ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

SOLUTIONS AUX EXERCICES DES NOTES DE COURS

Département de génie électrique et génie informatique

Université de Sherbrooke

Version 2.4

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 4
1.1 4
1.2 4
1.3 5
Chapitre 2 6
2.1 6
2.2 6
2.3 6
2.4 6
2.5 7
2.6 7
2.7 7
2.8 8
2.9 8
2.10 8
2.11 9
2.12 9
2.13 9
Chapitre 3 10
3.1 10
3.2 10
3.3 10
3.4 11
3.5 11
3.6 11
3.7 12
3.8 12
3.9 13
3.10 13
3.11 14
3.12 15
3.13 16

3.14 16
3.15 17
3.16 17
3.17 18
3.18 19
3.19 19
3.20 20
3.22 21
Chapitre 4 22
4.1 22
4.2 22
Chapitre 5 24
5.1 24
5.2 24
5.3 25
5.4 27
5.5 27
5.6 28
5.7 28
5.8 28
5.9 29
5.10 31
5.11 32
5.12 33

CHAPITRE 1

1.1

$\exists a \in A\ \forall\ b \in A |\ a + b < 0,$

Se traduit en mots par :

Il existe un élément de a de l'ensemble A pour tout élément b de l'ensemble A tel que la somme a+b est inférieure à 0.

Signification de ce que ça peut vouloir dire. P.ex. considérons que A est l'ensemble des nombres réels (c.à.d $A = \mathbb{R}$), alors pour toute valeur de b dans $\mathbb{R}$ (disons $b = -3$) on peut trouver un a dans $\mathbb{R}$ tel que $a + b < 0$ (pour $b = -3$, on peut prendre $a = 1$, on a alors $a + b = 1 - 3 = -2$, qui est plus petit que 0. En fait pour un b général, si on prend $a = -b - 1$, on aura toujours que $a + b$ est plus petit que 0. En effet,

$a + b = -b - 1 + b = -1 < 0.$

On a donc trouvé pour tout b un a qui satisfera la condition $a + b < 0$. On aurait aussi pu prendre $a = b - 2$, ce qui remplit aussi la condition imposée.

1.2

a) On a $F = qvB$ et on a aussi $F = ma = \frac{mv^2}{r}$, en remplaçant a dans l'expression.

Donc en égalant les deux expressions, on a $qvB = \frac{mv^2}{r}$,

Il reste à isoler le rayon du cercle : $r = \frac{mv}{qB}$

b) T est le temps qu'il faut pour faire un tour. Or, un tour correspond à une distance $2\pi r$ (la circonférence) et cette distance est parcourue à la vitesse v. Donc le temps nécessaire pour parcourir la distance est :

$$T = \frac{distance}{vitesse} = \frac{2\pi r}{v}$$

c) On peut réécrire $r = \frac{mv}{qB}$ obtenu en a) sous la forme $\frac{r}{v} = \frac{m}{qB}$. On peut insérer ce rapport $\frac{r}{v}$ dans l'expression obtenue en b) pour la période et ainsi obtenir :

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

On voit que la période ne dépend que de la du rapport de la masse sur la charge et du champ magnétique.

d) Pour déterminer la vitesse orbitale, on utilise l'expression obtenue en a) qu'on écrit sous la forme suivante :

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{14 \times 10^{-2}m \ \cdot 1.6 \times 10^{-19}C \cdot 0.35\,T}{1.67 \times 10^{-27}kg} = 4.7 \times 10^{6}m/s$$

Soit tout près de 5 millions de mètres à la seconde

La période quant à elle vaut :

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1.67 \times 10^{-27}kg}{1.6 \times 10^{-19}C \cdot 0.35\,T} = 1.87 \times 10^{-7}s$$

Bonus : la fréquence de rotation (la nombre de tour par seconde) vaut donc :

$$f = \frac{1}{T} = 5.34 \times 10^{6}s^{-1} = 5.34 \times 10^{6}Hz = 5.34\ MHz$$

1.3

$$\sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2k^2 = 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 60$$

CHAPITRE 2

2.1

La prescription illustrée à la Fig. 2.1 n'est pas une fonction car pour une valeur de x donnée ($x = 0.5$), il y a plusieurs valeurs de $f(x)$.

