Session S3 Électrique
Unité d'APP 1

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL MULTIVARIABLES ET VECTORIEL

Ondes et potentiels en électromagnétisme

GUIDE DE L'ÉTUDIANT

Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke

Été 2023

Note : En vue d'alléger le texte, le masculin est utilisé pour désigner les femmes et les hommes.

Unité d'APPI conçue et guide rédigé par : Yves Bérubé-Lauzière, Ph.D., Professeur
Révisions mineure par Serge Charlebois (Automne 2020), Abdelaziz Ramzi (été 2021) et Mathieu Massicotte (été 2023).

Table des matières

1 Activités pédagogiques et compétences visées par l'unité

GEL355 - Calcul différentiel et intégral multivariable et vectoriel *(2 crédits)*

1. (70%) Appliquer les techniques du calcul différentiel et intégral multivariable et vectoriel.
2. (30%) Choisir l'outil mathématique approprié du calcul différentiel et intégral multivariable et vectoriel pour modéliser un phénomène physique ou une situation d'ingénierie.

Description officielle : https://www.usherbrooke.ca/admission/fiches-cours/gel355/

2 Synthèse de l'évaluation

Évaluation	**GEL315**		
	Compétence 1	Compétence 2	Total
Rapport	30	60	90 (15%)
Examen sommatif	180	60	240 (40%)
Examen final	210	60	270 (45%)
Total	420 (70%)	180 (30%)	**600**

3 Qualités en génie

Les qualités en génie telles qu'évaluées dans cette unité d'APP sont indiquées dans le tableau ci-bas. D'autres qualités peuvent être touchées sans être évaluées dans cette unité d'APP. Pour une description détaillée des qualités et leur provenance, consulter le lien suivant :
https://www.usherbrooke.ca/genie/futurs-etudiants/programmes-de-1er-cycle/baccalaureats/bcapg/

Évaluation	Qualités évaluées	Qualités touchées
Rapport d'APP et livrables associés		Q01
Évaluation sommative théorique	Q01	
Évaluation finale théorique	Q01	

4 Consignes

4.1 Connaissances antérieures

TRÈS IMPORTANT : Cette unité d'APP, et de façon plus générale la session, suppose que vous êtes très à l'aise avec les notions fondamentales énumérées ci-bas et les calculs qui y sont associés :

- fonction d'une variable : définition, graphe d'une fonction ;
- dérivée d'une fonction d'une variable ;
- [développement en série de MacLaurin et Taylor d'une fonction d'une variable] ;
- intégrale définie et indéfinie d'une fonction d'une variable ;
- les vecteurs et les opérations produit scalaire et produit vectoriel, identités vectorielles pour les produits scalaire et vectoriel ;
- [les nombres complexes].

Il vous est demandé de vous assurer que cela est bien le cas. À cette fin, il vous faut **faire avant de commencer l'APP, les lectures de révision données à la section 7.2.1**. **N'attendez pas pour faire ces lectures, car pendant l'unité, il sera trop tard.**

4.2 Déroulement de l'unité d'APP

- Pour la résolution de la problématique et le rapport, vous travaillez en équipes de 2. Il y a un seul rapport à remettre par équipe. La section 13 donne les directives concernant le rapport.

- Lors des procéduraux, ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le procédural auquel vous assisterez.

4.3 Utilisation des téléphones cellulaires, tablettes et ordinateurs

- L'utilisation des téléphones cellulaires, tablettes et ordinateurs est **autorisée avec restriction**. La consultation des courriels et des réseaux sociaux, faire des appels téléphoniques, envoyer des messages texte, aller sur YouTube, jouer à des jeux, ou tout autre usage inapproprié pour les activités d'une APP ou d'évaluation sont strictement interdits. Utilisez votre bon sens !

- Le port de casques d'écoute ou d'écouteurs est interdit pendant les activités avec un tuteur.

Le tuteur peut vous expulser d'une activité sans avertissement et sans appel si vous contrevenez aux règles précédentes. En outre, vous pourriez écoper d'une sanction pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'APP, d'activités pédagogiques, ou d'évaluation, avec nécessité de reprise à un moment où l'APP ou l'activité pédagogique sera donnée de nouveau.

