# VECTEURS ET GÉOMÉTRIE VECTORIELLE
## pour analyse vectorielle

Yves Bérubé-Lauzière, Ph.D.

Département de génie électrique et de génie informatique
Université de Sherbrooke

version 1.5

# Table des matières


**1 Vecteurs géométriques ou physiques** **5**

1.1 Définition, terminologie et notations . . . 5

1.2 Vecteurs fixes, glissants, libres, équipollents et opposés . . . 7

1.3 Opérations élémentaires sur les vecteurs (algèbre vectorielle) . . . 8

1.3.1 Addition . . . 8

1.3.2 Soustraction . . . 11

1.3.3 Addition de plusieurs vecteurs : méthode du polygone . . . 11

1.3.4 Produit par un scalaire . . . 12

1.3.5 Bases . . . 14

1.4 Systèmes de coordonnées linéaires . . . 17

1.4.1 Cas général . . . 17

1.4.2 Système de coordonnées cartésiennes . . . 17

**2 Géométrie vectorielle** **21**

2.1 Produit scalaire . . . 21

2.2 Produit vectoriel . . . 25

2.2.1 Expression pour le produit vectoriel . . . 25

2.2.2 Norme du produit vectoriel . . . 28

2.2.3 Règle de la main droite . . . 29

2.2.4 Propriétés du produit vectoriel . . . 31

2.3 Produit mixte (ou triple produit) . . . 32

2.4 Droites dans le plan et l'espace . . . . . 33
2.5 Plans dans l'espace . . . . . 35

**A Solutions/réponses aux exercices de lecture** **39**

# Chapitre 1

# Vecteurs géométriques ou physiques

## 1.1 Définition, terminologie et notations

Vous êtes peut-être familier[1] avec la notion de vecteur comme étant une quantité représentée par une flèche ayant une certaine longueur. On parle alors d'une *quantité vectorielle* par opposition à une *quantité scalaire* comme la température, la masse d'un objet, la longueur d'un objet, *etc.*.., qui ne nécessite qu'un nombre pour la caractériser. Par exemple, on dira : « Aujourd'hui, il fait 23 Celsius ». Un exemple d'un vecteur est le déplacement d'un point $A$ à un point $B$, ce déplacement étant représenté par une flèche reliant $A$ et $B$ de $A$ vers $B$, voir la figure 1.1. Un autre exemple est la vitesse d'une voiture se déplaçant à 100 km/h vers le Nord. Son vecteur vitesse a alors une grandeur de 100 km/h et pointe vers le Nord. D'autres exemples de quantités vectorielles sont les accélérations, les forces, la gravité en un point, le champ électrique en un point, *etc.*..
À partir de ces considérations, on définit de façon plus précise un vecteur comme suit :

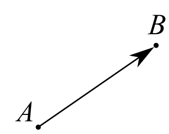

FIGURE 1.1

**Définition :** Un vecteur est une quantité possédant :

1. une longueur ;
2. une direction ;
3. un sens selon cette direction.

Des exemples de direction sont les directions Nord-Sud ou Est-Ouest. Dans ces cas, on ne sait pas si on va vers le Nord ou vers le Sud (vers l'Est ou vers l'Ouest), c'est le sens qui nous le dira. Pour indiquer la longueur d'un vecteur, on utilisera aussi les termes *module*, *intensité*, *norme* ou *grandeur*.

Implicitement jusqu'ici, il a été question de *vecteurs géométriques* ou *physiques* (c.à.d. des vecteurs auxquels on peut donner un sens géométrique ou physique). Dans le cas d'un vecteur géométrique, on peut associer ce dernier à un segment de droite orienté, donc qui possède une longueur, une direction et un sens. Les vecteurs géométriques ou physiques ne sont pas les seuls types de vecteurs. Nous verrons

[1] Si vous ne l'êtes pas, ne vous en faites pas, vous l'apprendrez ici !

plus tard lorsqu'il sera question d'espaces vectoriels qu'il est possible de généraliser la notion de vecteur pour lui donner un sens plus général et abstrait. D'ici là, il ne sera question que de vecteurs géométriques ou physiques et il n'y aura ainsi pas de confusion possible.

Dans le présent document, deux notations seront utilisées pour dénoter un vecteur. S'il est question d'un vecteur allant d'un point $A$ à un point $B$ (comme ça sera la cas par exemple dans certains problèmes de géométrie), il sera dénoté par $\overrightarrow{AB}$ qui se lit « le vecteur AB ». Autrement, un vecteur sera dénoté par une lettre minuscule en caractère gras, comme p.ex. $\mathbf{a}$ qui se lit « le vecteur $a$ ». Parfois, on utilisera une lettre majuscule en gras pour désigner un vecteur lorsque c'est une notation usuelle dans un contexte donné ; p.ex. $\mathbf{N}$ pour désigner la normale à un plan. Une autre notation communément utilisée dans d'autres ouvrages est $\vec{a}$, mais on n'en fera pas usage ici (cette notation est par contre commode lorsqu'on écrit des équations vectorielles à la main). Les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\overrightarrow{AB}$ seront représentés graphiquement par un segment de droite terminé par une flèche tel qu'illustré à la figure 1.1.

La norme d'un vecteur sera dénotée par des doubles barres, p.ex. $||\mathbf{a}||$ et $||\overrightarrow{AB}||$ dénotent respectivement les normes de $\mathbf{a}$ et $\overrightarrow{AB}$. La norme d'un vecteur, représentant sa longueur, est un nombre réel positif ou nul. Dans certains ouvrages, la norme est dénotée par de simples barres (p.ex. $|\mathbf{a}|$), comme pour la valeur absolue d'un nombre réel (ou le module d'un nombre complexe). Pour éviter toute confusion, ici les doubles barres seront utilisées pour désigner la norme d'un vecteur et les simples barres pour désigner la valeur absolue d'un nombre réel (ou le module d'un nombre complexe).

On dénotera par *vecteur nul* ou *vecteur zéro* un *vecteur de longueur zéro*. Un tel vecteur sera dénoté par $\mathbf{0}$ (ou $\vec{0}$ si vous l'écrivez à la main). La direction et le sens du vecteur nul ne sont pas définis, car si on voit le vecteur nul comme la limite d'un vecteur devenant de plus en plus petit, ce dernier peut avoir n'importe quelle direction avant d'en arriver à sa limite.

Un vecteur dont la norme est égale à 1 est appelé *vecteur unitaire* (on dit aussi qu'un tel vecteur est *normé*). Dans le présent ouvrage, on désignera généralement les vecteurs unitaires en leur mettant un chapeau dessus, comme par exemple $\hat{\mathbf{u}}$.

Lorsqu'un vecteur est défini par les deux points extrêmes d'un segment de droite, un de ces points est appelé l'*origine* ou *point d'application* du vecteur et l'autre est appelé *extrémité* ou *point d'arrivée* du vecteur ; le sens du vecteur précise lequel des points extrêmes est l'origine du vecteur. Graphiquement, la flèche sera placée à l'extrémité du vecteur. Ainsi, dans le cas du vecteur $\overrightarrow{AB}$ représenté à la figure 1.1, la notation $\overrightarrow{AB}$ indique que le vecteur va de $A$ vers $B$ ; $A$ est donc l'origine et $B$ l'extrémité.

Si on prolonge le segment de droite associé à un vecteur, on obtient une *droite appelée support du vecteur*, voir figure 1.2. Dans la représentation graphique de la figure 1.2, la droite $\Delta$ est appelée le support de $\mathbf{v}$; on dit aussi que $\mathbf{v}$ repose sur $\Delta$.

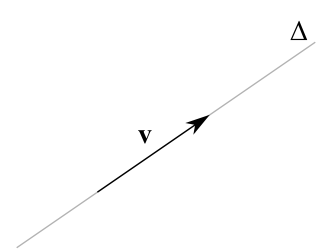


FIGURE 1.2

**Attention à une confusion qui survient souvent** : Un vecteur n'est pas nécessairement un doublet ou triplet (plus généralement un $n$-tuplet) de nombres arrangés en rangée ou en colonne comme p.ex.

$$(1,2,-1),\ [-4\ 2],\ \text{ou}\ \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En fait, on peut représenter un vecteur comme un $n$-tuplet lorsqu'on le réfère par rapport à un système de coordonnées, mais un tel système n'est pas une condition nécessaire pour l'existence d'un vecteur. Remarquez qu'un vecteur a été délibérément défini ici sans faire référence à un tel système. Un vecteur, qui représente souvent une entité physique, existe sans qu'il soit nécessaire de le représenter par rapport à un système de coordonnées. On n'a qu'à penser au champ gravitationnel $\mathbf{g}$ en un point. On comprend bien que la gravité, et donc le vecteur qui la représente $\mathbf{g}$, existe sans qu'on ait à la représenter par rapport à un système de coordonnées. Ce n'est que plus tard à la section **??** du présent document lorsqu'on traitera des changements de bases qu'on représentera les vecteurs dans des systèmes de coordonnées, c.à.d. qu'on les décomposera selon une base, et alors un vecteur sera représenté par un $n$-tuplet de nombres.

## 1.2 Vecteurs fixes, glissants, libres, équipollents et opposés

Les vecteurs géométriques peuvent être classés selon trois types :

1. un vecteur est dit *libre* s'il est entièrement défini par sa direction, son sens et sa longueur; en d'autres mots son origine (ou point d'application) peut se situer n'importe où dans le plan ou dans l'espace, voir figure 1.3;

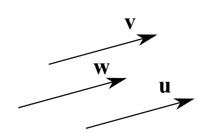


FIGURE 1.3

2. un vecteur est dit *glissant* si l'on impose sa droite de support; dit autrement, son origine peut être placée n'importe où sur son support, voir figure 1.4;

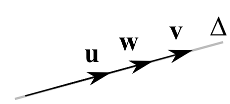


FIGURE 1.4

3. un vecteur est dit *fixe* ou *lié* si on fixe son origine; en d'autres termes, son origine est un point fixe du plan ou de l'espace, voir figure 1.5.

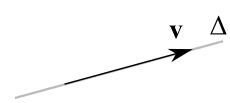


FIGURE 1.5

Voici des exemples physiques tirés de la mécanique pour chacun des types : la vitesse d'un point en un instant donné est un vecteur fixe. Une force appliquée sur une particule est aussi un vecteur lié, car le point d'application est la particule elle-même. Dans le cas d'un vecteur lié, on ne peut le déplacer sans modifier les conditions du problème considéré. Les forces exercées sur un corps rigide sont des vecteurs glissants, car on peut les déplacer le long de leurs lignes d'action. Les couples (ou moments de force) sont des exemples de vecteurs libres, car deux moments de force sont équivalents s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur (leur effet sera le même sur un corps).

Deux vecteurs sont dits *équipollents* s'ils ont la même longueur, la même direction et le même sens, quel que soit leur point d'application. La figure 1.6 donne un exemple de vecteurs équipollents (on a $||\mathbf{u}|| = ||\mathbf{v}||$, $\Delta_1$ est parallèle à $\Delta_2$ et les deux vecteurs on le même sens). On peut identifier deux vecteurs équipollents par le même symbole. L'équipollence sera notée par le signe « = ». Donc, « $\mathbf{u}$ est équipollent à $\mathbf{v}$ » sera dénoté par $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. En conséquence, on dira aussi simplement que les vecteurs sont égaux. Remarquez que deux vecteurs équipollents n'ont pas nécessairement la même origine.

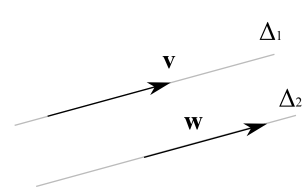


FIGURE 1.6

L'équipollence est donc une notion qui s'applique aux trois types de vecteurs. Pour des vecteurs libres, le fait que les vecteurs n'aient pas la même origine est sans importance, et par conséquent, équipollence et égalité sont des termes totalement équivalents pour de tels vecteurs.

Deux vecteurs sont dits *opposés* s'ils ont la même longueur, la même direction, mais sont de sens opposés (figure 1.7). Le fait que deux vecteurs **u** et **v** sont opposés sera dénoté par $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$. De façon équivalente, **u** est opposé à **v** si **u** est équipollent ou égal à moins **v**. Des vecteurs sont dits *directement opposés* s'ils on le même support $\Delta$.

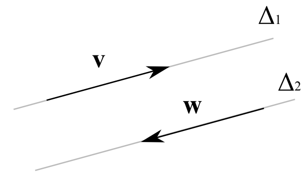


FIGURE 1.7

## 1.3 Opérations élémentaires sur les vecteurs (algèbre vectorielle)

### 1.3.1 Addition

L'étude expérimentale des quantités physique vectorielles, notamment les forces appliquées sur une particule, a mené à la définition de l'addition (ou somme) de deux telles quantités. Définissons d'abord quelques notions relatives aux forces pour mieux situer le contexte. La grandeur (ou intensité) d'une force s'exprime à l'aide d'un nombre et de ses unités. Dans le système international d'unités (SI), les forces sont spécifiées en Newtons (N) (équivalent à kg m s$^{-2}$). Pour compléter la description d'une force, on spécifie sa direction en indiquant sa *ligne d'action* et son *sens d'application* le long de cette ligne. La ligne d'action correspond à la droite infinie le long de laquelle la force agit. Elle est caractérisée par l'angle qu'elle forme avec un axe préalablement choisi (figure 1.8). On dessine un segment de cette droite pour représenter la force. La longueur du segment, fonction de l'échelle choisie, correspond à la grandeur de la force. Finalement, une flèche à un des bouts de ce segment indique le sens d'application (ou orientation) de la force, précision essentielle pour décrire cette force. Par exemple, deux forces de même grandeur exercées sur la même ligne d'action, mais de sens opposés (figures 1.8 (a) et (b)) auront un effet contraire sur une particule.

