APP1
Session S2

Réponses des exercices suggérés dans les annexes D et E des notes de cours « Mathématiques des systèmes et signaux à temps continu »

Séries de Fourier

6.1-3

(a) Périodique
Période $T = 2\pi$
Harmoniques présentes : $k = 1$ et $k = 3$

(b) Périodique
Période $T = 2\pi$
Harmoniques présentes : $k = 0$, $k = 4$ et $k = 7$

(c) Non-périodique

6.2-3

Le signal $f(t)$ a une fréquence fondamentale $\omega_0 = 1$, et donc une période $T = 2\pi$.

(a)

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 3\cos(t) + \sin(5t - \frac{\pi}{6}) - 2\cos(8t - \frac{\pi}{3}) \\
&= 3\cos(t) + \cos(5t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) + 2\cos(8t - \frac{\pi}{3} + \pi) \\
&= 3\cos(t) + \cos(5t - \frac{2\pi}{3}) + 2\cos(8t - \frac{2\pi}{3})
\end{aligned}
$$

On cherche les C_k et les ϕ_k dans

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

On a donc :

$C_0 = 0$
$C_1 = 3$, $C_5 = 1$, $C_8 = 2$, et $C_k = 0$ pour $k \neq 1, 5, 8$
$\phi_1 = 0$, $\phi_5 = -\dfrac{2\pi}{3}$, $\phi_8 = -\dfrac{2\pi}{3}$, et $\phi_k = 0$ pour $k \neq 1, 5, 8$

(b)

Ici, on veut les $X(k)$ dans

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

Par Euler, on a la relation suivante entre les $X(k)$, et les C_k et les ϕ_k de la partie (a) :

$$|X(k)| = \frac{C_k}{2}, \quad \angle X(k) = \phi_k \quad \text{et} \quad \angle X(-k) = -\phi_k$$

On a donc :

$X(k) = \dfrac{3}{2}$	pour $k = -1$ et $k = 1$
$X(k) = \dfrac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	pour $k = 5$
$X(k) = \dfrac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}}$	pour $k = -5$
$X(k) = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	pour $k = 8$
$X(k) = e^{j\frac{2\pi}{3}}$	pour $k = -8$
$X(k) = 0$	pour $k \neq \pm 1, \pm 5$ et ± 8

(c) On peut donc écrire :

$$f(t) = \frac{3}{2} e^{jt} + \frac{3}{2} e^{-jt} + \frac{1}{2} e^{j(5t - \frac{2\pi}{3})} + \frac{1}{2} e^{-j(5t - \frac{2\pi}{3})} + e^{j(8t - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(8t - \frac{2\pi}{3})}$$

6.2-2

(a)

$$X(k) = \frac{2}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{2}) \qquad \text{pour } k \neq 0$$

et

$$X(k) = 0 \qquad \text{pour } k = 0$$

(b)

$$X(k) = \frac{1}{k\pi}\sin(\frac{k\pi}{5}) \qquad \text{pour } k \neq 0$$

et

$$X(k) = \frac{1}{5} \qquad \text{pour } k = 0$$

(c)

$$X(k) = \frac{j}{2k\pi} \qquad \text{pour } k \neq 0$$

et

$$X(k) = \frac{1}{2} \qquad \text{pour } k = 0$$

6.2-9

On démontre ici la propriété de décalage temporel des séries de Fourier.

Soient le signal périodique $f(t)$, de période T, et soit $\widehat{f}(t) = f(t-d)$ une version décalée de d du signal $f(t)$. Notez qu'on prend ici d, et non T (comme dans l'énoncé) pour indiquer le décalage. Nous préférons réserver T pour indiquer la période du signal.

Les coefficients de la série de Fourier de $f(t)$ se calculent :

$$F(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Dans le cas de $\widehat{f}(t) = f(t-d)$, on a plutôt :

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} \widehat{f}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} f(t-d)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

En faisant le changement de variable $\tau = t - d$, on a

$t = \tau + d$, $dt = d\tau$ et l'intégrale, selon la variable τ , va maintenant de $\tau = -d$ à $\tau = -d + T$.

