弦の運動方程式

線密度がρである弦に張力Fが作用している．弦は伸縮しない．

右向きを正にx軸をとり，位置x，時間tにおける弦のy軸方向変位を$\psi(x,t)$とする．

弦の微小要素Δxに働く慣性力とy軸方向に作用する力の釣り合いより

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

ここで，$v^2 = \dfrac{F}{\rho}$である．

弦の運動方程式は波動方程式とも呼ばれ，vは波の速さを表す．

気柱の運動方程式

断面積Sである気柱の内部にある密度がρ，体積弾性率がκである気体に圧力Pが作用している．

右向きを正にx軸をとり，位置x，時間tにおける気体のx軸方向変位を$\sigma(x,t)$とする．

気体の微小体積Δxに働く慣性力と圧力差の釣り合いより

$$\frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \sigma(x,t)}{\partial x^2}$$

ここで，$v^2 = \dfrac{\kappa}{\rho}$である．

気柱の運動方程式は波動方程式となる．

波動方程式の解

波動方程式を解くということは，いろいろな境界条件や初期条件の下に波動方程式の解を求めるということである．

例えば，長さ L の弦があり，その両端が固定されている場合，

$$\begin{cases} \psi(0,t) = 0 \\ \psi(L,t) = 0 \end{cases}$$

により与えられる．

波動方程式は二階の偏微分方程式であるため，各点の初期変位と初期速度が初期条件として与えられる必要がある．

$$\begin{cases} \psi(x,0) = p(x) \\ \left.\dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x) \end{cases}$$

ダランベールの解

波動方程式の解は，正方向への進行波を $f(x-vt)$，負方向への進行波を $g(x+vt)$ とすると

$$\psi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt) \tag{2}$$

と書くことができる．

変数変換を行う．

$$\begin{cases} \xi = x - vt \\ \eta = x + vt \end{cases}$$

波動方程式 (1) へ代入して

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

従って，

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0$$

を解くと

$$\psi(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

ただし，$\displaystyle\int \phi(\eta) d\eta = g(\eta)$ である．

変数を戻して

$$\psi(x, y) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

が得られる．

ダランベールの解は，速度 v で x 軸の正方向に進む波 $f(x - vt)$ と，速度 v で x 軸の負方向に進む波 $g(x + vt)$ の重ね合わせになっている．

初期条件として

$$\begin{cases} \psi(x,0) = p(x) & \cdots ① \\ \left.\dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x) & \cdots ② \end{cases}$$

が与えられたときの解を求める．

ダランベールの解を初期条件 ① に代入して

$$\psi(x,0) = f(x) + g(x) = p(x)$$

変数変換$\xi = x - vt$，$\eta = x + vt$を行うと$\psi(x,t) = f(\xi) + g(\eta)$であるから，初期条件 ② より

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} &= v\left.\left(-\frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\eta}\right)\right|_{t=0} \\ &= v\left\{-f'(x) + g'(x)\right\} = q(x) \end{aligned}$$

従って，連立方程式

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = p'(x) \\ -f'(x) + g'(x) = \dfrac{1}{v} q(x) \end{cases}$$

が得られる．解は

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{2}\left\{ p'(x) - \dfrac{1}{v} q(x) \right\} \\ g'(x) = \dfrac{1}{2}\left\{ p'(x) + \dfrac{1}{v} q(x) \right\} \end{cases}$$

それぞれ積分して

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} p(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x q(z) dz + c_1 \\ g(x) &= \frac{1}{2} p(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x q(z) dz + c_2 \end{aligned}$$

ただし，c_1，c_2 は積分定数である．

ここで

$$f(x)+g(x)=p(x)+c_1+c_2$$

より，初期条件①と比較して $c_1+c_2=0$ である．

よって，与えられた初期条件に対する解は

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= f(x-vt)+g(x+vt) \\ &= \frac{1}{2}\{p(x-vt)+p(x+vt)\}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} q(z)dz \qquad (3)\end{aligned}$$

フーリエ変換による解

無限区間における波動方程式

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

について，初期条件

$$\begin{cases} \psi(x,0) = p(x) \\ \left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = q(x) \end{cases}$$

に対する解をフーリエ変換により求める.