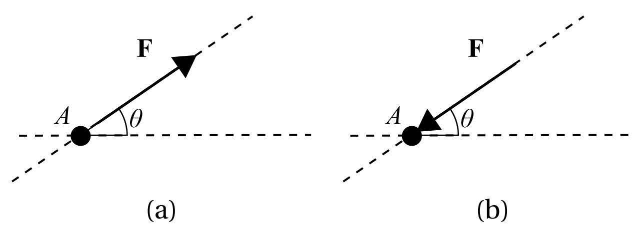


FIGURE 1.8

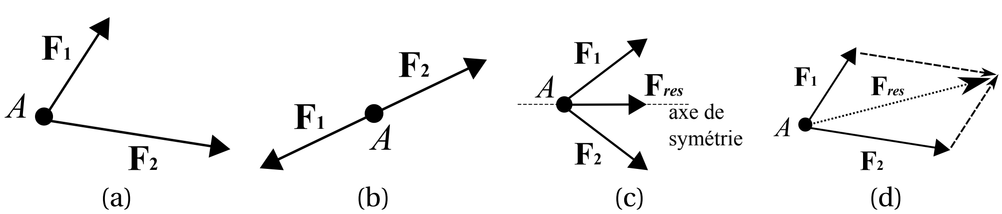


FIGURE 1.9

Considérons maintenant deux forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ appliquées dans une configuration arbitraire sur une même particule (figure 1.9 (a)). Si ces deux forces sont opposées et de même intensité comme à la figure 1.9 (b), on conçoit aisément que l'effet sur la particule sera nul. Ainsi, la somme d'un vecteur **u** et de son opposé $-\mathbf{u}$ est nulle

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

Si dans une autre situation, on a deux forces de même grandeur, mais qui ne sont pas dans la même direction, on conçoit alors que la résultante des deux forces sera le long de l'axe de symétrie entre les deux forces tel qu'illustré à la figure 1.9 (c). On voit dans ce cas que les composantes orthogonales à cet axe de symétrie s'annuleront pour donner une résultante selon cet axe de symétrie. Revenons à la configuration générique de la figure 1.9 (a). L'expérience montre dans ce cas que les deux forces peuvent être remplacées par une force unique équivalente, appelée force résultante,[2] $\mathbf{F}_{res}$ obtenue en complétant un parallélogramme dont les côtés adjacents correspondent à $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ (figure 1.9 (d)). La diagonale de ce parallélogramme passant par le point d'origine commun des deux forces et allant au sommet opposé donne la résultante. Ce procédé est appelé la *règle ou méthode du parallélogramme* pour l'addition de deux forces. La résultante $\mathbf{F}_{res}$ est alors appelée somme des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ et est dénotée $\mathbf{F}_{res} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. La règle d'addition des forces étant fondée sur des résultats expérimentaux, elle ne peut être ni prouvée, ni dérivée mathématiquement. Cette règle, reproduite à la figure 1.10 pour deux vecteurs **u** et **v**, est toutefois validée empiriquement et elle devient par définition la façon d'additioner des vecteurs.

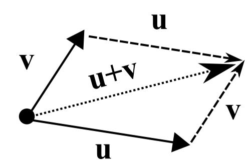

FIGURE 1.10

La méthode du parallélogramme mène directement à la *méthode du triangle* pour l'addition de vecteurs. En se basant sur la figure 1.10, la méthode du triangle illustrée à la figure 1.11 est obtenue en transportant l'origine du vecteur **v** jusqu'à l'extrémité de **u**, et ce, sans changer ni la norme, ni la direction, ni le sens de **v** (en d'autres mots, on place bout à bout les vecteurs **u** et **v**). La résultante est alors donnée par le vecteur reliant l'origine de **u** à l'extrémité de **v**. Note : On voit que la méthode du parallélogramme semble plus naturelle pour les vecteurs fixes, alors que la méthode du triangle semble plus naturelle pour les vecteurs libres. On appliquera toutefois les deux méthodes selon sa convenance sans regard au type de vecteur. Notez également que la grandeur du vecteur $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ n'est généralement pas égale à la somme des grandeurs individuelles $||\mathbf{u}||+||\mathbf{v}||$. En général, on a plutôt l'inégalité suivante appelée *inégalité du triangle*

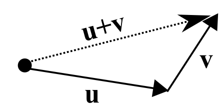

FIGURE 1.11

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}||+||\mathbf{v}||. \tag{1.2}$$

On se convainc facilement graphiquement qu'on aura égalité si et seulement si les vecteurs ont la même direction et le même sens.

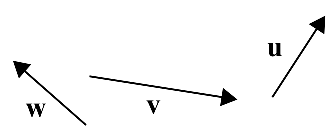


FIGURE 1.12

**Exercice de lecture 1.1.** Additionner graphiquement les vecteurs **u**, **v** et **w** s'ils sont positionnés tel qu'illustré à la figure A.1.
Note : Les réponses à la plupart des exercices de lecture sont donnés en annexe.

**Exercice de lecture 1.2.** Quel lieu géométrique est décrit par la pointe du vecteur $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ lorsque $||\mathbf{v}||$ varie? Illustrer graphiquement.

**Exercice de lecture 1.3.** Soit $||\mathbf{u}|| = 3$, $||\mathbf{v}|| = 4$ et l'angle entre ces deux vecteurs $\theta = 50°$. Trouver $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||$.

[2]Par force équivalente, on veut dire que son effet sur la particule est le même que l'action simultanée des deux forces en présence.

**Exercice de lecture 1.4.** À quel angle doit-on placer deux vecteurs de longueurs 8 et 11 pour que leur somme ait une longueur de 16 ?

Il convient de regrouper les propriétés suivantes que possède l'opération d'addition des vecteurs[3]. On retrouvera également ces propriétés plus tard dans le contexte des espaces vectoriels ; en fait, elles serviront à définir ce qu'est une structure d'espace vectoriel.

**Propriétés de l'addition de vecteurs**

1. **Fermeture** : L'ensemble des vecteurs est fermé par rapport à l'addition, c.à.d. que la somme d'un vecteur est aussi un vecteur.
2. **Commutativité** : $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$.
3. **Associativité** : $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
4. **Existence d'un élément neutre** : Le vecteur nul $\mathbf{0}$ est un élément neutre, car $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$.
5. **Existence d'un élément inverse** : Pour tout vecteur $\mathbf{u}$, il existe un élément inverse, à savoir son vecteur opposé $-\mathbf{u}$, car $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=(-\mathbf{u})+\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

---

**Exemple 1.1.** Montrer graphiquement que la somme de deux vecteurs est commutative.

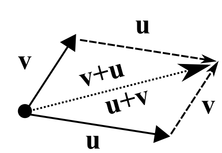

FIGURE 1.13

*Solution.* Soient deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Faisons coïncider leurs origines et complétons le parallélogramme tel qu'illustré à la figure 1.13. La diagonale sépare le parallélogramme en deux triangles. Pour le le triangle inférieur, on a $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\overrightarrow{OC}$ et pour le triangle supérieur on a $\mathbf{v}+\mathbf{u}=\overrightarrow{OC}$ ce qui démontre que $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ car les deux sont égaux à $\overrightarrow{OC}$.

---

**Exercice de lecture 1.5.** Montrer graphiquement à l'aide de la méthode du triangle que l'addition de trois vecteurs est associative.

Une note finale concernant l'addition de vecteurs. On voit qu'on a littéralement construit l'opération d'addition en se basant sur ces concepts physiques (ici la notion de force). C'est souvent ainsi (mais pas toujours !) que les mathématiciens procèdent, c.à.d. en se basant sur des notions intuitives venant du monde réel pour ensuite les formaliser sous forme de définitions, axiomes, ... Les mathématiques sont, à la base, essentiellement un jeu de construction de règles de base qu'on combine ensuite en utilisant la logique pour en arriver à d'autres résultats via des théorèmes et leurs démonstrations. Étant basées sur des notions du monde réel, les mathématiques deviennent alors un outil puissant pour décrire ce monde en science et en ingénierie.

[3] Un ensemble muni d'une opération possédant les cinq propriétés qui suivent s'appelle un groupe abélien.

### 1.3.2 Soustraction

L'addition nous mène naturellement à penser à la soustraction. On définit la *soustraction* d'un vecteur à un autre vecteur comme étant l'addition de son vecteur opposé à cet autre vecteur. Ainsi, nous obtenons la différence $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ entre les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ en additionnant $\mathbf{v}$ et $-\mathbf{u}$. On écrit alors

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}). \tag{1.3}$$

Il est intéressant aussi de voir à quoi correspond graphiquement la différence entre deux vecteurs. Soustraire un vecteur $\mathbf{u}$ d'un vecteur $\mathbf{v}$ consiste à trouver un vecteur $\mathbf{x}$ tel que

$$\mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{v}. \tag{1.4}$$

Ce vecteur $\mathbf{x}$ est appelé vecteur différence et est noté par

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \tag{1.5}$$

Soit les deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ illustrés graphiquement à la figure 1.14 (a). Si on ramène les origines des deux vecteurs au même point tel qu'à la figure 1.14 (b), alors le vecteur différence $\mathbf{x}$ est le vecteur reliant l'extrémité de $\mathbf{u}$ à l'extrémité de $\mathbf{v}$, car selon selon l'éq. 1.4, $\mathbf{x}$ additionné à $\mathbf{u}$ doit donner $\mathbf{v}$. La figure 1.14 (c) montre également la construction de $\mathbf{x}$ comme différence de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ à partir de l'équation 1.5. Finalement, à la figure 1.14 (d) on montre que si on complète le parallélogramme, les vecteurs somme et différence correspondent aux deux diagonales du parallélogramme.

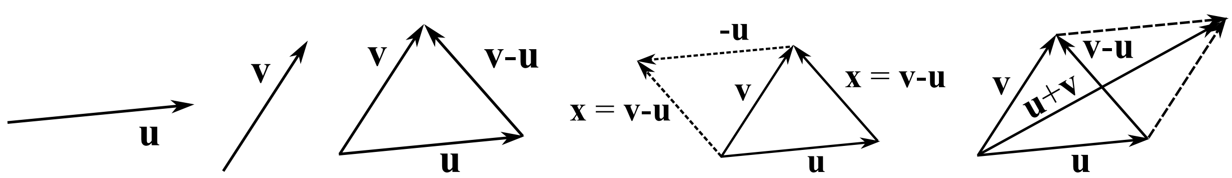


FIGURE 1.14

### 1.3.3 Addition de plusieurs vecteurs : méthode du polygone

Jusqu'ici, nous avons considéré l'addition de deux vecteurs. Voyons ce qu'il en est pour trois vecteurs ou plus. En se basant sur l'addition de deux vecteurs, la somme de trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sera obtenue en additionnant d'abord $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, et en ajoutant ensuite $\mathbf{w}$ au vecteur $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Ceci s'écrit

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}. \tag{1.6}$$

La somme de quatre vecteurs s'obtient de même, c.à.d. en additionnant le quatrième vecteur à la somme des trois premiers. Par suite, la somme d'un nombre arbitraire de vecteurs est obtenue en appliquant successivement la règle du parallélogramme : on ajoute un vecteur à la fois jusqu'à ce qu'on arrive à un seul vecteur résultant représentant l'ensemble des vecteur à additionner.

Si on a des vecteurs coplanaires, c.à.d. qu'ils sont tous dans un même plan, leur somme s'obtient aisément par une méthode graphique et la méthode du triangle est alors plus simple d'utilisation que la règle du parallélogramme. La figure 1.15 illustre la méthode du triangle pour l'addition des vecteurs **u**, **v** et **w** : il suffit dans un premier temps d'additionner **u** et **v** et répéter la méthode pour les vecteurs **u**+**v** et **w**. La figure 1.15 révèle toutefois que l'étape de déterminer le vecteur **u**+**v** n'est pas nécessaire pour arriver au résultat final. Il suffit de mettre les vecteurs bout à bout et la résultante sera le vecteur reliant l'origine du premier vecteur à la destination du dernier. C'est là la *méthode du polygone pour l'addition de plusieurs vecteurs* qui est en fait une généralisation la méthode du triangle. Bien qu'elle ait été montrée ici pour des vecteurs coplanaires, elle s'applique aussi pour des vecteurs non-coplanaires, comme on peut s'en convaincre facilement. La méthode du polygone montre que la somme de vecteurs reste la même si l'ordre des vecteurs est changée (vous pouvez le vérifier par vous même graphiquement). De là, on déduit notamment l'associativité de l'addition de vecteurs qui a été évoquée dans l'encadré à la section 1.3.1 donnant les propriétés de l'addition.

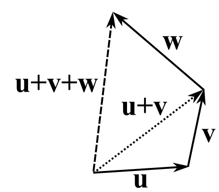

FIGURE 1.15

**Exercice de lecture 1.6.** Additionner $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{RO}$ (ici, vous pouvez prendre les points $O$, $P$, $Q$ et $R$ de votre choix dans le plan). Illustrer graphiquement. Que remarque-t-on ?

### 1.3.4 Produit par un scalaire

Dans le présent ouvrage, un scalaire signifiera toujours un nombre réel[4]. En utilisant le terme scalaire pour un nombre réel, on veut faire ressortir qu'il ne s'agit pas d'un vecteur. Le produit (ou multiplication) d'un vecteur par un scalaire est une extension de l'addition vectorielle. Par exemple, l'addition d'un vecteur **u** avec lui-même, c.à.d. $\mathbf{u}+\mathbf{u}$, donne un autre vecteur ayant la même direction et le même sens que **u**, mais dont la longueur est deux fois celle de **u** (figure 1.16). On dénotera cette somme par $2\mathbf{u}$. De façon similaire, la somme $\mathbf{u}+\mathbf{u}+\mathbf{u}$ sera dénotée par $3\mathbf{u}$ et ainsi de suite. Il est donc clair ce qu'on entend par la multiplication d'un vecteur **u** par un scalaire $n$, lorsque $n$ est un entier positif. Le résultat est un vecteur de longueur $n||\mathbf{u}||$ dans la même direction et le même sens que **u**. De la même façon, on peut considérer une fraction d'un vecteur. Par exemple, un vecteur de même direction et même sens que **u**, mais dont la longueur est la moitié de celle de **u** sera noté par $\frac{1}{2}\mathbf{u}$ (figure 1.16). Ces considérations suggèrent la définition préliminaire suivante : Soit $k$ un scalaire réel positif ($k > 0$). Le vecteur $k\mathbf{u}$ est un vecteur dont la longueur est $k||\mathbf{u}||$ (c.à.d. $||k\mathbf{u}|| = k||\mathbf{u}||$ et ayant la même direction et le même sens que **u**. Pour compléter cette définition afin de pouvoir multiplier aussi par des scalaires négatifs ou nuls, on ajoute les deux définitions suivantes : $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ et $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ (c.à.d. multiplier un vecteur par $-1$ revient a changer son sens, donc prendre son opposé - figure 1.16). Ceci mène à la définition complète suivante :

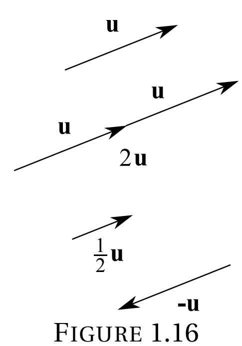

FIGURE 1.16

[4] Dans le cas où on considère les nombres complexes, ce qui arrive dans certains contextes plus généraux en algèbre linéaire, le terme scalaire signifie aussi un nombre complexe.

**Définition :** Soit $k$ un scalaire réel. Le vecteur $k\mathbf{u}$ est un vecteur dont la longueur est $|k|\,||\mathbf{u}||$ (c.à.d. $||k\mathbf{u}|| = |k|||\mathbf{u}||$) et ayant la même direction que $\mathbf{u}$. Il sera

- de même sens que $\mathbf{u}$ si $k > 0$ ;
- de sens opposé à $\mathbf{u}$ si $k < 0$ ; et
- nul si $k = 0$.

De plus, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

On dira parfois lorsque $k > 1$ que $k\mathbf{u}$ est une *dilatation* de $\mathbf{u}$ et que si $0 < k < 1$, $k\mathbf{u}$ est une *contraction* de $\mathbf{u}$.

Il convient de regrouper les propriétés suivantes que possède l'opération « produit d'un vecteur par un scalaire ».

