応用数理解析

No.
Date

ID：1116191012　氏名：東田悠希

演習問題

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\qquad\left(\mu=\frac{c}{2\rho},\quad v^2=\frac{F}{\rho}\right)$$

初期条件
$$\begin{cases}\psi(x,0)=p(x)\\ \left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=q(x)\end{cases}$$

$\mathcal{F}[\psi(x,t)]=\Psi[\omega,t]$　$\mathcal{F}[p(x)]=P(\omega)$，$\mathcal{F}[q(x)]=Q(\omega)$

とすると、フーリエ変換した波動方程式は次のようになる。

$$\mathcal{F}[(左辺)]=\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]=\frac{d^2\Psi(\omega,t)}{d^2t}+2\mu\frac{d\Psi(\omega,t)}{dt}$$

$$\mathcal{F}[(右辺)]=\mathcal{F}\left[v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right]=v^2\times(i\omega)^2\,\Psi(\omega,t)=-v^2\omega^2\Psi(\omega,t)$$

初期条件をフーリエ変換すると次のようになる。

$$\begin{cases}\Psi(\omega,0)=P(\omega)\\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega,t)}{dt}\right|_{t=0}=Q(\omega)\end{cases}$$

$\Psi(\omega,t)=e^{\lambda t}$とすると波動方程式は

$$\lambda^2e^{\lambda t}+2\mu\lambda e^{\lambda t}+v^2\omega^2e^{\lambda t}=0$$

$e^{\lambda t}(\lambda^2+2\mu\lambda+v^2\omega^2)=0$　より、特性方程式の解は

$$\lambda=\begin{cases}-\mu\pm\sqrt{\mu^2-v^2\omega^2} & (\mu^2-v^2\omega^2>0のとき)\\ -\mu & (\mu^2-v^2\omega^2=0のとき)\\ -\mu\pm\sqrt{v^2\omega^2-\mu^2}\,i & (\mu^2-v^2\omega^2<0のとき)\end{cases}$$

となる。

i) $\mu^2-v^2\omega^2>0$のとき

$\lambda_1=-\mu+\sqrt{\mu^2-v^2\omega^2}$，$\lambda_2=-\mu-\sqrt{\mu^2-v^2\omega^2}$とすると

$\Psi_1(\omega,t)=e^{\lambda_1t}$　$\Psi_2(\omega,t)=e^{\lambda_2t}$は解の基本解であるから、

$$\Psi(\omega,t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$$

初期条件より

$$\begin{cases}\Psi(\omega,0)=c_1+c_2=P(\omega)\\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega,t)}{dt}\right|_{t=0}=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=Q(\omega)\end{cases}$$

であるから
$$\Psi(\omega,t)=\frac{P(\omega)\lambda_2-Q(\omega)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_1t}+\frac{Q(\omega)-\lambda_1P(\omega)}{\lambda_2-\lambda_1}e^{\lambda_2t}$$

//

No.

Date

(ii) $\mu^2-\nu^2\omega^2=0$のとき

$\lambda_0=-\mu$ であり　　解は $\Psi_1(\omega,t)=c_1 e^{\lambda_0 t}$

$\Psi(\omega,t)=(C_1+C_2 t)e^{\lambda_0 t}$

初期条件より

$$\begin{cases}\Psi(\omega,0)=C_1=P(\omega)\\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega,t)}{dt}\right|_{t=0}=C_2+C_1\lambda_0=Q(\omega)\end{cases}$$

であるから

$$\Psi(\omega,t)=\{P(\omega)+t(Q(\omega)-P(\omega)\lambda_0)\}e^{\lambda_0 t}$$
$$=\{P(\omega)(1-t\lambda_0)+tQ(\omega)\}e^{\lambda_0 t}$$

(iii) $\mu^2-\nu^2\omega^2<0$のとき

$\lambda_1=-\mu+\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,i$, $\lambda_2=-\mu-\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,i$ より

$\Psi_1(\omega,t)=e^{\lambda_1 t}=e^{-\mu t}\cos\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t$, $\Psi_2(\omega,t)=e^{\lambda_2 t}=e^{-\mu t}\sin\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t$

$\Psi(\omega,t)=C_1 e^{-\mu t}\cos\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t+C_2 e^{-\mu t}\sin\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t$

初期条件より

$$\begin{cases}\Psi(\omega,0)=C_1=P(\omega)\\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega,t)}{dt}\right|_{t=0}=C_2\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}-\mu C_1=Q(\omega)\end{cases}$$

であるから

$$\Psi(\omega,t)=P(\omega)e^{-\mu t}\cos(\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t)+\frac{Q(\omega)+\mu P(\omega)}{\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}}e^{-\mu t}\sin(\sqrt{\nu^2\omega^2-\mu^2}\,t)$$