5 Problématique

Ondes et potentiels en électromagnétisme[1]

Les équations de Maxwell permettent de décrire de façon quantitative tout phénomène électromagnétique. Ces équations font intervenir quatre champs, soient le champ électrique $\vec{E}$, l'induction magnétique $\vec{B}$ (communément appelée champ magnétique), le déplacement électrique $\vec{D}$ et le champ magnétisant $\vec{H}$. Il s'agit de champs vectoriels (par opposition à des champs scalaires), car ce sont des vecteurs qui dépendent de la position dans l'espace dénotée $\vec{r} = (x, y, z)$. Ces champs dépendent aussi du temps t. Donc, p. ex., on a $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}(x, y, z, t)$.

On utilisera ici la forme générale des équations de Maxwell macroscopiques qui relient les champs vectoriels $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ et $\vec{H}$ entre eux et aux densités de charge ρ_f et de courant libre $\vec{J}_f$ par l'entremise des opérateurs différentiels de divergence dénoté $\nabla\cdot$ et de rotationnel dénoté $\nabla\times$ (le symbole ∇ s'appelle « nabla » ; il est aussi appelé « del »). Sous cette forme, les équations de Maxwell sont données par[2]

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \qquad \text{(Loi de Gauss)} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \text{(Loi de Gauss pour le magnétisme)} \tag{2}$$

0, Car autant rentre que sort donc stable

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad \text{(Loi d'induction de Faraday (équation de Maxwell-Faraday))} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_f. \qquad \text{(Loi d'Ampère - avec correction de Maxwell)} \tag{4}$$

On voit que les équations de Maxwell couplent les champs $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ et $\vec{H}$; ces champs ne sont pas indépendants. On peut en fait n'utiliser que deux de ces quatre champs, car il y a des relations constitutives (aussi appelées équations matérielles), qui décrivent comment les champs interagissent avec la matière et qui relient $\vec{E}$ avec $\vec{D}$ et $\vec{B}$ avec $\vec{H}$. On utilisera ici les relations constitutives faisant intervenir la polarisation électrique $\vec{P}$ et l'aimantation $\vec{M}$ qui décrivent en quelque sorte comment un matériau réagit à un champ électrique et/ou magnétique et qui représentent respectivement les densités volumiques de moments dipolaires électriques et de moments dipolaires magnétiques (il s'agit donc ici de moments dipolaires par unité de volume).[3] On a alors

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{5}$$

et

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \tag{6}$$

où ε_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide, qui sont des constantes fondamentales.

[1] Malgré le titre de la problématique, cette unité d'APP en est une de mathématiques qui trouvent de nombreuses applications en électromagnétisme, la problématique en est un exemple. L'électromagnétisme à strictement parler est abordé dans une autre unité d'APP.

[2] À noter qu'on donne ici les équations de Maxwell sans montrer comment on en est arrivé à ces équations. Ces équations seront justifiées au cours de la session ; on les prend ici pour acquises.

[3] Ces quantités seront définies au cours de la session ; on n'a pas besoin ici de savoir en détail à quoi ces quantités correspondent exactement physiquement. Essentiellement, un dipôle électrique correspond à deux charges identiques de signes opposés séparées par une petite distance, ces deux charges générant un champ électrique. Un dipôle magnétique correspond à une petite boucle de courant générant un champ magnétique. Tel que mentionné dans le texte, la polarisation, qui est une quantité macroscopique, correspond à la densité volumique de dipôle électrique (dipôle électrique par unité de volume) et l'aimantation, qui est aussi une quantité macroscopique, est la densité volumique de dipôle magnétique.

Dans le cas des milieux linéaires, homogènes et isotropes (LHI), les relations constitutives peuvent être écrites sous la forme $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ et $\vec{B} = \mu\vec{H}$, où ε et μ sont des constantes. Vous lisez, dans des documents à votre disposition, qu'en utilisant des identités du calcul vectoriel, on peut arriver à partir des équations de Maxwell à deux équations découplées pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$, c.à.d. dont une ne contient que $\vec{E}$ et l'autre ne contient que $\vec{B}$. Les équations ainsi obtenues ont la forme d'équations d'onde.[4] C'est ainsi que Maxwell a pu prédire l'existence des ondes électromagnétiques à partir de considérations théoriques avant même qu'elles n'aient été observées.[5] Vous vous questionnez à savoir si on peut également arriver à des équations d'ondes pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en utilisant plutôt les relations constitutives impliquant $\vec{P}$ et $\vec{M}$ (éqs. (5) et (6)) ainsi que des identités vectorielles de façon semblable à ce qui est fait pour les milieux linéaires, homogènes et isotropes. On vous demande de faire les développements pour arriver aux équations dans ce cas et de comparer ces équations avec celles pour les milieux LHI, notamment de comparer les termes sources.

