

应用数学問題解説

ID: 1116191012 氏名: 東田 優希

問1

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) + 5\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{x}_2(t) = x_1(t) - 4x_2(t) \end{cases}$$

初期条件 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) + 4x_1(t) - x_2(t) = 5\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \\ \ddot{x}_2(t) - x_1(t) + 4x_2(t) = 0 \end{cases}$$

連立微分方程式を行列・ベクトルにより表すと 微分方程式は

$$\ddot{x}(t) = Mx(t) + u(t) \quad \text{書き方}$$

$$\text{ただし}, x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

である。係数行列 M の固有値は特性方程式より $\lambda = -5, -3$ である。

$$\lambda_1 = -5 \text{に対する固有ベクトル } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ と } \lambda_2 = -3 \text{に対する固有ベクトル } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

から構成した正則行列 $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて変数変換 $x(t) = Tz(t)$

$$\text{を行なう}, \ddot{z}(t) = T^{-1}MTz(t) + T^{-1}u(t), T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{z}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{z}_1(t) + 5z_1(t) = \frac{1}{2}\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \quad \text{①}$$

$$\ddot{z}_2(t) + 3z_2(t) = \frac{1}{2}\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \quad \text{②}$$

ここで①の同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + 5 = 0$ の根が $\lambda = \pm\sqrt{5}i$ であるが、角周の基本系は $s_1(t) = \cos\sqrt{5}t, s_2(t) = \sin\sqrt{5}t$ である。

$$\text{ロジスキアンは } \Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{5}t & \sin\sqrt{5}t \\ -\sqrt{5}\sin\sqrt{5}t & \sqrt{5}\cos\sqrt{5}t \end{vmatrix} = \sqrt{5} \neq 0 \text{ である。}$$

非同次方程式の解は

$$\begin{aligned} z_1(t) &= C_1 \cos\sqrt{5}t + C_2 \sin\sqrt{5}t - \cos\sqrt{5}t \int \frac{\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \cdot \sin\sqrt{5}t}{2\sqrt{5}} dt + \sin\sqrt{5}t \int \frac{\sin(2t - \frac{\pi}{2}) \cos\sqrt{5}t}{2\sqrt{5}} dt \\ &= A_1 \sin(\sqrt{5}t + \phi_1) + \frac{1}{4\sqrt{5}(2+\sqrt{5})} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4\sqrt{5}(2-\sqrt{5})} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

ID: 1116191012 氏名: 東田悠希

$$= A_1 \sin(\sqrt{5}t + \phi_1) + \frac{1}{2} \sin(2t - \frac{\pi}{2})$$

ここで A_1, ϕ_1 は任意定数である。同様に $z_1(t) = 1$ を考慮すると角周は

$$\begin{cases} z_1(t) = A_1 \sin(\sqrt{5}t + \phi_1) + \frac{1}{2} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \\ z_2(t) = A_2 \sin(\sqrt{3}t + \phi_2) - \frac{1}{2} \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

が得られる。また A_1, A_2, ϕ_1, ϕ_2 は任意定数である。変数を戻す ($x(t) = T z(t)$)

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\sqrt{5}t + \phi_1) + A_2 \sin(\sqrt{3}t + \phi_2) \\ x_2(t) = -A_1 \sin(\sqrt{5}t + \phi_1) + A_2 \sin(\sqrt{3}t + \phi_2) - \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

を得る。

初期条件より

$$x_1(0) = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 = 0 \quad \cdots ③$$

$$x_2(0) = -A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2 + 1 = 0 \quad \cdots ④$$

$$\dot{x}_1(0) = \sqrt{5}A_1 \cos \phi_1 + \sqrt{3}A_2 \cos \phi_2 = 0 \quad \cdots ⑤$$

$$\dot{x}_2(0) = -\sqrt{5}A_1 \cos \phi_1 + \sqrt{3}A_2 \cos \phi_2 = 0 \quad \cdots ⑥$$

$$⑤ + ⑥ \Rightarrow 2\sqrt{3}A_2 \cos \phi_2 = 0 \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$⑤ - ⑥ \Rightarrow 2\sqrt{5}A_1 \cos \phi_1 = 0 \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$③ + ④ \Rightarrow 2A_2 \sin \phi_2 + 1 = 0$$

$$2A_2 + 1 = 0$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$③ - ④ \Rightarrow 2A_1 \sin \phi_1 - 1 = 0$$

$$2A_1 - 1 = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_1(t), x_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \sin(\sqrt{5}t + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}) \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} \sin(\sqrt{5}t + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{2}) - \sin(2t - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2} \cos \sqrt{5}t - \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t \\ x_2(t) = -\frac{1}{2} \cos \sqrt{5}t - \frac{1}{2} \cos \sqrt{3}t + \cos 2t \end{cases}$$

11