境界条件に対する解

有限区間$0 \leq x \leq L$における波動方程式

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

ただし，vは定数，について，非自明な解であり，かつ$t \to \infty$で$\psi(x,t)$が発散しない解を求める．

境界条件として，両端が固定されている場合

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \psi(L,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

初期条件は，

$$\begin{cases} \psi(x,0) = p(x) \\ \left.\dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x) \end{cases} \tag{3}$$

とする．

波動方程式の解を $\psi(x,t)=\phi(x)\zeta(t)$ と仮定して式 (1) へ代入して整理すると

$$\frac{1}{v^2\zeta(t)}\frac{d^2\zeta(t)}{dt^2}=\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$

お互いに無関係なものが等しいのは，定数の場合である．

(i) 定数が正の場合，定数を ω^2 として

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\zeta(t)}{dt^2} = (v\omega)^2\zeta(t) \\ \dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \omega^2\phi(x) \end{cases}$$

第 1 式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\zeta(t) = c_1 e^{v\omega t} + c_2 e^{-v\omega t}$$

第 2 式の解は，c_3，c_4 を任意定数として

$$\phi(x) = c_3 e^{\omega x} + c_4 e^{-\omega x}$$

よって，解は

$$\psi(x,t) = \left(c_3 e^{\omega x} + c_4 e^{-\omega x}\right)\left(c_1 e^{v\omega t} + c_2 e^{-v\omega t}\right) \quad \cdots ①$$

式①を境界条件の式（2）に用いて

$$\begin{cases} c_3 + c_4 = 0 \\ c_3 e^{\omega L} + c_4 e^{-\omega L} = 0 \end{cases}$$

よって，$c_3 = 0$，$c_4 = 0$であるが，波動方程式の解として不適である．

(ii) 定数が零の場合

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\zeta(t)}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

第1式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\zeta(t) = c_1 t + c_2$$

第2式の解は，c_3，c_4 を任意定数として

$$\phi(x) = c_3 x + c_4$$

よって，解は

$$\psi(x,t) = (c_3 x + c_4)(c_1 t + c_2) \quad \cdots ②$$

式②を境界条件の式（2）に用いて

$$\begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 L + c_4 = 0 \end{cases}$$

よって，$c_3 = 0$，$c_4 = 0$ であるが，波動方程式の解として不適である．

(iii) 定数が負の場合，定数を $-\omega^2$ として

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\zeta(t)}{dt^2} = -(v\omega)^2\zeta(t) \\ \dfrac{d^2\phi(x)}{dx^2} = -\omega^2\phi(x) \end{cases}$$

第1式の解は，c_1，c_2 を任意定数として

$$\zeta(t) \ = \ c_1 \cos v\omega t + c_2 \sin v\omega t$$

第2式の解は，c_3，c_4 を任意定数として

$$\phi(x) \ = \ c_3 \cos \omega x + c_4 \sin \omega x$$

よって，解は

$$\psi(x,t) = (c_3 \cos \omega x + c_4 \sin \omega x)(c_1 \cos v\omega t + c_2 \sin v\omega t) \quad \cdots ③$$

式③を境界条件の式（2）に用いて

$$\begin{cases} c_3 = 0 \\ c_3 \cos \omega L + c_4 \sin \omega L = 0 \end{cases}$$

$c_4 \sin \omega L = 0$ より $\omega L = n\pi$ （$n = 1, 2, \cdots$）である．

$\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$ に対応する解は

$$\begin{aligned} \psi_n(x,t) &= c_{4n} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(c_{1n} \cos \frac{n\pi v t}{L} + c_{2n} \sin \frac{n\pi v t}{L} \right) \\ &= \sin \frac{n\pi x}{L} \left(d_{1n} \cos \frac{n\pi v t}{L} + d_{2n} \sin \frac{n\pi v t}{L} \right) \end{aligned}$$

ただし，$n = 1, 2, \cdots$ であり，$d_{1n} = c_{1n} c_{4n}$，$d_{2n} = c_{2n} c_{4n}$ とおいた．

以上より，与えられた境界条件を満たす波動方程式の解は，

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\left(d_{1n}\cos\frac{n\pi vt}{L}+d_{2n}\sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，d_{1n}，d_{2n} は弦の初期状態によって決まる定数である．

