Aucune documentation permise

Évaluation FORMATIVE

Session S2 - Unité 7 GE

GEL265-Numérisation de signaux analogiques

SOLUTIONNAIRE

Département de génie électrique et de génie informatique

Faculté de génie

Université de Sherbrooke

Hiver 2023

Question 1

a) Dénormaliser le filtre Bessel passe-bas à une fréquence de 250 Hz (à la main) :

$$\overline{H}(s) = \frac{1}{s^4 + 3.124s^3 + 4.392s^2 + 3.201s + 1}$$

Réponse :

Il faut remplacer s par s/($2\pi f$), soit s/($2\pi 250$).

Nous obtenons la fonction de transfert suivante :

$$\overline{H}(s) = \frac{6.088e12}{s^4 + 4907s^3 + 1.084e7s^2 + 1.241e10s + 6.088e12}$$

b) Factorisez en deux sous-fonctions d'ordre 2 la fonction de transfert obtenue en (a), de telle façon que le gain DC de chaque sous-fonction soit identique. Donnez le facteur de qualité *Q* de chacune des deux sous-fonctions d'ordre 2 ainsi que la valeur ω_0. Vous pouvez utiliser MATLAB.

Réponse :

On veut maintenant factoriser $\overline{H}(s)$ en deux sous-fonctions d'ordre 2. On doit principalement déterminer les racines du dénominateur, puis grouper les racines complexes conjuguées par paires et obtenir les polynômes d'ordre 2 correspondants. En Python :

```
num1_denorm = 6.0881e12

den1_denorm = [1 4907,  1.084e7,  1.241e10,  6.088e12]

racine=np.roots(den1_denorm)


den_1=np.poly(racine[0:2])

den_2=np.poly(racine[2:4])

wc1=np.sqrt(den_1[2]);

wc2=np.sqrt(den_2[2])

% Distribuer les gains
```

```
K = np.sqrt(num1_denorm/(wc1**2 * wc2**2))
H2_1_num = K*wc1**2
H2_2_num = K*wc2**2
```

On trouve alors :

$$H_1(s) = \frac{2.766e6}{s^2+2065s+2.766e6} \qquad H_2(s) = \frac{2.201e6}{s^2+2842s+2.201e6}$$

On montre facilement que le produit de ces deux fonctions d'ordre 2 donne la fonction d'ordre 4 trouvée en (a).

Finalement, le facteur de qualité de ces deux fonctions d'ordre 2 est (voir forme générale des fonctions passe-bas d'ordre 2) :

```
wc1=np.sqrt(den_1[2])
wc2=np.sqrt(den_2[2])
Q1=wc1/den_1[1]
Q2=wc2/den_2[1]
```

Ce qui nous donnes :

wc1 = 1.6632e+03

Q1 = 0.8055

wc2 = 1.4835e+03

Q2 = 0.5219

Question 2

Soit la fonction de transfert $\overline{H}(s)$ suivante, d'un filtre passe-bas normalisé d'ordre 2 :

$$\overline{H}(s) = \frac{2.8985}{s^2 + 2.2097s + 2.9413}$$

Quel est le gain DC (ω = 0) de ce filtre?

Réponse :

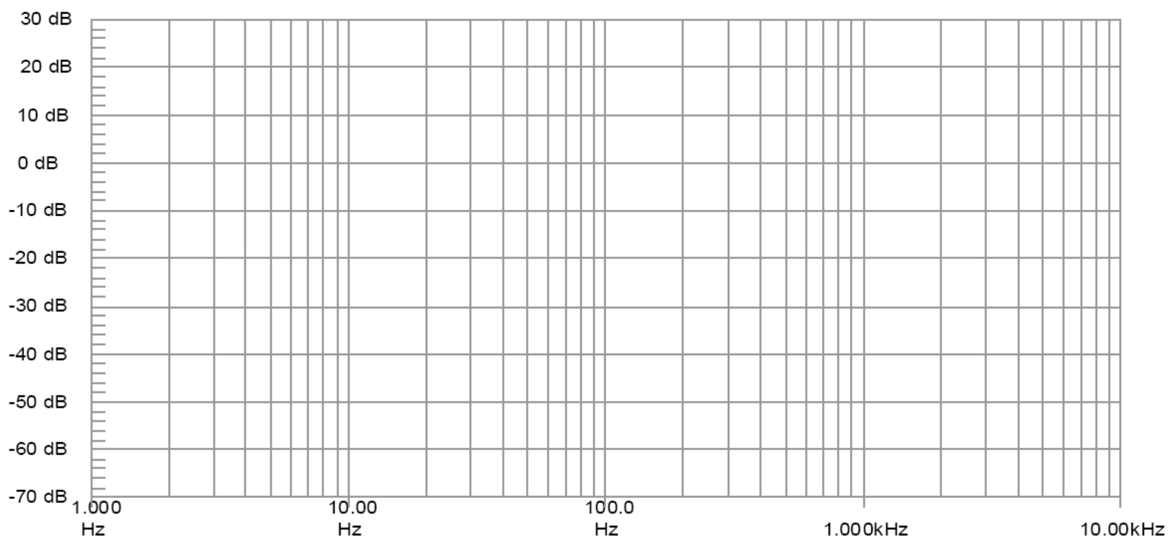
Le gain DC de ce filtre est 2.8985 / 2.9413 = 0.98544 (-0.127 dB)

