04 Conception de filtres électroniques

Texte original par Roch Lefebvre, André Clavet et Noël Boutin.
Mise à jour par Audrey Corbeil Therrien

April 4, 2023

1 Filtres actifs -structure électronique et sensibilité

1.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a étudié les fonctions de transfert de différents types de filtres. On a vu aussi comment appliquer des transformations fréquentielles pour obtenir un filtre à partir d'un autre; typiquement, on applique ces transformations à un filtre passe-bas normalisé pour obtenir un passe-bas, un passe-haut, un passe-bande ou un coupe-bande de caractéristiques données. On a aussi établi que pour réaliser un filtre d'ordre N, il était de mise de décomposer sa fonction de transfert en une série de fonctions d'ordre 2 en cascade, qui seront ensuite faciles à matérialiser en circuits actifs. Ceci est particulièrement important lorsque l'on étudie les circuits de filtres. En limitant à 2 l'ordre d'un filtre réalisé avec un amplificateur opérationnel, on diminue les possibilités d'instabilité et on minimise la sensibilité des fonctions de transfert désirées à la tolérance des éléments (résistances, condensateurs).

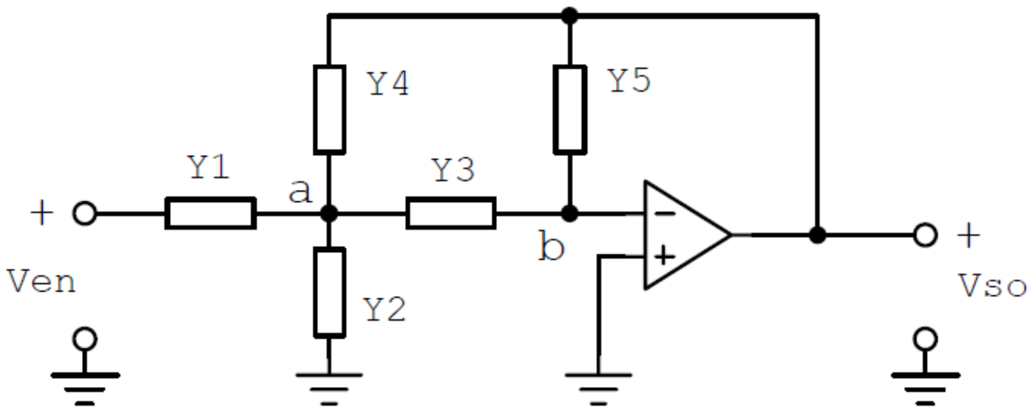
1.2 Les structures de filtres

Dans ce chapitre, nous allons étudier différentes structures de filtres actifs d'ordre 2, qui serviront éventuellement à réaliser des filtres d'ordre N (Butterworth, Chebyshev, Bessel, ..., etc.) en les mettant en cascade. Les structures étudiées seront les filtres MFB (« Multiple FeedBack »), les filtres VCVS (« Voltage-Controlled Voltage-Source »), et les filtres à variables d'états. Ces structures, notamment les filtres MFB et les filtres VCVS, sont les plus populaires et celles que vous retrouverez très souvent dans les catalogues de filtres actifs.

Bien que nous étudions que des passe-bas, tous ces filtres ont des variations pour faire des filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande. Nous limitons notre introduction aux filtres passe-bas.

1.2.1 Filtres MFB

La structure d'un filtre MFB est la suivante :



Dans cette figure, les valeurs Y_1 à Y_5 sont des admittances, i.e. l'inverse multiplicatif d'une impédance. Par exemple, l'admittance d'une résistance R est $1/R$, et l'admittance d'un condensateur C est sC (i.e. l'inverse multiplicatif de son impédance 1/sC vue dans le domaine de Laplace).

Les équations de noeud (équations de courant) aux points a et b du circuit sont les suivantes (vu dans le domaine de Laplace) :

(a) $(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)\, V_a - Y_1 V_{en} - Y_4 V_{so} = 0$

(b) $\quad -Y_3 V_a - Y_5 V_{so} = 0$

On obtient alors la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{V_{so}}{V_{en}} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5\,(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \tag{1}$$

Selon le choix que l'on fait pour les éléments Y_1 à Y_5, il est possible d'obtenir un passe-bas, un passe-haut ou un passe-bande.

