応用数理解析

ID: 1116191012　氏名：東田悠希

演習問題2 //

$x_i(t)$ $(i=1,2,\dots)$ は1次独立かどうか.

(3) $x_1(t)=\cos\omega t$, $x_2(t)=\sin\omega t$, $\omega\neq 0$は定数

ロンスキアンは

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} & \dfrac{dx_2(t)}{dt}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t\end{vmatrix}$$

$$=\omega\cos^2\omega t-(-\omega\sin^2\omega t)=\omega\neq 0$$

よって $x_1(t)$, $x_2(t)$は一次独立である。//

(4) $x_1(t)=e^{t}$, $x_2(t)=e^{-t}$, $x_3(t)=e^{it}$, $x_4(t)=e^{-it}$

ロンスキアンは

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} & \dfrac{dx_2(t)}{dt} & \dfrac{dx_3(t)}{dt} & \dfrac{dx_4(t)}{dt} \\ \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} & \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} & \dfrac{d^2x_3(t)}{dt^2} & \dfrac{d^2x_4(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^3x_1(t)}{dt^3} & \dfrac{d^3x_2(t)}{dt^3} & \dfrac{d^3x_3(t)}{dt^3} & \dfrac{d^3x_4(t)}{dt^3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} & e^{it} & e^{-it} \\ e^{t} & -e^{-t} & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^{t} & e^{-t} & -e^{it} & -e^{-it} \\ e^{t} & -e^{-t} & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$=e^{t}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -e^{-t} & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^{-t} & -e^{it} & -e^{-it} \\ -e^{-t} & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}+e^{-t}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{t} & ie^{it} & -ie^{-it} \\ e^{t} & -e^{it} & -e^{-it} \\ e^{t} & -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$+e^{it}\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-t} & -ie^{-it} \\ e^{t} & e^{-t} & -e^{-it} \\ e^{t} & -e^{-t} & ie^{-it}\end{vmatrix}+e^{-it}\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-t} & ie^{it} \\ e^{t} & e^{-t} & -e^{it} \\ e^{t} & -e^{-t} & -ie^{it}\end{vmatrix}$$

$$=e^{t}\times\Bigg\{(-e^{-t})\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -e^{it} & -e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}+(ie^{it})\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{-it} \\ -e^{-t} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$+(-ie^{-it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{it} \\ -e^{-t} & -ie^{it}\end{vmatrix}\Bigg\}-e^{-t}\Bigg\{e^{t}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e^{it} & -e^{-it} \\ -ie^{it} & ie^{-it}\end{vmatrix}$$

$$+ie^{it}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-it} \\ e^{t} & ie^{-it}\end{vmatrix}+(-ie^{-it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{it} \\ e^{t} & -ie^{it}\end{vmatrix}\Bigg\}$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836AT 7 mm ruled×31 lines

$$+e^{it}\left\{e^{t}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{-it} \\ -e^{-t} & ie^{-it}\end{vmatrix}+(-e^{-t})\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{-it} \\ e^{t} & ie^{-it}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(-ie^{-it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t}\end{vmatrix}\right\}-e^{-it}\left\{e^{t}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e^{-t} & -e^{it} \\ -e^{-t} & -ie^{it}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+(-e^{-t})\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e^{t} & -e^{it} \\ e^{t} & -ie^{it}\end{vmatrix}+(ie^{it})\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=e^{t}\{(-e^{-t})(-i-i)+(-ie^{it})(ie^{-t(i+1)}-e^{-t(i+1)})+(-ie^{-it})(-ie^{t(i-1)}-e^{t(i-1)})\}$$

$$-e^{-t}\{e^{t}(-i-i)+(-ie^{it})(ie^{t(1-i)}+e^{t(1-i)})+(-ie^{-it})(-ie^{t(i+1)}+e^{t(i+1)})\}$$

$$+e^{it}\{e^{t}(ie^{-t(i+1)}-e^{-t(i+1)})+e^{-t}(ie^{t(1-i)}+e^{t(1-i)})+(-ie^{-it})(-1-1)\}$$

$$-e^{-it}\{e^{t}(-ie^{t(i-1)}-e^{t(i-1)})+e^{-t}(-ie^{t(i+1)}+e^{t(i+1)})+ie^{it}(-1-1)\}$$

$$=e^{t}(2ie^{-t}+e^{-t}+ie^{-t}-e^{-t}+ie^{-t})-e^{-t}(-2ie^{t}+e^{t}-ie^{t}-e^{t}-ie^{t})$$

$$+e^{it}(ie^{-ti}-e^{-ti}+ie^{-ti}+e^{-ti}+2ie^{-it})$$

$$-e^{-it}(-ie^{ti}-e^{ti}-ie^{ti}+e^{ti}-2ie^{it})$$

$$=e^{t}(4ie^{-t})-e^{-t}(-4ie^{t})+e^{it}(4ie^{-it})-e^{-it}(-4ie^{it})$$

$$=4i+4i+4i+4i=16i\neq 0$$

よって $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$ は一次独立である