

Chapitre 1

Opérateurs vectoriels

Ce chapitre introductif est conçu pour aider les lecteurs qui ne sont pas familiers avec l'utilisation des *opérateurs* vectoriels.

Nous faisons souvent référence aux champs de charges électriques et de courants. Nous considérons, par exemple, que la force entre deux charges électriques provient de l'interaction de l'une quelconque des charges avec le *champ* créé par l'autre.

En termes mathématiques, un *champ* est une fonction qui décrit une grandeur physique en tout point de l'espace. Pour un *champ scalaire*, cette grandeur est représentée par un nombre unique en chaque point. La température, la densité et le potentiel électrique sont des exemples de grandeurs scalaires qui peuvent varier d'un point à l'autre de l'espace. Dans le cas des *champs vectoriels* la grandeur physique est un vecteur, déterminé à la fois par un nombre et une direction. La vitesse du vent et la force gravitationnelle sont des exemples de champs vectoriels.

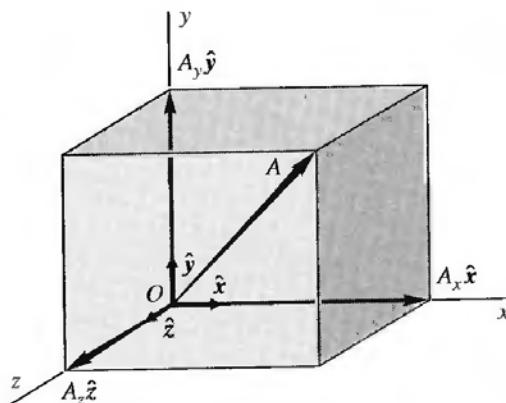


Figure 1.1 Un vecteur \mathbf{A} et ses trois composantes $A_x \hat{x}$, $A_y \hat{y}$, $A_z \hat{z}$. Les trois composantes quand elles sont placées bout à bout, sont équivalentes à \mathbf{A} . Les vecteurs unitaires \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} sont orientés dans la direction positive des axes des coordonnées et sont de module un.

Les *grandesurs vectorielles* sont représentées par des **caractères gras**, et les *vecteurs unitaires* portent un accent circonflexe : $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

Nous adoptons la convention usuelle consistant à utiliser des systèmes de coordonnées cartésiennes directs, comme en Fig. 1.1 : la direction positive de l'axe z correspond à la direction d'avancement d'une vis à pas à droite — ou d'un tire-bouchon, d'où l'expression « règle du tire-bouchon » — tournée dans le sens qui amène la partie positive de l'axe x sur la partie positive de l'axe y par une rotation de 90° .

Les variables scalaires sont désignées par des *caractères italiques*.

1.1 ALGÈBRE VECTORIELLE

La Fig. 1.1 représente un vecteur \mathbf{A} et ses trois *composantes* A_x, A_y, A_z . Si on définit deux vecteurs

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{x}} + A_y \hat{\mathbf{y}} + A_z \hat{\mathbf{z}} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{x}} + B_y \hat{\mathbf{y}} + B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.1)$$

où $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ sont les *vecteurs unitaires* le long des axes x, y et z respectivement, alors on a

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \hat{\mathbf{x}} + (A_y - B_y) \hat{\mathbf{y}} + (A_z - B_z) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \phi \quad (1.4)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = AB \sin \phi \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{C} \quad (1.5)$$

comme indiqué sur la Fig. 1.2, où

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1.6)$$

est le *module* de \mathbf{A} , l'expression étant analogue pour \mathbf{B} .

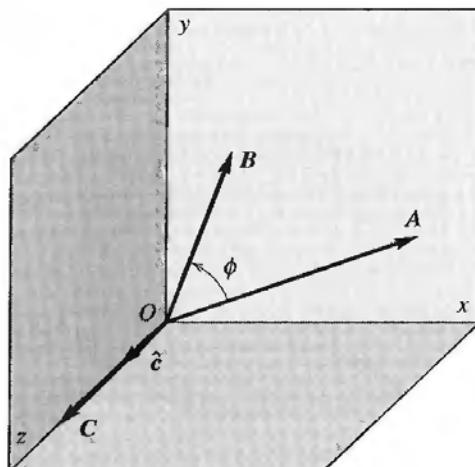


Figure 1.2 Deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} et le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{c}}$, normal au plan contenant \mathbf{A} et \mathbf{B} .

Les directions positives pour ϕ et $\hat{\mathbf{c}}$ suivent la « règle du tire-bouchon ». Le produit vectoriel $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est égal à $AB \sin \phi \hat{\mathbf{c}}$, et $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

La quantité $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, qu'on lit « A scalaire B », est le *produit scalaire* de A et B, et $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, qu'on lit « A vectoriel B », est leur *produit vectoriel*.

Cf. exercices : 1.1 ; 1.2 ; 1.3.