Filtre passe-bas MFB Posant $Y_1 = 1/R_1$, $Y_4 = 1/R_2$, $Y_3 = 1/R_3$, $Y_2 = sC_2$ et $Y_5 = sC_1$, la fonction de transfert de l'équation (1) devient celle d'un passe-bas :

$$\frac{V_{so}}{V_{en}} = H(s) = -\frac{K\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2} \tag{2}$$

où

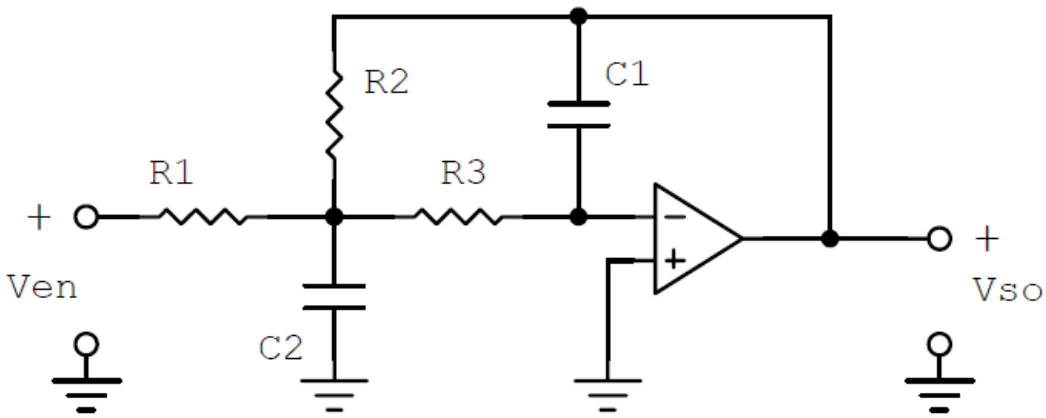
$$\omega_c^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} \tag{3}$$

$$\frac{\omega_c}{Q} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \tag{4}$$

$$Q = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} + \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}}} \tag{5}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1} \tag{6}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas du 2ième ordre. Le circuit réalisant ce filtre est le suivant :



(Attention : dans un schéma de circuit on indique les composantes – R, C, etc. – et non leur impédance ...).

Exemple :

Réaliser un filtre Butterworth passe-bas d'ordre 2 ayant un gain statique (gain DC) de –10 et une fréquence de coupure ω_c de 1 rad/sec. Selon le chapitre 1, la fonction de transfert à synthétiser est :

$$H(s) = -\frac{10}{s^2 + 1.4141s + 1} \tag{7}$$

En comparant les équations (3) à (7) , on obtient les contraintes :

$$K = \frac{R_2}{R_1} = 10 \tag{8}$$

$$\omega_c^2 = \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} = 1 \tag{9}$$

$$\frac{\omega_c}{Q} = \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 1.414 \tag{10}$$

On a donc 3 équations à 5 inconnues, ce qui laisse deux degrés de liberté. En choisissant arbitrairement $C_2 = 1$ et $R_1 = 1$ on obtient finalement :