À partir des équations de Maxwell homogènes, soient les équations (2) et (3) qui n'ont pas de termes sources (c.à.d. qui ont des termes nuls à droite des égalités) et en utilisant des identités du calcul vectoriel, on peut définir un potentiel vecteur $\vec{A}$ et un potentiel scalaire φ de telle sorte qu'on puisse écrire $\vec{B}$ et $\vec{E}$ en termes de ces potentiels [6] comme suit :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{7}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{8}$$

où $\nabla\varphi$ est le gradient du potentiel scalaire (∇ est l'opérateur gradient). On vous demande de montrer comment on arrive à ces équations et de donner les justificatifs associés. On remarquera que dans le cas stationnaire (c.à.d. charges et courants constants dans le temps, donc champs également constants dans le temps), $\vec{A}$ ne dépendra pas du temps et donc $\partial\vec{A}/\partial t = \vec{0}$ et ainsi φ devient alors le potentiel électrique usuel qui est alors plutôt dénoté V (p. ex. c'est ce potentiel qui est utilisé en théorie des circuits).

Noter que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ contiennent en tout six composantes (trois chacun). Les éqs. (7) et (8) montrent qu'on peut écrire $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en termes de quatre quantités, soient les trois composantes de $\vec{A}$ et le scalaire φ. On a vu qu'il est possible d'arriver à des équations d'ondes pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Or, comme $\vec{E}$ et $\vec{B}$ peuvent s'écrire en termes de $\vec{A}$ et φ, on doit pouvoir arriver à des équations pour $\vec{A}$ et φ. Montrer que si on utilise la condition suivante sur les potentiels :

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

[4] Les équations d'ondes étaient connues bien avant la théorie électromagnétique, car on en retrouve aussi en mécanique; p. ex. c'est ce type d'équation qui décrit la corde vibrante d'un instrument de musique.

[5] On a ici un exemple d'une théorie, soit la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme, qui non seulement arrivait à décrire tout ce qui était connu à l'époque de Maxwell des phénomènes électromagnétiques, donc qui était une théorie descriptive, mais qui a aussi été une théorie prédictive avec la prédiction d'un phénomène jamais observé auparavant, soit les ondes électromagnétiques. C'est là une caractéristique d'une théorie physique forte, à savoir que non seulement elle soit descriptive, mais qu'elle puisse également prédire des phénomènes nouveaux et faire avancer les connaissances et la science.

[6] L'utilisation de potentiels simplifie souvent la résolution de problèmes en électromagnétisme. L'exemple le plus simple est le potentiel électrique. Celui-ci permet de résoudre tous les problèmes d'électrostatique avec une simple fonction scalaire (ou champ scalaire) plutôt qu'avec le champ électrique qui est un champ vectoriel à trois composantes. Lorsque requis, le champ électrique peut par la suite être obtenu simplement comme le gradient du potentiel électrique, c.à.d. $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Comme il est beaucoup plus facile de travailler avec des fonctions et équations scalaires, il y a alors un grand gain.

appelée condition de Lorentz, on arrive alors à des équations relativement simples pour $\vec{A}$ et φ qui sont aussi des équations d'ondes. Commenter sur les termes sources de ces équations et comparer ces termes sources à ceux des équations d'ondes pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$. En outre, montrer que l'équation de continuité de la charge peut-être obtenue à partir des équations d'onde pour $\vec{A}$ et φ et de la condition de Lorentz. En d'autres mots, les équations d'ondes obtenues pour les potentiels $\vec{A}$ et φ sont compatibles avec l'équation de continuité de la charge lorsque la condition de Lorentz est prise en compte.