2.2

Il faut trouver les valeurs a et b telles que $f(a) = -64$ et $f(b) = 8$.

Donc

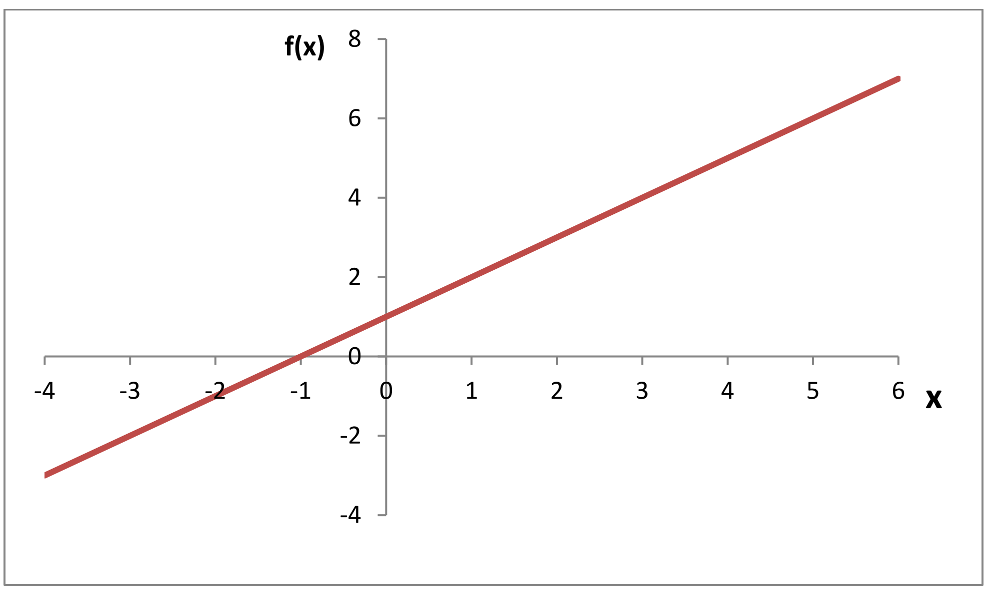
$$a^3 = -64 \Rightarrow a = -4$$

$$b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$$

Ainsi le domaine de f est : $]-4, 2]$

2.3

Il s'agit d'une droite :



2.4

Oui, la fonction $f(x) = x^4$ est paire, car $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$.

2.5

a) On utilise l'indice fourni

$$g(-x) = f(-x) + f(-(-x))$$

Or $-(-x) = x$

$$g(-x) = f(-x) + f(x)$$

$$g(-x) = f(x) + f(-x)$$

$$g(-x) = g(x)$$

Donc $g(x)$ est bien une fonction paire, car elle satisfait la définition d'une fonction paire.

b) On procède de manière similaire à ce qui a été fait en a). Donc :

$$h(-x) = f(-x) - f\big(-(-x)\big)$$

$$h(-x) = f(-x) - f(x)$$

$$h(-x) = -\big(f(x) - f(-x)\big)$$

$$h(-x) = -h(x)$$

h est donc impaire.

2.6

$f(x) = \cos(x)$ est périodique de période 2π. Dans ce cas, x est un angle en radians et la fonction cosinus revient à son point de départ après que l'angle ait fait 2π et se répète ensuite : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Animation des fonctions périodiques $\cos(x)$et $\sin(x)$

2.7

On sait que $\cos(\theta)$ est périodique de période 2π ($\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$) Donc $\cos\left(\frac{x}{L}\right)$ le sera périodique aussi.

Cherchons sa période P. Pour ce faire, on doit avoir :

$$f(x + P) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x+P}{L}\right) = \cos\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{L} + \frac{P}{L}\right) = \cos\left(\frac{x}{L}\right)$$

Il faut donc que $\frac{P}{L} = 2\pi \Rightarrow P = 2\pi L$

La période est donc $2\pi L$.