$$R_2 = 10\ \Omega R_3 = 3.19\ \Omega C_1 = 0.0314\ F$$

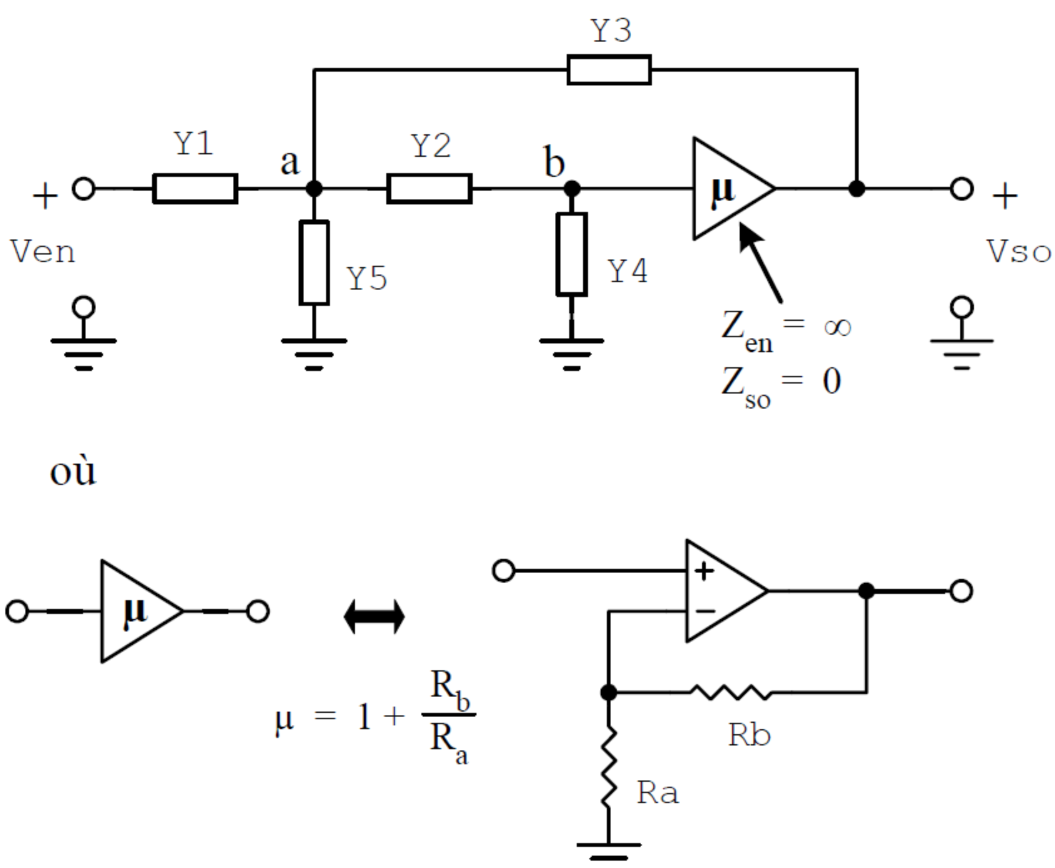
Notez que ces valeurs de composants ne sont pas nécessairement des valeurs utilisées en pratique. Il faut obtenir des valeurs disponibles en composantes (resistances et condensateurs) si l'on veut réaliser des circuits fonctionnels.

Des configurations MFB pour des filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande existent également. Elles sont omises dans ce document par soucis de concision.

1.2.2 Filtres VCVS

Les filtres MFB peuvent être difficiles à ajuster et ne permettent pas d'obtenir des facteurs de qualité Q très élevés. Dans ces cas, on peut se tourner vers les filtres VCVS.

La structure d'un filtre VCVS est la suivante :



Les équations de noeuds aux points a et b sont les suivantes :

(a) $(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)\, V_a - Y_1 V_{en} - Y_3 V_{so} - Y_2 V_b = 0$

(b) $(Y_2 + Y_4)\, V_b - Y_2 V_a = 0$

avec $V_b = \frac{V_{so}}{\mu}$

On obtient alors la relation entrée/sortie suivante :

$$\frac{V_{so}}{V_{en}} = -\frac{\mu Y_1 Y_2}{(Y_1+Y_2+Y_3+Y_5)(Y_2+Y_4) - \mu Y_2 Y_3 - Y_2^2} \tag{11}$$

Encore ici, selon les choix que l'on fait pour les éléments Y_1 à Y_5, il est possible d'obtenir un passe-bas, un passe-haut ou un passe-bande.

Filtre passe-bas VCVS Posant $Y_1 = 1/R_1$, $Y_2 = 1/R_2$, $Y_3 = sC_1$, $Y_4 = sC_2$, et $Y_5 = 0$ (i.e. $R_5 = \infty$), la fonction de transfert de l'équation 5.23 devient celle d'un passe-bas :

$$H(s) = \frac{K\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2} \tag{12}$$

où

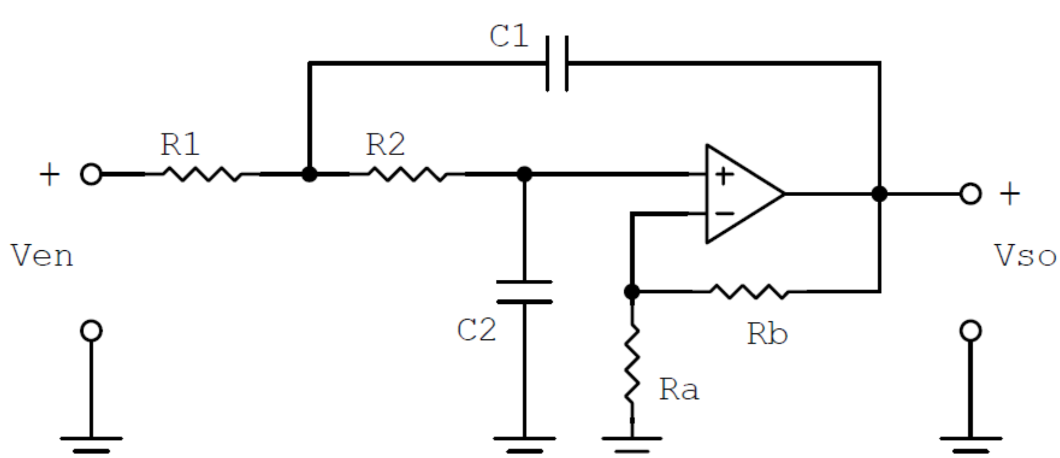
$$\omega_c^2 = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \tag{13}$$