On note que l'éq. (7) ne définit pas le potentiel vecteur de façon unique. En effet, si on ajoute à $\vec{A}$ le gradient d'une fonction quelconque χ, étant donné que le rotationnel d'un gradient est nul, on obtiendra le même champ magnétique $\vec{B}$. Plus explicitement, le potentiel vecteur $\vec{A}'$ donné par

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \tag{10}$$

est tout aussi valide que $\vec{A}$. En faisant ce changement pour $\vec{A}$, on doit toutefois aussi faire un changement à un nouveau potentiel scalaire φ' donné par

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}. \tag{11}$$

Montrer qu'effectivement avec $\vec{A}'$ et φ', tels que définis aux éqs. (10) et (11) on réobtient bien les mêmes champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Aussi, en supposant que $\vec{A}$ et φ satisfont la condition de Lorentz, donner une équation à laquelle χ doit obéir afin que $\vec{A}'$ et φ' satisfassent aussi la condition de Lorentz. De quelle type est cette équation? Le passage des potentiels $(\vec{A}, \varphi)$ aux potentiels $(\vec{A}', \varphi')$ par l'entremise d'une fonction χ tel qu'exprimé aux éqs. (10) et (11) s'appelle une transformation de jauge. De telles transformations de jauge jouent un rôle important dans les théories physiques des interactions fondamentales de la nature, mais ont aussi des applications pratiques.[7]

φ = Phi

∇ = Nabla

χ = Chi

[7]Un exemple d'application est le cas dans lequel il n'y a pas de charges. On peut alors choisir χ de sorte que φ' soit nul en prenant $\chi(\vec{r}, t) = \int \mathrm{d}t\, \varphi(\vec{r}, t)$ (intégrale indéfinie de φ par rapport à la variable temporelle; on voit alors de l'éq. (11) que φ' sera nul). On réduit ainsi le problème au seul potentiel vecteur, c.à.d. que tous les champs peuvent alors être exprimés en terme du potentiel vecteur $\vec{A}'$, soit en termes de trois quantités seulement. On peut montrer que seules deux de ces trois quantités sont indépendantes. Donc, dans ce cas, tout le champ électromagnétique ne dépend que de deux quantités indépendantes, ce qui est peu quand on considère qu'initialement on est parti de 12 quantités!

6 Connaissances nouvelles à acquérir

6.1 GEL355 - Calcul différentiel et intégral multivariable et vectoriel

6.1.1 Connaissances déclaratives : QUOI

- **Calcul différentiel multivariables**
  - Définition des dérivées partielles et interprétation géométrique
  - Différentielle totale
  - Dérivée totale
  - Dérivation en chaîne
  - Dérivée directionnelle
  - Gradient
  - Dérivées partielles d'ordres supérieurs
  - Extréma d'une fonction, points critiques
- **Systèmes de coordonnées orthogonales**
  - Coordonnées cartésiennes dans le plan et l'espace
  - Coordonnées polaires dans le plan
  - Coordonnées cylindriques dans l'espace
  - Coordonnées sphériques dans l'espace
- **Courbes dans le plan et l'espace (trajectoires)**
  - Représentation paramétrique du vecteur position d'une courbe
  - Vecteur tangent (vecteur vitesse) à une courbe en un point (dérivée du vecteur position en ce point)
  - Courbes fermées
- **Surfaces dans l'espace**
  - Représentations d'une surface dans l'espace
    - comme graphe d'une fonction de deux variables ; notion de courbes de niveau
    - comme fonction implicite à partir d'une fonction de 3 variables
    - de façon paramétrique
  - Vecteur normal et droite normale à une surface en un point
  - Plan tangent à une surface en un point
- **Champs scalaires et vectoriels**
  - Définitions
  - Tracé d'un champ scalaire, courbes/surfaces de niveau
  - Tracé d'un champ de vecteurs, lignes de champ (aussi appelées courbes intégrales) d'un champ de vecteurs
- **Calcul intégral multivariables**
  - Intégrations partielles et successives
  - Intégrales doubles
    - Évaluation d'une intégrale double
    - Calcul d'aires planes
    - Calcul de volumes sous un graphe
    - Changements de variables d'intégration dans une intégrale double
  - Intégrales triples

    * Calcul de volumes
    * Changements de variables d'intégration dans une intégrale triple