**Propriétés du produit d'un vecteur par un scalaire**

1. Le produit d'un vecteur $\mathbf{u}$ par un scalaire $k$ redonne un vecteur (fermeture par rapport au produit par un scalaire).
2. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
3. $(km)\mathbf{u} = k(m\mathbf{u})$
4. $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$
5. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$

Supposons maintenant qu'on ait deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ reliés par $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, où $k$ est un scalaire. Alors $\mathbf{u}$ et $k\mathbf{v}$ ont le même support, ce qui implique qu'ils sont parallèles. À l'inverse, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont parallèles, on peut donc, en amenant l'origine de l'un à coïncider avec l'origine de l'autre, faire en sorte qu'ils aient le même support. Ces vecteurs partagent donc une direction commune. Ces vecteurs peuvent, cependant, ne pas avoir la même longueur. Soit $r$ le rapport de leurs longueurs : $r = ||\mathbf{u}||/||\mathbf{v}||$, $r$ est évidemment un nombre positif. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont le même sens, on peut alors écrire $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$ et s'ils sont de sens opposés, on aura $\mathbf{u} = -r\mathbf{v}$. Dans le premier cas, $k = r$ et dans le second, $k = -r$, ce qui prouve l'existence du scalaire $k$ tel que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$. On est donc arrivé au résultat suivant (en fait on l'a démontré) :

**Théorème :** Deux vecteurs non nuls $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont parallèles si et seulement si il existe un scalaire non nul $k$ tel que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

On a vu précédemment qu'un vecteur unitaire est un vecteur dont la longueur est égale à 1. À l'aide du produit par un scalaire, il devient relativement facile de *normer* à 1 un vecteur. En effet, si $\mathbf{u}$ est un vecteur non nul, alors $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{||\mathbf{u}||}\mathbf{u}$ (ce qu'on écrit souvent $\frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}$) est un vecteur unitaire qui a évidemment la même direction et le même sens que $\mathbf{u}$. Il est souvent utile de travailler avec des vecteurs unitaires dans des situations où on s'intéresse à des directions et aussi parce que dans certains cas, ça simplifie grandement les expressions obtenues.

**Exercice de lecture 1.7.** En partant de la définition $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ et de la troisième propriété du produit par un scalaire, montrer que $(-\lambda)\mathbf{u} = \lambda(-\mathbf{u})$.

**Exercice de lecture 1.8.** Résoudre algébriquement

$$2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=\mathbf{a}$$
$$\mathbf{u}-2\mathbf{v}=\mathbf{b}$$

De quelles propriétés vous servez vous ici de l'addition de vecteurs données à la section 1.3.1 et du produit d'un vecteur par un scalaire données dans la présente section ? Indiquez-les à chaque étape de votre développement.

### 1.3.5 Bases

La possibilité de représenter des vecteurs par des $n$-tuplet est très utile en pratique, car cela permet de faire des calculs avec les vecteurs. Pour ce faire, il faut une base de vecteurs pour l'espace considéré. Rappelons qu'une base est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants comportant suffisamment de vecteurs pour engendrer tout l'espace considéré. En fait, le nombre de vecteurs dans la base doit être égal à la dimension de cet espace. Par vecteurs linéairement indépendants, on entend qu'aucun d'entre eux ne peut être écrit comme combinaison linéaire non-nulle des autres.

Dans le cas de l'analyse vectorielle appliquée à des problèmes concrets de physique et d'ingénierie (comme par exemple l'électromagnétisme), on s'intéressera au plan qui est de dimension 2 et à l'espace tridimensionnel usuel (qu'on appellera simplement l'espace) qui est évidemment de dimension 3. Donc dans le cas du plan, une base doit nécessairement comporter 2 vecteurs linéairement indépendants et dans le cas de l'espace, une base doit être formée de 3 vecteurs linéairement indépendants. Pour la suite, on considérera l'espace à 3 dimensions, car cela ne devrait pas causer de difficultés de compréhension ; les considérations pour l'espace se ramènent aisément au cas du plan.

Considérons trois vecteurs linéairement indépendants $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_3$ dans l'espace (la figure 1.17 montre un exemple de trois tels vecteurs). L'ensemble $\mathscr{B}$ de ces trois vecteurs forme donc une base qui sera dénotée $\mathscr{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$. Par convention dans le présent ouvrage, la lettre majuscule calligraphique utilisée pour désigner une base correspond aux lettres minuscules utilisées pour désigner les vecteurs de cette base. Ayant une base en main, tout vecteur $\mathbf{v}$ de l'espace s'exprimera de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette base, c.à.d.

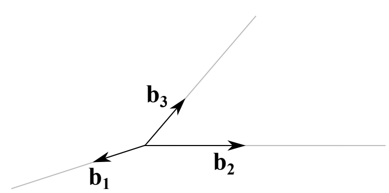


FIGURE 1.17

$$\mathbf{v}=v_1\mathbf{b}_1+v_2\mathbf{b}_2+v_3\mathbf{b}_3, \tag{1.7}$$

où $v_1$, $v_2$ et $v_3$ ont des valeurs uniques pour le vecteur $\mathbf{v}$ donné. Lorsqu'écrit ainsi, on dit que $\mathbf{v}$ a été décomposé selon les vecteurs de la base et les scalaires $v_1$, $v_2$ et $v_3$ de cette décomposition s'appellent les *composantes* de $\mathbf{v}$ dans cette base.

Comme les composantes de la décomposition d'un vecteur dans une base sont uniques, on peut *représenter* ce vecteur par ces composantes qui deviennent alors *ses* composantes (les composantes ne sont pas le vecteur, mais bien une *représentation* de celui-ci par rapport à une base).

Pour le vecteur $\mathbf{v}$ considéré ici, il sera représenté par l'ensemble des trois scalaires $v_1$, $v_2$ et $v_3$ qu'on trouve habituellement écrit sous les différentes formes suivantes : sous forme de triplet $(v_1, v_2, v_3)$, sous forme d'une rangée $[v_1\ v_2\ v_3]$ entre crochets, ou sous forme d'une colonne entre crochets $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$. On réservera généralement la notation sous forme de triplet (couplet pour le plan) pour désigner les coordonnées du vecteur position d'un point, tel qu'il sera discuté plus bas. Pour exprimer clairement par rapport à quelle base une représentation d'un vecteur est donnée, p.ex. ici le vecteur **v**, la notation suivante sera utilisée pour désigner sa représentation

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

L'équation précédente signifie en fait la décomposition exprimée à l'équation 1.7. La notation $[\mathbf{u}]_{\mathscr{B}}$ se lit « la représentation de **u** dans la base $\mathscr{B}$ », ou « **u** représenté dans $\mathscr{B}$ ».

Dans le cas de l'analyse vectorielle, le contexte de la base choisie est habituellement clair. On sera alors moins strict et on écrira de façon simplifiée

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

Notez que cette notation simplifiée constitue un abus de notation ; comme il a été souligné précédemment, un vecteur n'est pas une colonne de nombres. Une situation typique où la notation explicite de l'équation 1.8 est importante est lorsqu'on travaille avec plusieurs bases et qu'on effectue des changements d'une base à l'autre.

Dans des situations où il est nécessaire d'être encore plus explicite pour éviter toute confusion, on adjoindra un indice indiquant la base à la colonne de nombres représentant un vecteur, p.ex.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

En analyse vectorielle on choisit généralement une base appropriée pour un problème donné et on travaille avec cette base pour toute la résolution du problème ; la notation simplifiée de l'équation 1.9 est alors habituellement suffisante (pour sauver de l'espace de texte, on utilise souvent la notation sous forme de rangée entre crochets $[v_1\ v_2\ v_3]$ plutôt que sous forme de colonne).

*Lorsqu'on a une base, l'équipollence de vecteurs revient à l'égalité composante par composante*, c.à.d.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} \iff u_1 = v_1,\ u_2 = v_2 \text{ et } u_3 = v_3.$$

En effet, si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + u_3\mathbf{b}_3$ est équipollent à $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$, alors

$$u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + u_3\mathbf{b}_3 = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3,$$

d'où

$$(u_1 - v_1)\mathbf{b}_1 + (u_2 - v_2)\mathbf{b}_2 + (u_3 - v_3)\mathbf{b}_3 = \mathbf{0}.$$

Comme $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_3$ sont linéairement indépendants,

$$(u_1 - v_1) = 0,\ (u_2 - v_2) = 0,\ \text{et}\ (u_3 - v_3) = 0.$$

On obtient donc $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ et $u_3 = v_3$. La preuve en sens inverse est immédiate, c.à.d. si les composantes de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont équipollents.

*Dans une base, l'addition de vecteurs revient à l'addition composante par composante.* En effet, soit $\mathbf{u} = u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + u_3\mathbf{b}_3$ et $\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{b}_1 + u_2\mathbf{b}_2 + u_3\mathbf{b}_3) + (v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + v_3\mathbf{b}_3), \\ &= (u_1+v_1)\mathbf{b}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{b}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{b}_3, \end{aligned}$$

et donc

$$[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}. \tag{1.10}$$

Si on définit la somme de deux colonnes de nombres comme suit :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix},$$

alors on pourra écrire $[\mathbf{u}+\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = [\mathbf{u}]_{\mathscr{B}} + [\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$ (c'est vraiment l'équation 1.10 qui est utile en pratique et non pas la dernière égalité).

On démontre de façon semblable que *dans une base, le produit d'un vecteur par un scalaire est le produit des composantes par ce scalaire*, c.à.d.

$$[k\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}}.$$

De façon semblable à la somme, si on définit le produit d'un scalaire par une colonne de nombres comme suit :

$$k\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ kv_3 \end{bmatrix},$$

alors on pourra écrire $[k\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = k[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$.

Notons que la représentation d'un vecteur de base dans sa propre base est relativement simple avec une seule composante non nulle égale à 1 et les autres composantes égales à zéro, p.ex.

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ [\mathbf{b}_2]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \text{et}\ [\mathbf{b}_3]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En effet, prenons par exemple $\mathbf{b}_1$. On peut l'écrire comme $\mathbf{b}_1 = 1\cdot\mathbf{b}_1 + 0\cdot\mathbf{b}_2 + 0\cdot\mathbf{b}_3$.

## 1.4 Systèmes de coordonnées linéaires

### 1.4.1 Cas général

En sus de choisir une base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, il convient dans plusieurs situations de se choisir un point repère $O$ appelé *origine*. Nous supposerons les origines des vecteurs de base ramenées à ce point $O$ (voir figure 1.18). À partir de ce point $O$ et avec les vecteurs de base $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_3$, on peut caractériser tout point $P$ de l'espace par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ appelé *vecteur position* (ou *rayon vecteur*) du point $P$ tel qu'illustré à la figure 1.18. On dénotera très fréquemment le vecteur position d'un point générique $P$ par la lettre $\mathbf{r}$. Par un petit abus de langage on identifiera souvent un point $P$ avec son vecteur position $\mathbf{r}$ en parlant directement du point $\mathbf{r}$.

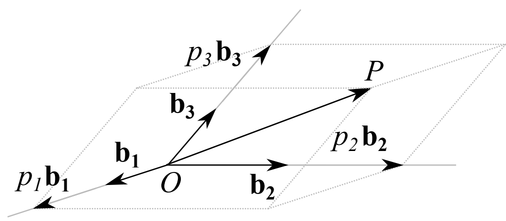


FIGURE 1.18

Soient $p_1$, $p_2$ et $p_3$ les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$

$$\overrightarrow{OP} = p_1\mathbf{b}_1 + p_2\mathbf{b}_2 + p_3\mathbf{b}_3,$$

ce qu'on écrira aussi

$$[\overrightarrow{OP}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}.$$

Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OP}$ de $P$ sont aussi appelées *coordonnées* de $P$ (relativement à la base). Donnée une base, on situera un point $P$ par ses coordonnées, ce qu'on écrit

$$P : (p_1, p_2, p_3), \ P(p_1, p_2, p_3) \text{ ou } \mathbf{r} = (p_1, p_2, p_3).$$

Les droites de support des vecteurs de la base $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ et $\mathbf{b}_3$ sont appelées *axes de coordonnées* du *système de coordonnées* défini par cette base.

### 1.4.2 Système de coordonnées cartésiennes

Des bases avec lesquelles il est souvent très commode de travailler sont celles dont les vecteurs sont unitaires et orthogonaux entre eux; la figure 1.19 en donne un exemple). On parle alors de *base orthonormée*. Il est habituellement plus facile de travailler avec une base orthonormée. Cela simplifie beaucoup les calculs, rend souvent la représentation graphique plus simple. Lorsqu'on *choisit* une telle base en particulier pour résoudre un problème, on l'associe souvent à la base dite *canonique* par rapport à laquelle on réfère tout par la suite (notez qu'il s'agit bien d'un choix qu'on fait; c'est comme se choisir un repère de référence dans un problème donné). On réservera dans le présent ouvrage la lettre « E » majuscule en format calligraphique (c.à.d. $\mathscr{E}$) pour désigner la base canonique et les vecteurs de cette base seront dénotés par la lettre « e » minuscule en caractère gras avec un indice approprié et avec un chapeau parce qu'ils sont unitaires. Ainsi, $\hat{\mathbf{e}}_x$ signifie le vecteur de base dont le support est de l'axe des $x$ (aussi appelé *axe des abscisses*), le support de $\hat{\mathbf{e}}_y$ est l'axe des $y$ (ou *axe des ordonnées*) et celui de $\hat{\mathbf{e}}_z$ est l'axe des $z$ (ou *axe des cotes*[5]). Dans l'espace, on utilise aussi communément les lettres **i**, **j** et **k** pour désigner les vecteurs de la base canonique (on ne met souvent pas de chapeau sur ces lettres, mais il est entendu que ce sont des vecteurs unitaires). On rencontre aussi fréquemment la notation $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$ pour désigner les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$.

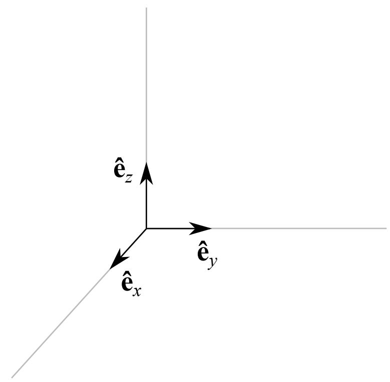


FIGURE 1.19

La base canonique donne lieu à un système de coordonnées cartésiennes dans l'espace qui est l'archétype d'un système de coordonnées linéaires. C'est ce avec quoi on est implicitement habitué à travailler en géométrie analytique. La figure 1.20 (a) illustre un système de coordonnées cartésiennes.