QUESTION 3

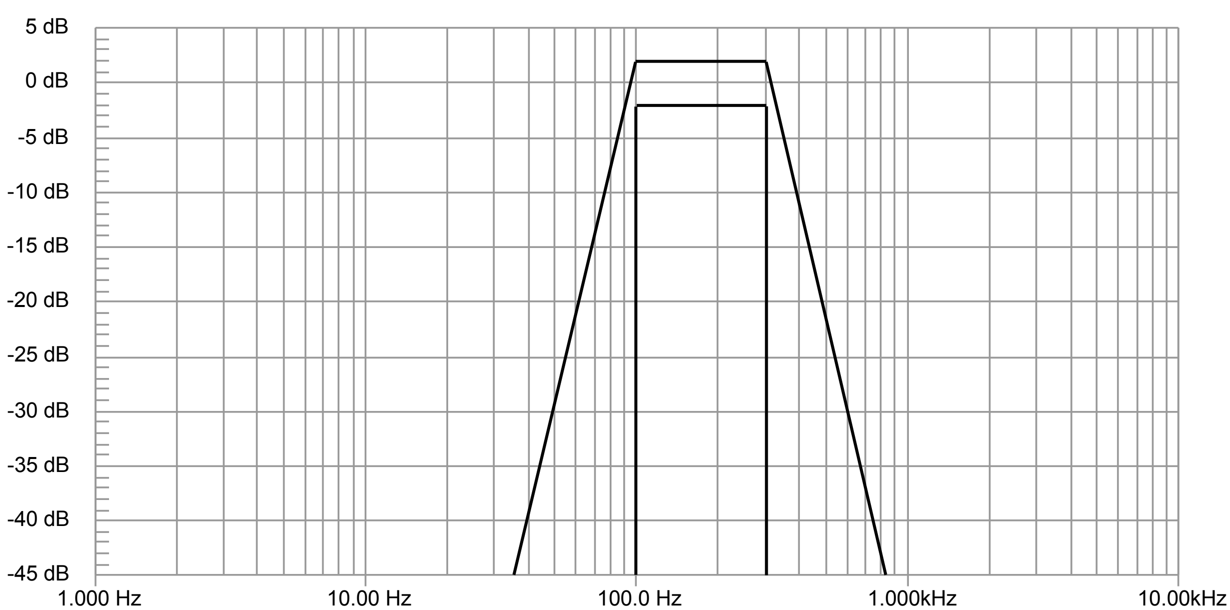
On souhaite réaliser le filtre passe-bande dont les spécifications apparaissent ci-dessous :

- gain dans la bande passante, de 100 Hz à 300 Hz, de 0 dB ±2dB ;
- au moins 30 dB d'atténuation pour $f \leq 50$ Hz et $f \geq 600$ Hz.

a) Tracez sur la grille suivante le gabarit de spécifications du filtre passe-bande.