2.8

De la même manière que pour 2..7 :

$$f(x+P) = \cos\left(\frac{2\pi(x+P)}{L}\right)$$

$$f(x+P) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L} + \frac{2\pi P}{L}\right)$$

La période est donc telle que :

$$\frac{2\pi P}{L} = 2\pi \Rightarrow P = L$$

La fonction est donc de période L.

2.9

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = x \cdot x^7 = x^8$$

2.10

a)

$$u(x) = g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(x^4) = \cos(x^4)$$

b)

$$u(x) = f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(\cos(x)) = (\cos(x))^4$$

On constate que $f \circ g$est différent de $g \circ f$ car dans le premier cas on a $(\cos(x))^4$ alors que dans le deuxième cas on a $\cos(x^4)$.

2.11
a)

$$u(x) = g \circ f = g\big(f(x)\big) = g(x) = \log(x)$$

b)

$$u(x) = f \circ g = f\big(g(x)\big) = f(\log(x)) \ = \log(x)$$

On remarque qu'on obtient la même chose en a) et en b).

2.12
Le neutre pour l'addition est le nombre 0.

2.13
$g(x)$ est composé des fonctions :

$$f_1(x) = e^x$$

$$f_2(x) = -x$$

$$f_3(x) = x^2$$

$$g(x) = f_1\left(f_2\big(f_3(x)\big)\right) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)\ (x)$$

CHAPITRE 3

3.1

On a $s(t) = c$. Selon la définition :

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{c - c}{\Delta t}$$

$$= \frac{0}{\Delta t} = 0$$

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 0$$

3.2

On a $s(t) = ct^3$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{c(t+\Delta t)^3 - ct^3}{\Delta t}$$

$$= \frac{ct^3 + 3ct^2\Delta t + 3ct\Delta t^2 + c\Delta t^3 - ct^3}{\Delta t}$$

$$= 3ct^2 + 3ct\Delta t + c\Delta t^2$$

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3ct^2 + 3ct\Delta t + c\Delta t^2$$

Puisque $\Delta t \to 0$, seul le terme ne dépendant pas de Δt, reste suite à l'application de la limite.

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3ct^2$$

3.3

On a $f(x) = x^5 + 3x^2$, formé de la somme des fonctions x^5 et $3x^2$. Alors :

$$f'(x) = (x^5)' + (3x^2)'$$

On sait que la dérivée d'une constante mutltipliée par une fonction est égales à la constante multipliée par la dérivée. Donc :

$$f'(x) = 5x^4 + 3 \cdot 2x$$

$$= 5x^4 + 6x$$

3.4

On a $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$

Par définition :

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) - f_2(x+h)\big) \ - \big(f_1(x) - f_2(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) - f_1(x)\big) \ - \big(f_2(x+h) - f_2(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) - f_1(x)\big)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_2(x+h) - f_2(x)\big)}{h}$$

$$= f_1'(x) - f_2'(x)$$

3.5

$$f(x) = (x^7 + 2x)(3x^3 + 2x + 1)$$

Posons $f_1(x) = x^7 + 2x$ et $f_2(x) = 3x^3 + 2x + 1$

Avec la règle de la dérivée d'un porduit :

$$f'(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x)$$

$$= (7x^6 + 2)(3x^3 + 2x + 1) + (x^7 + 2x)(9x^2 + 2)$$

$$= 21x^9 + 14x^7 + 7x^6 + 6x^3 + 4x + 2 + 9x^9 + 2x^7 + 18x^3 + 4x$$

$$= 30x^9 + 16 + 7x^6 + 24x^3 + 8x + 2$$

Pour vérifier, multipliond d'abord f_1 et f_2 :

$$f(x) = 3x^{10} + 2x^8 + x^7 + 6x^4 + 2x$$

Alors

$$f'(x) = 30x^9 + 16 + 7x^6 + 24x^3 + 8x + 2$$

On obtient bien le même résultat et les calculs étaient moins longs de la 2e façon.