初期条件の式（3）の第1式に式(4)を代入して

$$\psi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}d_{1n}\sin\frac{n\pi x}{L}=p(x)$$

上式の両辺に $\sin\frac{m\pi x}{L}$ を掛けて $0\le x\le L$ で積分することにより

$$d_{1n}=\frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

同様に，初期条件の式（3）の第2式に式(4)を代入して

$$\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}d_{2n}\frac{n\pi v}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=q(x)$$

上式の両辺に $\sin\dfrac{m\pi x}{L}$ を掛けて $0\leq x\leq L$ で積分することにより

$$d_{2n}=\frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

以上より，初期条件を満たす波動方程式の解は

$$\begin{aligned}\psi(x,t) \;=\; &\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{L}\\ &\times\left[\left\{\frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}\cos\frac{n\pi vt}{L}\right.\\ &\left.+\left\{\frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}\sin\frac{n\pi vt}{L}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

例 1 ：波動方程式 $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$ について，境界条件が，$\psi(0,t) = 0$，$\psi(L,t) = 0$，初期条件が，$\psi(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{L}$，$\left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ であるときの解を求めよ．

［解］
両端固定の境界条件であるので，$\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$，解は式 (5) で与えられる．

初期条件より，$n \neq 1$ のとき

$$d_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

$n = 1$ のとき

$$d_{11} = \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 1$$

$$d_{2n} = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

従って，与えられた境界条件，初期条件を満たす波動方程式の解は

$$\psi(x,t) = \sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi v t}{L}$$

例２：波動方程式 $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$ について，境界条件が，$\psi(0,t) = 0$，$\psi(L,t) = 0$，初期条件が，$\psi(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{L}x & (0 \le x \le \dfrac{L}{2}) \\ \dfrac{2h}{L}(L-x) & (\dfrac{L}{2} \le x \le L) \end{cases}$，$\left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ であるときの解を求めよ．

［解］

両端固定の境界条件であるので，$\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$，解は式(5)で与えられる．

初期条件より，

$$d_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$d_{2n} = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

従って，与えられた境界条件，初期条件を満たす波動方程式の解は

$$\psi(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

強制振動

弦に垂直な方向から外力 $F_v(x,t)$ が作用するときの波動方程式は，

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{6}$$

ただし，$v^2 = \dfrac{F}{\rho}$，$f(x,t) = \dfrac{F_v(x,t)}{\rho\Delta x}$ である．

境界条件は，両端固定として

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \psi(L,t) = 0 \end{cases}$$

初期条件として

$$\begin{cases} \psi(x,0) = p(x) \\ \left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x) \end{cases}$$

の場合の解を求める．

自由振動による解を$\xi(x,t)$，強制振動による解を$\zeta(x,t)$とすると，重ね合わせの原理より

$$\psi(x,t) = \xi(x,t) + \zeta(x,t)$$

と書くことができる．

解を式(6)へ代入して分離すると

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} & \cdots ① \\ \dfrac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) & \cdots ② \end{cases}$$

式①に対する境界条件は

$$\begin{cases} \xi(0,t) = 0 \\ \xi(L,t) = 0 \end{cases}$$

初期条件は

$$
\begin{cases}
\xi(x,0) = p(x) \\
\left.\dfrac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x)
\end{cases}
$$

式 ② に対する境界条件は

$$
\begin{cases}
\zeta(0,t) = 0 \\
\zeta(L,t) = 0
\end{cases}
$$

初期条件は

$$
\begin{cases}
\zeta(x,0) = 0 \\
\left.\dfrac{\partial \zeta(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0
\end{cases}
$$

式①について，上記の境界条件，初期条件による解は

$$
\begin{aligned}
\xi(x,t) \;=\; &\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L} \\
&\times \left[\left\{ \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \right\} \cos\frac{n\pi vt}{L} \right. \\
&\left. + \left\{ \frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \right\} \sin\frac{n\pi vt}{L} \right]
\end{aligned}
$$

である．

式②について，自由振動の場合と同様に変数分離法を用いると

$$
\zeta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}
$$

これは，境界条件$\zeta(0,t)=0$，$\zeta(L,t)=0$を満たしている．

これを式②へ代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2\phi_n(t)}{dt^2} \sin\frac{n\pi x}{L} = -v^2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{n\pi x}{L} + f(x,t)$$