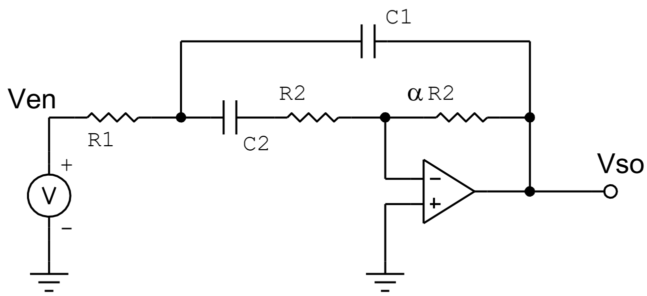


Réponse :



QUESTION 4

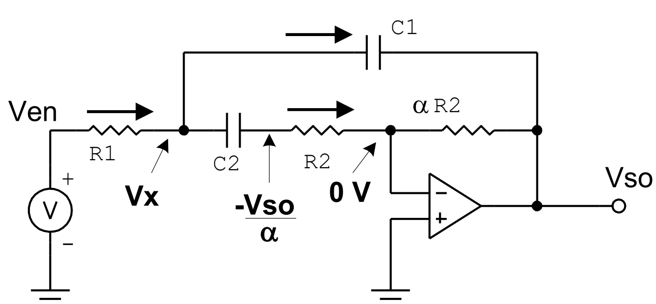
Soit le circuit suivant, que l'on appelle un « –VCVS » (un VCVS négatif), dans lequel l'ampli-op peut être considéré comme idéal :



(a) Déterminez sa fonction de transfert $H(s) = \frac{V_{so}(s)}{V_{en}(s)}$ dans le cas où $R_1 = R_2 = R$ et $C_1 = C_2 = C$ en présentant son dénominateur sous la forme standard $s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2$ et écrivez les expressions mathématiques des paramètres Q, ω_0 et du gain K en fonction de R, C et α, ainsi que les expressions mathématiques de R, C et α en fonction des paramètres Q, ω_0 et du gain K.

Réponse :

L'ampli-op peut être considéré comme idéal et il y a une rétroaction négative par l'intermédiaire de la résistance de valeur $\alpha \times R_2$. On peut donc analyser ce circuit avec la technique v+ = v- et i+ = i- = 0, ce qui donne le schéma suivant, une fois que l'on a constaté que l'ampli-op avec les deux résistances R_2 et α R_2 constitue un amplificateur de gain -α, ce qui signifie que la tension à la gauche de R_2 vaut Vso/α [§] :



Diviseur de tension à l'entrée de l'amplificateur :

[§] Notez qu'il est facile d'arriver à cette conclusion sans reconnaître que l'ampli-op avec les deux résistances R_2 et αR_2 constitue un amplificateur de gain $-\alpha$. Il suffit en effet de constater que le courant dans R_2 est le même que celui dans αR_2, ce qui s'écrit $\frac{V_{C2-R2}-0}{R2} = \frac{0-V_{so}}{\alpha R2}$, donc $V_{C2-R2} = \frac{-V_{so}}{\alpha}$.

$$\frac{R_2}{\frac{1}{sC_2}+R_2}Vx=\frac{-Vso}{\alpha} \quad donc\ avec \begin{array}{l}C_1=C_2=C\\R_1=R_2=R\end{array} \quad Vx=-Vso\frac{(1+sRC)}{s\alpha RC}$$

KCL au nœud V_X :

$$\boldsymbol{\frac{Ven-Vx}{R_1}=\frac{\frac{-Vso}{\alpha}-0}{R_2}+\frac{Vx-Vso}{\frac{1}{sC_1}}\ donc\ avec} \begin{array}{l}C_1=C_2=C\\R_1=R_2=R\end{array}$$

$$\boldsymbol{Ven-Vx=-\frac{Vso}{\alpha}+sRCVx-sRCVso}$$

$$\boldsymbol{Ven=-Vso\left(\frac{1}{\alpha}+sRC\right)+Vx(1+sRC)}$$

On remplace V_X par son expression :

$$\boldsymbol{Ven=-Vso\left(\frac{1}{\alpha}+sRC\right)+-Vso\frac{(1+sRC)(1+sRC)}{s\alpha RC}}$$

$$Ven=-Vso\frac{sRC+\alpha s^2R^2C^2+1+2sRC+s^2R^2C^2}{s\alpha RC}$$

$$\frac{Vso(s)}{Ven(s)}=\frac{-\alpha RCs}{(1+\alpha)R^2C^2s^2+3RCs+1}$$

Exprimant sous la forme standard :

$$\frac{Vso(s)}{Ven(s)}=\frac{-\frac{\alpha}{(1+\alpha)RC}s}{s^2+\frac{3}{(1+\alpha)RC}s+\frac{1}{(1+\alpha)R^2C^2}}$$

$$donc \quad {\omega_0}^2=\frac{1}{(1+\alpha)R^2C^2}$$

$$et \quad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{3}{(1+\alpha)RC}, \quad \text{ce qui implique que} \quad Q=\frac{\sqrt{(1+\alpha)}}{3}$$