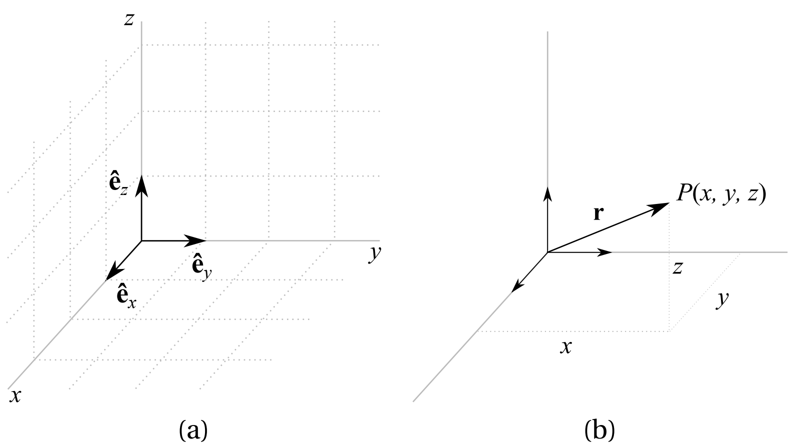


FIGURE 1.20

Dans un système cartésien, on utilisera par convention les lettres $x$, $y$ et $z$ pour spécifier les composantes (ou coordonnées dans ce cas) du vecteur position $\mathbf{r}$ d'un point générique (qui est une vecteur fixe qui prend son origine à l'origine du système de coordonnées ; voir figure 1.20 (b). Ainsi

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z, \tag{1.11}$$

ce que, par abus de notation, on écrira aussi plus simplement

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r} = [x\ y\ z], \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

[5]Cette dernière appellation pour l'axe des $z$ est souvent méconnue.

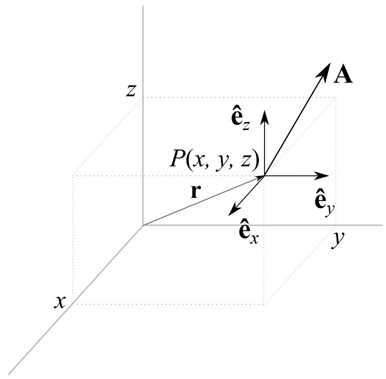


FIGURE 1.21

selon ce qui est le plus commode pour la situation considérée.

On aura aussi à considérer d'autres types de vecteurs fixes qui prendront leur origine en des points spécifiques de l'espace (pas nécessairement l'origine du système de coordonnées). C'est notamment le cas de champs de vecteurs comme le champ électrique qu'on considère en électromagnétisme. La figure 1.21 illustre un exemple typique. Dans ce cas, l'origine du vecteur **A** est en un point spécifique **r** de l'espace et en ce point on a le vecteur ainsi qu'un trièdre de base. On écrira alors

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{e}}_x + A_y \hat{\mathbf{e}}_y + A_z \hat{\mathbf{e}}_z, \tag{1.13}$$

en comprenant ici que la base $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$ est attachée au point **r**. Dans la situation présente, le trièdre de base positionné au point **r** est appelé *base locale* par opposition à la *base globale* qui est attachée à l'origine du système de coordonnées et qui sert à spécifier les points de l'espace. La base locale quant à elle sert à spécifier des vecteurs au point considéré (qu'on pourrait appeler des *vecteurs locaux*). Dans le cas cartésien, la base locale coincide avec la base globale si on considère les vecteurs de base comme étant libres, mais ça ne sera pas le cas avec les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique qu'on verra ultérieurement où les bases locales changent d'un point à un autre.

Chapitre 2

# Géométrie vectorielle

Dans ce chapitre, on verra d'abord différents produits qu'on peut définir sur les vecteurs. On travaillera principalement dans le plan et l'espace, mais certaines généralisations seront abordées en cours de route. Ensuite, on traitera des applications des vecteurs en géométrie analytique bidimensionnelle (2D) et tridimensionnelle (3D), notamment les droites dans le plan et l'espace et les plans dans l'espace. Dans ce qui suit, on assumera implicitement que la base est formée de vecteurs unitaires et perpendiculaires entre eux (une base canonique). On travaille donc dans des systèmes de coordonnées cartésiens.

## 2.1 Produit scalaire

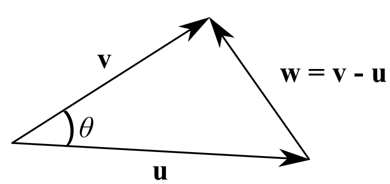

FIGURE 2.1

Historiquement, le produit scalaire est né de la recherche d'une formule pour obtenir l'angle entre 2 vecteurs. Voici comment on y arrive. Soient $\mathbf{u} = [u_x u_y u_z]$ et $\mathbf{v} = [v_x v_y v_z]$. Définissons aussi $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ (figure 2.1). On cherche à trouver l'angle $\theta$ entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

On connaît la loi des cosinus qui, dans la situation présente, dit que

$$||\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta$$

Or, on sait calculer les normes (ou grandeurs) des vecteurs dans cette dernière équation. En développant les normes qui apparaissent au carré (on le fait ici en 3 dimensions, mais c'est la même chose en 2 dimensions), on obtient

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v} - \mathbf{u}||^2 &= (v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2 + (v_z - u_z)^2 \\ &= {u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2 - 2||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta. \end{aligned}$$

En développant les carrés des différences dans le membre de gauche et en annulant les termes communs avec ceux du membre de droite (faites ce petit développement en exercice), on arrive à

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| \cos\theta. \tag{2.1}$$

On remarque que le membre de gauche est la somme des produits des composantes $x$, $y$ et $z$ des 2 vecteurs et c'est cette somme de produits qui permet d'obtenir le cosinus de l'angle entre les 2 vecteurs, et donc l'angle. Cette somme de produits, on la définit comme étant le produit scalaire entre les 2 vecteurs **u** et **v** qu'on dénote par un point gras entre les 2 vecteurs, soit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \equiv u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z, \tag{2.2}$$

où le signe « ≡ » indique que c'est une définition. On en arrive de cette façon à la définition du produit scalaire, c.à.d. en appliquant la loi des cosinus (une connaissance antérieure!) pour trouver une solution au problème de la recherche de l'angle entre 2 vecteurs. L'expression $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ se dit de différentes façons : « produit scalaire de **u** avec **v** », « produit scalaire de **u** et **v** », « **u** scalaire **v** », ou « **u** scalairement par **v** ». On note que le produit scalaire associe à deux vecteurs un scalaire et que le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même donne la norme au carré de ce vecteur ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{u}||^2 = {u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2$).

Si on réécrit l'éq. 2.1 avec la notation introduite, on a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}|| \cos\theta. \tag{2.3}$$

En réarrangeant la dernière équation de la façon suivante,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}||}, \tag{2.4}$$

on voit que le produit scalaire permet de déterminer l'angle entre deux vecteurs **u** et **v** à partir de la connaissance de leurs composantes. Ici, l'angle entre deux vecteurs sera toujours considéré comme étant le plus petit angle entre ces deux vecteurs. Il sera donc toujours compris entre 0 et 180°. Le cosinus (et donc le produit scalaire) sera positif si $\theta < 90°$ et négatif si $90° < \theta \leq 180°$. Si le produit scalaire entre deux vecteurs est nul, alors $\cos\theta = 0$, et donc l'angle entre ces vecteurs est de 90°, c.à.d. ils sont perpendiculaires (voir figure 2.2.

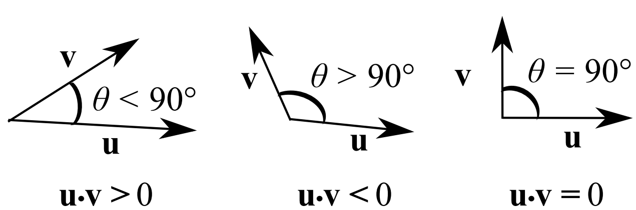


FIGURE 2.2

---

**Exemple 2.1.** Soient $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ et $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs. Quel est l'angle entre ces deux vecteurs?

*Solution.* Pour calculer l'angle voulu, on utilise la formule donnée à l'éq. 2.4. Il faut donc calculer $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $||\mathbf{u}||$ et $||\mathbf{v}||$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 2, \\ ||\mathbf{u}|| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}, \\ ||\mathbf{v}|| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, le cosinus de l'angle entre les deux vecteurs est donné par

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

donc l'angle vaut

$$\theta = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{3}) = 61.9\,\mathrm{deg}.$$

---

Le produit scalaire trouve des applications dans divers domaines de la physique et par conséquent de l'ingénierie, notamment en mécanique dans la notion de travail fait par une force, en électromagnétisme, en radiométrie (science de la mesure de la radiation) pour calculer la quantité de lumière incidente sur une surface inclinée, en mécanique des fluides, *etc...* En géométrie, le produit scalaire permet également de calculer la projection d'un vecteur sur un autre ou selon une certaine direction comme l'illustre un des exercices qui suit.

**Exercice de lecture 2.1.** (Interprétation du produit scalaire comme la projection d'un vecteur sur la direction d'un autre) : Montrer à l'aide d'un dessin et un peu de trigonométrie que $\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$ est la projection de $\mathbf{b}$ le long de la direction de $\mathbf{a}$. Notez que si on utilise le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}$ donné par $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$, alors l'équation de la projection se simplifie pour devenir $\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}}$. Le *vecteur projection* de $\mathbf{b}$ sur la direction définie par $\mathbf{a}$ est donné par $\mathbf{proj_a}(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$. On voit que ce vecteur est parallèle et a le même sens que $\mathbf{a}$.

**Exercice de lecture 2.2.** Soit le vecteur $\mathbf{b}^* = \mathbf{b} - \mathbf{proj_a}(\mathbf{b})$ (en mots : pour obtenir $\mathbf{b}^*$, on soustrait de $\mathbf{b}$ sa projection sur $\mathbf{a}$). Faites un dessin la situation. Montrer que $\mathbf{b}^*$ est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{a}$ (c'est en fait la composante perpendiculaire de $\mathbf{b}$ par rapport à $\mathbf{a}$. Faites votre démonstration à l'aide du produit scalaire. Le vecteur $\mathbf{b}^*$ est parfois dénoté par $\mathbf{perp_a}(\mathbf{b})$ ; une autre notation possible serait $\mathbf{b}^{\perp_\mathbf{a}}$.

**Exercice de lecture 2.3.** Dans le plan, il est facile de trouver un vecteur perpendiculaire à un autre. Considérons le vecteur $\mathbf{v} = (a,b)$, alors par inspection en se basant sur la formule du produit scalaire, on voit que le vecteur $\mathbf{v}^\perp = (-b,a)$ sera perpendiculaire à $\mathbf{v}$. Démontrez cette affirmation à l'aide du produit scalaire.

On appelle cosinus directeurs d'un vecteur $\mathbf{v}$ les projections de ce vecteur (qu'il faut normer à 1) selon les vecteurs d'un « triplet de vecteurs de main droite » orthonormés qu'on choisira comme étant la base canonique $\{\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z\}$. Par *triplet de vecteurs de main droite*, aussi appelé *trièdre droit*, on entend un ensemble *ordonné* de trois vecteurs qu'on peut aligner respectivement selon l'index, le majeur et le pouce de la main droite (on verra cela de nouveau lorsqu'on discutera du produit vectoriel). En en plus, dans le cas de la présente discussion, ces vecteurs sont ici normés à 1 et perpendiculaires entre eux).

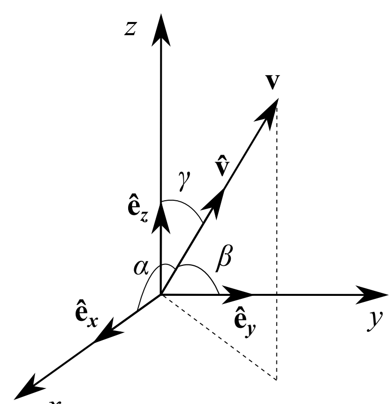


FIGURE 2.3

Soit $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/||\mathbf{v}||$ la version normée de $\mathbf{v}$, voir figure 2.3. Alors, le vecteur $\hat{\mathbf{v}}$ ramené à une origine commune avec les vecteurs $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ et $\hat{\mathbf{e}}_z$ fait trois angles avec ces derniers communément dénotés par $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. On peut obtenir les cosinus de ces angles via des produits scalaires

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x, \\ \cos\beta &= \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y, \\ \cos\gamma &= \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le produit scalaire possède certaines propriétés algébriques qu'il convient d'énoncer.

**Propriétés du produit scalaire**

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (commutativité)
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (distributivité sur l'addition)
3. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si et seulement si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$ (inégalité de Cauchy-Schwartz)

Ces propriétés se démontrent aisément à partir de la définition du produit scalaire.

**Exercice de lecture 2.4.** Montrer qu'on peut obtenir l'angle entre deux vecteurs quelconques $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ uniquement à partir de calculs de normes. Indice, partez avec $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$ et développez le membre de droite jusqu'à ce que vous obteniez le produit scalaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Isolez ensuite ce produit scalaire et exprimez-le en terme du cosinus de l'angle pour finalement isoler ce cosinus. Ceci veut dire qu'à partir d'une norme uniquement, on peut définir des angles. On n'a pas besoin de la définition d'un produit scalaire. En fait, norme et produit scalaire sont deux notions équivalentes, car à partir de l'un on peut définir l'autre et vice versa comme vous venez de le montrer. $u^2 - 2uv + v^2$

$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u||\,||v|| \cdot \cos(\theta)$

$\dfrac{||u||^2 + ||v||^2 - ||u-v||^2}{2||u||\,||v||} = \cos(\theta)$

En ajoutant le produit scalaire comme opération sur les vecteurs, on élargit grandement le champ d'applications des vecteurs en géométrie et dans bien d'autres domaines : mécanique, électromagnétisme, *etc...* On peut alors traiter des problèmes de perpendicularité, de projection et de distance. En fait, c'est toute la notion de mesure de distances et d'angles qui est introduite.

La façon dont le produit scalaire a été introduit ici n'est pas la façon dont c'est présenté dans la plupart des ouvrages traitant des vecteurs, où on introduit d'abord la définition du produit scalaire pour montrer ensuite qu'avec celui-ci il est possible de trouver l'angle entre 2 vecteurs. Ce n'est pas une approche intuitive et de l'avis de l'auteur, avec cette façon de faire on reste un peu insatisfait de ne pas savoir d'où les concepts tirent leur origine. Ici on ne suppose pas connue la définition du produit scalaire : on y arrive plutôt de façon naturelle. Pour le produit scalaire (et le produit vectoriel qui sera vu plus loin), on a supposé que les vecteurs sont décomposés dans une base orthonormée (généralement la base canonique). Cela n'est pas une condition essentielle, le produit scalaire pouvant être calculé dans une base qui n'est pas orthonormale, mais ça simplifie grandement les expressions si on travaille dans une base orthonormée.

Attention lorsqu'on manipule des produits scalaires. Les propriétés sur les nombres ne s'appliquent pas au produit scalaire. Par exemple, si on a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, alors on ne peut simplifier les **u** de part et d'autre de l'équation pour conclure que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. La figure 2.4 illustre cette situation où les produits scalaires respectifs de **v** et **w** avec **u** donnent le même résultat, car **v** et **w** ont la même projection sur **u**, mais **v** et **w** ne sont pas égaux.