- **Intégrales curvilignes**
  - Intégrale d'une fonction scalaire le long d'une courbe
  - Intégrale curviligne (ou de parcours) et travail fait par une force, circulation
  - Indépendance du parcours (ou chemin) et lien avec le gradient
- **Intégrales sur des surfaces**
  - Intégrale d'une fonction scalaire sur une surface
  - Intégrale de surface, flux
- **Analyse vectorielle**
  - Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface
  - Divergence d'un champ de vecteurs
  - Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe
  - Rotationel d'un champ de vecteurs
  - Identités pour les opérateurs différentiels vectoriels (gradient, divergence et rotationel)
  - Théorèmes intégraux de l'analyse vectorielle
    * Théorème de la divergence
    * Théorème de Stokes

6.1.2 Connaissances procédurales : COMMENT

- Calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables
- Calculer la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables
- Calculer la dérivée totale d'une fonction de plusieurs variables
- Appliquer la formule de dérivation en chaîne
- Calculer la dérivée directionnelle d'une fonction en un point
- Trouver les points extréma d'une fonction
- Calculer le gradient d'une fonction (ou champ) scalaire
- Calculer des intégrales doubles ou triples
- Calculer des aires et volumes avec des intégrales doubles ou triples
- Changer de variables dans une intégrale double ou triple
- Passer d'un système de coordonnées à un autre
- Trouver une représentation paramétrique à une courbe dans le plan ou l'espace
- Calculer le vecteur tangent à une courbe en un point
- Trouver une représentation paramétrique à une surface
- Calculer le vecteur normal à une surface en un point
- Déterminer l'équation du plan tangent à une surface en un point
- Représenter un champ scalaire
- Calculer et tracer les courbes de niveau (2D) ou surfaces de niveau (3D) d'un champ scalaire
- Représenter un champ vectoriel
- Calculer et tracer les lignes de champ (aussi appelées courbes intégrales) d'un champ de vecteurs
- Calculer la divergence d'un champ vectoriel
- Calculer le rotationel d'un champ vectoriel
- Calculer une intégrale curviligne (aussi appelée intégrale de ligne)
- Déterminer si une intégrale le long d'un parcours entre deux points dépend du choix du parcours

- Calculer une intégrale de surface
- Calculer le flux d'un champ de vecteurs passant à travers une surface
- Calculer la circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

6.1.3 Connaissances conditionnelles : QUAND / POURQUOI

- Choisir et utiliser un système de coordonnées approprié à un problème donné
- Utiliser les propriétés spécifiques du gradient, de la divergence et du rotationnel pour simplifier des problèmes de calcul vectoriel
- Utiliser les outils de calcul vectoriel dans le cadre de problèmes d'électromagnétisme
- Utiliser le théorème de la divergence pour calculer un flux
- Utiliser le théorème de Stokes pour calculer une circulation
- Utiliser une table d'identités vectorielles

7 Guide de lecture

La présente section donne les références essentielles à consulter. Il est nécessaire de faire toutes les lectures demandées et au moment demandé afin de bien réussir cette unité.

7.1 Références essentielles à consulter

Note : Tous les documents PDF énumérés dans ce qui suit sont disponibles sur la page WEB de l'unité.

