調和振動

一定時間τを隔ててある状態を繰り返す運動を周期運動，あるいは振動という．

ある状態をu，時間をtとすると，周期運動は

$$u(t+\tau) = u(t)$$

で表される．τを周期といい，その状態が単位時間に繰り返される回数fを振動数，あるいは周波数という．$f = \dfrac{1}{\tau}$の関係がある．

tについての正弦関数

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

は，調和振動とよばれる．Aは振幅，$\omega t + \phi$を時間tにおける位相，ωを角周波数，$t = 0$のときの位相ϕを初期位相とよぶ．

演習問題 1

調和振動は余弦関数でも表すことができる．$u(t)$ を

$$u(t) = A\cos(\omega t + \psi)$$

と書くとき，$\psi = \phi + \alpha$ とすることで

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

に書き換えることができる．このときの α の値を求めよ．ただし，$-\pi \leq \alpha \leq \pi$ とする．

バネの振動

一端が天井に固定されたバネを考える．バネの自由端に質量m［kg］のおもりを付けると，δ［m］だけ変位したところで重力による力とバネによる復元力が釣り合っておもりが静止する．このとき

$$mg = k\delta$$

が成立する．ここで，g［$\mathrm{m/s^2}$］は重力加速度，k［N/m］はバネ定数（バネを単位長さだけ伸縮させるために必要な力）である．

静つり合いの位置を基準としておもりの重心を原点に選び，x軸を鉛直下向きに取る．おもりは鉛直方向にのみ運動するものとし，時刻t［sec］でのおもりの変位を$x(t)$［m］とする．

おもりに働く慣性力とバネの復元力との釣り合いにより次式が成立する．

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\{x(t) + \delta\}$$

ここで，$\ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$である．

静つり合いの条件を代入して整理すると

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

これが，おもりの運動を表す方程式である．

おもりの運動を表す方程式$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$の両辺に$\dot{x}(t)$を掛けて

$$
\begin{aligned}
& m\dot{x}(t)\ddot{x}(t)+kx(t)\dot{x}(t)=0 \\
& \quad \rightarrow \quad m\dot{x}(t)\frac{d\dot{x}(t)}{dt}+kx(t)\dot{x}(t)=0 \\
& \quad \rightarrow \quad m\dot{x}(t)\frac{d\dot{x}(t)}{dt}+kx(t)\frac{dx(t)}{dt}=0
\end{aligned}
$$

微分の性質を使うと

$$
\begin{aligned}
& m\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)\right\}+k\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}x^2(t)\right\}=0 \\
& \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)+\frac{1}{2}kx^2(t)\right\}=0
\end{aligned}
$$

右辺$\{\}$内の第1項$\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t)$は運動エネルギー，第2項$\frac{1}{2}kx^2(t)$はポテンシャルエネルギーを表している．

このとき，$E(t) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \dfrac{1}{2}kx^2(t)$ とおくと，

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0$$

両辺を t で積分すると

$$E(t) = C$$

ここで，C は任意定数である．

これは，エネルギー保存則を表している．

おもりの運動を表す方程式$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$において，$\omega^2=\dfrac{k}{m}$ （$m\neq 0$） とおくと

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0 \tag{1}$$

従って，おもりの運動を表す方程式(1)は，定数係数の線形微分方程式である．

振り子の振動

一端が天井に固定された長さ L［m］のひもの他端に質量 m［kg］のおもりがつながれた振り子を考える．ひもには張力 T［N］が作用しており伸び縮みはしない．ひもの固定端を原点として鉛直下向きを正に y 軸をとり，時刻 t［sec］でのおもりの y 軸からの傾きを $x(t)$［rad］とする．おもりは鉛直平面内のみで運動し，摩擦や空気抵抗はないとする．

おもりの遠心力と重力の半径方向成分，ひもの張力の釣り合いより

$$-mL\dot{x}^2(t) = mg\cos x(t) - T$$

ここで，g は重力加速度である．

おもりの慣性力と重力の接線方向成分との釣り合いより

$$mL\ddot{x}(t) = -mg\sin x(t)$$

が得られる．

2つめの方程式において，$\omega^2 = \dfrac{g}{L}$（$L \neq 0$）とおくと

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \sin x(t) = 0 \tag{2}$$

これが，振り子の運動を表す方程式である．

振り子の運動を表す方程式(2)は，$x(t)$に関して非線形な項$\sin x(t)$を含んでおり，非線形微分方程式である．

演習問題２
振り子の振動において，$x(t)$が十分小さく，$x(t) = 0$付近での微小な動きを仮定する．このとき，式(2)に含まれている$\sin x$を$x = 0$の近傍でテーラー展開することにより，微分方程式が

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

となり，おもりの運動を表す方程式(1)と同じ形になることを示せ．

電気振動子

静電容量がC［F］のコンデンサとインダクタンスL［H］のコイルが接続された回路において，コンデンサーを電圧V［V］まで充電してスイッチを閉じる．回路の中の電荷を$x(t)$［C］とすると，

$$\frac{x(t)}{C} + L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

が成立する．

電流$i(t)$［A］は電荷の変化率$\dfrac{dx(t)}{dt}$であるので，

$$\frac{x(t)}{C} + L\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0$$

ここで，$\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$とおくと

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

となり，おもりの運動を表す方程式(1)と同じ形になる．

方程式の解

式 (1) で表される運動の方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ は，変数 x について t に関する 2 階の微分を含んだ微分方程式となっている．

この微分方程式の解は，次のように書くことができる．

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

ただし，A，ϕ は任意の定数である．
あるいは，

$$x(t) = A \cos(\omega t + \psi)$$

ただし，A，ψ は任意の定数である．

例： $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ が，微分方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ の解であることを確かめよ．

$x(t)$ を t で2回微分して

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

微分方程式へ代入すると

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) &= \{-A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)\} + \omega^2 \{A\sin(\omega t + \phi)\} \\
&= (-A\omega^2 + \omega^2 A)\sin(\omega t + \phi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

従って，$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ は微分方程式を満たしており，解である．

演習問題３

$x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$ が微分方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ の解であることを確かめよ．

解に表れる定数A，ϕ，ψは，初期条件（$t=0$のときの状態）が指定されることで決めることができる．

例：微分方程式$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$の解が，$x(t)=A\sin(\omega t+\phi)$で与えられている．初期条件が，$x(0)=a$（$a\neq 0$），$\dot{x}(0)=0$で与えられているときの解を求めよ．

初期条件に解を代入して

$$x(0)=A\sin\phi=a$$
$$\dot{x}(0)=A\omega\cos\phi=0$$

これを解いて

$$\phi=\frac{2n+1}{2}\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$$
$$A=\frac{a}{\cos n\pi}$$

よって，初期条件を満たす解は

$$x(t)=a\cos\omega t$$

演習問題４

微分方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ の解が $x(t) = A\cos(\omega t + \psi)$ で与えられている．初期条件が，$x(0) = a$（$a \neq 0$），$\dot{x}(0) = 0$ で与えられているときの解を求めよ．

演習問題５

微分方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ の解が，$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ で与えられている．初期条件が，$x(0) = 0$，$\dot{x}(0) = a$（$a \neq 0$）で与えられているときの解を求めよ．