1.2 LE GRADIENT GRAD f

Une *fonction scalaire à un point* (appelée aussi simplement *fonction scalaire*) est une grandeur scalaire, comme la température, qui est fonction des coordonnées. Considérons une fonction scalaire à un point f , continue et dérivable. Calculons de combien f change sur la distance infinitésimale dl de la Fig. 1.3. La différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.7)$$

est le produit scalaire des deux vecteurs

$$\mathbf{dl} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}} \quad (1.8)$$

et

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.9)$$

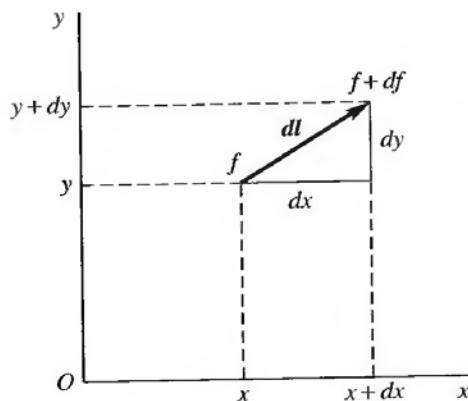


Figure 1.3 Une fonction scalaire varie de f à $f + df$ sur une distance dl .

Ce deuxième vecteur, dont les composantes sont les taux de variation de f avec la distance le long des axes des coordonnées, est appelé le *gradient* de f . Le symbole **grad** se lit « gradient de ». On écrit souvent aussi le gradient $\text{grad } f$ sous la forme ∇f , où l'opérateur vectoriel ∇ se lit « nabla » et vaut

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.10)$$

Notons la valeur du module du gradient :

$$|\mathbf{grad} f| = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.11)$$

Il vient

$$df = \mathbf{grad} f \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{grad} f| |d\mathbf{l}| \cos \theta \quad (1.12)$$

où θ est l'angle entre les vecteurs $\mathbf{grad} f$ et $d\mathbf{l}$.



Quelle direction faudrait-il choisir pour $d\mathbf{l}$ afin de maximiser df ? Il faudrait choisir la direction pour laquelle $\cos \theta = 1$ ou $\theta = 0$, c'est-à-dire la direction de $\mathbf{grad} f$. Le gradient d'une fonction scalaire en un point donné est donc un vecteur qui a les propriétés suivantes :

- 1) Ses composantes sont les taux de variation de la fonction le long des axes des coordonnées.
- 2) Son module est le taux maximal de variation avec la distance.
- 3) Sa direction est celle du taux maximal de variation avec la distance.
- 4) Il est orienté vers les plus grandes valeurs de la fonction.

Le gradient est une fonction vectorielle à un point qui dérive d'une fonction scalaire à un point. Son module et sa direction sont ceux du taux maximal de variation spatiale de f .

Exemple : L'altitude d'un point à la surface de la Terre. Comme exemple du gradient, considérons la Fig. 1.4 sur laquelle A , l'altitude au-dessus du niveau de la mer, est une fonction des coordonnées x et y mesurées sur un plan horizontal. Les points situés à une altitude donnée définissent une *courbe de niveau*. Le gradient de l'altitude A en un point donné a alors les propriétés suivantes :

- 1) Il est perpendiculaire à la courbe de niveau en ce point.
- 2) Son module est égal au taux maximal de variation de l'altitude avec le déplacement, mesuré au point considéré sur un plan horizontal.
- 3) Il est orienté vers l'altitude la plus grande.

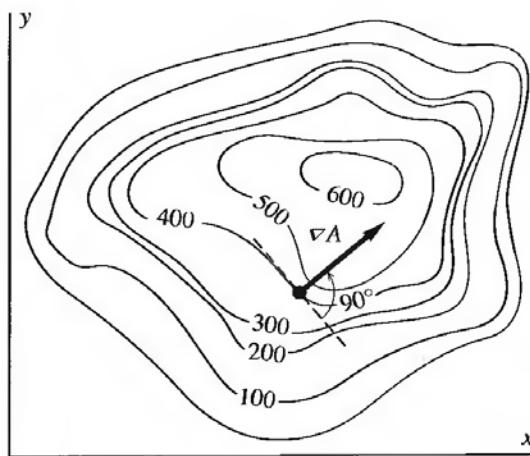


Figure 1.4 Carte topographique d'une colline.

Les nombres indiquent l'altitude A en mètres. Le gradient de A est la pente de la colline au point considéré et il est orienté vers l'altitude la plus grande. La flèche représente $\mathbf{grad} A$ en un point où l'altitude vaut 400 mètres.

Cf. exercice 1.4.

I.3 LE FLUX

Il est souvent nécessaire de calculer le flux d'une grandeur vectorielle à travers une surface. Par définition, le *flux* $d\Phi$ de \mathbf{B} à travers une surface infinitésimale dA est

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot dA \quad (1.13)$$

où le vecteur dA est perpendiculaire à la surface. Le flux $d\Phi$ est donc la composante du vecteur normale à la surface, multipliée par dA . Pour une surface d'aire finie A ,

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot dA \quad (1.14)$$

Si la surface est fermée, le vecteur dA est orienté *vers l'extérieur* par convention.

Si la surface n'est *pas* fermée, l'orientation du vecteur dA est reliée à celle du contour C (courbe fermée et orientée) sur lequel s'appuie A par la règle du tire-bouchon.

Exemple : L'écoulement d'un fluide. Considérons l'écoulement d'un fluide ; soit ρ sa densité, \mathbf{v} sa vitesse, et dA un élément de surface situé dans le fluide. Le produit scalaire $\rho \mathbf{v} \cdot dA$ est égal à la masse de fluide qui traverse dA en une seconde dans le sens du vecteur dA . Donc le flux de $\rho \mathbf{v}$ à travers une surface fermée, ou l'intégrale de $\rho \mathbf{v} \cdot dA$ sur cette surface, correspond au taux net auquel la masse quitte le volume enfermé. Pour un fluide incompressible ce flux serait nul.