On peut donc écrire :

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{T}\int_{\tau=-d}^{\tau=-d+T} f(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+d)}d\tau$$

On obtient, dans l'intégrale, le produit de 2 exponentielles complexes, dont une ne dépend pas de τ . On peut donc mettre celle-ci en évidence :

$$\widehat{F}(k) = e^{-jk\omega_0 d}\ \frac{1}{T}\int_{\tau=-d}^{\tau=-d+T} f(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

Puisque le signal *f*(*t*) (ou $f(\tau)$) est périodique, et que les fonctions $e^{-jk\omega_0\tau}$ sont aussi périodiques avec la même fréquence fondamentale que $f(\tau)$, l'intégrale va toujours donner le même résultat pourvu qu'on prenne une période entière. (Faites un dessin si vous n'en êtes pas convaincu). On peut donc écrire, par cette équivalence :

$$\widehat{F}(k) = e^{-jk\omega_0 d}\ \frac{1}{T}\int_{\tau=0}^{\tau=T} f(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

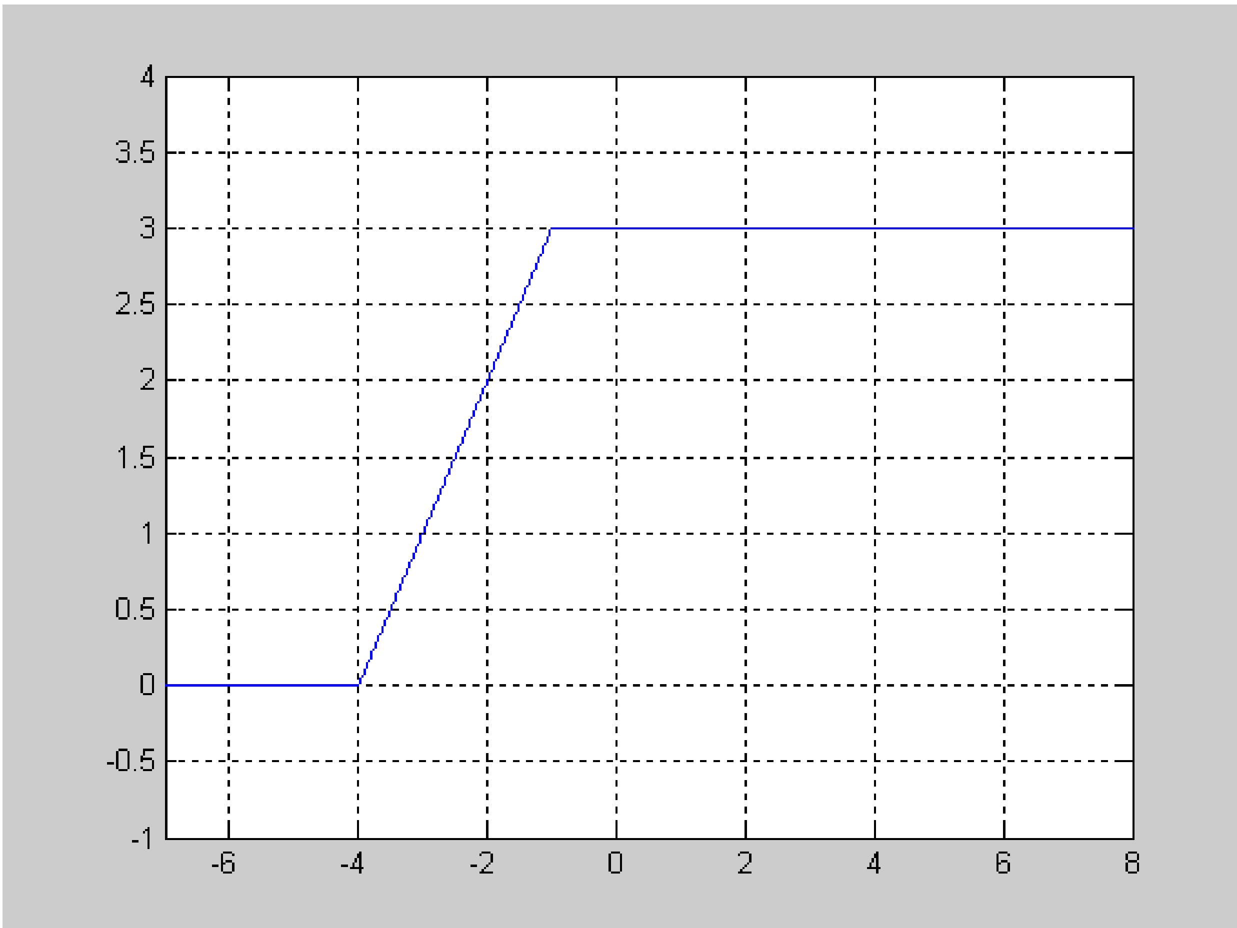
L'intégrale (avec le facteur 1/*T* devant) n'est rien d'autre que *F*(*k*). On a donc démontré que