3.6

$$f(x) = \frac{x+a}{x^2+b}$$

$$f'(x) = \frac{(x+a)'(x^2+b) - (x+a)(x^2+b)'}{(x^2+b)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+b) - (x+a) \cdot 2x}{(x^2+b)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+b-2x^2-2ax}{(x^2+b)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2-2ax+b}{(x^2+b)^2}$$

3.7

$$f(x) = (2x+9)^7$$

$$f'(x) = 7(2x+9)^6 \cdot 2$$

$$= 14(2x+9)^6$$

3.8

Rappelons que $(x^{-1})' = (-1)x^{-2}$ selon la règle $[(x^n)' = nx^{n-1}]$

Donc $g(x) = \left(f(x)\right)^{-1}$

$$g'(x) = (-1)\left(f(x)\right)^{-2} \cdot f'(x)$$

$$= -\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

Si on le fait avec la règle du quotient pour vérifier

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$g'(x) = \frac{\cancel{(1)}'f(x) - 1 \cdot f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$$

On obtient donc le même résultat, comme il se doit.

3.9
On utilise la formule pour la dérivée de la fonction inverse

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Ici $f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

Donc

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\left(x^{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

3.10

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\tan x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x$$

3.11

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\sec' x = \frac{(1)' \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x \tan x$$

Cosec est parfois noté csc.

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\csc' x = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cot' x = \frac{(-\sin x)(\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

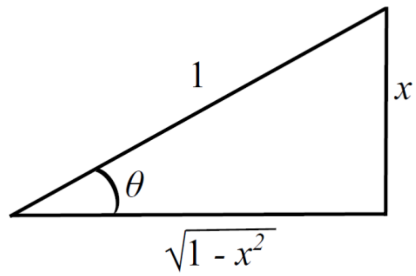
$$= -\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= -\csc^2 x$$

3.12

Il faut trouver $\cos(\arcsin x)$

Soit $\theta = \arcsin x$, alors $\sin\theta = x$



Ceci mène au triangle rectangle suivant :

Par Pythagore, le troisième côté vaut $\sqrt{1 - x^2}$.

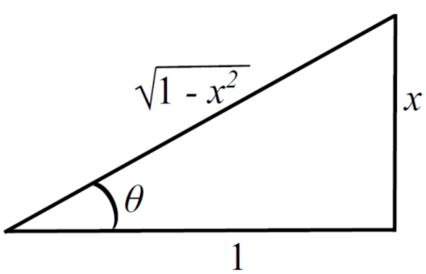
Donc :

$$\cos\theta = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Ce qui est l'équation 3.39

On veut aussi trouver $\sec(\arctan x)$

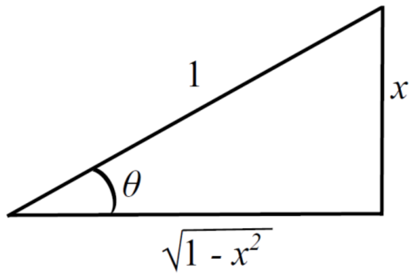
Soit $\theta = \arctan x$



Donc $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1 + x^2}$

c. à. d. $\sec(\arctan x) = \sqrt{1 + x^2}$, ce qui est l'équation 3.40

Pour : $\sec(\arcsin x)$



$$\theta = \arcsin x \iff \sin\theta = x$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\sec(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Pour :$\csc(\arcsin x)$:

$$\csc(\arcsin x) = \frac{1}{\sin(\arcsin x)} = \frac{1}{x}$$

3.13

$$f(x) = \cos(x^2)$$

On a ici la composition de deux fonctions $f_1(x) = \cos x$ et $f_2(x) = x^2$

$$f(x) = (f_1 \circ f_2)(x) = f_1\big(f_2(x)\big) = \cos(x^2)$$

$$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x = -2x\sin(x^2)$$

3.14

$$(x^r)' = \left(e^{r\ln x}\right)'$$

On utilise la règle de dérivation en chaîne, d'où :

$$\left(e^{r\ln x}\right)' = e^{r\ln x} \cdot (r\ln x)'$$

$$= e^{r\ln x} \cdot \frac{r}{x}$$

Or, $e^{r\ln x} = x^r$

$$= x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

On obtient donc la même formule que pour la dérivée de x^n, mais ici r peut être n'importe quel nombre réel (entier, rationnel, irrationnel). On a donc établi la formule générale.