1.4 LA DIVERGENCE $\operatorname{div} \mathbf{B}$

Le flux d'un vecteur sortant d'une surface fermée peut être calculé soit par l'Éq. 1.14 soit de la façon suivante. Considérons un volume infinitésimal $dx dy dz$ et un vecteur \mathbf{B} , comme sur la Fig. 1.5, dont les composantes B_x, B_y, B_z sont des fonctions de x, y, z . La valeur de B_x au centre de la face de droite peut être considérée comme la valeur moyenne sur cette face. Le flux sortant de la face de droite de l'élément de volume est

$$d\Phi_D = \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \quad (1.15)$$

car la composante de \mathbf{B} normale à la face de droite est la composante x de \mathbf{B} sur cette face. Le volume étant infinitésimal, nous pouvons négliger les dérivées d'ordre supérieur des composantes de \mathbf{B} .

Pour la face de gauche, le flux sortant vaut

$$d\Phi_G = - \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz \quad (1.16)$$

Il y a un signe moins devant la parenthèse car $B_x \hat{x}$ est tourné vers l'intérieur sur cette face tandis que dA est orienté vers l'extérieur.

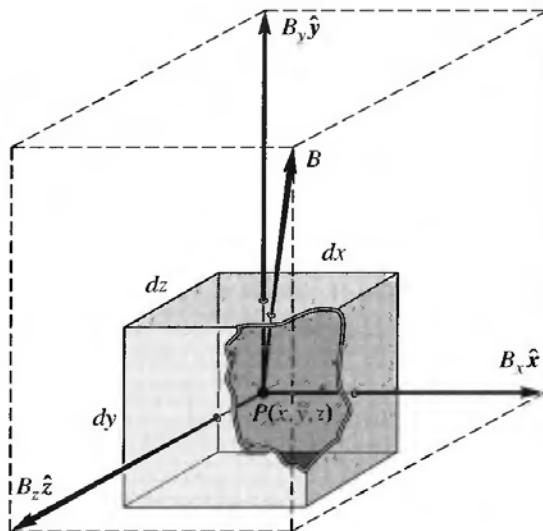


Figure 1.5 Élément de volume infinitésimal $dx dy dz$ et vecteur \mathbf{B} au point P . L'un des sommets du parallélépipède grisé a été coupé pour faire apparaître P .

Donc le flux sortant à travers les deux faces vaut

$$d\Phi_D + d\Phi_G = \frac{\partial B_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial B_x}{\partial x} dV \quad (1.17)$$

où dV est le volume de l'élément infinitésimal.

Si l'on calcule de la même façon le flux net à travers les autres paires de faces, on trouve que le flux sortant total pour l'élément de volume dV vaut

$$d\Phi_{\text{tot}} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.18)$$

Supposons maintenant que nous ayons deux éléments de volume infinitésimaux contigus et que nous ajoutions le flux sortant de la surface délimitant le premier volume à celui sortant de la surface qui définit le second. Sur la face commune, les flux sont égaux en module mais de signes opposés, et ils s'annulent. La somme du flux sortant du premier volume et du flux sortant du second correspond donc au flux sortant de la surface qui délimite l'ensemble des deux volumes.

Pour étendre ce calcul à un volume fini, nous sommes les flux individuels de tous les éléments de volume infinitésimaux qui constituent le volume fini, et donc le flux total sortant vaut

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_V \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.19)$$

En un point donné quelconque du volume, la quantité

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

est donc le flux *sortant* par unité de volume. On appelle cette quantité la *divergence* de \mathbf{B} en ce point. La divergence d'une fonction vectorielle à un point est une fonction scalaire à un point.

On écrit la divergence de \mathbf{B} comme

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.20)$$



ou encore, en utilisant l'opérateur ∇ défini dans l'Éq. 1.10, comme $\text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B}$.

On trouvera des exemples dans la partie suivante.

Cf. exercice 1.5.

1.5 LE THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

Nous avons vu que le flux sortant total d'un vecteur \mathbf{B} est égal à l'intégrale de surface de la composante normale sortante de \mathbf{B} . Donc, si on note \mathcal{A} l'aire de la surface qui délimite \mathcal{V} , le flux total sortant est

$$\Phi_{\text{tot}} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{B} d\mathcal{V} \quad (1.21)$$

Cette relation s'applique à tout champ vectoriel \mathbf{B} continûment dérivable⁽¹⁾. Nous avons donc

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} = \int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{B} d\mathcal{V} \quad (1.22)$$



C'est le *théorème de la divergence*, ou *théorème d'Ostrogradski*. Remarquons que la première intégrale concerne seulement les valeurs de \mathbf{B} sur la *surface* d'aire \mathcal{A} , tandis que la seconde concerne la valeur de \mathbf{B} dans l'ensemble du *volume* \mathcal{V} .

Exemples : Une boîte hermétique contient de l'oxygène :

- 1) La température, la pression et la masse volumique m' sont toutes constantes et uniformes. Il y a de l'agitation thermique, mais la moyenne temporelle de la vitesse \mathbf{v} d'une molécule dans la région autour d'un point P quelconque est nulle, et le flux net de masse à travers la surface S d'une petite sphère entourant P est nul. L'intégrale de $m'\mathbf{v}$ sur S est donc nulle, et $\text{div } (m'\mathbf{v}) = 0$. Nous avons aussi $dm'/dt = 0$.
- 2) Maintenant on introduit de l'oxygène. La masse volumique augmente et il y a un flux entrant de masse à travers S . La vitesse radiale moyennée sur S est négative, l'intégrale de $m'\mathbf{v}$ sur S est négative, $\text{div } (m'\mathbf{v})$ est négative et dm'/dt est positive.
- 3) Maintenant on pompe l'oxygène. Le gaz s'écoule hors de S , l'intégrale de $\rho\mathbf{v}$ sur S est positive, $\text{div } (m'\mathbf{v})$ est positive et dm'/dt est négative.

