ラプラス変換

対象とする関数 $f(t)$ に，次の仮定をおく．

- $f(t)$ は，区分的に連続な関数であり

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ f(t) & (t \geq 0) \end{cases}$$

- $f(t)$ に対して，

$$e^{-\sigma_0 t}|f(t)| \leq M \qquad ({}^\forall t > T)$$

を満足する定数 σ_0，$M > 0$，$T > 0$ が存在する．

$e^{-\sigma t}f(t)$ は $^\forall\sigma > \sigma_0$ に対して絶対積分可能でフーリエ変換可能であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t}f(t)e^{-\mathtt{i}\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+\mathtt{i}\omega)t}dt\end{aligned}$$

複素数 $s = \sigma + \mathtt{i}\omega$ を定義すると，$\mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t)]$ は s の関数となる．

定義

One–side signal convention であり高々指数的な関数 $f(t)$ に対して，

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{1}$$

により定義される関数 $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換という．ただし，s は複素数であり，$\mathtt{Re}(s) > \sigma_0$ をラプラス変換の収束領域という．

関数 $f(t)$ のラプラス変換をラプラス変換演算子 $\mathcal{L}$ により $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ で表す．

例題１：次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ．

1) $f(t) = 1$

$$F(s) = \frac{1}{s}$$

2) $f(t) = t$

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$

3) $f(t) = e^{at}$　(a は定数)

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

4) $f(t) = \cos \alpha t$　(α は定数)

$$F(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

5) $f(t) = \delta(t)$

$$F(s) = 1$$

ラプラス変換の性質

関数 $f(t)$，$g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$，$\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$ とする．

- 線形性

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s)$$

ただし，$a, b \in \mathbb{R}$.

- 微分

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2}\frac{df(0)}{dt} - s^{n-3}\frac{d^2 f(0)}{dt^2} - \cdots - \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}$$

- 積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$$

- 原関数の変数の変換

$$\mathcal{L}[f(t-L)] = e^{-Ls} F(s)$$

- 像関数の変数の変換

$$\mathcal{L}[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$$

- 最終値の定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- 畳み込み積分

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] = F(s)G(s)$$

例題２：次の関数 $f(t)$ のラプラス変換を求めよ.

1) $f(t) = te^{at}$ （$a \in \mathbb{R}$ は定数）

［解］

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$$

2) $f(t) = t\cos\omega t$ （$\omega \in \mathbb{R}$ は定数）

［解］

$$F(s) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

ラプラス逆変換

ラプラス変換は一意的であるので，その逆変換が定義できる．

$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-\mathtt{i}\omega t}dt$$

により定義したので，フーリエ逆変換を用いて

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s)e^{\mathtt{i}\omega t}d\omega$$

定義

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ とするとき，ラプラス逆変換は次式で定義される．

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\int_{\sigma-\mathtt{i}\infty}^{\sigma+\mathtt{i}\infty} F(s)e^{st}ds \qquad (\sigma > \sigma_0) \tag{2}$$

定理

$|F(s)|$ は $|s| \to \infty$ で 0 に収束し，$F(s)$ は $\mathtt{Re}(s) > \sigma_0$ で正則であり，$\mathtt{Re}(s) \leq \sigma_0$ で有限個の極 p_k（$k = 1, 2, \cdots, n$）を持つものとする．このとき，$F(s)$ のラプラス逆変換は次のように計算される．

$$f(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathtt{Res}[F(s)e^{st}, p_k] & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{3}$$

ただし，$\mathtt{Res}[G(s), p]$ は，$G(s)$ の極 p における留数を表す．

$F(s)$ の極とは，$F(s)$ が正則でなくなる点 s_0 のうち，$\displaystyle\lim_{s \to s_0} F(s) = \infty$ となるような点 s_0 のことである．

留数の計算

留数の計算には，次の式が利用される．

- 1位の極（極が単根の場合）

$$\texttt{Res}[F(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) F(s)$$

- m 位の極（極が m 重根の場合）

$$\texttt{Res}[F(s), s_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \to s_0} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \{(s - s_0)^m F(s)\}$$