$$\frac{\omega_c}{Q} = \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{R_2 C_2}(1-\mu) \tag{14}$$

$$Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}}{\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{(1-\mu)}{R_2 C_2}} \tag{15}$$

$$K = \mu = 1 + \frac{R_b}{R_a} \tag{16}$$

Le circuit réalisant un tel passe-bas est le suivant :



Des configurations VCVS pour des filtres passe-haut, passe-bande et coupe-bande existent également. Elles sont omises dans ce document par soucis de concision.

1.3 La sensibilité des filtres actifs

En pratique, le comportement d'un filtre peut s'écarter de celui attendu idéalement, et ce pour plusieurs raisons. Parmi celles-ci, mentionnons :

1. Les valeurs réelles des composants R, L et C utilisés diffèrent des valeurs nominales utilisées lors de la conception.
2. Les valeurs réelles des composants R, L et C utilisés changent dans le temps, en fonction de la température, de leur vieillissement, etc.
3. Les paramètres caractérisant les dispositifs actifs utilisés, tels les amplis-op, diffèrent de leurs valeurs nominales ou idéales utilisées lors de la conception ou évoluent dans le temps en fonction de la température, de leur vieillissement, etc.

Il est toujours possible d'utiliser en pratique des composants passifs présentant une faible tolérance (i.e. 1% et moins) sur leur valeur nominale. Toutefois, pour des raisons économiques, à nombre comparable de composants, une structure de circuit plus "tolérante" ou moins "sensible" qu'une autre est toujours recherchée.

1.3.1 Définition de la sensibilité

La sensibilité S de la valeur d'un paramètre y d'un filtre (tel sa fréquence centrale ω_0 , son facteur de qualité Q ou son gain K) par rapport à la valeur d'un composant x de ce filtre (tel une résistance ou un condensateur) est définie comme étant le rapport de la variation relative de la valeur du paramètre y du filtre sur la variation relative de la valeur du composant x, soit :

$$S_x^y = \frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \tag{20}$$

La dérivé partielle est utilisée parce que les variations de la valeur du paramètre y du filtre dépendent généralement du comportement de plus d'un composant. En appliquant la dérivée partielle à une fonction de plusieurs variables, on considère toutes les variables comme des constantes, sauf la variable par rapport à laquelle on prend la dérivée (voir document complémentaire).

Connaissant la valeur de la sensibilité S, il est facile, en utilisant (20)), d'estimer la variation relative de la valeur d'un paramètre y du filtre pour une variation relative d'un de ces éléments x :

$$\frac{\partial y}{y} = S_x^y \cdot \frac{\partial x}{x} \tag{21}$$

Il est à noter que pour de faibles variations, la relation (21) peut s'approximer par :

$$\frac{\Delta y}{y} \approx S_x^y \cdot \frac{\Delta x}{x} \tag{22}$$

Exemple

Considérons un filtre passe-bande passif formé d'un réseau LC. La relation liant la fréquence centrale ω_0 de ce filtre aux composants L et C est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{23}$$

Pour déterminer la sensibilité de ω_0 par rapport à C, il faut d'abord calculer la dérivé partielle de ω_0 par rapport à C; ce qui donne :

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial C} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{\partial C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{L^{1/2}C^{3/2}} = -\frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{1}{C} \tag{24}$$

d'où

$$S_C^{\omega_0} = \frac{C}{\omega_0} \cdot \frac{\partial \omega_0}{\partial C} = \frac{C}{\omega_0}\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{C}\right) = -\frac{1}{2} \tag{25}$$

ou, exprimé autrement

$$\frac{\partial \omega_0}{\omega_0} = S_C^{\omega_0} \cdot \frac{\partial C}{C} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial C}{C} \tag{26}$$

La variation relative de la fréquence centrale ω_0 vaut donc la moitié de la variation relative de la valeur de C et elle est de signe opposé. Ainsi, si C augmente de 2%, ω_0 décroit de 1%.