- ***Notes de cours de Yves Bérubé-Lauzière (YBL) sur le calcul différentiel et intégral***
  (fichier 00-A_NotesDeCours_YBL_CalcDiff-Integ.pdf)
- ***Notes de YBL sur les vecteurs et la géométrie vectorielle***
  (fichier 00-B_NotesDeCours_YBL_VectGeomVect_PourAnalyseVecto.pdf)
- ***Notes de cours de YBL sur les nombres complexes***
  (fichier 00-C_NotesDeCours_YBL_NbComplexes.pdf)
- ***Sections du livre de Gilles Ouellet, Calcul 3***, Éditions Le Griffon d'Argile
  - Sections portant sur le calcul différentiel à 2 et 3 variables
    (fichier 01_Ouellet-Calcul_3_Deriv2-3Vars.PDF)
  - Sections portant sur le calcul intégral à 2 et 3 variables
    (fichier 02_Ouellet-Calcul_3_Integ2-3Vars.PDF)
- ***Chapitres du livre de Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics***, *9th Edition*, Wiley, 2006, ISBN 978-0-471-48885-9
  - Chap. 9, ***Vector Differential Calculus, Grad, Div, Curl***
    (fichier 03_Kreyszig9thEd_Chap09_VectDiffCalculus.PDF)
  - Chap. 10, ***Vector Integral Calculus, Integral Theorems***
    (fichier 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF)
- ***Notes de cours de YBL sur les systèmes de coordonnées orthogonales***
  (fichier 05_NotesDeCours_YBL_SystCoordOrtho.pdf)
- ***Notes de cours de YBL sur l'élément d'aire d'une surface paramétrée***
  (fichier 06_NotesDeCours_YBL_ElemAireSurface.pdf)
- ***Notes de cours de YBL sur les lignes de champ d'un champ de vecteurs***
  (fichier 06-A_NotesDeCours_YBL_LignesChampVecteurs.pdf)
- ***Notes de cours de YBL sur les changements de variables dans les intégrales multiples***
  (fichier 07_NotesDeCours_YBL_ChangeVarIntegMultiples.pdf)
- ***Notes de cours de YBL sur le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface***
  (fichier 09_NotesDeCours_YBL_FluxVectorField.pdf)
- ***Parties du livre de Paul Lorrain, Dale P. Corson, François Lorrain, en français et en anglais***, (français : Les phénomènes électromagnétiques, Dunod ; anglais : Electromagnetic Fields and Waves, 4th Edition, Freeman)
  - ***Chap. 1, Opérateurs vectoriels***
    (fichier 10_Corson-Lorrain_Chap1-OperateursVecto.PDF)
  - ***Formulaire, Vector definitions, identities and theorems***
    (fichier 11_Corson-Lorrain_FrontCover_VectorIdentitiesThms.PDF)
- ***Notes de cours de YBL sur la théorie électromagnétique - Équations de Maxwell***
  (fichier 13_NotesDeCours_YBL_EM-Maxwell-Ondes.pdf)

7.2 Séquences des lectures

7.2.1 Lectures de révision *à faire avant de débuter l'unité*

Cette unité d'APP suppose que vous êtes très à l'aise avec les notions fondamentales énumérées ici-bas et les calculs qui y sont associés :

- fonction d'une variable (ou à une variable) : définition, graphe d'une fonction ;
- dérivée d'une fonction à une variable ;
- introduction aux dérivées partielles ;
- intégrale définie et indéfinie d'une fonction à une variable ;
- les vecteurs et les opérations produit scalaire et produit vectoriel), identités vectorielles (pour les produits scalaire et vectoriel).

Il vous est aussi recommandé de réviser les notions suivantes qui vous seront utiles au cours de la sessions (mais qui sont moins importantes pour l'APP1) :

- développement en série de MacLaurin et Taylor d'une fonction à une variable ;
- les nombres complexes.

Il vous est demandé de vous assurer que cela est bien le cas. À cette fin, il vous faut **faire, avant de commencer l'APP, les lectures qui suivent** (les documents sur ces sujets sont fournis sur la page WEB de l'unité). **Pour ceux qui se sentent chancelants, ne prenez pas pour acquis que vous vous débrouillerez pendant l'APP et n'attendez pas pendant l'APP pour réviser ces notions, car il sera alors trop tard.**

Lectures à faire :

- 00-A_NotesDeCours_YBL_CalcDiff-Integ.pdf, lire au complet (fonctions, calcul différentiel et intégral)
- 00-B_NotesDeCours_YBL_VectGeomVect_PourAnalyseVecto.pdf, lire au complet (vecteurs et géométrie vectorielle)
  Facultatif : 03_Kreyszig9thEd_Chap09_VectDiffCalculus.PDF, sections 9.1 à 9.3
- 00-C_NotesDeCours_YBL_NbComplexes.pdf, au complet (nombres complexes)

Des exercices de révision sur les notions précédentes sont fournis sur la page WEB de l'unité.

7.2.2 Lectures devant être effectuées pour le procédural 1

Note : Les pages données dans les lectures réfèrent aux numéros de pages apparaissant dans les livres ou notes de cours.