En observant le numérateur qui indique la présence d'un zéro à l'origine et d'un zéro à l'infini, on conclue qu'il s'agit d'un passe-bande d'ordre 2. Sachant que la structure du numérateur d'un tel filtre est $K\ (\omega_0/\ Q)$ s (cette information vous sera donnée lors du sommatif), on en déduit que :

$$K=\frac{-\alpha}{3}$$

Finalement, des formulations de ω_0, Q et K, on extrait les équations suivantes pour R, C et α, ainsi que la façon de les utiliser :

1°) Donner à α la valeur nécessaire pour obtenir le facteur de qualité Q spécifié

$$\alpha=9Q^2-1$$

2°) Connaissant la valeur de α, on choisit la valeur du produit *RC* pour obtenir la fréquence centrale ω_0 spécifiée

$$RC = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)}\omega_0}$$

3°) Le gain *K* est fixé par la valeur de α et dépend donc de la valeur spécifiée pour le facteur de qualité *Q*

$$K = \frac{-\alpha}{3} = \frac{1-9Q^2}{3}$$

(b) Déterminez S_α^Q, la sensibilité de *Q* aux variations de α et utilisez ce résultat pour établir la nouvelle valeur (approximative) du facteur de qualité *Q*, qui valait initialement 2, après que α ait augmenté de 2%.

Réponse :

Pour déterminer S_α^Q il faut d'abord exprimer *Q* en fonction de α, ce dont nous disposons déjà, et ensuite il faut dériver *Q* par rapport à α. Finalement, il faut multiplier le résultat par α / *Q* et simplifier l'expression autant que possible.

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = \frac{1}{3}\frac{\partial\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}\right]}{\partial \alpha} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}(1+\alpha)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{6\sqrt{(1+\alpha)}}$$

$$S_\alpha^Q = \frac{1}{6\sqrt{(1+\alpha)}}\frac{\alpha}{Q} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{\alpha})}\right)$$

D'après ce résultat, qu'arrive-t-il à *Q* si α augmente de 2% lorsque $Q = 2$?

D'abord, pour $Q = 2$, $\alpha = 35$, donc

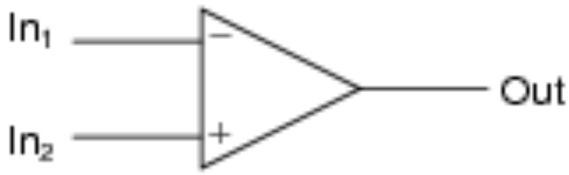
$$S_\alpha^Q = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(\frac{1}{35})}\right) = 0.486$$

donc $\frac{\Delta Q}{Q} \approx S_\alpha^Q \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 0.486\frac{2}{100} = \frac{0.972}{100}$ ou +0.972% de variation sur *Q*

En effet si on calcule de nouveau *Q* avec $\alpha = 35.7$ (+2%), on obtient $Q = 2.01935$, soit +0.968%. Il est important de prendre note du fait que cette approche, lorsque le coefficient S_x^y n'est pas une constante, donne des résultats numériques assez justes seulement pour de faibles variations des valeurs des composants.

QUESTION 5

Un comparateur peut être considéré comme un convertisseur analogique-numérique à un bit. Expliquez pourquoi cette description d'un comparateur est appropriée. Quelle est la fonction d'un convertisseurs analogique numérique, ou CAN ?



Réponse :

Le rôle d'un convertisseur est d'échantillonner un signal analogique et de produire un signal discret, avec des niveaux distincts. Le comparateur prend un signal analogique en entrée, le compare avec une valeur, et émet un signal de niveau haut ou bas.
Plusieurs circuit CAN utilise un ou des comparateurs pour faire la conversion.

QUESTION 6

Un CAN possède une plage dynamique en entrée de 5 V. Sa sortie est un nombre binaire de 12 bits.