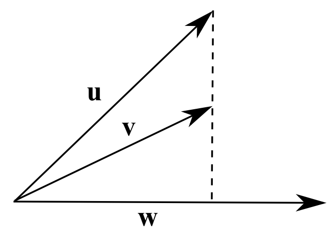

FIGURE 2.4

En terminant, attention à ne pas confondre le produit (ou multiplication) par un scalaire qui a été étudié plus tôt à la section 1.3.4 et le produit scalaire vu dans cette section-ci. Ce sont deux opérations différentes. Le produit par un scalaire concerne la multiplication d'un vecteur par un nombre pour donner un nouveau vecteur, alors que le produit scalaire prend deux vecteurs et résulte en un nombre.

**Exercice de lecture 2.5.** Calculer le produit scalaire entre les paires de vecteurs suivantes données sous formes de composantes : a) (2, -3, 2) et (-2, 3, -1) ; b) $(p-q, p+q, p)$ et $(p+q, q, -p-q)$.

**Exercice de lecture 2.6.** Montrer que les vecteurs $\mathbf{u} = [-1\ 2\ -1]$ et $\mathbf{v} = [2\ 1\ 0]$ sont orthogonaux.

**Exercice de lecture 2.7.** Trouver l'angle entre les vecteurs $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ et $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

**Exercice de lecture 2.8.** Soit les vecteurs $\mathbf{u} = [3\ 2\ 1]$ et $\mathbf{v} = [-2\ 1\ 2]$. (a) Ces vecteurs sont-ils orthogonaux? (b) Trouver l'angle entre les vecteurs.

## 2.2 Produit vectoriel

Historiquement, le produit vectoriel est né de la recherche d'une formule pour obtenir un vecteur perpendiculaire à 2 autres vecteurs non-collinéaires. On constate d'emblée qu'un tel vecteur ne sera pas unique, car si on trouve un tel vecteur, alors tout multiple de celui-ci sera aussi perpendiculaire à nos deux vecteurs.

### 2.2.1 Expression pour le produit vectoriel

Soient $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Nous cherchons donc un 3$^{\text{e}}$ vecteur **w**, dont les composantes $(w_x, w_y, w_z)$ sont à déterminer, et qui sera perpendiculaire à **u** et **v** (on suppose ici que les composantes des vecteurs sont relatives à une base orthonormée). On sait qu'un vecteur sera perpendiculaire à un autre si leur produit scalaire est nul. Ainsi, le vecteur **w** doit satisfaire les 2 équations suivantes

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z = 0, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0. \tag{2.7}$$

On a ici 2 équations pour les 3 inconnues $w_x$, $w_y$ et $w_z$. On a donc plus d'inconnues que d'équations, ce qui ne permettra pas d'obtenir une solution unique comme on s'y attendait. Il y aura en fait une infinité de solutions et on en choisira une en particulier. Résolvons maintenant ces équations. Isolons tout d'abord $w_z$ dans ces 2 équations (on pourrait choisir $w_x$ ou $w_y$ ; on arriverait au même résultat en bout de ligne). De la première équation, on tire

$$w_z = -\frac{u_x w_x + u_y w_y}{u_z}$$

et de la seconde

$$w_z = -\frac{v_x w_x + v_y w_y}{v_z}.$$

En égalant les membres de droites, on obtient

$$\begin{aligned} u_x v_z w_x + u_y v_z w_y &= u_z v_x w_x + u_z v_y w_y, \\ \iff (u_x v_z - u_z v_x) w_x &= (u_z v_y - u_y v_z) w_y, \end{aligned}$$

ceci nous permet d'exprimer $w_x$ en terme de $w_y$

$$w_x = \frac{u_y v_z - u_z v_y}{u_z v_x - u_x v_z} w_y.$$

On peut alors aussi exprimer $w_z$ en terme de $w_y$. Après quelques étapes d'algèbre (que le lecteur est invité à faire), on arrive à

$$w_z = \frac{u_x v_y - u_y v_x}{u_z v_x - u_x v_z} w_y.$$

Ainsi, on a

$$(w_x, w_y, w_z) = (\frac{u_y v_z - u_z v_y}{u_z v_x - u_x v_z} w_y, w_y, \frac{u_x v_y - u_y v_x}{u_z v_x - u_x v_z} w_y).$$

On note que $w_y$ reste un paramètre libre qui peut prendre n'importe quelle valeur. Par conséquent, on a donc bien une infinité de solutions, tel qu'attendu (il y a une infinité de vecteurs perpendiculaires à 2 autres vecteurs, ces vecteurs ne différant que par leur longueur et leur sens, ils ont tous la même direction). Toutefois, comme on cherche un vecteur perpendiculaire, rien ne nous empêche de choisir une valeur particulière pour $w_y$. On remarque que si on choisit $w_y$ égal au dénominateur $u_z v_x - u_x v_z$ commun aux composantes $w_x$ et $w_z$, cela simplifie l'expression obtenue et de plus, toutes les composantes auront une expression semblable. Donc, en faisant le choix judicieux (et qui apparaît être le plus naturel) de poser $w_y = u_z v_x - u_x v_z$, on aura

$$\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z) = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x). \tag{2.8}$$

Ce vecteur **w**, dont on peut vérifier qu'il est bien perpendiculaire à **u** et **v** à l'aide du produit scalaire, est appelé *produit vectoriel* de **u** et **v** et est dénoté par un symbole × entre les deux vecteurs

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \tag{2.9}$$

Dans certains ouvrages venant de France, on utilise le symbole « ∧ » pour désigner le produit vectoriel (c.à.d. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$). On a donc trouvé un vecteur perpendiculaire à deux autres, et par définition il est donné par

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x). \tag{2.10}$$

Une façon simple de faire le calcul d'un produit vectoriel de deux vecteurs **u** et **v** dans cet ordre est d'abord de placer les composantes de **u** au-dessus de celles de **v**. Il suffit ensuite de faire des "calculs croisés" pour obtenir chacune des composantes du produit vectoriel tel que l'illustre la procédure apparaissant à la figure 2.5. Les calculs croisés dont il est question ici s'apparentent à des déterminants, mais on ne fera pas appel à la notion de déterminant ici, car ce n'est pas absolument nécessaire.

**Exercice de lecture 2.9.** Montrez que le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est bien perpendiculaire à **u** et **v** à l'aide du produit scalaire.

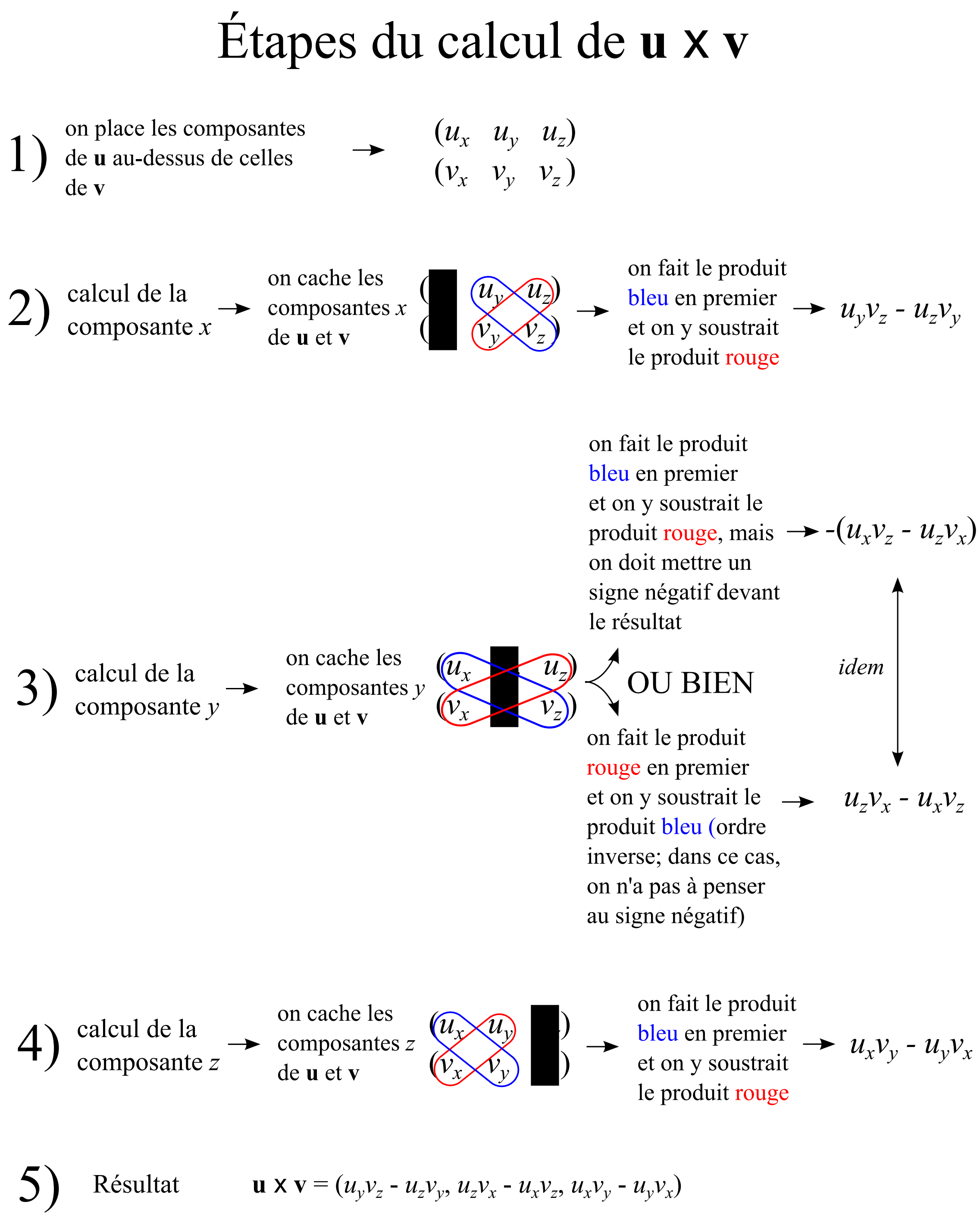
Étapes du calcul de **u** x **v**
1) on place les composantes de **u** au-dessus de celles de **v**
$(u_x \quad u_y \quad u_z)$
$(v_x \quad v_y \quad v_z)$
2) calcul de la composante $x$
on cache les composantes $x$ de **u** et **v**
$u_y$ $u_z$
$v_y$ $v_z$
on fait le produit bleu en premier et on y soustrait le produit rouge
$u_y v_z - u_z v_y$
3) calcul de la composante $y$
on cache les composantes $y$ de **u** et **v**
$u_x$ $u_z$
$v_x$ $v_z$
on fait le produit bleu en premier et on y soustrait le produit rouge, mais on doit mettre un signe négatif devant le résultat
$-(u_x v_z - u_z v_x)$
OU BIEN
idem
on fait le produit rouge en premier et on y soustrait le produit bleu (ordre inverse; dans ce cas, on n'a pas à penser au signe négatif)
$u_z v_x - u_x v_z$
4) calcul de la composante $z$
on cache les composantes $z$ de **u** et **v**
$u_x$ $u_y$
$v_x$ $v_y$
on fait le produit bleu en premier et on y soustrait le produit rouge
$u_x v_y - u_y v_x$
5) Résultat
**u** x **v** = $(u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$

FIGURE 2.5

**Exercice de lecture 2.10.** Evaluer $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ où $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Confirmer par la suite que $\mathbf{w}$ est perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ et trouver la norme de $\mathbf{w}$.

**Exercice de lecture 2.11.** Soit $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Confirmer que la valeur de l'angle $\theta$ obtenue à l'aide de l'équation 2.13 donne la même valeur que si on utilise $\cos\theta$ obtenu avec le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

**Exercice de lecture 2.12.** Soient les vecteurs suivants : $\mathbf{u} = [1\ -2\ 2]$, $\mathbf{v} = [3\ -1\ -1]$, $\mathbf{w} = [-1\ 0\ -1]$ et $\mathbf{x} = [-3\ 6\ -6]$. Calculer : a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$, d) $(\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}$, e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, f) $\mathbf{u} \times \mathbf{x}$.

### 2.2.2 Norme du produit vectoriel

Calculons maintenant la norme du vecteur résultant du produit vectoriel. On a

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 &= (u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2 \\ &= (u_y^2 v_z^2 - 2u_y v_z u_z v_y + u_z^2 v_y^2) \\ &\quad + (u_z^2 v_x^2 - 2u_z v_x u_x v_z + u_x^2 v_z^2) \\ &\quad + (u_x^2 v_y^2 - 2u_x v_y u_y v_x + u_y^2 v_x^2) \end{aligned} \tag{2.11}$$

En réarrangeant les termes dans la dernière expression, on a

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = &\ u_x^2 v_y^2 + u_x^2 v_z^2 + u_y^2 v_x^2 + u_y^2 v_z^2 + u_z^2 v_x^2 + u_z^2 v_y^2 \\ &- 2u_x v_y u_y v_x - 2u_y v_z u_z v_y - 2u_z v_x u_x v_z \end{aligned}$$

et en factorisant les termes de la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = &\ u_x^2 (v_y^2 + v_z^2) + u_y^2 (v_x^2 + v_z^2) + u_z^2 (v_x^2 + v_y^2) \\ &- 2u_x v_y u_y v_x - 2u_y v_z u_z v_y - 2u_z v_x u_x v_z. \end{aligned}$$

On voit que dans les parenthèses de la première, si on leur ajoute chacun un terme, on verra apparaître la norme au carré de $\mathbf{v}$ (c.à.d. $||\mathbf{v}||^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$). Dans la première parenthèse, on ajoutera $v_x^2$, dans la seconde $v_y^2$ et dans la troisième $v_z^2$ ; il faut toutefois veiller aussi à retrancher ces termes ajoutés. On obtient ainsi (à des fins de clarté, les termes ajoutés et retranchés apparaissent soulignés)

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = &\ u_x^2 (\underline{v_x^2} + v_y^2 + v_z^2) + u_y^2 (v_x^2 + \underline{v_y^2} + v_z^2) + u_z^2 (v_x^2 + v_y^2 + \underline{v_z^2}) \\ &- \underline{u_x^2 v_x^2} - \underline{u_y^2 v_y^2} - \underline{u_z^2 v_z^2} \\ &- 2u_x v_y u_y v_x - 2u_y v_z u_z v_y - 2u_z v_x u_x v_z. \end{aligned}$$

En factorisant le terme $(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ dans le premier membre de droite de l'équation précédente, on constate que ce membre correspond au produit des normes au carré de $\mathbf{u}$ et de $\mathbf{v}$ et les deux dernières lignes correspondent au carré du produit scalaire de $\mathbf{u}$ avec $\mathbf{v}$ (c.à.d. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$). On en arrive ainsi à

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \tag{2.12}$$

Se rappelant que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}|| \cos\theta$ et que $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$, on obtient finalement

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||\, ||\mathbf{v}|| \sin\theta. \tag{2.13}$$

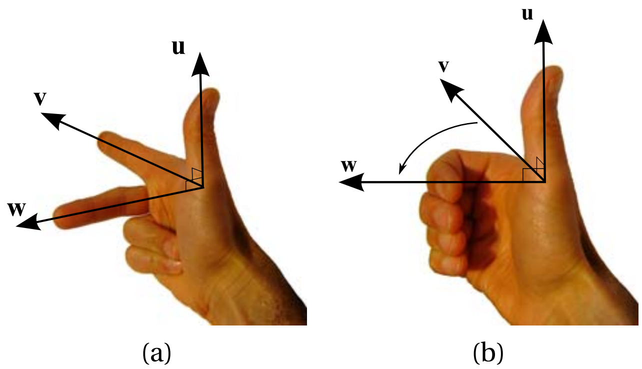


FIGURE 2.6. Règle de la main droite. (a) Version « trièdre ». (b) Version « enroulement » ou « vis ».

