応用数理解析

ID：1116191012　氏名 東田悠希

演習問題1

波動方程式 $\dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$

$\psi(0,t)=0,\ \psi(L,t)=0$ 初期条件が $\psi(x,0)=\begin{cases} h & \left(\frac{2L}{5} \le x \le \frac{3L}{5}\right) \\ 0 & (上記以外) \end{cases}$

$\dfrac{\partial \psi(x,0)}{\partial t}=0$ の解を求めよ.

両端固定の境界条件であるので $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ とおく.

初期条件より

$$d_{1n} = \frac{2}{L}\int_0^L p(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}} h\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2h}{L}\times\frac{L}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{\frac{2L}{5}}^{\frac{3L}{5}}$$

$$= \frac{2h}{n\pi}\left(-\cos\frac{3n\pi}{5}+\cos\frac{2n\pi}{5}\right) \quad (= \frac{4h}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{10}$$

$$d_{2n} = \frac{2}{n\pi v}\int_0^L q(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

従って与えられた境界条件、初期条件を満たす波動方程式の解は

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\times\left(d_{1n}\times\cos\frac{n\pi v t}{L} + d_{2n}\times\sin\frac{n\pi v t}{L}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\times\frac{2h}{n\pi}\left(-\cos\frac{3n\pi}{5}+\cos\frac{2n\pi}{5}\right)\times\cos\frac{n\pi v t}{L}$$

$$= \frac{4h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{10}\cos\frac{n\pi v t}{L}$$