Dans un fluide incompressible, $\text{div } (m'\mathbf{v})$ est nulle partout, car le flux de masse sortant par unité de volume est nul.

Lors d'une explosion, $\text{div } (m'\mathbf{v})$ est positive.

Cf. exercice 1.6.

(1) Une fonction est *continûment dérivable* si ses dérivées premières sont continues.

1.6 L'INTÉGRALE CURVILIGNE $\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$. CHAMPS CONSERVATIFS

Les intégrales

$$\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \quad \int_a^b \mathbf{B} \times d\mathbf{l} \quad \text{et} \quad \int_a^b f dl,$$

calculées du point a au point b sur une courbe donnée, sont des exemples d'*intégrale curvilignes*.

Dans la première, qui est particulièrement importante, le terme sous l'intégrale est le produit d'un élément de longueur $d\mathbf{l}$ sur la courbe et de la valeur locale de \mathbf{B} suivant la règle du produit scalaire.

Un champ vectoriel \mathbf{B} est *conservatif* si l'intégrale curviligne de \mathbf{B} sur toute courbe fermée est nulle :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.23)$$

Le cercle sur le signe d'intégrale indique que le chemin d'intégration est fermé.

1.7 LE ROTATIONNEL rot \mathbf{B}

Venons-en maintenant à l'opérateur rotationnel, qui est un peu plus compliqué que les opérateurs gradient et divergence. Tous les trois sont essentiels pour une discussion correcte des champs électromagnétiques. L'opérateur laplacien de la partie 1.9 l'est aussi même s'il est moins communément utilisé.

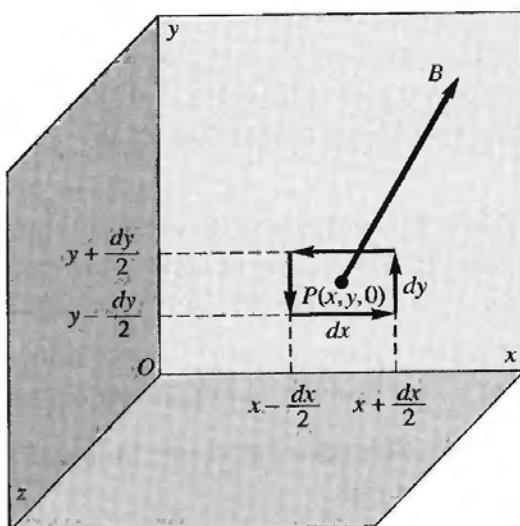


Figure 1.6 Chemin fermé rectangulaire dans le plan xy .

Ce chemin est centré autour du point $P(x, y, 0)$, où le vecteur \mathbf{B} a la valeur indiquée par la flèche. L'intégration sur le chemin s'effectue dans la direction des flèches, en suivant la règle du tire-bouchon appliquée à l'axe z .

Pour un champ \mathbf{B} donné et un déplacement $d\mathbf{l}$ situé dans le plan xy ,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_x dx + B_y dy \quad (1.24)$$

et

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B_x dx + \oint B_y dy \quad (1.25)$$

Considérons maintenant le chemin infinitésimal de la Fig. 1.6. Il y a deux contributions à la première intégrale du membre de droite de l'Éq. 1.25, l'une en $y - dy/2$ et l'autre en $y + dy/2$:

$$\oint B_x dx = \left(B_x - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(B_x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \quad (1.26)$$

Il y a un signe moins devant le deuxième terme parce que le chemin élémentaire en $y + dy/2$ est orienté dans la direction des x négatifs. Pour ce chemin infinitésimal, nous avons donc

$$\oint B_x dx = -\frac{\partial B_x}{\partial y} dy dx \quad (1.27)$$

De même,

$$\oint B_y dy = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx dy \quad (1.28)$$

d'où

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.29)$$

pour le chemin infinitésimal de la Fig. 1.6.

En posant

$$g_3 = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad (1.30)$$

il vient

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = g_3 dA \quad (1.31)$$

où $dA = dx dy$ est l'aire de la surface s'appuyant sur le chemin infinitésimal. Soulignons que tout cela n'est correct que si l'intégrale curviligne s'effectue dans le sens positif du plan xy , c'est-à-dire dans la direction dans laquelle on tournerait un tire-bouchon pour le faire avancer dans la direction positive le long de l'axe z .

Considérons maintenant g_3 et les deux autres quantités symétriques comme les composantes d'un vecteur

$$\text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (1.32)$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\text{rot } \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

C'est le *rotationnel* de \mathbf{B} . La quantité g_3 est sa composante selon z . Notons que $\text{rot } \mathbf{B}$ peut aussi s'écrire, en utilisant l'opérateur ∇ , $\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{B}$.

Si nous choisissons un vecteur $d\mathcal{A}$ orienté par la règle du tire-bouchon à partir de l'orientation choisie pour l'intégrale sur le contour, alors

$$d\mathcal{A} = d\mathcal{A} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.34)$$

et

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.35)$$

Cette formule signifie que l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur le tour de la surface $d\mathcal{A}$ est égale au produit scalaire du rotationnel de \mathbf{B} par cet élément de surface.