La démarche pour calculer la variation relative de la valeur d'un paramètre d'un filtre par rapport à la variation relative de la valeur d'un composant est donc simple :

1. Déterminer la relation mathématique liant la valeur du paramètre à la valeur du composant.
2. Évaluer la dérivé partielle de cette relation par rapport à la valeur du composant.
3. Multiplier le résultat par le rapport de la valeur nominale de ce composant sur la valeur nominale du paramètre pour ainsi obtenir la valeur de la sensibilité.
4. Multiplier la valeur de la sensibilité par la variation relative du composant.

1.3.2 Relations utiles

Les relations mathématiques suivantes, relativement faciles à démontrer, peuvent s'avérer utiles lors de la détermination de la sensibilité des divers paramètres d'un circuit en fonction des divers composants le constituant.

1. $S_{1/x}^{y} = S_x^{1/y} = -S_y^x$
2. $S_x^{y_1 y_2} = S_x^{y_1} + S_x^{y_2}$
3. $S_x^{y_1/y_2} = S_x^{y_1} - S_x^{y_2}$
4. $S_x^{x^n} = n$
5. $S_{x_1}^{y} = S_{x_2}^{y} \cdot S_{x_2}^{x_1}$

1.4 La réalisation des filtres actifs

Lorsqu'arrive l'étape de réaliser concrètement le circuit d'un filtre d'ordre élevé, une foule de détails d'ordre pratique doivent être pris en considération. Le texte qui suit couvre, de façon sommaire, les principales précautions à prendre pour obtenir un circuit de qualité.

1.4.1 Sélection d'un amplificateur opérationnel

Pour sélectionner correctement l'amplificateur opérationnel qui convient pour la réalisation d'un filtre donné, il faut préciser lesquelles des caractéristiques d'un amplificateur opérationnel d'usage courant et de faible coût, comme un LM324 par exemple, sont insuffisantes. Voici une liste de ces caractéristiques accompagnée de quelques lignes directrices :

- Impédance d'entrée
- Impédance de sortie
- Gain en boucle ouverte en fonction de la fréquence >En mode linéaire, un ampli-op est toujours utilisé en boucle fermée, c'est-à-dire avec une rétroaction négative. Dans une telle configuration, ses impédances d'entrée et de sortie sont « améliorées », donc multipliée en ce qui concerne l'impédance d'entrée et divisée en ce qui concerne l'impédance de sortie, d'un facteur égal au gain (de tension) disponible en boucle ouverte, à la fréquence d'intérêt 3, divisé par le gain du circuit en boucle fermée. Considérons par exemple un ampli-op présentant, en boucle ouverte, une impédance d'entrée de 200 kΩ et une impédance de sortie de 100 Ω. Si, pour les fréquences d'intérêt d'une application donnée, le gain en boucle ouverte minimum que peut donner cet ampli-op est de 1000 (60 dB) et que le gain en boucle fermée de l'amplificateur construit avec cet ampli-op est de 10 (20 dB), ceci se traduit, pour cet amplificateur, par une impédance d'entrée toujours supérieure à 20 MΩ (200 kΩ x par 1000/10) et par une impédance de sortie toujours inférieure à 1 Ω (100 Ω $\div$ par 1000/10). Si l'on ajoute à cette observation le fait qu'il soit recommandé, pour garder le gain en boucle fermée à l'intérieur de 1% de sa valeur théorique, de maintenir au moins 40 dB d'écart entre le gain que peut donner un ampli-op en boucle ouverte et celui que l'on veut obtenir en boucle fermée, on comprend que les impédances d'entrée et de sortie réelles d'un ampli-op non-idéal compromettent rarement le bon fonctionnement d'un circuit. Si une telle situation devait cependant se présenter, il devrait être assez facile de la corriger en modifiant les valeurs des résistances (et des autres composants) du circuit. De ce groupe de spécifications, la plus critique serait donc le gain en boucle ouverte qui devrait, pour toutes les fréquences d'intérêt, être supérieur d'au moins 40 dB au gain en boucle fermé souhaité.
- Tension de sortie maximale
- Courant de sortie maximal >Il faut toujours déterminer, à partir des caractéristiques du signal de sortie et de la charge de l'ampli-op, le courant et la tension qu'il aura à fournir et vérifier que l'ampli-op sélectionné est en mesure de le faire.
- Taux maximal de variation du signal de sortie (*Slew Rate*) >Si on veut observer, à la sortie d'un ampli-op, un signal sinusoïdal d'amplitude pointe V_{om}, sa fréquence doit être inférieure à f_{FP}, où $f_{FP} = SR/2\pi V_{om}$, afin qu'il ne soit pas distorsionné à cause du taux maximal de variation du signal de sortie.
- Courant de polarisation des bornes d'entrées $I_B = (I_{B+} + I_{B-})/2$