例題３

次の関数$F(s)$のラプラス逆変換を求めよ．

1) $F(s) = \dfrac{s^2+2s-4}{s(s-2)^2(s^2+4)}$

$s=0$，$\pm 2i$が1位の極，$s=2$が2位の極である．

$$\begin{aligned}
f(t) &= \texttt{Res}[F(s)e^{st},0] + \texttt{Res}[F(s)e^{st},2] + \texttt{Res}[F(s)e^{st},2\texttt{i}] + \texttt{Res}[F(s)e^{st},-2\texttt{i}] \\
&= \lim_{s\to 0}(s-0)\frac{s^2+2s-4}{s(s-2)^2(s^2+4)}e^{st} \\
&\qquad + \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 2}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{(s-2)\frac{s^2+2s-4}{s(s-2)^2(s^2+4)}e^{st}\right\} \\
&\qquad + \lim_{s\to 2\texttt{i}}(s-2\texttt{i})\frac{s^2+2s-4}{s(s-2)^2(s^2+4)}e^{st} + \lim_{s\to -2\texttt{i}}(s+2\texttt{i})\frac{s^2+2s-4}{s(s-2)^2(s^2+4)}e^{st} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1+2t}{8}e^{2t} + \frac{1}{8}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t
\end{aligned}$$

2) $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3+3s^2+3s+1}$

$s=-1$が3位の極である.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathtt{Res}[F(s)e^{st}, -1] \\
&= \frac{1}{(3-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s+1)^3\frac{s^2+1}{(s+1)^3}e^{st}\right\} \\
&= e^{-t}\left(1-2t+t^2\right)
\end{aligned}
$$

3) $F(s) = \dfrac{2s^2+1}{(s+2)(s+1)^2}$

$s=-2$ は 1 位の極，$s=-1$ が 2 位の極である．

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathtt{Res}[F(s)e^{st}, -2] + \mathtt{Res}[F(s)e^{st}, -1] \\
&= \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{2s^2+1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st} \\
&\qquad + \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2\frac{2s^2+1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st}\right\} \\
&= 9e^{-2t} + (3t-7)e^{-t}
\end{aligned}
$$

微分方程式への適用

ラプラス変換の微分に関する性質を利用して，定係数を持つ線形微分方程式を解くことができる.

例題４

微分方程式 $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = e^{-2t}$ について，初期条件 $y(0) = -1$，$\dot{y}(0) = 1$ に対する解をラプラス変換により求めよ.

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ として微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2\{sY(s) - y(0)\} + Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

初期条件を代入して Y について整理すると

$$Y(s) \ = \ \frac{1}{(s+2)(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\
&= \texttt{Res}[\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st}, -2] + \texttt{Res}[\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st}, -1] - \texttt{Res}[\frac{1}{s+1}e^{st}, -1] \\
&= \lim_{s\to -2}(s+2)\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st} + \frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left\{(s+1)^2\frac{1}{(s+2)(s+1)^2}e^{st}\right\} \\
&\qquad - \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{1}{(s+1)}e^{st} \\
&= e^{-2t} + (t-2)e^{-t}
\end{aligned}
$$

演習問題１：次の関数をラプラス変換せよ.

1) $f(t) = -a\sin\omega t$（a，ω は定数）

2) $f(t) = 1 - e^{-2t}$

3) $f(t) = e^{-t}\cos\omega t$　　(ω は定数)

4) $f(t) = t^2 - 2t + 3$

演習問題２：次の関数をラプラス逆変換せよ.

1) $F(s) = \dfrac{2}{(s^2+4)(s+1)}$

2) $F(s) = \dfrac{2}{s(s+2)^2}$

3) $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$

4) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)}$

演習問題３：微分方程式 $\dot{x} + 2x = 1 + te^{-t}$ について，初期条件 $x(0) = -1$ に対する解をラプラス変換を用いて求めよ．