波動方程式，初期条件を x についてフーリエ変換する．

$\Psi(\omega,t)=\mathcal{F}[\psi(x,t)]$，$P(\omega)=\mathcal{F}[p(x)]$，$Q(\omega)=\mathcal{F}[q(x)]$ とすると，フーリエ変換した波動方程式は

$$\frac{d^2\Psi(\omega,t)}{dt^2}=-v^2\omega^2\Psi(\omega,t)$$

初期条件は

$$\begin{cases}\Psi(\omega,0)=P(\omega)\\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega,t)}{dt}\right|_{t=0}=Q(\omega)\end{cases}$$

$\Psi(\omega,t)=e^{\lambda t}$ とすると，特性方程式の解は $\lambda=\pm v\omega\mathtt{i}$ より，$\Psi(\omega,t)_1=\cos v\omega t$，$\Psi_2(\omega,t)=\sin v\omega t$ は基本解系であるから

$$\Psi(\omega,t)=C_1\cos v\omega t+C_2\sin v\omega t$$

初期条件より

$$\begin{cases} \Psi(\omega, 0) = C_1 = P(\omega) \\ \left.\dfrac{d\Psi(\omega, t)}{dt}\right|_{t=0} = C_2 v\omega = Q(\omega) \end{cases}$$

であるから

$$\Psi(\omega, t) = P(\omega)\cos v\omega t + \frac{Q(\omega)}{v\omega}\sin v\omega t$$

フーリエ逆変換により解 $\psi(x, t)$ を求める．

第1項について

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\cos v\omega t] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos v\omega t e^{\mathtt{i}\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(vt+x)\omega+\cos(vt-x)\omega}{2}d\omega
\end{aligned}
$$

よって，たたみ込みの性質を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[P(\omega)\cos v\omega t] &= \int_{-\infty}^{\infty}p(\tau)\left\{\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(vt+x-\tau)\omega+\cos(vt-x+\tau)\omega}{2\pi}d\omega\right\}d\tau \\
&= \frac{1}{2}p(x+vt)+\frac{1}{2}p(x-vt)
\end{aligned}
$$

第2項について，aを定数とした関数

$$f(x)=\begin{cases} a & (|x|\leq vt) \\ 0 & (|x|>vt) \end{cases}$$

のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[f(x)] \;=\; \frac{2a}{\omega}\sin v\omega t$$

これより

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin v\omega t}{v\omega}\right]=\begin{cases} \dfrac{1}{2v} & (|x|\leq vt) \\ 0 & (|x|>vt) \end{cases}$$

よって，たたみ込みの性質を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[Q(\omega)\frac{\sin v\omega t}{v\omega}\right] &= \int_{-vt}^{vt}\frac{1}{2v}q(x-\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}q(z)d(z)\end{aligned}$$

従って，解は

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\Psi(\omega,t)] \\ &= \frac{1}{2}p(x+vt)+\frac{1}{2}p(x-vt)+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} q(z)d(z)\end{aligned}$$

演習問題１：減衰抵抗力を受ける波動方程式は

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+2\mu\frac{\partial\psi}{\partial t}=v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

で与えられる．ただし，$\mu=\dfrac{c}{2\rho}$，$v^2=\dfrac{F}{\rho}$，c は抵抗係数である．初期条件として

$$\begin{cases}\psi(x,0)=p(x)\\ \left.\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=q(x)\end{cases}$$

が与えられているとき，$\mathcal{F}[\psi(x,t)]=\Psi[\omega,t]$ として波動方程式を x についてフーリエ変換し，$\Psi(\omega,t)$ について解け．