ID：1116191012　氏名：東田悠希

演習問題3

$A_1=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ のとき固有方程式は $A_1-\lambda I=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0$

よって固有値は $\lambda=1\pm\sqrt{-1}=1+i,\ 1-i$

$\lambda=1+i$ のとき $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ とすると $A_1x=\lambda x$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(1+i)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-y=(1+i)x\\x+y=(1+i)y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y=ix\\x=iy\end{cases}$$

よって $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$ $(c_1\neq0,\ c_1\in\mathbb{R})$

$\lambda=1-i$ のとき同様に $A_1x=\lambda x$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(1-i)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x-y=(1-i)x\\x+y=(1-i)y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y=-ix\\x=-iy\end{cases}$$

よって $x=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}=c_2\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}$ $(c_2\neq0,\ c_2\in\mathbb{R})$

このとき正則行列 T_0 を $T_0=\begin{bmatrix}i&-i\\1&1\end{bmatrix}$ とすると

$$T_0^{-1}A_1T_0=\begin{bmatrix}1+i&0\\0&1-i\end{bmatrix}$$ //

次に(2)のA_2について考えると (1)と同様に

$A_2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}$ 固有方程式は $|A_2-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-1\\1&2-\lambda&1\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)(-1)^2\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2-\lambda\\2&2\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-2)-(2-4+2\lambda)$

$=(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)-2\lambda+2=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0$

よって固有値は $-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=-(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6)=-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

より $\lambda=1,2,3$

$\lambda=1$のとき、$x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$とすると $A_2x=\lambda x$より $\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x-z=x\\x+2y+z=y\\2x+2y+3z=z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=0\\x+y=0\\x+y=0\end{cases}$ $\quad z=0,\ y=-x$ よって $x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\-x\\0\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$=c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\quad\begin{pmatrix}c_1\in\mathbb{R}\\c_1\neq0\end{pmatrix}$

$\lambda=2$のとき同様に $A_2x=\lambda x\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x-z=2x\\x+2y+z=2y\\2x+2y+3z=2z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-x\\z=-x\\2x+2y=-z\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$ よって $x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\end{bmatrix}=c_2\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix}c_2\in\mathbb{R}\\c_2\neq0\end{pmatrix}$

$\lambda=3$のとき同様に $A_2x=\lambda x\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x-z=3x\\x+2y+z=3y\\2x+2y+3z=3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x\\y=x+z=-x\\2x+2y=0\end{cases}$ よって $x=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}=c_3\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix}c_3\in\mathbb{R}\\c_3\neq0\end{pmatrix}$

このとき正則行列 T_1 を $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ とおくと

$$\underline{T_1^{-1} A_2 T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} //$$

次に (3) の行列について考える。(1), (2) と同様に

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ とおくと固有方程式は

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2 \times 2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - 1)(-8 - 2\lambda + \lambda^2) - 4(-8 - 2\lambda + \lambda^2)$$

$$= \lambda^4 - 2\lambda^3 - 9\lambda^2 + 2\lambda + 8 + 32 + 8\lambda - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 - 13\lambda^2 + 10\lambda + 40 = 0$$

よって固有値は $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 13\lambda^2 + 10\lambda + 40 = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda^2-5)$ より

$\lambda = -2, 4, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

$\lambda = -2$ のとき $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ とおくと $Bx = \lambda x$ より $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = -2x \\ 2x - y = -2y \\ -2z = -2z \\ 4w = -2w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$3x - 4x = 0$

$x = 0, y = 0$ よって $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(c_1 \neq 0, c_1 \in \mathbb{R})$

同様に $\lambda = 4$ のとき $Bx = \lambda x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 4x \\ 2x - y = 4y \\ -2z = 4z \\ 4w = 4w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x = y = 0$

よって $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$(c_2 \neq 0, c_2 \in \mathbb{R})$

$\lambda = \sqrt{5}$ のとき同様にして $B\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \sqrt{5} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x+2y = \sqrt{5}x \\ 2x-y = \sqrt{5}y \\ -2z = \sqrt{5}z \\ 4w = \sqrt{5}w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{5}-1)x-2y=0 \\ -2x+(\sqrt{5}+1)y=0 \\ (\sqrt{5}+2)z=0 \\ (\sqrt{5}-4)w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}y \\ z=0 \\ w=0 \end{cases}$$

よって $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(c_3 \neq 0, c_3 \in \mathbb{R})$

$\lambda = -\sqrt{5}$ のとき同様にして $B\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = -\sqrt{5} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x+2y = -\sqrt{5}x \\ 2x-y = -\sqrt{5}y \\ -2z = -\sqrt{5}z \\ 4w = -\sqrt{5}w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{5})x+2y=0 \\ 2x+(\sqrt{5}-1)y=0 \\ (-2+\sqrt{5})z=0 \\ (4+\sqrt{5})w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}y \\ z=0 \\ w=0 \end{cases}$$

よって $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = c_4 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

このとき正則行列 T_2 を $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}+1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると

$$T_2^{-1} B T_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix} //$$

まとめると：演習問題1の行列で対角可能な行列は

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 全てで、

それぞれ対角化すると

$T_0^{-1} A_1 T_0 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} //$, $T_1^{-1} A_2 T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} //$ $T_2^{-1} B T_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix} //$

となる //