## 5.3 Lignes de champ pour un champ de vecteurs

On se rappellera ici la notion de champ de vecteurs.

On traite d'abord des lignes de champ pour un champ vectoriel dans le plan. Les notions se généraliseront aisément au cas de l'espace. Dans ce qui suit $\vec{r}$ désigne le vecteur position d'un point arbitraire dans le plan, $\vec{r} = (x, y)$. Par définition, une *ligne de champ* pour un champ de vecteurs $\vec{v}(\vec{r}) = v_x(x, y)\hat{e}_x + v_y(x, y)\hat{e}_y$ est une *courbe dont le vecteur tangent en tout point de cette courbe est proportionnel au champ de vecteur en ce point.*

De façon qualitative, une ligne d'un champ de vecteur est une courbe qui suit au mieux les flèches du champ de vecteur. Pour tracer une ligne de champ passant par un point $\vec{r}_0$, on trace à partir de ce point un petit segment (à la limite infinitésimal, mais en pratique de petite longueur finie), qu'on dénote $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\hat{e}_x + \mathrm{d}y\hat{e}_y$ dont la direction est la même que celle de $\vec{v}$ en ce point (en pratique on prend $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{e}_x + \Delta y\hat{e}_y$). Ensuite, au bout de ce segment, on a un nouveau point et on recommence, on trace à partir de ce nouveau point un petit segment dont la direction est la même que la flèche en ce point, etc. On construit ainsi de proche en proche la ligne de champ passant par un point $\vec{r}_0$. Pour tracer une autre ligne de champ, on prend un nouveau point $\vec{r}_0$ qui n'est pas sur une ligne de champ déjà tracée et on répète le processus. De façon imagée, on trace les lignes de champ à l'aide de courbes qui suivent naturellement les lignes de champ.

De façon plus mathématique, soit $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$ une paramétrisation de cette courbe. Puisque $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ est le vecteur tangent à cette courbe, on doit donc avoir par définition d'une ligne de champ que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lambda\vec{v}(\vec{r}), \tag{5.1}$$

où $\lambda$ est une constante. Comme $\lambda$ est une constante, on peut redéfinir le paramètre de la courbe et plutôt utiliser $s = \lambda t$ (on aurait aussi pu prendre $\lambda = 1$ directement dès le départ). On aura alors l'équation différentielle vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{v}(\vec{r}).$$

Cette dernière équation, qu'on peut considérer comme une définition mathématique définissant les lignes de champ, est l'*équation différentielles des lignes de champ*. En composantes, on a alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v_x(x, y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = v_y(x, y),$$

qui est un *système d'équations différentielles.*[1] *La solution aux équations différentielles des lignes de champ donne les équations des lignes de champ.* Ce système est en général couplé, c.à.d. qu'on ne peut pas

[1]De façon plus générale, noter qu'à l'éq. (5.1), $\lambda$ pourrait être une fonction de $\vec{r}$ ($\lambda = \lambda(\vec{r}) = \lambda(x, y)$, mais cela rend les choses plus compliquées et avec une constante qu'on peut ultimement prendre égale à 1, de toute façon, cela définit les lignes de champ, c.à.d. on peut définir les lignes de champ par l'éq. précédente. Cette définition des lignes de champ n'est ainsi pas unique, car on aurait pu choisir toute fonction de $\vec{r}$ devant $\vec{v}$ dans la définition et il y a une infinité de choix pour cette fonction. On note que lorsqu'on calcule de rapport $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s) = v_y/v_x$, alors la fonction arbitraire disparaît. Donc, on pourrait définir des lignes de champ par $(x, y(x))$ ou $(x(y), y)$ et alors il n'y a plus de constante. le choix $y = y(x)$ mène à la méthode des isoclines pour tracer les courbes intégrales et donc résoudre graphiquement le système d'équations différentielles.

résoudre indépendemment les équations pour $x$ et $y$, car les composantes $v_x$ et $v_y$ de $\vec{v}$ dépendent généralement à la fois de $x$ et $y$ tel que les équations l'indiquent. Une ligne de champ est aussi appelée une *courbe intégrale*, car elle correspond à résoudre ce système d'équations différentielles, donc à « trouver les intégrales » de ce système d'équations différentielles. La solution au système d'équations différentielles des lignes de champ peut-être difficile à trouver (comme c'est généralement le cas avec des équations différentielles) et différentes techniques peuvent être utilisées. Notamment, ces équations différentielles peuvent être nonlinéaires et ne se résolvent pas avec les méthodes simples vues en S1.

Dans l'espace, les concepts précédents se généralisent aisément. On arrive alors par un raisonnement similaire au précédent aux équations différentielles suivantes

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v_x(x, y, z),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = v_y(x, y, z),$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = v_z(x, y, z).$$

**Exercice de lecture 5.1.** Soit le champ de vecteurs $\vec{v} = -\hat{e}_x + \hat{e}_y$ dans le plan.

a) Tracer ce champ de vecteurs et le décrire qualitativement.
b) Tracer de façon qualitative les lignes de champ de ce champ de vecteurs (il faut avoir lu les notions théoriques précédentes). À quoi correspondent les lignes de champ (les décrire) ?
c) Résoudre les équations différentielles des lignes de champ pour ce champ de vecteurs (v. notions théoriques précédentes). On obtiendra ainsi des équations analytiques pour les lignes de champ. Décrire ce que représentent ces équations. On arrive ainsi à des équations correspondant à la description données en b). Note : Ici ces équations sont faciles à résoudre ; notamment elles sont découplées et chacune d'elle est une équation simple.