$$\widehat{F}(k) = e^{-jk\omega_0 d}F(k)$$

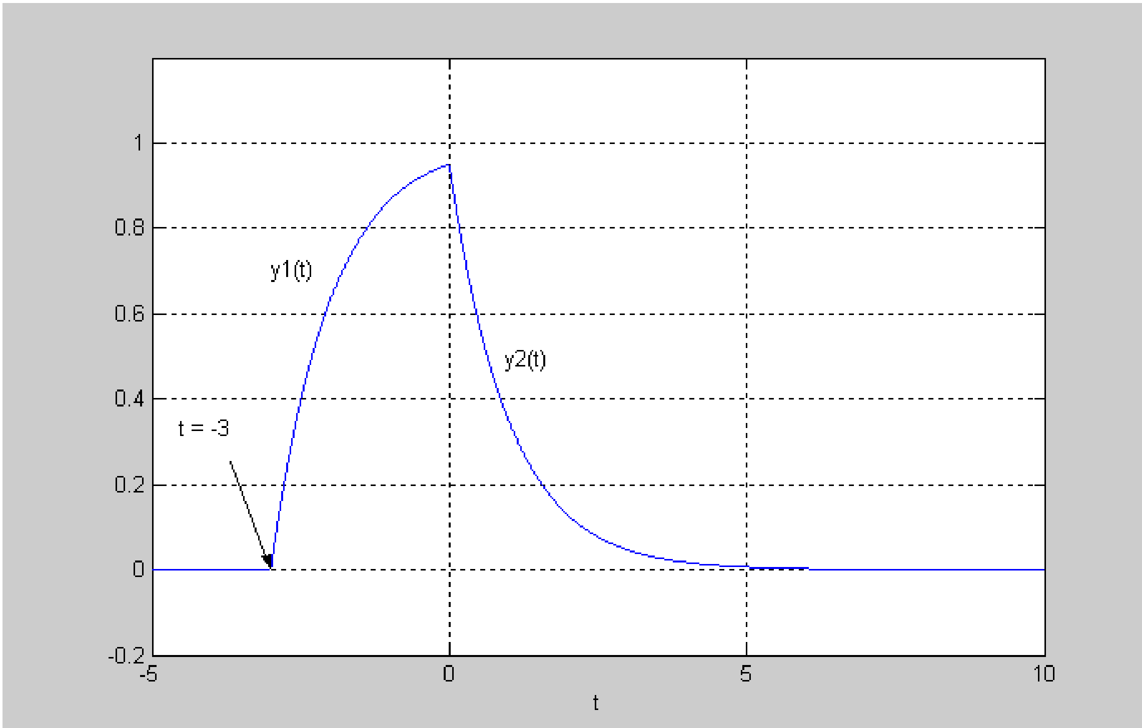
Convolution

2.4-13

(c)



(d)



Avec

$$y_1(t) = 1 - e^{-(t+3)} \qquad \text{pour } t \text{ entre } -3 \text{ et } 0$$

et

$$y_2(t) = e^{-t}(1 - e^{-3}) \qquad \text{pour } t > 3$$

2.4-4

(a) $$y(t) = e^{-t}u(t) * u(t) = (1 - e^{-t})u(t)$$

(b) $$y(t) = e^{-t}u(t) * e^{-t}u(t) = te^{-t}u(t)$$

(Voir la table 2.1 à la page 231 des notes de cours sur les mathématiques des systèmes et signaux à temps continu.)