1.1 Formule du changement de variables dans les intégrales multiples et jacobien

On considère l'intégrale triple

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\int\int_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}v, \tag{1.1}$$

où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes usuelles et $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est l'élément de volume en coordonnées cartésiennes. Il arrive souvent qu'il soit plus facile d'évaluer une telle intégrale en effectuant un changement de variables. Dans ce cas, on exprime x, y et z en terme de nouvelles variables (ou coordonnées) qu'on dénotera u, v et w. On a donc

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w), \\ y &= y(u,v,w), \\ z &= z(u,v,w). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Quelle est l'expression de l'élément de volume $\mathrm{d}V$ en terme des nouvelles coordonnées u, v et w? Nous verrons que l'élément de volume n'est pas simplement donné par $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$. La raison pour cela est que les nouvelles coordonnées peuvent être curvilignes, ce qui fait que pour ces coordonnées l'élément n'est en général pas cubique, contrairement au cas pour les coordonnées cartésiennes. Les coordonnées curvilignes induisent en quelque sorte des déformations de l'élément de volume (étirement, courbure, ...). La figure 1.1 montre que l'élément de volume est en général un parallélépipède. Notre objectif est maintenant d'obtenir une formule pour cet élément de volume.

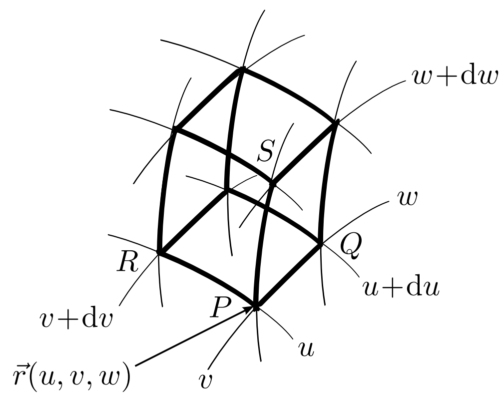

FIGURE 1.1

Avec les nouvelles variables, un point de l'espace $\vec{r}(x,y,z)$ peut maintenant être écrit en terme de u, v et w comme

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,v,w) &= \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \\ &\equiv x(u,v,w)\,\hat{e}_x + y(u,v,w)\,\hat{e}_y + z(u,v,w)\,\hat{e}_z. \end{aligned} \tag{1.3}$$

On voit sur la figure 1.1 que l'élément de volume parallélépipédique est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$ donnés par[1]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \vec{r}(u+\mathrm{d}u,v,w) - \vec{r}(u,v,w), \\ \overrightarrow{PR} &= \vec{r}(u,v+\mathrm{d}v,w) - \vec{r}(u,v,w), \\ \overrightarrow{PS} &= \vec{r}(u,v,w+\mathrm{d}w) - \vec{r}(u,v,w). \end{aligned} \tag{1.4}$$

[1] Les côtés du parallélépipède sont tellement petits (à la limite infinitésimaux) qu'ils sont de petits segments de droite.

Or, on sait calculer le volume d'un parallélépipède, il est donné par le produit mixte qui peut aussi être écrit comme un déterminant[2]. On a ainsi

$$\mathrm{d}v = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \det \begin{bmatrix} (PQ)_x & (PR)_x & (PS)_x \\ (PQ)_y & (PR)_y & (PS)_y \\ (PQ)_z & (PR)_z & (PS)_z \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

où $(PQ)_x$ représente la composante x du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et de façon similaire pour les autres quantités apparaissant dans la matrice. On peut exprimer $\overrightarrow{PQ}$ (de même pour $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PS}$) sous la forme d'une différentielle[3] faisant intervenir une dérivée, car seule une variable varie (en l'occurence u pour $\overrightarrow{PQ}$). On a alors

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u. \tag{1.6}$$

$\vec{r}$ étant le vecteur position d'un point (x, y, x) dont l'expression a été donnée à l'éq. 1.3, on peut le dériver par rapport à u. On a alors

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\hat{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u}\,\hat{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u}\,\hat{e}_z. \tag{1.7}$$

On obtient ainsi

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u\right)\hat{e}_z \tag{1.8}$$

et on aura de façon analogue que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v\right)\hat{e}_z, \\ \overrightarrow{PS} &= \left(\frac{\partial x}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\hat{e}_x + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\,\mathrm{d}w\right)\hat{e}_z. \end{aligned} \tag{1.9}$$

On peut maintenant utiliser ces derniers résultats et les insérer dans l'éq. 1.5 pour obtenir l'élément de volume qui est alors donné par

$$\mathrm{d}v = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v & \frac{\partial x}{\partial w}\mathrm{d}w \\ \frac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v & \frac{\partial y}{\partial w}\mathrm{d}w \\ \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u & \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v & \frac{\partial z}{\partial w}\mathrm{d}w \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

En utilisant la propriété des déterminants que lorsqu'une colonne (ou rangée) d'une matrice est multipliée par une même quantité, on peut sortir cette quantité du déterminant, on obtient le résultat final que l'élément de volume est donné par

$$\mathrm{d}v = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{1.11}$$

On voit donc que ce n'est pas seulement l'élément de volume $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ de l'espace des variables u, v et w qui apparait, mais plutôt qu'il est multiplié par un déterminant. La matrice dont on prend le déterminant est appelée *matrice jacobienne* et le déterminant est lui-même appelé le *jacobien*.

[2]Voir notes de cours sur la géométrie vectorielle.
[3]Voir notes de cours sur le calcul différentiel à une variable.

On dénote parfois la matrice jacobienne J de la façon suivante

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}. \tag{1.12}$$

Comme le déterminant d'une matrice est aussi dénoté par des barres (c.à.d. $\det J = |J|$, on retrouve souvent la notation suivante dans la littérature

$$\mathrm{d}v = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{1.13}$$

Donc, si on a à évaluer une intégrale et qu'on fait une changement de variables, on a la formule suivante, appelée *formule du changement de variables* :

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\int\int_V f\left(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w. \tag{1.14}$$

Notons pour terminer qu'ici nous avons démontré la formule du changement de variables pour les intégrales triples, mais c'est la même chose pour les intégrales doubles, le développement est essentiellement le même (voir l'exercice de lecture plus bas où on vous demande de refaire les développements pour ce cas plus simple, vous permettant ainsi de vérifier si vous avez bien compris les développements précédents). Dans ce cas, on n'a que deux variables et la matrice jacobienne est 2×2 au lieu d'être 3×3. La formule du changement de variables est aussi valide dans des espaces de dimensions supérieures à 3.

Exercice de lecture 1.1. Donner l'expression de l'élément d'aire pour les coordonnées polaires dans le plan.

Exercice de lecture 1.2. Donner l'expression de l'élément de volume pour les coordonnées cylindriques dans l'espace.

Exercice de lecture 1.3. Donner l'expression de l'élément de volume pour les coordonnées sphériques dans l'espace.

Exercice de lecture 1.4. Refaites les développements faits ici pour un élément de volume dans l'espace pour le cas d'un élément d'aire dans le plan. Dans ce cas, vous vous rendrez compte qu'il faut calculer l'aire d'un parallélogramme (au lieu du volume d'un parallélépipède) et vous connaissez un outil pour calculer cela.