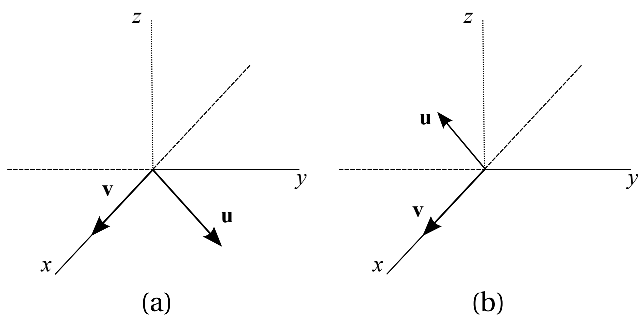


FIGURE 2.7. Signe et angle pour validité de la règle de la main droite. (a) Angle entre les deux vecteurs plus petit que 180° . (b) Angle plus grand que 180° .

Ici, $\theta$ est l'angle entre les deux vecteurs compris entre 0 et 180° (c.à.d. le plus petit angle entre les deux vecteurs, comme pour le produit scalaire). De cette façon, le sinus est positif comme l'exige l'équation précédente, étant donné que les normes sont des nombres positifs.

L'équation 2.12 peut-être réécrite sous la forme suivante

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = ||\mathbf{u}||^2 ||\mathbf{v}||^2. \tag{2.14}$$

Cette dernière expression est intéressante, car elle montre un lien entre la norme du produit vectoriel de deux vecteur, leur produit scalaire et leurs normes.

### 2.2.3 Règle de la main droite

On vient de voir que le produit vectoriel entre deux vecteurs **u** et **v** est un vecteur perpendiculaire au plan formé par ces deux vecteurs et dont la norme est donnée par l'éq. 2.13. La direction et le sens de ce vecteur, appelons-le **w**, sont donnés par la règle de la main droite. La figure 2.6 (a) illustre comment on fait. En prenant la main droite, si on pointe l'index selon **u** et le majeur selon **v** *dans cet ordre (l'ordre* *étant important)*, alors **w** sera selon le pouce. La main sert en quelque sorte de trièdre. Une autre façon de faire est comme si on voulait faire tourner **u** vers **v**, voir figure 2.6 (b) alors en faisant enrouler les doigts de **u** vers **v**, le vecteur **w** sera selon l'axe d'enroulement qui correspond au pouce. Ici, c'est comme si la main s'enroule autour de la direction recherchée. On peut aussi voir le pouce comme une vis, qui, lorsqu'on visse de **u** vers **v**, donne le sens du produit vectoriel. Attention, si l'angle allant de **u** vers **v** dans cet ordre est plus grand que 180° , alors la règle de la main droite donnera un vecteur dans le sens opposé au produit vectoriel $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$. Étudions ce point un peu plus en détail. Soient **u** et **v** deux vecteurs. Comme deux vecteurs définissent un plan, on peut sans perte de généralité considérer que **u** est aligné selon l'axe des $x$ et que **v** est dans le plan $xy$ tel qu'illustré à la figure 2.7 (a). On a ainsi $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$ avec $u_x > 0$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$. Ici, $v_x$ et $v_y$ peuvent être de mêmes signes (c.à.d. tous deux positifs ou tous deux négatifs) ou de signes opposés (un négatif et l'autre positif). Avec cette configuration, le produit vectoriel de **u** et **v** sera alors un vecteur dont la direction sera selon l'axe des $z$. En effet, si on fait le calcul pour ce cas, on obtient

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (0, 0, u_x v_y). \tag{2.15}$$

Comme $u_x$ est positif, la composante $z$ de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ sera positive ou négative selon que $v_y$ est négatif ou positif. Si $v_y$ est positif, et c'est ce que la figure 2.7 (a) illustre, alors l'angle entre **u** et **v** est plus petit que 180° et le résultat est selon le sens positif de l'axe de $z$, tel que dicté par la règle de la main droite. Si $v_y$ est négatif, tel qu'illustré à la figure 2.7 (b), alors l'angle entre **u** et **v** est plus grand que 180° et le résultat est selon le sens négatif de l'axe des $z$, à l'opposé de ce que la règle de la main droite donne.

En conclusion de la présente discussion, lorsqu'on utilise la règle de la main droite pour obtenir le produit vectoriel entre deux vecteurs, on les mets toujours dans l'ordre qui fera que l'angle entre eux est plus petit que 180° . Comme ça, la règle de la main droite donne bien le bon sens pour le résultat.

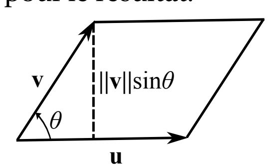

FIGURE 2.8

On peut donner une interprétation géométrique au produit vectoriel d'un vecteur **u** par un autre vecteur **v** basée sur l'éq. 2.13. Si on se place dans le plan défini par les vecteurs **u** et **v**, alors en complétant le parallélogramme déterminé par **u** et **v** (voir figure 2.8), et en considérant **u** comme la base du parallélogramme, alors $||\mathbf{v}||\sin\theta$ donne la hauteur du parallélogramme. De cette façon, $||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\sin\theta$ est l'aire du parallélogramme. Ainsi, le produit vectoriel est un vecteur dont la longueur donne l'aire du parallélogramme engendré par **u** et **v**.

**Exercice de lecture 2.13.** Quel lien y a-t-il entre le produit vectoriel de **u** et **v** et le triangle engendré par ces deux vecteurs? Faites un dessin et écrivez une formule.

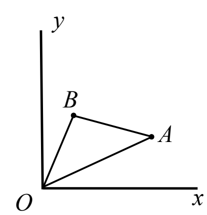

FIGURE 2.9

**Exercice de lecture 2.14.** Supposons qu'on ait un triangle dans le plan dont les sommets sont donnés par $O : (0, 0)$, $A : (x_A, y_A)$ et $B : (x_B, y_B)$ (voir figure 2.9). Montrer que son aire est donnée par $\frac{1}{2}(x_A y_B - x_B y_A)$. Indice : Imaginez un axe perpendiculaire au plan, fournissant une 3$^{e}$ dimension, et utilisez le produit vectoriel. Généralisez cette formule au cas où les sommets sont $A : (x_A, y_A)$, $B : (x_B, y_B)$ et $C : (x_C, y_C)$.

**Exercice de lecture 2.15.** (Exercice facultatif - plus difficile) Généralisez la formule de l'exercice précédent pour calculer l'aire d'un polygone quelconque à $N$ côtés. Indice : Choisissez un point origine à l'intérieur du polygone et remarquez que l'aire du polygone peut être exprimée comme la somme d'aires de triangles à partir de ce point origine. Note : C'est une formule qui permet d'obtenir une approximation dans le cas d'une courbe fermée simple et continue de l'aire contenue dans cette courbe afin de dériver en analyse vectorielle le théorème intégral de Stokes dans le plan.

### 2.2.4 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel possède les propriétés suivantes.

**Propriétés du produit vectoriel**

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (cette propriété est souvent appelée « anti-commutativité »)
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ (distributivité sur l'addition)
3. $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
4. Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont parallèles, alors $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ (donc $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ pour tout vecteur $\mathbf{u}$).

Ces propriétés se démontrent aisément à partir de la définition du produit vectoriel (éq. 2.10).

**Exercice de lecture 2.16.** Convainquez-vous en utilisant la règle de la main droite que le produit vectoriel est anti-commutatif.

**Exercice de lecture 2.17.** Montrez par calcul que si deux vecteurs sont parallèles, alors leur produit vectoriel est nul.

Attention lorsqu'on manipule des produits vectoriels. Les propriétés sur les nombres ne s'appliquent pas nécessairement au produit vectoriel; l'anti-commutativité en est un exemple. En outre, le *produit vectoriel n'est pas associatif*, c.à.d. qu'en général $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. De plus, la règle de simplification qui prévaut pour la multiplication des nombres n'est pas valide, c.à.d. si on a $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$, alors on ne peut simplifier les $\mathbf{u}$ de part et d'autre de l'équation pour conclure que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

En guise de notes finales sur le produit vectoriel, on a vu que le produit scalaire a joué un rôle important quant aux dérivations reliées au produit vectoriel. Il nous a en effet permis dans un premier temps d'écrire les 2 équations menant à la définition du produit vectoriel (équations 2.6 et 2.7). Dans un second temps, il nous a permis de dériver le lien entre le produit vectoriel et le sinus de l'angle entre les deux vecteurs dont on prend le produit vectoriel. Pour le produit vectoriel, on a supposé que les vecteurs sont décomposés dans une base orthonormée (comme pour le produit scalaire). Cela n'est pas une condition essentielle. Le produit vectoriel peut être calculé dans une base qui n'est pas orthonormale en autant qu'on l'on puisse calculer les produits vectoriels entre les vecteurs de la base. Ça simplifie toutefois grandement les expression si on travaille dans une base orthonormée.

De façon semblable au produit scalaire, dans plusieurs ouvrages on introduit d'abord la définition du produit vectoriel de 2 vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (c.à.d. l'éq. 2.10) sans la déduire. Ensuite on montre que le résultant du produit vectoriel est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. La démarche adoptée ici nous montre que la définition du produit vectoriel n'est pas le fruit d'une définition pure, mais plutôt, on y arrive de façon déductive, comme on l'a fait pour le produit scalaire et comme on le fera plus tard pour le produit matriciel. Pour terminer, notons qu'il n'y a pas d'analogue au produit vectoriel dans d'autres dimensions.

**Exercice de lecture 2.18.** Soit un vecteur $\mathbf{u} = (a, b)$. En inspectant l'expression $ac+bd$ du produit scalaire de $\mathbf{u}$ par un autre vecteur $\mathbf{v} = (c, d)$, trouver des valeurs de $c$ et $d$ qui font que $\mathbf{v}$ sera orthogonal à $\mathbf{u}$. Faites un dessin du vecteur $\mathbf{v}$ que vous obtenez par rapport au vecteur $\mathbf{u} = (a, b)$. On dénote parfois ce vecteur par $\mathbf{v} = \mathrm{perp}(\mathbf{u})$, ou $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp}$.

Pour terminer, on notera l'identité suivante pour le produit vectoriel successif de trois vecteurs :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{2.16}$$

Cette identité, couramment appelée l'*identité BAC moins CAB*, est fréquemment utilisée en électromagnétisme.

**Exercice de lecture 2.19.** (Facultatif - exercice plus difficle) Prouver l'identité BAC moins CAB.

## 2.3 Produit mixte (ou triple produit)

On a vu qu'avec le produit vectoriel, on peut calculer l'aire de parallélogrammes. En combinant le produit scalaire et le produit vectoriel, on peut calculer le volume de parallélépipèdes. La figure 2.10 illustre la situation, où les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ engendrent le parallélépipède illustré. Le volume est donné par l'aire de la base du parallélépipède multipliée par sa hauteur. Or l'aire de la base est donnée par la norme du produit vectoriel entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (c.à.d. aire base = $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||$) et la hauteur est donnée par la norme du vecteur $\mathbf{w}$ et le cosinus de l'angle qu'il fait avec le vecteur $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ : hauteur = $||\mathbf{w}|| \cos\theta$. Donc le volume $V$ est donné par

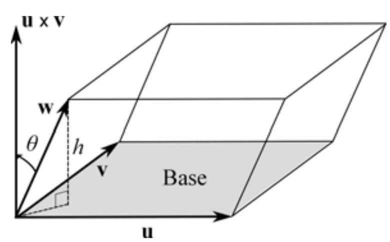

FIGURE 2.10

$$\begin{aligned} V &= (\text{aire base}) \times \text{hauteur} \\ &= ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\ ||\mathbf{w}|| \cos\theta \\ &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Le produit $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ est appelé *produit mixte* (ou *produit triple*) des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. Il est habituellement dénoté par $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Notons que le produit mixte est aussi souvent défini par $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Ça revient au même, car on démontre que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (voir les propriétés cycliques du produit mixte ici-bas).

On note que le produit mixte peut être négatif si $\cos\theta$ est négatif, ce qui donne un volume négatif (cela est un peu surprenant car un volume doit être une quantité positive). Cela veut seulement dire que les vecteurs ne forment pas un « triplet de vecteurs de main droite » (ou trièdre droit), c.à.d. on ne peut pas aligner ces vecteurs selon les trois doigts utilisés dans la règle de la main droite. On pourrait prendre la valeur absolue du résultat pour remédier à la situation dans le cas où on désire calculer un volume physique.

Le produit mixte possède les propriétés suivantes qu'on obtient à partir des propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel.

**Propriétés du produit mixte (ou triple)**

1. $(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$ (ceci car $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ sont perpendiculaires)
2. $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u})$ (c.à.d. une permutation cyclique (ou circulaire) des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ n'altère pas le produit mixte)
3. $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = -(\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}) = -(\mathbf{w},\mathbf{v},\mathbf{u}) = -(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v})$ (c.à.d. une permutation non cyclique des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ change le signe du produit mixte)
4. $(k\mathbf{u}, m\mathbf{v}, n\mathbf{w}) = k\,m\,n(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$

La première propriété se démontre aussi en utilisant une permutation des vecteurs et en exploitant le fait que $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = 0$. On verra que le calcul du produit mixte est équivalent au calcul d'un déterminant. Les déterminants seront étudiés en algèbre linéaire.

## 2.4 Droites dans le plan et l'espace

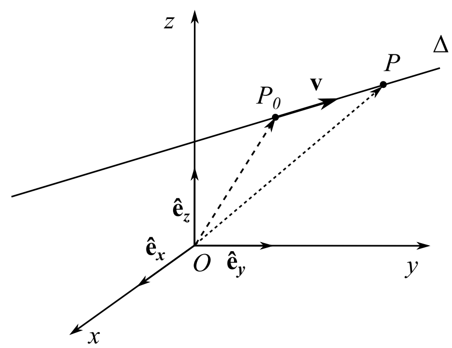


FIGURE 2.11

Dans cette section, on traitera des droites dans l'espace. En grande partie, pour obtenir les résultats équivalents dans le plan, il suffit d'éliminer tout ce qui a trait à la 3$^e$ composante. On indiquera les situations où il y a des différences dans les cas du plan et de l'espace.

Pour situer une droite $\Delta$, on a besoin de connaître un point $P_0$ sur celle-ci (appelé *point d'appui*) ainsi que sa direction. Soit $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0} = [x_0\, y_0\, z_0]$ le vecteur position du point sur la droite $\Delta$ et $\mathbf{v} = [v_x\, v_y\, v_z]$ un vecteur le long de $\Delta$ appelé *vecteur directeur*, voir figure 2.11.