3.15

$$f(x) = \ln x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cos x + \ln x\,(-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x$$

3.16

a)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Donc,

$$\cosh -x = \frac{e^{-x} + e^{--x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{s}$$

$$= \cosh x$$

Donc cosh est paire

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\sinh -x = \frac{e^{-x} - e^{--x}}{2} = -\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= -\sinh x$$

Donc sinh est impaire

b)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 \cdot 1 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

c)

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)'$$

$$= \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= \sinh x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)'$$

$$= \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh x$$

3.17

On a $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

Donc,

$$f(x_0 + h) \approx 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$$

La valeur exacte de $f(1{,}1)$ est $(1{,}1)^2 = 1.21$

L'erreur absolue est donc de 0.01 et en % cette erreur est $\frac{0{,}01}{1{,}21} \times 100\% = 0{,}83\%$ ce qui est relativement faible.

Dans le cas où h=0.01, alors

$$f(1.01) \approx 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}01 = 1{,}02$$

La valeur exacte est 1,0201, Donc l'erreur absolue est de 0,0001 et l'erreur relative est de 0,01%. Donc, plus h est petit, moins l'erreur est grande.

3.18

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Alors,

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_0 + h} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot h$$

Donc,

$$\sqrt{4{,}1} = \sqrt{4 + 0{,}1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}1$$

$$= 2 + \frac{0{,}1}{4} = 2{,}025$$

La valeur plus exacte obtenue avec une calculatrice est $\sqrt{4{,}1} = 2{,}02485$, ce qui est près de notre valeur approchée.

3.19

$$f(x) = \sin x \;\Rightarrow f'(x) = \cos x$$

On peut obtenir la forme de l'équation 3.59 pour l'Approximation au premier ordre, à savoir :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ce qui dans le cas présent se traduit par :

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \,(x - x_0)$$

Ici $x_0 = 0$, donc $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$.

$$\sin x \approx 0 + 1(x - 0) = x$$

Donc $\sin x = x$ pour x petit.

3.20

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Le minimum aura lieu à la valeur de x telle que :

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

3.21

$$T(x, y, z) = e^{xyz} + \cos z + y^2$$

a) Lorsqu'on calcule $\frac{\partial T}{\partial x}$, on suppose y et z constantes. Donc,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = e^{xyz} \cdot yz$$

b)

$$\frac{\partial T}{\partial y} = e^{xyz} \cdot xz + 2y$$

c)

$$\frac{\partial T}{\partial z} = e^{xyz} \cdot xy - \sin z$$

3.22

$$f(x,y) = x^4 + 5x^3y^4 + 9y$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 15x^2y^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 60x^2y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 20x^3y^3 + 9$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 60x^2y^3$$

On constate que les dérivées partielles mixtes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sont égales, donc l’ordre dans lequel les dérivées sont prises n’importe pas pour la fonction considérées ici. Ceci est en fait vrai pour toute fonction, en autant que cette fonction soit suffisamment lisse.

CHAPITRE 4

4.1

On a

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

Toutes les dérivées de e^xsont égales à e^x car e^xest sa propre dérive. On a donc :

$$f^{(n)}(x) = e^x \ \ \forall\, n$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Ainsi le développement en série de e^x est ::

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

La série de la fonction exponentielle est très simple..