従って

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(t) \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ただし，

$$\bar{f}_n(t) = \frac{d^2\phi_n(t)}{dt^2} + \left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2 \phi_n(t)$$

であり，$\bar{f}_n(t)$ は，フーリエ級数により

$$\bar{f}_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{L} dx$$

で求めることができる．

従って，$n=1,2,\cdots$ に対して常微分方程式

$$\frac{d^2\phi_n(t)}{dt^2}+\omega_n^2\phi_n(t)=\bar{f}_n(t)$$

を解けばよい．ただし，$\omega_n=\dfrac{n\pi v}{L}$ であり，初期条件は，式②から

$$\begin{cases}\phi_n(0)=0\\ \left.\dfrac{d\phi_n(t)}{dt}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$

である．

定数係数線形2階常微分方程式であるので，解は

$$\phi_n(t) \;=\; C_1\cos\omega_n t+C_2\sin\omega_n t+\frac{1}{\omega_n}\int\bar{f}_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

初期条件より$C_1=0$，$C_2=0$であるので，式②の解は

$$\zeta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi v}\int_0^t \bar{f}_n(\tau)\sin\frac{n\pi v(t-\tau)}{L}d\tau\sin\frac{n\pi x}{L}$$

以上より，強制振動を受ける波動方程式の解は

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}&\sin\frac{n\pi x}{L}\\ &\times\left[\left\{\frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}\cos\frac{n\pi vt}{L}\right.\\ &\qquad+\left\{\frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}\sin\frac{n\pi vt}{L}\\ &\qquad\qquad\left.+\frac{L}{n\pi v}\int_0^t \bar{f}_n(\tau)\sin\frac{n\pi v(t-\tau)}{L}d\tau\right]\end{aligned}\tag{7}$$

例３：強制力の作用する波動方程式 $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t)$ について，境界条件が，$\psi(0,t)=0$，$\psi(L,t)=0$，初期条件が，$\psi(x,0)=0$，$\left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ とする．$x=\dfrac{L}{2}$ の位置に，調和関数による力 $f_0\sin pt$ が加わるときの解を求めよ．

［解］
デルタ関数を用いて，$f(x,t)$ は

$$f(x,t) = f_0\delta\left(x-\frac{L}{2}\right)\sin pt$$

$\bar{f}_n(t)$ は

$$\begin{aligned}\bar{f}_n(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \\ &= \frac{2f_0}{L}\sin\frac{n\pi}{2}\sin pt\end{aligned}$$

よって，強制解は,

$$\begin{aligned}
\zeta(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi v}\int_0^t\left(\frac{2f_0}{L}\sin\frac{n\pi}{2}\sin p\tau\right)\sin\frac{n\pi v(t-\tau)}{L}d\tau\sin\frac{n\pi x}{L} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_0}{L}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{1}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2-p^2}\left(\sin pt-\frac{p}{\frac{n\pi v}{L}}\sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}
\end{aligned}$$

$t=0$ で $p(x)=0$，$q(x)=0$ であるので，解は

$$\psi(x,t)=\frac{2f_0}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\frac{1}{\left(\frac{n\pi v}{L}\right)^2-p^2}\left(\sin pt-\frac{p}{\frac{n\pi v}{L}}\sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

演習問題１：波動方程式 $\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}=v^2\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$（$v$ は定数）について，境界条件が，$\psi(0,t)=0$，$\psi(L,t)=0$，初期条件が，$\psi(x,0)=\begin{cases} h & (\dfrac{2L}{5}\leq x\leq\dfrac{3L}{5}) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$（ただし，$h$ は定数），$\dfrac{\partial\psi(x,0)}{\partial t}=0$ であるときの解を求めよ．

演習問題２：微分方程式 $\dfrac{d^2\phi_n(t)}{dt^2}+\omega_n^2\phi_n(t)=\bar{f}_n(t)$（$\omega_n$ は定数）の初期条件が $\phi_n(0)=0$，$\dfrac{d\phi_n(0)}{dt}=0$ であるとき，次の $\bar{f}_n(t)$ に対する解 $\phi_n(t)$ を求めよ．

(1) $\bar{f}_n(t)=F_0(1-at)$（F_0，a は定数）

(2) $\bar{f}_n(t)=F_0e^{-at}$（F_0，a は定数）