On parle aussi des composantes de $\mathbf{v}$ comme spécifiant l'*inclinaison de la droite*. Soit $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = [x\,y\,z]$ le vecteur position d'un point quelconque $P$. Pour que ce point quelconque $P$ soit sur la droite, il faut que le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ joignant $P_0$ à $P$ soit parallèle au vecteur directeur (en d'autres mots que ces vecteurs soient multiples l'un de l'autre), c.à.d.

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{P_0P} = \lambda\mathbf{v},\\ \Longleftrightarrow\ &\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \lambda\mathbf{v},\\ \Longleftrightarrow\ &\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Cette dernière équation s'appelle *équation vectorielle de la droite*. Un autre façon de voir est de considérer qu'on part du point $P_0$ et qu'on doit prendre un certain pas le long du vecteur directeur $\mathbf{v}$ pour atteindre $P$. Le paramètre $\lambda$ est un scalaire variant de $-\infty$ à $+\infty$ en passant par toutes les valeurs réelles qui permet de parcourir la droite. En d'autres mots, selon les différentes valeurs de $\lambda$ on retrouvera les différents points sur $\Delta$.

Si on décompose l'équation de la droite en composantes, on obtient l'*équation paramétrique de la* *droite*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda v_x, \\ y &= y_0 + \lambda v_y, \\ z &= z_0 + \lambda v_z. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Finalement, si on élimine le paramètre $\lambda$ des équations en supposant qu'aucune des composantes $v_x$, $v_y$, ou $v_z$ est nulle, on obtient les *équations symétriques de la droite*

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y} = \frac{z-z_0}{v_z}. \tag{2.20}$$

Cette dernière équation consiste en fait en deux équations simultanées, par exemple la paire d'équations suivantes (notez qu'on pourrait choisir d'autres paires)

$$\begin{aligned} \frac{x-x_0}{v_x} &= \frac{z-z_0}{v_z}, \\ \frac{y-y_0}{v_y} &= \frac{z-z_0}{v_z}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ces équations sont en fait les équations de deux plans comme nous le verrons à la section suivante et la droite est leur droite d'intersection.

À noter que les équations vectorielle, paramétrique et symétriques de la droite ne sont pas uniques, car on peut partir de n'importe quel point sur la droite et choisir n'importe quel multiple du vecteur directeur pour écrire ces équations.

Dans le cas où on est dans le plan, les équations symétriques de la droite deviennent

$$\frac{x-x_0}{v_x} = \frac{y-y_0}{v_y}, \tag{2.22}$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.23}$$

Cette dernière est l'*équation cartésienne de la droite dans le plan*, qu'on peut ramener à la forme bien connue

$$y = mx + b. \tag{2.24}$$

**Exercice de lecture 2.20.** Déterminer les coefficients $A$, $B$ et $C$ en terme de $x_0$, $y_0$, $v_x$, et $v_y$. Écrivez aussi la *pente* $m$ et l'*ordonnée à l'origine* $b$ en terme de $A$, $B$ et $C$. Quelle condition doit-il y avoir sur $B$ dans ce dernier cas pour pouvoir obtenir $m$ et $b$ ?

À noter qu'il n'y a pas de forme équivalente aux équations 2.23 et 2.24 pour une droite dans l'espace. En fait l'équation semblable à l'éq. 2.23 dans l'espace correspond à un plan comme on va le voir à la section suivante. Dans l'espace, les équations finales auxquelles on peut arriver sont soit l'équation vectorielle, l'équation paramétrique, ou bien les équations symétriques. Dans l'espace, les équations symétriques de la droite sont aussi appelées *équations cartésiennes de la droite.*

**Exercice de lecture 2.21.** Droite spécifiée par un point et une direction : Donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point $P_0 : (1,4,-1)$ et ayant comme vecteur directeur $\mathbf{d} = (1,1,1)$.

## 2.5 Plans dans l'espace

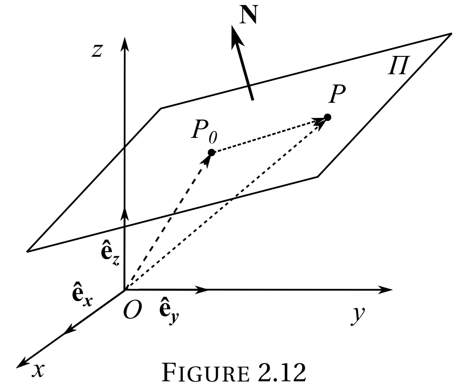

FIGURE 2.12

Il y a plusieurs façons de spécifier un plan (on dénotera un plan par la lettre grecque majuscule Π). Toutes sont équivalentes comme on va le montrer. Une bien connue est de dire que 3 points déterminent un plan. Une autre est de dire qu'un point et deux directions indépendantes spécifient un plan. Finalement, un plan peut aussi être considéré comme le lieu géométrique passant par un point et perpendiculaire à une direction donnée. Commençons par la dernière spécification d'un plan. Soit un point $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur $\mathbf{N} = [A\,B\,C]$ selon la direction donnée. Alors, pour qu'un point quelconque $P : (x, y, z)$ de l'espace soit situé sur le plan, le vecteur $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0\; y - y_0\; z - z_0]$ reliant $P_0$ à $P$ doit être perpendiculaire au vecteur $\mathbf{N}$, voir figure 2.12.

Cette condition s'écrit à l'aide du produit scalaire sous la forme

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{N} = 0, \tag{2.25}$$

ou de façon équivalente

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \mathbf{N} = 0. \tag{2.26}$$

$P_0$ est appelé un *point de support du plan* (ce point de support n'est évidemment pas unique car tout point du plan peut servir de point de support). Pour des raisons évidentes, le vecteur $\mathbf{N}$ est une *normale au plan* (elle n'est pas unique, tout multiple sera aussi une normale). L'une ou l'autre des équations précédentes sera appelée *équation scalaire du plan*[1]. En développant les équations précédentes en utilisant les composantes des vecteurs, on a

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2.27}$$

ou

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0, \tag{2.28}$$

ou encore

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.29}$$

où $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Cette dernière forme, appelée *équation cartésienne du plan*, est la plus souvent rencontrée. Cette équation est une *équation du premier degré* en $x$, $y$ et $z$. À l'inverse, toute équation du premier degré en $x$, $y$ et $z$ représente un plan dans l'espace. Cette dernière affirmation sera démontrée dans un exemple un peu plus loin.

**Exercice de lecture 2.22.** Le but ici est d'étudier des cas particuliers de plans pour se familiariser avec leur positions géométriques. P. ex. si $A = 0$, alors le plan est parallèle à l'axe des $x$ (ou en d'autres mots, la normale au plan est perpendiculaire à l'axe des $x$). Quelle sera la position du plan $Ax + By + Cz + D = 0$ dans l'espace (par rapport à l'origine, aux axes, ...) si : a) $B = 0$, b) $C = 0$, c) $D = 0$, d) $A$ et $B$ sont nuls e) si deux des trois coefficients $A$, $B$ ou $C$ sont nuls ?

[1] Parfois aussi appelée à tort équation vectorielle ; on n'utilisera pas cette terminologie ici, car le terme équation vectorielle sera utilisé pour une autre représentation du plan.

Supposons maintenant qu'on ait un point $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$ et deux directions indépendantes dans un plan représentées par les vecteurs **u** et **v**, voir figure 2.13. Alors, il est facile de déterminer un vecteur normal au plan en prenant le produit vectoriel de **u** et **v**, c.à.d. $\mathbf{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Alors tous les développements précédents peuvent être repris à partir d'ici. On peut aussi utiliser le produit mixte pour obtenir l'équation d'un plan à partir d'un point de support et deux directions en remarquant que si on utilise $\mathbf{N} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dans l'équation 2.25, alors on obtient

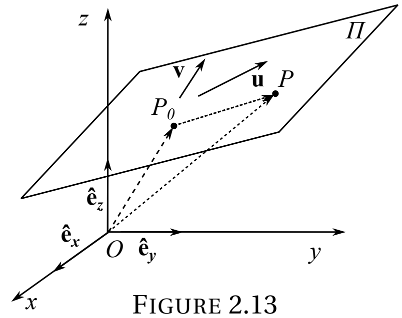

FIGURE 2.13

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \iff (\overrightarrow{P_0P}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \tag{2.30}$$

Ceci revient aussi à dire que les vecteurs sont coplanaires comme on l'a vu à la section 2.3 sur le produit mixte. On peut donc ainsi aussi écrire l'équation d'un plan comme un produit mixte nul.

Supposons maintenant qu'on ait 3 points $P_1 : (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 : (x_2, y_2, z_2)$ et $P_3 : (x_3, y_3, z_3)$ non colinéaires. Alors, on peut déterminer le plan passant par ces 3 points en utilisant $P_1$ comme point de support (c.à.d. $P_0$) et les vecteurs $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ pour spécifier deux directions (figure 2.14). On se ramène donc au cas où le plan est spécifié par un point et deux directions, qui lui se ramenait au cas où le plan est spécifié par un point et une normale.

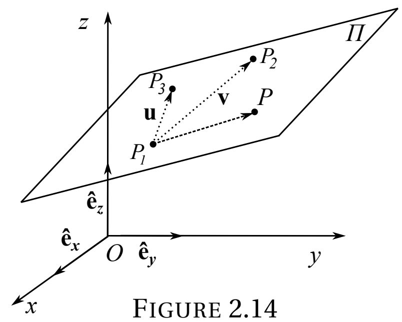

FIGURE 2.14

**Exercice de lecture 2.23.** Calculez l'équation du plan passant par le point (2, 0, -1) et perpendiculaire au vecteur (1,1,3).

**Exercice de lecture 2.24.** Calculez les composantes d'un vecteur perpendiculaire au plan généré par les vecteurs (1, 2, -1) et (-2, 4, 3).

**Exercice de lecture 2.25.** Trouvez l'équation de la droite passant par le point $P_1 : (1, 1, 1)$ et perpendiculaire au plan passant par $P_1$, $P_2 : (2, 0, 0)$ et $P_3 : (0, 2, 3)$.

Revenons à la caractérisation d'un plan par un point $P_0$ et deux directions **u** et **v**. De façon semblable à l'équation vectorielle d'une droite, le vecteur position de tout point $P$ du plan peut être écrit comme

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + a\mathbf{u} + b\mathbf{v}. \tag{2.31}$$

Cette équation s'appelle *équation vectorielle du plan* et les scalaires $a$ et $b$ sont les paramètres du plan. Selon les différentes valeurs qu'on donnera à $a$ et $b$, on obtiendra les différents points du plan. Les paramètres $a$ et $b$ définissent en fait des coordonnées dans le plan, voir figure 2.15.

Si on décompose l'équation précédente selon ses composantes, on obtient l'équation paramétrique du plan (l'analogue de l'équation paramétrique d'une droite).

$$\begin{aligned} x &= x_0 + au_x + bv_x, \\ y &= y_0 + au_y + bv_y, \\ z &= z_0 + au_z + bv_z. \end{aligned} \tag{2.32}$$

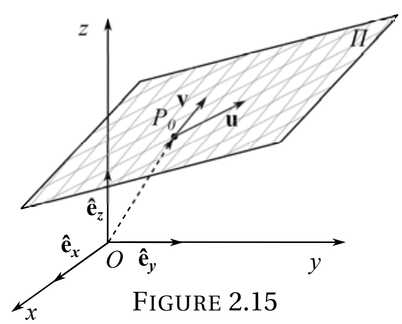

FIGURE 2.15

Pour obtenir la relation entre les coordonnées $x$, $y$ et $z$, on pourrait
procéder en éliminant les paramètres $a$ et $b$ de ces équations et on arriverait à l'équation cartésienne du plan, mais cette approche algébrique est moins éclairante que l'approche géométrique qu'on a utilisée jusqu'à maintenant. Elle ne sera donc pas poursuivi davantage. Les équations vectorielle et paramétrique d'un plan sont peu utilisées en pratique et on s'arrêtera ici à leur sujet. À noter que l'analogue de la droite dans le plan n'est pas la droite dans l'espace, mais plutôt le plan dans l'espace, car les deux sont définis par une équation du premier degré, ce qui n'est pas le cas pour la droite dans l'espace. Pour la droite dans le plan, on aurait aussi pu en fait la définir par un point et un vecteur normal.

On définit l'angle entre deux plans, appelé *angle dièdre*, comme étant le plus petit angle entre deux droites perpendiculaires à la droite d'intersection (figure 2.16). Or, cet angle est le même que l'angle entre les normales des deux plans $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$. On peut utiliser le produit scalaire ou le produit vectoriel pour calculer cet angle (préférablement le produit scalaire, car le calcul est plus simple). Soit $\theta$ l'angle entre les deux plans. Il sera donné par

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{||\mathbf{N}_1|| \, ||\mathbf{N}_2||}. \tag{2.33}$$

**Exercice de lecture 2.26.** Donner une formule pour l'angle $\theta$ entre deux plans en utilisant le produit vectoriel. Donner aussi une formule pour $\tan\theta$ faisant intervenir le produit scalaire et le produit vectoriel.

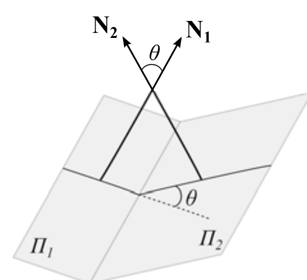


FIGURE 2.16

**Exercice de lecture 2.27.** Quel est l'angle entre deux droites dans l'espace? Donnez une expression. Quel est l'angle entre deux droites dans le plan? Supposez que les équations de ces droites sont données par $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ et donnez une expression explicite dans ce cas. Et si les droites sont exprimées sous la forme bien connue $y = m_1x + b_2$ et $y = m_2x + b_2$?

On s'intéressera maintenant à déterminer la distance d'un plan à l'origine $O$ (figure 2.17). Cette distance est la distance la plus courte entre l'origine et un point du plan. On pourrait résoudre ce problème en calculant la distance entre l'origine et un point quelconque du plan et en trouvant le point du plan qui minimise cette distance. Cela nécessiterait le calcul différentiel à plusieurs variables (deux en fait) pour minimiser cette fonction distance. Ici, on trouvera plutôt la solution à ce problème de façon géométrique. On constate que la distance recherchée est obtenue via le point $P$ sur le plan dont le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est perpendiculaire au plan, donc parallèle à la normale $\mathbf{N}$ au plan, c.à.d. $\overrightarrow{OP} = k\mathbf{N}$ pour un scalaire à déterminer $k$. La longueur de $k\mathbf{N}$ donnera la distance recherchée. Or $\overrightarrow{OP} = k\mathbf{N}$ doit satisfaire l'équation du plan. De l'éq. 2.26, on obtient

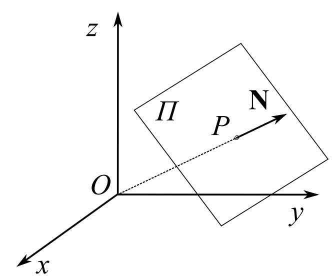


FIGURE 2.17

$$(k\mathbf{N} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \mathbf{N} = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} k &= \frac{\overrightarrow{OP_0} \cdot \mathbf{N}}{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}} \\ &= \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{A^2 + B^2 + C^2} \\ &= \frac{-D}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned}$$

Comme la distance recherchée, qu'on dénotera par $d(\Pi, O)$, est donnée par la norme de $k\mathbf{N}$ (c.à.d. $d(\Pi, O) = ||k\mathbf{N}|| = |k|\,||\mathbf{N}||$, on obtient

$$d(\Pi, O) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.34}$$

Donc, géométriquement, le paramètre $D$ de l'équation d'un plan est relié à la distance entre le plan à l'origine via la dernière équation, dans laquelle au dénominateur apparaît la norme du vecteur normal.