4.2

Écrivons f(x) sous la forme de la série suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c3(x-a)^3 + \cdots$$

Alors,

$$f'(a) = c_0$$

On a trouvé c_0.

$$f'(x) = c^1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

Alors,

$$f'(a) = c_1$$

On a trouvé c_1

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots$$

$$\Rightarrow f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a) + \cdots$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(a) = 3!\,c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

Et si on sontinue ainsi, on aura :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Ainsi,

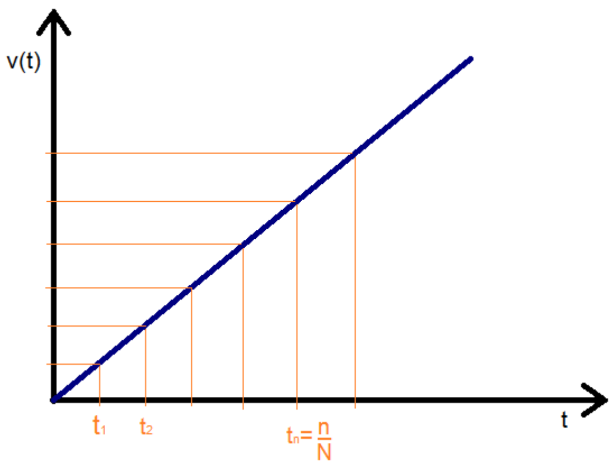
$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Qui est l'expression pour la série centrée en a d'une fonction.

CHAPITRE 5

5.1

Dans ce cas, en utilisant les valeurs de la fonction à la fin des sous-intervalles :



$$\int_0^1 t dt = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{N}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N} n$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \frac{N(N+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

On obtient le même résultat que si on prend les valeurs de la fonction au début des intervalles.

5.2

L'équation 5.3 dit :

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{t_f - t_i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n)$$

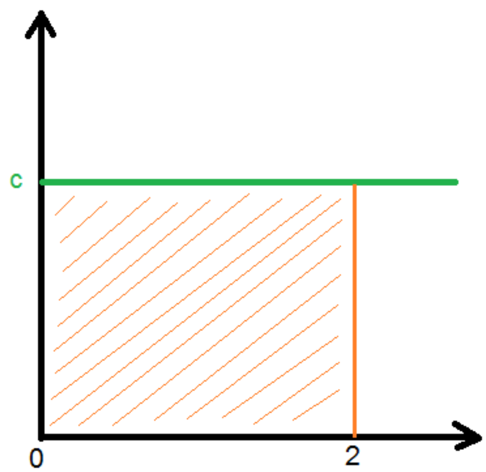
Ici $v(t_n) = c$, $t_i = 0$ et $t_f = 2$, donc :

$$\int_0^2 v(t)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} c$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} Nc$$

$$= 2c$$

C'est bien la réponse à laquelle on doit s'attendre, car dans le cas présent, l'aire correspondant à l'intégrale est un rectangle de longueur 2 et de hauteur c.



5.3

L'équation 5.3 dit :

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{t_f - t_i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n)$$

Ici, $t_i = 0$, $t_f = 2$, donc :

$$\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N} = \frac{2}{N}$$

$$t_n = 0 + n\Delta t = \frac{n \cdot 2}{N}$$

$$v(t_n) = \left(\frac{n \cdot 2}{N}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot 4}{N^2}$$

Donc,

$$\int_0^2 v(t)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n^2 \cdot 4}{N^2}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{8}{N^3} \sum_{n=0}^{N-1} n^2$$

Puisque n=0 ne contribue pas à la somme :

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{8}{N^3} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 + N^2 - N^2$$

L'ajout de$N^2 - N^2$ permet d'voir une somme de 1 à N et ainsi utiliser le résultat connu :

$$\sum_{n=1}^{N-1} n^2 + N^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\int_0^2 v(t)dt = \lim_{N\to\infty} \frac{8}{N^3} \left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - N^2\right]$$

$$= 8 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \left[\frac{(N^2+N)(2N+1) - 6N^2}{6}\right]$$

$$= 8 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \left[\frac{2N^3 + N^2 + 3N^2 + N - 6N^2}{6}\right]$$

$$= 8 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \left[\frac{2N^3 - 3N^2 + N}{6}\right]$$

$$= \frac{8}{6} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2N^3 - 3N^2 + N}{N^3}\right]$$

$$= \frac{8}{6} \lim_{N\to\infty} \left[2 - \frac{3}{N} + \frac{1}{N^2}\right]$$

$$= \frac{8}{6} * 2 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

5.4

On sait que $(x^3)' = 3x^2$. Or, on aimerait avoir une fonction dont la dérivée vaut x^2 et non pas $3x^2$. C'est le facteur 3 qui nous dérange. On a alors qu'à prendre :