La convention de signe est similaire à celle énoncée ci-dessus : l'intégrale curviligne s'effectue dans la direction positive autour de l'élément de surface $d\mathcal{A}$ si cette direction est celle dans laquelle on aurait tourné un tire-bouchon pour qu'il avance en direction de $\text{rot } \mathbf{B}$.

En général, $\text{rot } \mathbf{B}$ n'est pas normal à \mathbf{B} . Voir le problème 1.7.

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul :

$$\text{rot}(\text{grad } f) \equiv 0 \quad (1.36)$$

Exemple : Écoulement fluide. À proximité du fond d'un écoulement fluide, la vitesse v est proportionnelle à la distance au fond. Prenons l'axe x parallèle au courant et l'axe z perpendiculaire au fond de l'écoulement. Alors

$$v_x = cz, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0 \quad (1.37)$$

et le rotationnel du vecteur vitesse est

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ cz & 0 & 0 \end{vmatrix} = c\hat{\mathbf{y}} \quad (1.38)$$

Cf. exercices : 1.7; 1.12.

1.8 LE THÉORÈME DE STOKES

L'équation 1.35 est valide seulement pour un contour assez petit afin que $\text{rot } \mathbf{B}$ soit presque constant sur la surface $d\mathcal{A}$ qui s'appuie sur ce contour. Que se passe-t-il quand le contour est trop grand pour que cette condition soit vérifiée ? Dans ces cas-là nous divisons la surface — toute surface⁽¹⁾ s'appuyant sur le chemin d'intégration en question — en éléments de surface $d\mathcal{A}_1$, $d\mathcal{A}_2$ et ainsi de suite, comme en Fig. 1.7. Pour chacune de ces petites surfaces,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.39)$$

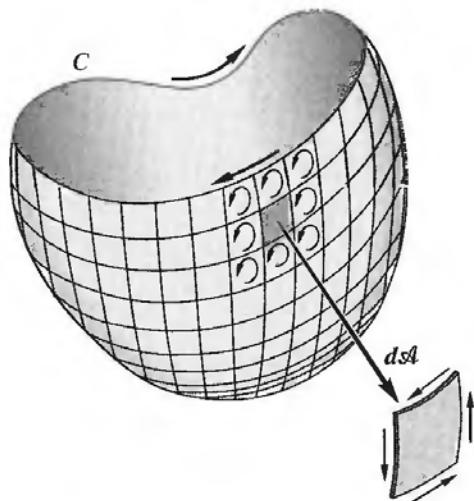


Figure 1.7 Surface arbitraire d'aire \mathcal{A} s'appuyant sur le contour C .

La somme des intégrales curvilignes autour des carrés curviliques représentés est égale à l'intégrale curviligne autour de C . La direction positive pour le vecteur $d\mathcal{A}$ suit la règle du tire-bouchon.

Sommons les membres de gauche de ces équations pour tous les $d\mathcal{A}$ et ensuite les membres de droite. La somme des membres de gauche correspond à l'intégrale curviligne sur la courbe qui limite la surface totale, car sur chaque segment commun à des $d\mathcal{A}$ adjacents il y a toujours deux contributions, égales et de signes opposés, à la somme. La somme des membres de droite est l'intégrale de $= (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A}$ sur la surface finie. Ainsi

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.40)$$

où \mathcal{A} est l'aire d'une surface ouverte quelconque délimitée par le contour C .

Ceci est le *théorème de Stokes*. Il relie l'intégrale curviligne sur un contour donné à une intégrale de surface sur une surface finie quelconque appuyée sur ce contour. La figure 1.7 indique la convention de signe.

(1) Cette surface doit être *orientable*, c'est-à-dire avoir deux faces. Toutes les surfaces n'ont pas deux faces ; un ruban de Moebius, par exemple, a une seule face.

Exemple : Champs conservatifs. À quelle condition un champ vectoriel est-il conservatif ? En d'autres termes, à quelle condition l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur un contour arbitraire est-elle nulle ? D'après le théorème de Stokes, l'intégrale curviligne de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sur un contour quelconque est nulle si $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ partout. Cette condition est vérifiée si

$$\mathbf{B} = \mathbf{grad} f \quad (1.41)$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0 \quad (1.42)$$

Un champ \mathbf{B} qui est le gradient d'une fonction scalaire f est donc *conservatif*.



1.9 L'OPÉRATEUR LAPLACIEN Δ

La divergence du gradient de f est le *laplacien* de f :

$$\text{div} (\mathbf{grad} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.43)$$

où Δ est l'*opérateur laplacien*.

Nous avons défini le laplacien d'une fonction f scalaire. Il est aussi utile de définir le laplacien d'une fonction vectorielle \mathbf{B} :

$$\Delta \mathbf{B} = \Delta B_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta B_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.44)$$

Cette relation est valable uniquement en coordonnées cartésiennes. Voir la partie 1.10.

1.10 SCALAIRES ET VECTEURS EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Il est toujours possible d'utiliser les coordonnées cartésiennes, quelle que soit la géométrie du champ, mais d'autres systèmes de coordonnées sont souvent beaucoup plus pratiques. Par exemple, si le problème est à symétrie cylindrique, il est nettement préférable d'utiliser des coordonnées cylindriques ; si le problème est à symétrie sphérique, les coordonnées sphériques sont les plus adaptées.