**Exercice de lecture 2.28.** La distance entre un point quelconque de l'espace $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ et un plan s'obtient de façon similaire à la distance d'un plan à l'origine. On recherche dans ce cas un point $P$ sur le plan pour lequel le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est parallèle à la normale au plan. Montrer, en faisant quasiment le même développement que précédemment, que la distance recherchée est donnée par

$$d(\Pi, Q) = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.35}$$

Notons que si $(x_Q, y_Q, z_Q) = (0, 0, 0)$, alors cette dernière équation se réduit à l'éq. 2.34 comme il se doit.

Comme on l'a dit au début de ce chapitre, on a supposé ici qu'on travaillait dans une base orthonormée, mais les développements pour les droites et plans peuvent être faits sans cette supposition. Cela rend toutefois les calculs beaucoup plus fastidieux ; il est généralement avantageux de travailler dans une base orthonormée.

Notons pour terminer que la notion de plan se généralise à des espaces de dimensions $n > 3$. Supposons un tel espace muni de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On appelle hyperplan, tout lieu géométrique dont les coordonnées satisfont une équation de la forme

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots A_n x_n + D_n = 0. \tag{2.36}$$

**Exercice de lecture 2.29.** Qu'est-ce qu'un hyperplan dans l'espace euclidien à 2 dimensions ?

Annexe A

# Solutions/réponses aux exercices de lecture

## Chapitre 1

**Exercice de lecture** 1.1 : Voir la figure A.1 pour la solution.

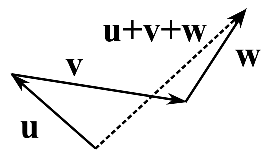


FIGURE A.1

**Exercice de lecture** 1.2 : Le lieu géométrique décrit est une demi-droite de support **v** partant de **u**, voir figure A.2

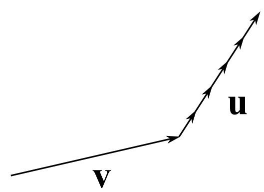


FIGURE A.2

**Exercice de lecture** 1.3 : En se basant sur la figure A.3 et en utilisant la loi des cosinus, on a que

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(180^\circ - \theta).$$

Ici, $\theta = 50^\circ$, $||\mathbf{u}|| = 3$ et $||\mathbf{v}|| = 4$, ce qui donne $||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| = 6.36$.

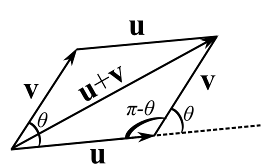


FIGURE A.3

**Exercice de lecture** 1.4 : En se basant sur la figure A.3 et en utilisant la loi des cosinus, on a que

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 - 2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||\cos(180^\circ - \theta).$$

Ici, on nous donne $||\mathbf{u}|| = 8$ et $||\mathbf{v}|| = 11$ et $||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| = 16$ et on doit trouver l'angle $\theta$ entre les deux vecteurs. En utilisant que $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ et en isolant $\cos\theta$, on obtient finalement $\theta = 66.21^\circ$.

**Exercice de lecture** 1.5 : La figure A.4 montre bien que si on applique successivement 2 fois la méthode

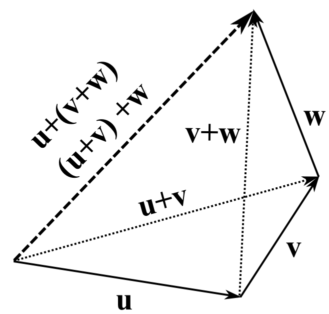


FIGURE A.4

du triangle, une fois en partant avec $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ suivi de l'addition de $\mathbf{w}$ et l'autre fois en additionnant $\mathbf{u}$ à $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, on obtient le même résultat.

**Exercice de lecture** 1.6 : La somme des vecteurs revient au point de départ $O$. En d'autres mots, la somme est le vecteur nul. Pour une illustration graphique, voir la figure A.5.

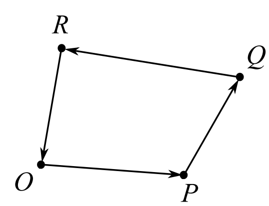


FIGURE A.5

**Exercice de lecture** 1.7 :

$$\begin{aligned}(-\lambda)\mathbf{u} &= ((-1)\lambda)\mathbf{u} \quad \text{(on utilise la propriété des nombres réels} -\lambda = (-1)\lambda) \\ &= (\lambda(-1))\mathbf{u} \quad \text{(on utilise la commutativité des nombres réels)} \\ &= \lambda((-1))\mathbf{u}) \quad \text{(on utilise la propriété 3 du produit par un scalaire)} \\ &= \lambda(-\mathbf{u}) \quad \text{(on utilise la définition}(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u})\end{aligned}$$

**Exercice de lecture** 1.8 : On a les équations

$$2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=\mathbf{a}$$
$$\mathbf{u}-2\mathbf{v}=\mathbf{b}$$

Si on multiplie la $2^e$ équation par (-2), on obtient alors les équations (ici on utilise la propriété 3 du produit par un scalaire)

$$2\mathbf{u}+3\mathbf{v}=\mathbf{a}$$
$$-2\mathbf{u}+4\mathbf{v}=-2\mathbf{b}$$

Maintenant, si on additionne la 2<sup>e</sup> équation à la première (ici on utilise la propriété 5 de l'addition des vecteurs), on obtient

$$7\mathbf{v} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$$

En multipliant de part et d'autres par 1/7 (ici on utilise de nouveau la propriété 3 du produit par un scalaire), on obtient

$$\mathbf{v} = \frac{1}{7}\mathbf{a} - \frac{2}{7}\mathbf{b}.$$

De façon similaire, on obtient

$$\mathbf{u} = \frac{2}{7}\mathbf{a} + \frac{3}{7}\mathbf{b}.$$

# Chapitre 2

**Exercice de lecture** 2.1 : La figure A.6 illustre la situation géométriquement. On voit que la longueur de la projection de **b** sur **a** est donnée par $l_{proj} = ||\mathbf{b}||\cos\theta$. Or, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$. Donc $l_{proj} = ||\mathbf{b}||\cos\theta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$. On a donc à ce stade la longueur de la projection de **b**. Pour obtenir le vecteur projection, on doit multiplier cette longueur par un vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}$ le long de **a**. Ce vecteur unitaire est donné par $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$. Donc, finalement $\mathbf{proj_a}(\mathbf{b}) = l_{proj}\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}\frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$

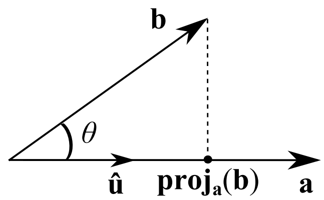


FIGURE A.6

**Exercice de lecture** 2.2 : Si on réfère à la figure A.7 (semblable à la figure A.6), on voit que $\mathbf{b} - \mathbf{proj_a}(\mathbf{b})$ est un vecteur perpendiculaire à **a**. Pour la démonstration, on calcule le produit scalaire entre **a** et $\mathbf{b}^*$. Donc $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^* = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{proj_a}(\mathbf{b})) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot(\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$. CQFD.

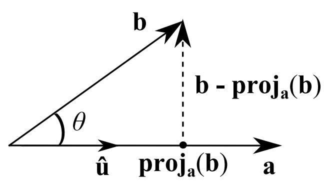


FIGURE A.7

**Exercice de lecture** 2.4 : Le résultat auquel on doit arriver est $\cos\theta = \frac{||\mathbf{u}||^2+||\mathbf{v}||^2-||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2}{2||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||}$, ce qui montre qu'on peut définir le cosinus de l'angle entre deux vecteurs en terme de normes uniquement.

**Exercice de lecture** 2.5 : a) -15; b) 0

**Exercice de lecture** 2.6 : On calcule le produit scalaire des 2 vecteurs et on obtient zéro. De par la propriété du produit scalaire, cela veut dire que l'angle entre les deux vecteurs est 90°, donc ils sont orthogonaux.

**Exercice de lecture** 2.7 : On calcule le produit scalaire qui est : 1*2 -2*(-1) = 4. La norme de chacun des vecteurs est $\sqrt{5}$. Donc $\cos\theta = 4/5$. D'où $\theta = 36.87°$.

**Exercice de lecture** 2.8 : 100.2°

**Exercice de lecture** 2.9 : Montrons que **u** est perpendiculaire à $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ en montrant que le produit entre **u** et **w** est bien nul. En utilisant l'éq. (2.8), on a

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} &= u_x(u_y v_z - u_z v_y) + u_y(u_z v_x - u_x v_z) + u_z(u_x v_y - u_y v_x), \\ &= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x.\end{aligned}$$

On voit par exemple que le premier terme s'annulera avec le 4$^{e}$ et de même pour les autres termes qui s'annuleront deux à deux. Un calcul tout à fait semblable montre que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$.

**Exercice de lecture** 2.10 : On obtient $\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = (-3,-1,4)$ (c.à.d. $-3\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$). Si on calcule $\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}$ on obtient zéro ; de même pour $\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$. Pour ce qui est de la norme de **w**, on peut soit la calculer directement, ce qui donne $||\mathbf{w}|| = \sqrt{26}$ ou bien utiliser la formule de la norme du produit vectoriel donnée à l'éq. 2.13. Cette dernière façon est plus fastidieuse. Tout d'abord pour calculer l'angle entre les deux vecteurs, on utilise le produit scalaire entre **u** et **v**. On calcule que $||\mathbf{u}|| = \sqrt{14}$ et $||\mathbf{v}|| = \sqrt{3}$, ce qui donne $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{3}}$. Donc $\sin\theta = \frac{26}{\sqrt{14}\sqrt{3}}$ (en utilisant $\sin^2 = 1-\cos^2$. Ainsi $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = \sqrt{14}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \sqrt{26}$.

**Exercice de lecture** 2.11 : On calcule que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -1$, $||\mathbf{u}|| = 5$ et $||\mathbf{v}|| = \sqrt{3}$, ce qui donne $\cos\theta = \frac{-1}{5\sqrt{3}}$. Donc $\sin\theta = \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{75}}$ (en utilisant $\sin^2 = 1-\cos^2$. Si on y va maintenant avec le produit vectoriel, on obtient $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}|| = \sqrt{74}$ et donc $\sin\theta = \frac{\sqrt{74}}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{75}}$.

**Exercice de lecture** 2.12 : a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (4,7,5)$, b) $\mathbf{v}\times\mathbf{u} = (-4,-7,-5)$, c) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{w}) = 9$, d) $(\mathbf{w}\times\mathbf{v})\times\mathbf{u} = (6,-3,6)$, e) $\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (-24,-5,7)$ (attention, ce n'est pas égal à zéro !).

**Exercice de lecture** 2.13 : La norme du produit vectoriel donne la demie de l'aire du triangle.

**Exercice de lecture** 2.14 : On peut considérer les points dans le plan comme faisant partie de l'espace 3D en leur mettant une coordonnée nulle en $z$ (c.à.d. selon la 3$^{e}$ dimension). On a donc que le vecteur position de $A$ sera $(x_A, y_A, 0)$ et celui de $B$ sera $(x_B, y_B, 0)$. Alors, on sait par l'exercice précédent que l'aire du triangle sera donnée par la demie de la norme du produit vectoriel entre ces deux vecteurs. Or le produit vectoriel est donné par $(0,0,x_A y_B - x_B y_A)$. On voit que seule la composante $z$ du produit vectoriel est non nulle. Donc l'aire sera donnée par la demie de la valeur absolue de cette composante $z$, ce qui donne

$$Aire = \frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A|. \tag{A.1}$$

On peut, si on veut, omettre la valeur absolue. Ainsi,

$$Aire = \frac{1}{2}(x_A y_B - x_B y_A). \tag{A.2}$$

Alors, l'aire pourrait être négative. On parle dans ce cas d'une aire orientée. Si la valeur est positive, cela veut dire que le pouce pointe vers les $z$ positifs lorsqu'on balaie l'aire en suivant la règle de la main droite en partant de vecteur position de $A$ vers celui de $B$. Si la valeur est négative, le pouce pointe vers les $z$ négatifs. On peut généraliser cette formule au cas où les sommets sont $A : (x_A, y_A)$, $B : (x_B, y_B)$ et $C : (x_C, y_C)$. Cela donnera la formule suivante (bien connue en géométrie analytique) pour l'aire orientée du triangle (voir aussi figure A.8)

$$Aire = \frac{1}{2}\big((x_A - x_C)(y_B - y_C) - (x_B - x_C)(y_A - y_C)\big). \tag{A.3}$$

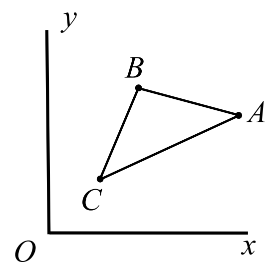


FIGURE A.8

LA SOLUTION DE L'EXERCICE 2.15 EST DONNÉE EN FORMAT MANUSCRIT DANS UN FICHIER À PART.

**Exercice de lecture** 2.16 : Avec la règle de la main droite, si on place un vecteur **u** le long de l'index et **v** le long du majeur, le résultat sera selon le pouce. Si on place plutôt **v** le long de l'index et **u** le long du majeur, on voit qu'on doit tourner la main et que le pouce sera opposé par rapport au cas précédent.

**Exercice de lecture** 2.17 : Soit $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ et **v** un multiple de **u**, donc parallèle à **u**. Donc on peut écrire $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y, \alpha u_z)$. Si on fait le produit vectoriel entre ces deux vecteurs, on constate que le résultat est nul.

**Exercice de lecture** 2.18 : Réponse possible la plus immédiate : On constate en inspectant l'expression $ac + bd$ que si on prend $c = -b$ et $d = a$ (ou bien $c = b$ et $d = -a$), alors cette expression est nulle, donc $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ et ainsi **v** est orthogonal à **u**. Notez que toute autre réponse possible à ce problème sera un multiple de $(-b, a)$. Normalement, on choisit $(-b, a)$ comme étant perp(**u**) car il est de même longueur que **u** et lui est perpendiculaire dans le sens trigonométrique.

LES SOLUTIONS DES EXERCICES 2.19 À 2.28 SONT DONNÉES EN FORMAT MANUSCRIT DANS UN FICHIER À PART.

**Exercice de lecture** 2.29 : Un hyperplan dans l'espace euclidien 2D (c.à.d. le plan) est une droite, car une droite est une équation du premiere degré du type $Ax + By + C = 0$, ce qui est bien un hyperplan. Le vecteur normal à cette droite dans le plan est : $(A, B)$.