Atelier de mathématiques
Session S2, hiver 2018
Unité 6
Préparé par Roch Lefebvre, professeur titulaire
Mise à jour par Audrey Corbeil Therrien

Objectifs :

- Pouvoir dessiner une exponentielle complexe de la forme e^{st} où s est un nombre complexe de la forme $s = \sigma + j\omega$
- Pouvoir déterminer si une intégrale définie, prise entre 0 et ∞, converge ou non vers une valeur finie (et unique)
- Pouvoir déterminer le domaine de convergence d'une intégrale
- Maîtriser la décomposition en fractions partielles d'un ratio de polynômes

Préparation :

Avant de tenter de répondre aux questions de cet atelier, prenez connaissance des documents suivants, en vous assurant de bien les comprendre :

- Document « Complément sur fractions partielles » qui se trouve sur la page Web de l'unité 6 (APP6ge et APP6gi);
- Annexe C, aux pages 234 à 240 des notes de cours « Mathématiques des systèmes et signaux à temps continu » du professeur Roch Lefebvre;
- Révision de vos connaissances de base sur les intégrales. Par exemple, si vous en sentez le besoin, vous pouvez consulter le document « Démystifier la dérivée et l'intégrale » du professeur Roch Lefebvre, ou tout autre ouvrage de référence sur la définition de l'intégrale d'une fonction;
- Révision de vos connaissances de base sur les nombres complexes. Revoyez au besoin l'annexe A (pages 206 à 219) des notes de cours « Mathématiques des systèmes et signaux à temps continu » du professeur Roch Lefebvre.

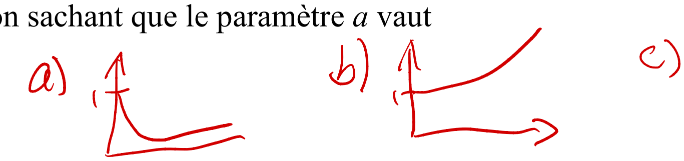
Exercice 1

Soit le signal temporel suivant :

$$x(t) = e^{at}u(t)$$

où $u(t)$ est la fonction échelon (nulle pour $t < 0$ et valant 1 pour $t \geq 0$).

Dessiner l'allure de cette fonction sachant que le paramètre a vaut



(a) $a = -2$
(b) $a = 2$
(c) $a = -2 + 20j$
(d) $a = 2 + 20j$
(e) $a = 0 + 20j$

Exercice 2

Pour les 5 fonctions de l'exercice 1, calculez la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{t=0}^{t=\infty} x(t)dt$$

Lesquelles de ces 5 intégrales convergent, et lesquelles ne convergent pas? Une intégrale converge si, en l'évaluant, on obtient une valeur finie et unique.

Exercice 3

Pour les fonctions (a) et (b) de l'exercice 1, calculez l'intégrale suivante :

$$X(s) = \int_{t=0}^{t=\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Le paramètre s est un nombre complexe, défini de façon générale par $s = \sigma + j\omega$. Dans chacun des cas (i.e. pour chaque fonction $x(t)$), vous devrez posez une hypothèse sur les valeurs admises pour le paramètre s qui permettent que l'intégrale converge. Le domaine des valeurs admises du paramètre s est appelé le *domaine de convergence* de cette intégrale.

Exercice 4

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+4} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)}$$

La décomposition en fractions partielles signifie qu'il faut trouver les constantes *A* et *B* dans l'expression suivante :

$$X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+4)}$$

Exercice 5

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{s+4}{s^4+3s^3+2s^2}$$

(On vous laisse ici déterminer quelle doit être la forme de chaque fraction partielle dans la décomposition.)

Exercice 4

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+4} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)}$$

La décomposition en fractions partielles signifie qu'il faut trouver les constantes A et B dans l'expression suivante :

$$X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+4)}$$

Exercice 5

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{s+4}{s^4+3s^3+2s^2}$$

(On vous laisse ici déterminer quelle doit être la forme de chaque fraction partielle dans la décomposition.)

$$\frac{s+4}{s^2(s+2)(s+1)} = \frac{Ds+E}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{A}{(s+1)}$$

Exercice 4

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+4} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)}$$

La décomposition en fractions partielles signifie qu'il faut trouver les constantes *A* et *B* dans l'expression suivante :

$$X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+4)}$$

Exercice 5

Décomposez le ratio de polynômes suivant en une somme de fractions partielles :

$$X(s) = \frac{s+4}{s^4+3s^3+2s^2}$$

(On vous laisse ici déterminer quelle doit être la forme de chaque fraction partielle dans la décomposition.)