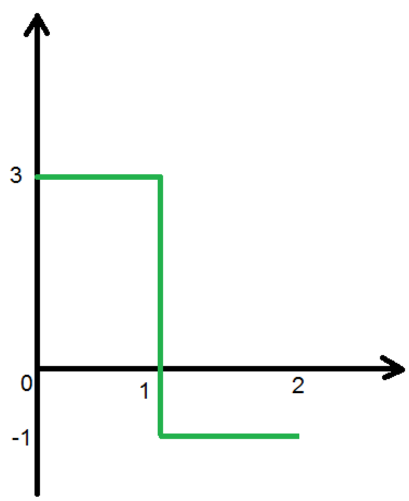
$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

On fait ainsi disparaître le facteur 3 qui dérange. Donc,

$$\int_0^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}$$

5.5

Voici le graphe de g(x) :



Pour intégrer g de 0 à 2, il faut subdiviser l'intégrale en deux parties, une allant de 0 à 1 et l'autre allant de 1 à 2, car g ne prend pas la même valeur sur ces deux sous-intervalles. On utilisera donc de ce fait la propriété 3.

$$\int_0^2 g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_1^2 g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 3\,dx + \int_1^2 (-1)\,dx$$

$$= 3\,x\,|_0^4 - x|_1^2$$

$$= 3(1-0) - (2-1) = 3 - 1 = 2$$

5.6

$$\int e^{137u}\, du$$

On sait que la dérivée d'une exponentielle est une exponentielle :

$$\int e^{137u}\, du = \frac{1}{137} e^{137u}$$

On vérifie bien que si on dérive le résultat, on réobtient bien l'intégrand, en effet :

$$\frac{d}{du}\left[\frac{1}{137} e^{137u}\right] = \frac{1}{137} \cdot 137 \cdot e^{137u} = e^{137u}$$

5.7

$$I = \int (6x^2 + 6x + 1) \sin(2x^3 + 3x^2 + x + 29)\, dx$$

Le polynôme surligné en jaune est la dérivée du polynôme surligné en vert.

On pose donc $u = 2x^3 + 3x^2 + x + 29$, alors $du = 6x^2 + 6x + 1\, dx$. Notre intégrale est donc :

$$I = \int \sin u\, du$$

$$= -\cos u + K$$

$$= -\cos(2x^3 + 3x^2 + x + 29) + K$$

5.8

f(x) est impaire, donc $f(-x) = -f(x)$. Alors,

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

Posons :

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

Dans cette intégrale :

$$x = -a \Rightarrow y = a$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$dx = -dy$$

Donc

$$I = \int_a^0 f(-y)(-dy) + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\int_a^0 f(-y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx$$

En remplaçant la fonction y par x :

$$= \int_0^a f(x)(-dx) + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_a^0 -f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$\int_0^a [-f(x) + f(x)]\,dx = 0$$

5.9

$$I = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On pose $x = a\cos\theta \Rightarrow dx = -a\sin\theta\,d\theta$

On a alors

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\cos^2\theta$$

$$= a^2(1-\cos^2\theta) = a^2\sin^2\theta$$

Donc,

$$I = \int \frac{-a\sin\theta\, d\theta}{(a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-a}{a^3}\int \frac{\sin\theta}{\sin^3\theta}\, d\theta$$

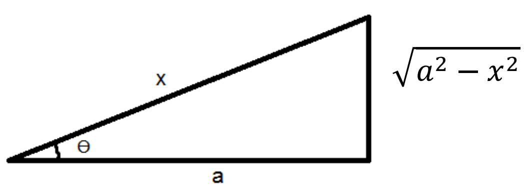
$$= \frac{-1}{a^2}\int \mathrm{cosec}^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{-1}{a^2}\,(-\mathrm{cotan}\,\theta) + K$$

$$= \frac{cotan\,\theta}{a^2} + K$$

Il faut remettre en termes de x, On a

$\cos\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow cotan\,\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$