- Courant « d'offset » $I_{off} = |I_{B+} - I_{B-}|$
- Tension « d'offset » V_{off} >Puisque ce sont des spécifications DC, c'est surtout dans le cas d'un circuit passe-bas qu'elles doivent être traitées. Dépendamment de l'application, on pourra exiger de très basses valeurs pour ces paramètres ou encore on pourra s'accommoder d'une bonne polarisation pour éliminer l'effet de I_B avec ou sans réglage pour éliminer les effets de I_{off} et de V_{off}.
- Autres >D'autres spécifications peuvent également devoir être considérées lors de la sélection d'un ampli-op. Mentionnons, par exemple, le « facteur de réjection de mode commun » (Common Mode Rejection Ratio), son mode de fonctionnement en alimentation simple ou non (single supply), la possibilité pour son signal de sortie d'approcher de très près ou non les alimentations (rail to rail), la puissance maximum que peut dissiper son boîtier, son coût, sa disponibilité dans les quantités et les délais voulus, sa fabrication par plus d'un manufacturier (second source), etc.

1.4.2 Utilisation des amplificateurs opérationnels

1. Polarisation

Si l'on souhaite éliminer l'effet de I_B, il suffit de s'assurer, le plus souvent en insérant une résistance en série avec la borne + de l'ampli-op, que les impédances DC entre chacune des bornes d'entrée de l'ampli-op et la masse sont identiques.

Pour éliminer les effets de I_{off} et de V_{off}, il faut appliquer, par l'intermédiaire d'une résistance de valeur très élevée, une très faible tension DC à l'une des bornes d'entrée de l'ampli-op. On règle la valeur de cette tension pour chaque circuit pris individuellement de façon à ce que sa tension de sortie soit exactement nulle lorsque sa tension d'entrée est de 0 Volt. Peu importe la stratégie de polarisation retenue, de façon minimale **il est absolument essentiel qu'il existe un chemin DC entre chacune des bornes d'entrée d'un ampli-op et la masse.**

2. Découplage des alimentations

Pour éliminer le bruit AC qui se superpose toujours aux alimentations et qui peut causer un mauvais fonctionnement allant même jusqu'à l'instabilité (oscillations), il faut disposer entre chacune des alimentations et la masse, très près de chacun des boîtiers, un condensateur d'environ 0.1 µF et de bonne qualité, comme un condensateur céramique. Il faut aussi brancher entre chacune des alimentations et la masse, à l'entrée des alimentations sur la carte, un condensateur d'environ 100 µF (ou plus). Une autre bonne pratique pour contribuer à réduire les signaux AC parasites consiste à garder courts les fils des composants.

3. Branchements à la masse

Le bon fonctionnement d'un circuit repose beaucoup sur la qualité de la distribution de sa référence, la « masse ». Il faut d'abord éviter les boucles de courant dans lesquels peuvent circuler des courants de masse capables d'obscurcir complètement des signaux utiles de faibles amplitudes, comme ceux provenant de certains types de capteur. Pour éviter ce phénomène, il est recommandé de distribuer la référence en « étoile », ce qui signifie qu'elle n'entre qu'à un seul point sur le circuit et qu'elle est par la suite distribuée aux composants du circuit à partir de ce seul point.

Il faut ensuite que la référence soit équipotentielle, c'est à dire qu'elle présente exactement la même tension en chacun de ses points. Comme le circuit de masse est parcouru par les courants qui «

retournent » à l'alimentation, il faut, pour éviter que ces courants n'induisent des différences de potentiel, réduire à zéro la résistance offerte à ces courants. On s'approche de cette situation idéale en recourant à des traces les plus larges possibles pour distribuer la référence, allant même jusqu'à y dédier la quasi-totalité du cuivre sur une face d'un circuit imprimé (*ground plane*).