En *coordonnées sphériques*, la position d'un point P de l'espace est définie par les coordonnées r, θ, ϕ , comme sur la Fig. 1.8. L'angle ϕ n'est pas défini pour les points de l'axe z . Le vecteur \mathbf{r} qui définit la position de P est simplement $r\hat{\mathbf{r}}$, les coordonnées θ et ϕ étant données par l'orientation de $\hat{\mathbf{r}}$.

Notons que les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ ne conservent pas la même direction quand P se déplace.

Les vecteurs unitaires sont mutuellement orthogonaux et vérifient

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1, \dots \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = 0, \dots \quad (1.45)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\phi}, \dots \quad \hat{\theta} \times \hat{\mathbf{r}} = -\hat{\phi}, \dots \quad (1.46)$$

On discute dans le problème 1.8 les relations entre les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ et les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$.

On calcule les produits scalaires et vectoriels de la même manière que pour des coordonnées cartésiennes. Par exemple, si

$$\mathbf{J} = J_r \hat{\mathbf{r}} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi} \quad (1.47)$$

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\theta} + B_\phi \hat{\phi} \quad (1.48)$$

alors

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = J_r B_r + J_\theta B_\theta + J_\phi B_\phi \quad (1.49)$$

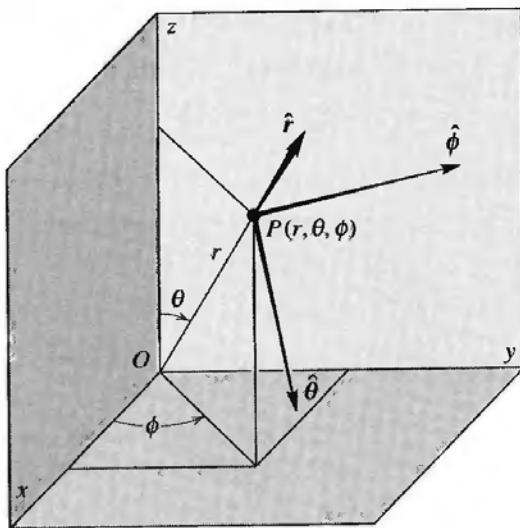


Figure 1.8 Coordonnées sphériques.

et

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = (J_r \hat{\mathbf{r}} + J_\theta \hat{\theta} + J_\phi \hat{\phi}) \times (B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\theta} + B_\phi \hat{\phi}) \quad (1.50)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & \hat{\theta} & \hat{\phi} \\ J_r & J_\theta & J_\phi \\ B_r & B_\theta & B_\phi \end{vmatrix} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} &= (J_\theta B_\phi - J_\phi B_\theta) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + (J_\phi B_r - J_r B_\phi) \hat{\theta} \\ &\quad + (J_r B_\theta - J_\theta B_r) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Remarquons la permutation cyclique des indices. Notons aussi que les termes sont positifs quand les coordonnées apparaissent dans le bon ordre cyclique, et négatifs sinon.

Voici maintenant un deuxième point important. En coordonnées cartésiennes, on peut exprimer le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien à partir d'un opérateur unique $\nabla = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$. En revanche, dans les autres systèmes de coordonnées il n'existe pas de tel opérateur.

La figure 1.9 montre que si P se déplace d'une distance $d\mathbf{r}$, alors

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (1.53)$$

L'élément de volume infinitésimal s'écrit donc

$$dV = (dr)(r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.54)$$

Comme on le voit sur la Fig. 1.9, les éléments de surface perpendiculaires à $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\phi}$ sont

$$dA_r = (r d\theta)(r \sin \theta d\phi) = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.55)$$

$$dA_\theta = dr(r \sin \theta d\phi) = r \sin \theta dr d\phi \quad (1.56)$$

$$dA_\phi = dr(r d\theta) = r dr d\theta \quad (1.57)$$

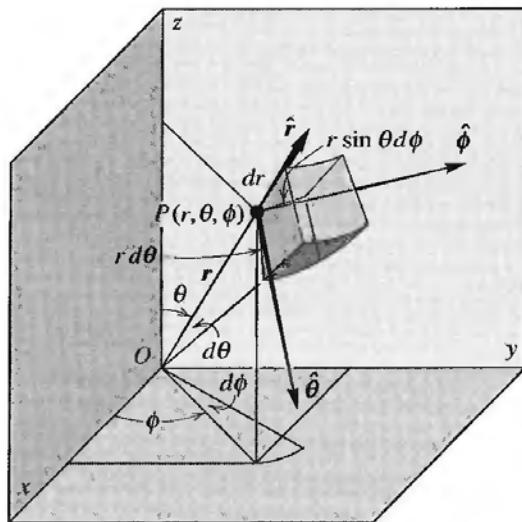


Figure 1.9 Élément de volume en coordonnées sphériques.

Il est facile d'exprimer le *gradient* en coordonnées sphériques. Comme le gradient est le vecteur taux de variation d'une fonction scalaire f , on a

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (1.58)$$

Cette définition n'a pas de sens sur l'axe z , où $\sin \theta = 0$.

