_1 t + \dfrac{rp}{2\omega_2(p^2-\omega_2^2)}\sin\omega_2 t + \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-p^2} + \dfrac{1}{\omega_2^2-p^2}\right)\sin pt \\ x_2(t) = \dfrac{rp}{2\omega_1(p^2-\omega_1^2)}\sin\omega_1 t - \dfrac{rp}{2\omega_2(p^2-\omega_2^2)}\sin\omega_2 t + \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{1}{\omega_1^2-p^2} - \dfrac{1}{\omega_2^2-p^2}\right)\sin pt \end{cases}$$

またここで、$m=5$, $k=10$, $f_0=5$, $p=1$ より, $\omega_1^2 = \frac{k}{m} = 2$, $\omega_2^2 = \frac{3k}{m} = 6$, $r = \frac{f_0}{m} = 1$

$$\begin{cases} x_1(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\sqrt{2}t - \dfrac{\sqrt{6}}{60}\sin\sqrt{6}t + \dfrac{3}{5}\sin t \\ x_2(t) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin\sqrt{2}t + \dfrac{\sqrt{6}}{60}\sin\sqrt{6}t + \dfrac{2}{5}\sin t \end{cases}$$

となる。