1.4.3 Disposition des filtres d'ordre 2 dans un arrangement en cascade

Mathématiquement, l'ordre dans lequel apparaissent les différentes sections d'ordre 2 d'un filtre d'ordre supérieur à 2 n'a pas d'importance puisque ces sections sont en fait les termes d'une multiplication, une opération commutative. En pratique cependant, pour obtenir la dynamique la plus élevée possible, c'est-à-dire de façon à traiter, sans le déformer, le signal d'entrée présentant la plus grande amplitude possible, il faut disposer les sections d'ordre 2 d'un filtre de gauche à droite dans un ordre croissant des gains K et, par extension, dans un ordre croissant des facteurs de qualité Q puisque les gains les plus élevés sont normalement associés aux facteurs de qualité les plus élevés. Cependant, dans le cas où les gains de deux sections présentant des facteurs de qualité différents seraient égaux, il est préférable de disposer en premier la section avec le facteur de qualité le plus élevé.

Pour comprendre pourquoi l'ordre dans lequel on dispose ces sections d'ordre 2 fait une différence, il faut tout simplement réaliser qu'un filtre atténue l'amplitude de certaines composantes fréquentielles d'un signal. Donc si on dispose un gain élevé à la fin de la chaîne il est possible que les sinusoïdes d'amplitudes élevées qui, une fois multipliées par ce gain, auraient causé une distorsion de saturation, soient d'amplitudes plus faibles à ce point-là du circuit, de sorte qu'elles n'entraîneront plus de distorsion une fois multipliée par ce même gain. Ce raisonnement justifie aussi de placer en premier, pour deux sections présentant le même gain, la section avec le facteur de qualité le plus élevé.

Les gains K qui apparaissent au numérateur des sections d'ordre 2 sont multipliés entre eux, il est donc possible de les redistribuer comme bon nous semble, soit pour améliorer la dynamique d'un circuit, soit pour permettre l'utilisation d'un ampli-op avec un gain en boucle ouverte moins élevée surtout pour la portion « hautes fréquences » des fréquences d'intérêt.

1.4.4 Syntonisation (ajustement) du filtre complet

Après avoir fait la conception d'un filtre d'ordre supérieur à 2, on obtient la valeur de chacun des composants du circuit. Une fois le circuit assemblé avec ces composants, les valeurs obtenues pour ω0, K et Q de chacune des sections d'ordre 2 sont forcément très proches des valeurs souhaitées. Mais, surtout à cause des tolérances sur les valeurs des composants, il est possible que l'on doive, pour rencontrer des spécifications particulièrement exigeantes, procéder à un réglage des sections une par une. Il est donc important, lorsque l'on utilise une nouvelle structure d'ordre 2, de chercher à établir une procédure de réglage permettant d'ajuster la valeur des paramètres ω0, K et Q un à un sans que l'ajustement de l'un n'affecte la valeur des autres.

En analysant la fonction de transfert de cette nouvelle structure et les expressions mathématiques des paramètres ω0, K et Q en fonction des composants du circuit, on observera quelquefois que la valeur d'un des composants n'affecte qu'un des paramètres. On sait alors comment procéder au réglage de ce paramètre. Dans certaines situations, c'est en imposant des restrictions aux valeurs des composants que l'on arrive à rendre indépendant le réglage des paramètres. Par exemple, en imposant C1=C2 dans un circuit, il est possible que le réglage en soit facilité. Mais s'il s'avérait impossible de bien régler les trois paramètres, lequel pourrait être réglé avec moins de rigueur que les deux autres sans que cela n'entraîne un mauvais fonctionnement du filtre ?

Le gain K, bien entendu. En effet, lorsque le gain K obtenu n'est pas exactement celui qui a été spécifié, ce « défaut » affecte de la même manière toutes les composantes fréquentielles d'un signal, ce qui signifie que le fonctionnement du filtre n'est affecté d'aucune manière. La forme de chacune des réponses en fréquences d'amplitude et de phase n'est pas affectée. Un gain K différent n'a un effet que sur la réponse en fréquences d'amplitude qui est déplacée légèrement, sans déformation, vers le haut ou vers le bas. Ce léger déplacement peut être rapidement corrigé, selon le cas, et si c'est nécessaire, à l'aide d'un diviseur de potentiel ou d'un simple amplificateur doté d'un gain très faible.