Le cas de la *divergence* est plus difficile. La divergence est le flux sortant d'une grandeur vectorielle, par exemple \mathbf{B} , par unité de volume. Rapportons-nous à l'élément de volume représenté en Fig. 1.9. En P , la face de l'élément de volume normale à \mathbf{r} a une

aire $(r d\theta)(r \sin \theta d\phi)$. Il s'ensuit que le flux net sortant des faces normales à $\hat{\mathbf{r}}$ vaut

$$\frac{\partial}{\partial r} [B_r (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)] dr$$

et la contribution de ce flux à la divergence est ce flux lui-même divisé par le volume élémentaire dV , soit

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi} \frac{\partial}{\partial r} [B_r (r d\theta)(r \sin \theta d\phi)] dr = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) \quad (1.59)$$

En procédant de la même façon avec le flux sortant des faces normales à $\hat{\mathbf{\theta}}$, puis avec le flux sortant des faces normales à $\hat{\mathbf{\phi}}$, nous trouvons que

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (B_r r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta r \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \phi} (B_\phi r) \right] \quad (1.60)$$

$$= \frac{2}{r} B_r + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} \quad (1.61)$$

La divergence n'a pas non plus de sens sur l'axe z où $\sin \theta = 0$.

Ainsi, il n'est évidemment pas possible de définir un opérateur unique qui corresponde à la fois au gradient et à la divergence ; le même principe s'applique pour le rotationnel et le laplacien.

Nous donnons maintenant sans démonstration les expressions du *rotationnel* d'un vecteur et du *laplacien* d'un scalaire en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} (r^2 \sin \theta) \operatorname{rot} \mathbf{B} = & \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} (r B_\theta) \right] \hat{\mathbf{r}} \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \phi} B_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta B_\phi) \right] r \hat{\mathbf{\theta}} \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \right] r \sin \theta \hat{\mathbf{\phi}} \end{aligned} \quad (1.62)$$

et

$$\Delta f = \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \quad (1.63)$$

sauf, encore, sur l'axe z .

C'est *seulement* en coordonnées cartésiennes que le laplacien d'un vecteur est la somme des laplaciens de ses composantes. Dans tous les autres systèmes de coordonnées on a

$$\Delta \mathbf{B} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{B}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \quad (1.64)$$

Les figures 1.10 et 1.11 représentent un point P et un élément de volume dV en coordonnées cylindriques. On trouvera en annexe E les expressions des opérateurs vectoriels dans ce système.

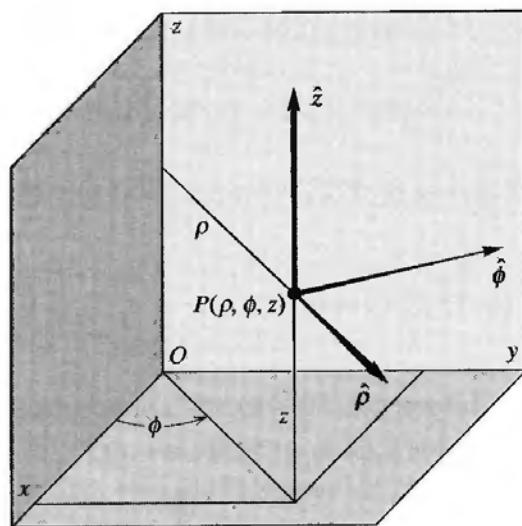


Figure 1.10 Système de coordonnées cylindriques.

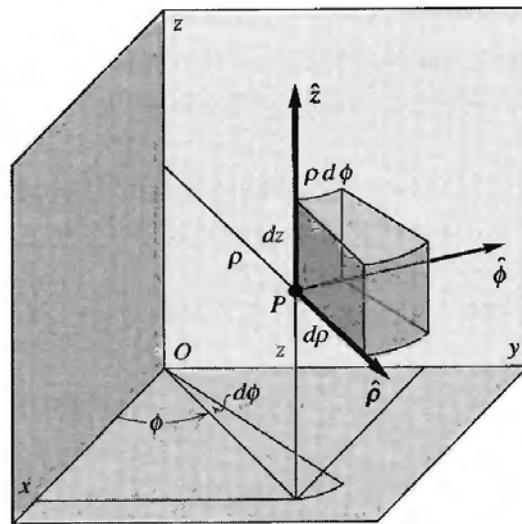


Figure 1.11 Élément de volume en coordonnées cylindriques.

Cf. exercices : 1.8 ; 1.9 ; 1.10 ; 1.11.

1.11 RÉSUMÉ

Le **gradient** $\mathbf{grad} f$ est un vecteur dont le module et la direction sont ceux du taux maximal de croissance de la fonction scalaire f avec la distance en un point donné. Le **flux** Φ d'un vecteur \mathbf{B} à travers une surface d'aire \mathcal{A} est le scalaire

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (1.14)$$

Si la surface est fermée, le vecteur $d\mathcal{A}$ est orienté par convention vers l'extérieur.

La divergence de \mathbf{B}

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

est le flux sortant de \mathbf{B} par unité de volume en un point.

Le théorème de la divergence stipule que

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \cdot d\mathcal{A} \quad (1.22)$$

où \mathcal{A} est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume \mathcal{V} .

L'intégrale curviligne

$$\int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

sur une courbe donnée est la somme des termes $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ pour chaque élément $d\mathbf{l}$ de la courbe entre les points a et b . Pour un contour C qui délimite une surface \mathcal{A} , on peut utiliser le théorème de Stokes :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{A}} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \cdot d\mathcal{A} \quad (1.40)$$

où

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.33)$$

est le *rotationnel* d'une fonction vectorielle \mathbf{B} . L'intégrale de surface ci-dessus s'applique à une surface d'aire \mathcal{A} délimitée par le contour C .

