定数係数2階線形微分方程式

$a, b \in \mathbb{R}$を定数として，定数係数の2階の線形微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = f(t) \tag{1}$$

を考える．

同次方程式において，$x(t) = e^{\lambda t}$とおいて得られた方程式$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$を特性方程式という．

(i) 特性方程式の解が相異なる実数の場合

特性方程式の解をλ_1，λ_2（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）とすると，$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$，$x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$であり，ロンスキアンは

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0\end{aligned}$$

であるから一次独立な解であり，解の基本系を作る．

従って，一般解は

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

例 1：微分方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\dfrac{dx(t)}{dt} + 6x(t) = 0$ の解を求めよ．

解は

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

c_1，c_2 は任意定数である．

(ii) 特性方程式の解が共役な複素数の場合

特性方程式の解は，$\lambda_1 = \sigma + \mathtt{i}\omega$，$\lambda_2 = \sigma - \mathtt{i}\omega$（$\sigma, \omega \in \mathbb{R}$）と表すことが出来る．このとき，$x_1(t) = e^{(\sigma+\mathtt{i}\omega)t}$，$x_2(t) = e^{(\sigma-\mathtt{i}\omega)t}$であり，ロンスキアンは

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \begin{vmatrix} e^{(\sigma+\mathtt{i}\omega)t} & e^{(\sigma-\mathtt{i}\omega)t} \\ (\sigma+\mathtt{i}\omega)e^{(\sigma+\mathtt{i}\omega)t} & (\sigma-\mathtt{i}\omega)e^{(\sigma-\mathtt{i}\omega)t} \end{vmatrix} \\ &= -2\mathtt{i}\omega e^{2\sigma t} \neq 0\end{aligned}$$

であるから一次独立な解であり，解の基本系を作る．

従って，一般解は

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^{(\sigma+\mathtt{i}\omega)t} + c_2 e^{(\sigma-\mathtt{i}\omega)t} \\ &= \bar{c}_1 e^{\sigma t}\cos\omega t + \bar{c}_2 e^{\sigma t}\sin\omega t \\ &= c_0 e^{\sigma t}\sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

c_1，c_2は任意定数である．

$\bar{c}_1 = c_1 + c_2$，$\bar{c}_2 = \mathtt{i}(c_1 - c_2)$，$c_0 = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}$，$\tan\phi = \dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$とおいた．

例２：微分方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - 2\dfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 0$ の解を求めよ．

解は

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \\
&= c_0 e^t \sin(t + \phi)
\end{aligned}
$$

c_1，c_2 は任意定数である．$c_0 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$，$\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$ とした．

(iii) 特性方程式の解が重解の場合
特性方程式の解は $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_0$ であり，$x_1(t) = c_1 e^{\lambda_0 t}$ は解である．ここで，c_1 は任意定数である．

これと独立な解を求めるため，解を $x_2(t) = c(t)x_1(t) = c(t)e^{\lambda_0 t}$ とおいて同次方程式に代入して整理すると

$$c(t)(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b)e^{\lambda_0 t} + \left\{ \frac{d^2c(t)}{dt^2} + (2\lambda_0 + a)\frac{dc(t)}{dt} \right\} e^{\lambda_0 t} = 0$$

特性方程式の判別式 $D = a^2 - 4b = 0$ であるから $b = \dfrac{a^2}{4}$ が得られる．このとき，$\lambda_0 = -\dfrac{a}{2}$ となるから，上式へ代入して

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} = 0$$

この微分方程式の解は，$c(t) = c_2 + c_3 t$ であり，c_2，c_3 は任意定数である．
従って，$x_2(t) = (c_2 + c_3 t)e^{\lambda_0 t}$ を得る．

ロンスキアンは

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \begin{vmatrix} c_1 e^{\lambda_0 t} & (c_2+c_3t)e^{\lambda_0 t} \\ c_1\lambda_0 e^{\lambda_0 t} & c_3 e^{\lambda_0 t}+\lambda_0(c_2+c_3t)e^{\lambda_0 t} \end{vmatrix} \\ &= c_1c_3e^{2\lambda_0 t} \neq 0\end{aligned}$$