D’où finalement

$$I = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + K$$

On peut vérifier ce dernier résultat en le dérivant pour voir si on obtient bine l’intégrant.

$$\frac{dI}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + K\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(+\cancel{2}x)}{a^2-x^2}\right]$$

$$= \frac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}}{a^2(a^2-x^2)}$$

$$= \frac{\cancel{a^2} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{\cancel{a^2}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5.10

$$I = \int x \ln x \, dx$$

On applique l'intégration par parties..

Si on pose $u = x$, alors on a $dv = \ln x \, dx$. Donc, $du = dx$ et $v = \int \ln x \, dx$. Or, on ne sait pas intégrer $\ln x$, cette fonction n'admet pas de primitive sous forme de fonctions élémentaires.

On va donc plutôt poser $u = \ln x$ et $dv = xdx$

Avec ce choix, on augmentera la puissance de x, mais au moins, on se débarrasse de la fonction $\ln x$.

On a alors :

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

Donc,

$$I = uv - \int v du = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \; + K$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \; + K$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + K$$

On voit qu'avec le choix $u = \ln x$ et $dv = xdx$ on arrive à une fonction qu'on sait intégrer.

5.11

$$I = \int (x^2 + x) \sin x \, dx$$

On va appliquer l'intégration par parties. On pose :

$$u = x^2 + x \ , \quad dv = \sin x \ dx$$

$$\Rightarrow du = (2x + 1)\, dx \ , \quad v = -\cos x$$

$$I = -(x^2 + x) \cos x + \int (2x + 1) \cos x \ dx$$

On applique de nouveau l'intégration par parties pour l'intégrale restante

$$u = 2x + 1 \ , \quad dv = \cos x \ dx$$

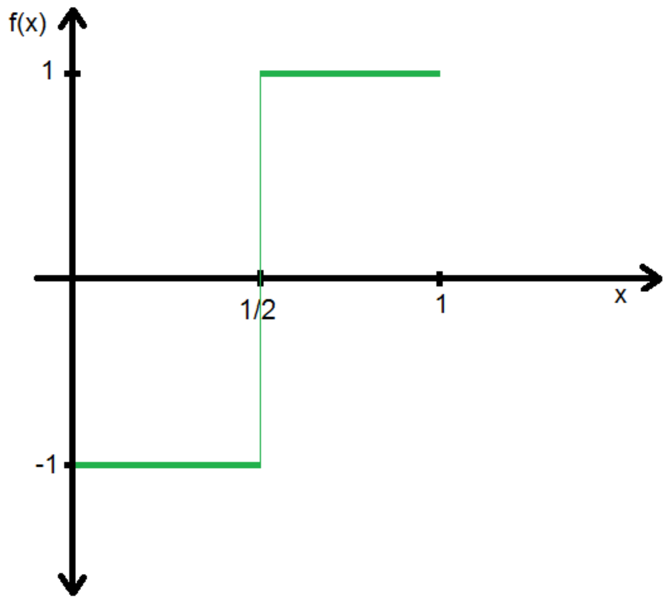
$$\Rightarrow du = 2\, dx \ , \quad v = \sin x$$

$$I = -(x^2 + x) \cos x + (2x + 1) \sin x - \int 2 \sin x \ dx$$

Maintenant on a une intégrale qu'on sait obtenir.

$$I = -(x^2 + x) \cos x + (2x + 1) \sin x + 2 \cos x + K$$

5.12



a) On voit que la fonction est autant négative que positive. Donc on s'attend à ce que sa valeur moyenne soit nulle.

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-0}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,dx\right]$$

$$= \quad -x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \quad x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

On obtient bien le résultat auquel on s'attendait; ça a donc du sens.

b)

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-0}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}(-1)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1^2\, dx\right]}$$

$$= \sqrt{\quad x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \quad x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$