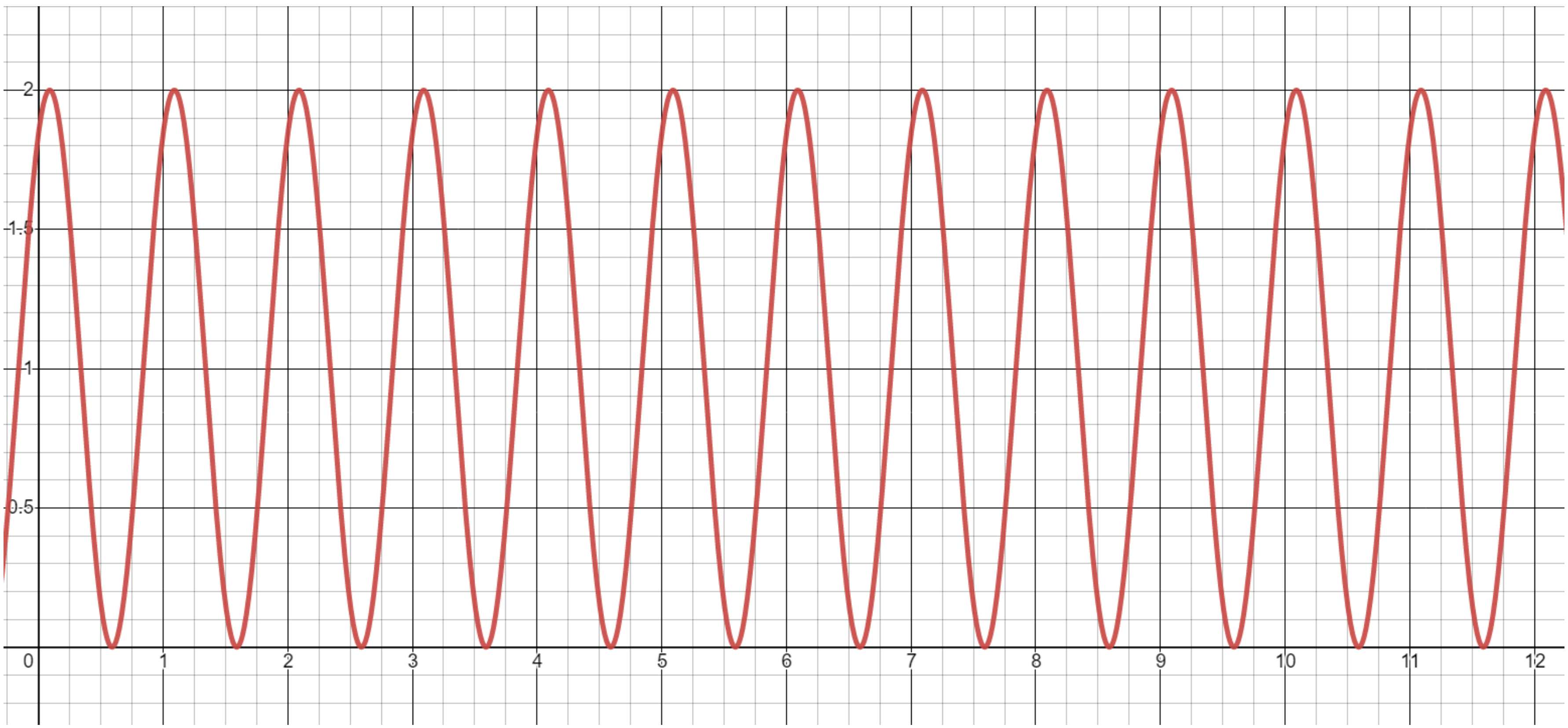
a) Combien de valeurs sont possibles en sortie ?
b) Qu'elle est la valeur en tension représentée par un intervalle entre deux valeurs binaires contiguës ?
c) Expliquez en quoi consiste l'erreur de quantification et quel est son effet sur le signal numérisé.
d) Si la fréquence d'échantillonnage de ce CAN est de 2 kHz, quel sera le débit de données généré par le CAN ?

Réponse :

a) $2^{12} = 4096$ niveaux
b) $\frac{5}{4096} = 0.001221 = 1.22$ mV
c) L'erreur de quantification est la différence entre la valeur réelle du signal analogique et la valeur binaire assigné par le CAN. Cette inexactitude résulte en un bruit additif sur le signal. Ce bruit est forcément plus petit que l'intervalle entre deux valeurs binaire – donc, plus le CAN a de bits, plus l'erreur de quantification est petite.
d) 12 bits par échantillon multiplié par 2000 échantillons par secondes pour un total de 24000 bits par secondes : 24 kbit/s ou 3 kB/s