であるから，$x_1(t)=c_1e^{\lambda_0 t}$，$x_2(t)=(c_2+c_3t)e^{\lambda_0 t}$ は一次独立な解であり，解の基本系を作る．

従って，一般解は

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{\lambda_0 t}$$

ただし，c_1+c_2 を改めて c_1 に，c_3 を c_2 とおいた．

例３：微分方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - 8\dfrac{dx(t)}{dt} + 16x(t) = 0$ の解を求めよ．

解は

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{4t}$$

c_1，c_2 は任意定数である．

定数係数2階非同次線形方程式$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+a\dfrac{dx(t)}{dt}+bx(t)=f(t)$の解は，同次方程式$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+a\dfrac{dx(t)}{dt}+bx(t)=0$の2つの独立な解$x_1(t)$，$x_2(t)$を使って

$$x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)-x_1(t)\int\frac{f(t)x_2(t)}{\Delta(t)}dt+x_2(t)\int\frac{f(t)x_1(t)}{\Delta(t)}dt \tag{2}$$

c_1，c_2は任意定数，$\Delta(t)$はロンスキアンである．

例４：微分方程式 $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \dfrac{dx(t)}{dt} - 6x(t) = -6t - 7$ の解を求めよ

解は

$$x(t) \;=\; c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + t + \frac{4}{3}$$

c_1，c_2 は任意定数である．

調和振動の解

調和振動は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

解を $x(t) = e^{\lambda t}$ とおいて代入すると

$$(\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

特性方程式 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ の解は $\lambda = \pm i\omega$ であるから，解の基本系は，$x_1(t) = e^{i\omega t}$, $x_2(t) = e^{-i\omega t}$ である.

従って，解は，

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \\
&= \bar{c}_1 \cos\omega t + \bar{c}_2 \sin\omega t \\
&= A\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

c_1，c_2 は任意定数である．ここで，$\bar{c}_1 = c_1 + c_2$，$\bar{c}_2 = \mathtt{i}(c_1 - c_2)$，$A = \sqrt{\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2}$，$\tan\phi = \dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$ とおいた．

減衰振動

バネとおもりからなる振動系で，おもりの速度に比例して粘性抵抗力が働く場合を考えると，おもりの運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t)$$

と書くことができる．cは粘性抵抗係数である．

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, $2\beta = \dfrac{c}{m}$とおくと

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3}$$

と書くことができる．

解を$x(t) = e^{\lambda t}$とおいて代入すると

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$$

特性方程式$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$は，判別式$D = \beta^2 - \omega^2$により，3通りの解を持つ．

(i) $D>0$ のとき，異なる 2 つの実数解 $\lambda=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega^2}$ を持つので，解の基本系は，$x_1(t)=e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega^2})t}$，$x_2(t)=e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega^2})t}$ である．

解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega^2})t}+c_2 e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega^2})t} \\ &= e^{-\beta t}\left(\bar{c}_1\cosh\sqrt{\beta^2-\omega^2}t+\bar{c}_2\sinh\sqrt{\beta^2-\omega^2}t\right) \end{aligned}$$

ただし，$\bar{c}_1=c_1+c_2$，$\bar{c}_2=c_1-c_2$ とした．

(ii) $D<0$のとき，異なる2つの複素数解$\lambda=-\beta\pm i\sqrt{\omega^2-\beta^2}$を持つので，解の基本系は$x_1(t)=e^{(-\beta+i\sqrt{\omega^2-\beta^2})t}$，$x_2(t)=e^{(-\beta-i\sqrt{\omega^2-\beta^2})t}$である．

解は，c_1，c_2を任意定数として

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_1e^{(-\beta+i\sqrt{\omega^2-\beta^2})t}+c_2e^{(-\beta-i\sqrt{\omega^2-\beta^2})t}\\
&= e^{-\beta t}\left(\bar{c}_1\cos\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+\bar{c}_2\sin\sqrt{\omega^2-\beta^2}t\right)\\
&= Ae^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+\phi)
\end{aligned}
$$

ただし，$\bar{c}_1=c_1+c_2$，$\bar{c}_2=i(c_1-c_2)$であり，$A=\sqrt{\bar{c}_1^2+\bar{c}_2^2}$，$\tan\phi=\dfrac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2}$とした．

