応用数理解析

ID: 1116191012　氏名：東田悠希

演習問題2

波動方程式 $\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$ の初期条件が
（vは定数）

$\psi(x,0) = 0$, $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ であり境界条件が $\psi(0,t) = 0$, $\psi(L,t) = e^{-t}\sin pt$

（pは定数）. $\psi(x,t)$ のtに関するラプラス変換を $\Psi(x,s)$ とするとき、$\Psi(x,s)$について解け.

波動方程式をtについて両辺ラプラス変換すると

$$s^2 \Psi(x,s) - s\psi(x,0) - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = v^2 \frac{d^2 \Psi(x,s)}{dx^2}$$

初期条件を代入して整理すると

$$s^2 \Psi(x,s) = v^2 \frac{d^2 \Psi(x,s)}{dx^2}, \quad \frac{d^2 \Psi(x,s)}{dx^2} - \left(\frac{s}{v}\right)^2 \Psi(x,s) = 0$$

$\Psi(x,s) = e^{\lambda x}$ とすると

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - \left(\frac{s}{v}\right)^2 e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - \frac{s^2}{v^2}\right) = 0$$

より特性方程式の解は $\lambda = \pm\frac{s}{v}$ であるから $\Psi(x,s)$についての解は

$$\Psi(x,s) = C_1 e^{\frac{s}{v}x} + C_2 e^{-\frac{s}{v}x}$$

である.（C_1, C_2：任意定数）

境界条件より

$$\begin{cases} \Psi(0,s) = C_1 + C_2 = 0 \\ \Psi(L,s) = C_1 e^{\frac{s}{v}L} + C_2 e^{-\frac{s}{v}L} = \dfrac{p}{(s+1)^2+p^2} \end{cases}$$

これを解くと $C_1 = \dfrac{-p}{\{(s+1)^2+p^2\}(e^{-\frac{s}{v}L} - e^{\frac{s}{v}L})}$, $C_2 = \dfrac{p}{\{(s+1)^2+p^2\}(e^{-\frac{s}{v}L} - e^{\frac{s}{v}L})}$

であるから

$$\Psi(x,s) = \frac{p\,(e^{-\frac{s}{v}x} - e^{\frac{s}{v}x})}{\{(s+1)^2+p^2\}(e^{-\frac{s}{v}L} - e^{\frac{s}{v}L})}$$

//