Le *laplacien* est la divergence du gradient :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.43)$$

Le *laplacien d'un vecteur* en coordonnées cartésiennes est défini par

$$\Delta \mathbf{B} = \Delta B_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta B_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (1.44)$$

En coordonnées sphériques (Figs. 1.8 et 1.9), les vecteurs unitaires $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ sont orthogonaux. On a aussi

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi} \quad (1.53)$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.54)$$

Les opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques se trouvent en annexe. Ils n'ont pas de sens sur l'axe z où $\sin \theta = 0$.

Dans les systèmes de coordonnées non cartésiennes,

$$\Delta \mathbf{B} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{B}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \quad (1.64)$$

La page en annexe E fournit de nombreuses relations vectorielles et théorèmes utiles.⁽¹⁾

(1) On trouvera dans [Bladel 1985], annexes 1 et 2, une collection extensive de relations vectorielles et de théorèmes.

EXERCICES

1.1 Montrer que l'angle entre $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} - 6\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$ vaut $130,6^\circ$.

1.2

(a) Montrer que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ est le volume d'un parallélépipède dont les arêtes sont \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , quand les vecteurs partent tous du même point.

(b) Montrer que $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$. Noter que le signe change quand l'ordre cyclique des vecteurs change.

1.3 Soit C une courbe plane fermée simple. Démontrer que la surface \mathcal{A} délimitée par C est donnée par

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}$$

où le vecteur \mathbf{r} va d'une origine *arbitraire* à l'élément $d\mathbf{l}$ de la courbe et où l'orientation de \mathcal{A} et $d\mathbf{l}$ se fait selon la règle du tire-bouchon.

1.4 Le vecteur \mathbf{r} va de $P'(x', y', z')$ à $P(x, y, z)$.

(a) Montrer que si P est fixe et P' mobile, alors $\mathbf{grad}'(1/r) = \hat{\mathbf{r}}/r^2$, $\hat{\mathbf{r}}$ étant le vecteur unitaire le long de \mathbf{r} .

(b) Montrer que, de la même façon, si P' est fixe et P mobile, alors $\mathbf{grad}(1/r) = -\hat{\mathbf{r}}/r^2$.

(R) 1.5

(a) Montrer que $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$.

(b) Que vaut le flux de \mathbf{r} à travers une surface sphérique de rayon a ?

1.6 Montrer que

$$\int_V \mathbf{grad} f \, dV = \int_{\mathcal{A}} f \, d\mathcal{A}$$

où \mathcal{A} est l'aire de la surface fermée qui délimite le volume V . On pourra démontrer cette relation en multipliant les deux membres de l'équation par \mathbf{c} , où \mathbf{c} est un vecteur quelconque indépendant des coordonnées. On utilisera ensuite l'identité 6 (sur la page suivant en annexe) et le théorème de la divergence.

1.7 Puisque $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ est normal à \mathbf{B} , on dirait, au premier abord, que $\mathbf{rot} \mathbf{B}$ doit être normal à \mathbf{B} . Or cela est *faux*.

À titre de contre-exemple, montrer que $(\mathbf{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = -1$ si $\mathbf{B} = y\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$.

1.8

(a) Vérifier, en examinant la Fig. 1.8, que les vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes et sphériques sont liés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

(b) Montrer que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{\theta}} - \sin \phi \hat{\mathbf{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} &= \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{\theta}} + \cos \phi \hat{\mathbf{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} &= \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\mathbf{\theta}}\end{aligned}$$

1.9 Un vecteur \mathbf{F} a le même module et la même direction en tout point de l'espace. On choisira l'axe z parallèle à \mathbf{F} . Alors en coordonnées cartésiennes $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{z}}$.

Exprimer \mathbf{F} en coordonnées sphériques.

1.10 Montrer, en dérivant les expressions appropriées de \mathbf{r} , que la vitesse $\dot{\mathbf{r}}$ en coordonnées sphériques s'écrit $\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{\theta}} + r \sin \theta \dot{\phi}\hat{\mathbf{\phi}}$.⁽¹⁾

1.11 Une force \mathbf{F} est de la forme $(K/r^3)\hat{\mathbf{r}}$ en coordonnées sphériques, où K est une constante. Le champ est-il conservatif ?

1.12 Dans les systèmes de coordonnées que nous avons utilisés jusqu'à présent, les vecteurs et l'opérateur ∇ ont tous trois composantes chacun. Cependant, en théorie de la relativité (Chaps. 11 à 13) il est souvent plus commode de considérer seulement *deux* composantes, l'une parallèle à une direction donnée, l'autre lui étant perpendiculaire. Par exemple on écrit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$.

Si la direction choisie est l'axe x , alors

$$\mathbf{r}_{\parallel} = x\hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}_{\perp} = y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

On a aussi $\nabla = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}$, avec

$$\nabla_{\parallel} = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\perp} = \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Alors

$$\mathbf{grad} V = \nabla V = \nabla_{\parallel} V + \nabla_{\perp} V$$

Montrer que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{A} &= \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{A}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{A}_{\perp} \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla_{\parallel} \times \mathbf{A}_{\perp} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{A}_{\parallel} + \nabla_{\perp} \times \mathbf{A}_{\perp}\end{aligned}$$

(1) Il est habituel de poser $\dot{x} \equiv \partial x / \partial t$.