Formulaire d'équations

Identités trigonométriques élémentaires

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \qquad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2} \qquad \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \qquad \sin 2A = 2\sin A \cos A$$

Produits entre vecteurs

Soient $\vec{a} = a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z$ et $\vec{b} = b_x\hat{e}_x + b_y\hat{e}_y + b_z\hat{e}_z$ des vecteurs, alors

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Paramétrique = [x(t), y(t), z(t)]

tangente $= \frac{1}{|r'|} r'$

Opérateurs vectoriels

$$\mathrm{grad}\, f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad \text{Dérivée directionnelle} : D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$$

Soit $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{e}_x + F_2(x,y,z)\hat{e}_y + F_3(x,y,z)\hat{e}_z$ un champ de vecteurs, alors

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \det\begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Laplacien} : \nabla^2 f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \nabla^2\vec{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla} f) = 0, \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0, \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

Formules utiles pour l'intégration - Jacobien

Si $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ et $z = z(u,v,w)$, alors

$$\mathrm{d}V \equiv \mathrm{d}^3\vec{r} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w, \qquad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Intégrale de surface (ou de flux)

$$\Phi = \int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = \int_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}V \quad \text{(Théorème de la divergence)}$$

Intégrale de chemin

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}A \quad \text{(Théorème de Stokes)}$$

De polaires à cartésiennes	**De cartésiennes à polaires**
$x = r\cos\theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\theta$	$\theta = \arctan\frac{y}{x}$
$\hat{e}_x = \cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta$	$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y$
$\hat{e}_y = \sin\theta\,\hat{e}_r + \cos\theta\,\hat{e}_\theta$	$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y$
Élément différentiel de surface : $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$	
Élément différentiel de ligne : $d\vec{r} = [\mathrm{d}x, \mathrm{d}y]$	
De cylindriques à cartésiennes	**De cartésiennes à cylindriques**
$x = \rho\cos\phi$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = \rho\sin\phi$	$\phi = \arctan\frac{y}{x}$
$z = z$	$z = z$
$\hat{e}_x = \cos\phi\,\hat{e}_\rho - \sin\phi\,\hat{e}_\phi$	$\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y$
$\hat{e}_y = \sin\phi\,\hat{e}_\rho + \cos\phi\,\hat{e}_\phi$	$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y$
$\hat{e}_z = \hat{e}_z$	$\hat{e}_z = \hat{e}_z$
$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$	
Élément différentiel de surface du cylindre : $dA = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$	
Élément différentiel de surface sur un plan xy : $dA = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi$	
De sphériques à cartésiennes	**De cartésiennes à sphériques**
$x = r\sin\theta\cos\phi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r\sin\theta\sin\phi$	$\theta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$
$z = r\cos\theta$	$\phi = \arctan\frac{y}{x}$
$\hat{e}_x = \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_\theta - \sin\phi\,\hat{e}_\phi$	$\hat{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z$
$\hat{e}_y = \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_\theta + \cos\phi\,\hat{e}_\phi$	$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z$
$\hat{e}_z = \cos\theta\,\hat{e}_r - \sin\theta\,\hat{e}_\theta$	$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y$
$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$	
Élément différentiel de surface : $dA = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$	

$x + y = 1$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$