(iii) $D=0$のとき，重解$\lambda=-\beta$を持つので，解の基本系は$x_1(t)=c_1e^{-\beta t}$，$x_2(t)=(c_2+c_3t)e^{-\beta t}$である．

解は，c_1，c_2を任意定数として

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-\beta t}$$

強制振動

バネとおもりからなる振動系で，おもりに外部から強制力 $f(t) = f_0 \sin pt$ が作用する場合を考えると，おもりの運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f_0 \sin pt$$

と書くことができる．

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$\gamma = \dfrac{f_0}{m}$ とおくと

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \gamma \sin pt \tag{4}$$

と書くことができる．

同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ の根が $\lambda = \pm \mathtt{i}\omega$ であるから，解の基本系は，$x_1(t) = \cos\omega t$，$x_2(t) = \sin\omega t$ である．ロンスキアンは

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega \neq 0$$

である．

非同次方程式の解は

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) - x_1(t)\int \frac{f(t)x_2(t)}{\Delta(t)}dt + x_2(t)\int \frac{f(t)x_1(t)}{\Delta(t)}dt \\ &= c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t - \cos\omega t\int \frac{\gamma}{\omega}\sin pt\sin\omega t dt + \sin\omega t\int\frac{\gamma}{\omega}\sin pt\cos\omega t dt \\ &= A\sin(\omega t + \phi) + \frac{\gamma}{\omega^2 - p^2}\sin pt \quad \cdots ① \end{aligned}$$

c_1，c_2 は任意定数であり，$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$，$\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$ である．

初期条件が，$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = 0$で与えられており，$t = 0$から強制力$f(t)$が作用するときの解を考える．

初期条件に代入して

$$x(0) = A \sin \phi = 0$$

$$\dot{x}(0) = A\omega \cos \phi + \frac{\gamma p}{\omega^2 - p^2} = 0$$

これを解いて，$A = -\dfrac{\gamma \dfrac{p}{\omega}}{\omega^2 - p^2}$，$\phi = 0$が得られる．

従って，初期条件を満たす解は

$$
\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{\gamma \dfrac{p}{\omega}}{\omega^2 - p^2} \sin \omega t + \frac{\gamma}{\omega^2 - p^2} \sin pt \\
&= \frac{\dfrac{\gamma}{\omega^2}}{1 - \left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right)
\end{aligned}
$$

- $\dfrac{p}{\omega} < 1$では，$\dfrac{p}{\omega} = 1$に近づくにつれて，振幅は急激に大きくなる．
- $\dfrac{p}{\omega} = 1$のとき，振幅は無限大になる（共振現象）．
- $\dfrac{p}{\omega} > 1$では，振幅は負となるが，これは強制力と位相が180度ずれた振動となり，強制力の向きと運動の向きが反対となる．

粘性減衰力が作用しているバネとおもりからなる振動系に強制力 $f(t) = f_0 \sin pt$ が作用する場合の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) + f_0 \sin pt$$

従って，

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \gamma \sin pt \qquad (5)$$

ただし，$2\beta = \dfrac{c}{m}$，$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$，$\gamma = \dfrac{f_0}{m}$ とおいた．

減衰振動する場合（$\omega^2 > \beta^2$）を考えて解を求めると，

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\beta t}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2-\beta^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2-\beta^2}t\right) \\ &\qquad + \frac{(\omega^2-p^2)\gamma}{(\omega^2-p^2)^2+(2\beta p)^2}\sin pt - \frac{2\beta p\gamma}{(\omega^2-p^2)^2+(2\beta p)^2}\cos pt \\ &= Ae^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+\phi) + \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2\beta p)^2}}\sin(pt+\theta) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

c_1，c_2 は任意定数であり，$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$，$\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$，$\tan\theta = \dfrac{-2\beta p}{\omega^2 - p^2}$ である．

演習問題 1 ：次の微分方程式を解け.

(1) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2\frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) = 0$$

(2) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 5x(t) = 0$$

(3) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}$$

(4) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 1$$

(5) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 9x(t) = \sin 2t$$

(6) $$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 10\frac{dx(t)}{dt} + 9x(t) = 10\sin 3t$$

演習問題２：解が①で表されることを確かめよ.

演習問題３：解が②で表されることを確かめよ.