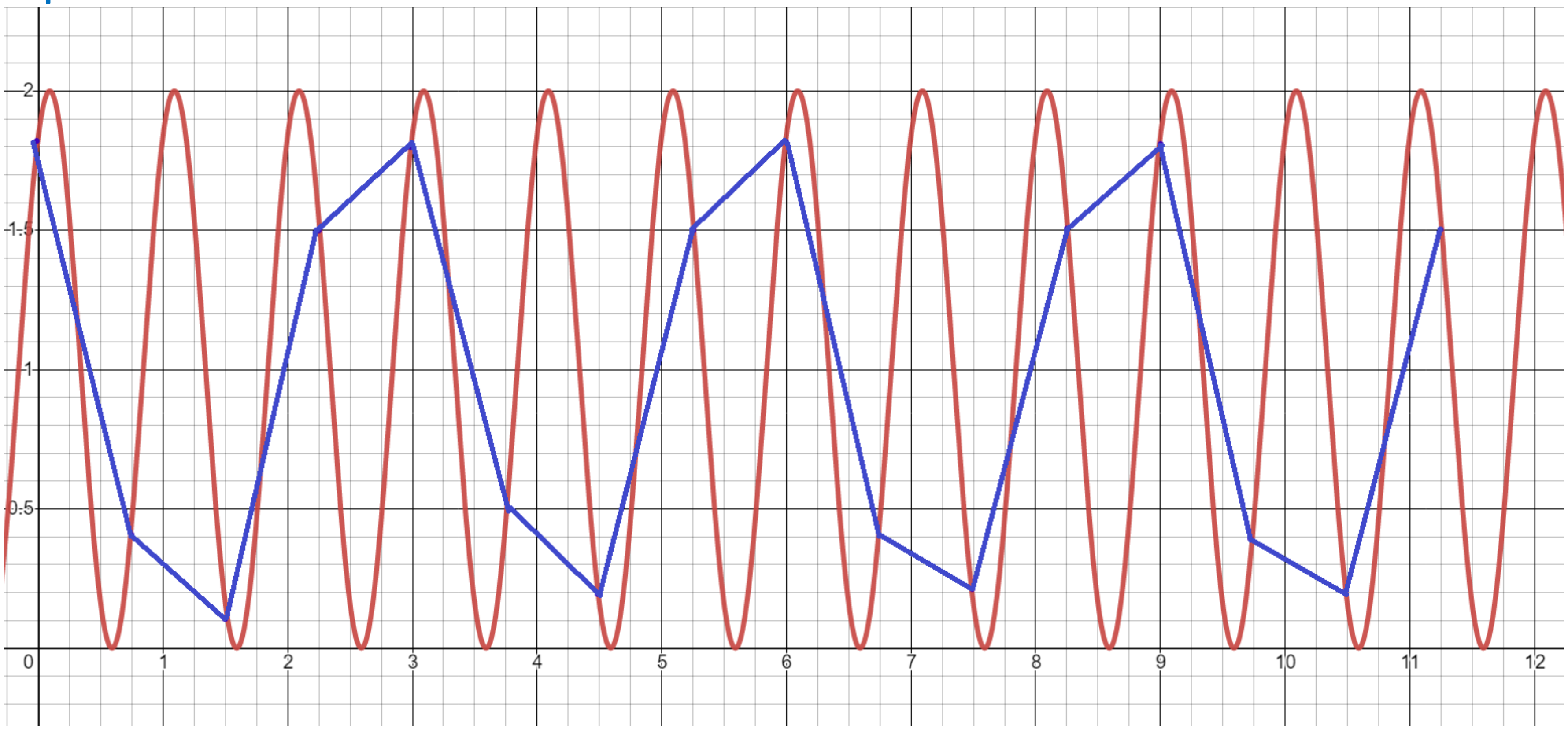
QUESTION 7

Sur la figure ci-dessous, échantillonnez le signal à un fréquence de 1.33 Hz (période de 0.75 s).



a) Quelle est la fréquence du signal original ? Quelle est la fréquence du signal échantillonné ?
b) Comment expliquez-vous cette différence ?
c) Comment éviter que ce phénomène se produise dans un système de numérisation ?

Réponse :



a) Le signal analogique a une fréquence de 1 Hz. La fréquence du signal échantillonné est 0.33 Hz.
b) Il y a un repliement du signal qui fait apparaître une fréquence qui n'était pas présente dans le signal original.
c) La fréquence d'échantillonnage doit être au moins deux fois plus grande que la fréquence la plus élevée du signal d'intérêt afin de bien représenter les fréquences d'intérêt. DE PLUS, afin d'éviter que le bruit ou des fréquences parasites viennent causer un repliement, on ajoute un filtre passe-bas coupant les fréquences pouvant faire un repliement.