Partie 1 : Calcul différentiel à plusieurs variables

Les lectures qui suivent sont toutes dans 01_Ouellet-Calcul_3_Deriv2-3Vars.PDF :

- Sect. 2.4 pp. 68-71, Sect. 2.6 pp. 72-73 (définition des dérivées partielles et interprétation géométrique)
- Sect 2.7, pp. 73-78 (différentielle totale)
- Sect. 2.8, pp. 79-82 (dérivée totale)

- *Facultatif* : Sect. 2.10, pp. 84-90 (dérivation des fonctions implicites)
- Sect. 2.11, pp. 91-93 (dérivation en chaîne)
- Sect. 2.13, pp. 95-108 (dérivée directionnelle, gradient)
- Sect. 2.14, pp. 108-111 (dérivées partielles d'ordre supérieur)
- Sect. 2.17, pp. 120-127 (extréma d'une fonction, points critiques)

Partie 2 : Systèmes de coordonnées orthogonales

- 05_NotesDeCours_YBL_SystCoordOrtho.pdf, au complet
- 11_Corson-Lorrain_FrontCover_VectorIdentitiesThms.PDF, regarder les expressions pour le gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

7.2.3 Lectures devant être effectuées pour le procédural 2

Partie 1 : Courbes dans le plan et l'espace (trajectoires)

- 03_Kreyszig9thEd_Chap09_VectDiffCalculus.PDF), Sect. 9.5, pp.389-394 - arrêter à l'équation 13 (courbes dans l'espace)

Partie 2 : Surfaces dans l'espace

- 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF, Sect. 10.5, pp. 445-448 (surfaces dans l'espace)
- 06_NotesDeCours_YBL_ElemAireSurface.pdf, au complet (élément d'aire sur une surface)
- 01_Ouellet-Calcul_3_Deriv2-3Vars.PDF, Sect. 2.16 pp. 114-119 (plan tangent et droite normale à une surface)

Partie 3 : Champs scalaires et vectoriels

- 03_Kreyszig9thEd_Chap09_VectDiffCalculus.PDF, Sect. 9.4, pp. 384-388 (définitions des champs scalaires et vectoriels)
- 06-A_NotesDeCours_YBL_LignesChampVecteurs.pdf, au complet (lignes de champ d'un champ de vecteurs)

7.2.4 Lectures devant être effectuées pour le procédural 3

Partie 1 : Calcul intégral à plusieurs variables

Les lectures qui suivent sont toutes dans 02_Ouellet-Calcul_3_Integ2-3Vars.PDF (désigné par Ouellet), sauf si autrement spécifié. :

- Ouellet, Sect. 3.0 et 3.1, pp.139-145 (introduction aux intégrales multiples et intégrations partielles et successives)
- Ouellet, Sect. 3.2, pp. 145-149 (intégrale double)
- Ouellet, Sect. 3.3, pp.149-159 (évaluation d'une intégrale double)
- Ouellet, Sect. 3.4 et 3.5, pp.163-171 (calcul d'aires planes et de volumes sous un graphe)
- *Facultatif :* 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF, Sect. 10.3, pp.433-438 (revue des intégrales doubles)
- Ouellet, Sect. 3.12, pp.202-211 (intégrale triple)

- 07_NotesDeCours_YBL_ChangeVarIntegMultiples.pdf, au complet, (changements de variables dans les intégrales multiples)

Partie 2 : Intégrales le long de courbes

- 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF : Sect. 10.1 pp.420-425 (travail fait par une force et intégrale de ligne) [et 10.2, 426-432 (indépendance du chemin)]

7.2.5 Lectures devant être effectuées pour le procédural 4

Partie 1 : Indépendance du chemin

- 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF : Sect. 10.2, pp. 426-432 (indépendance du chemin)

Partie 2 : Intégrales sur des surfaces

- 04_Kreyszig9thEd_Chap10_VectIntegCalculus.PDF, Sect. 10.6, pp.449-456 (intégrale de surface)

Partie 3 : Analyse vectorielle

- 09_NotesDeCours_YBL_FluxVectorField.pdf, au complet (flux d'un champ de vecteurs à travers une surface)
- 10_Corson-Lorrain_Chap1-OperateursVecto.PDF :
  - Divergence d'un champ de vecteurs, Sect. 1.4, pp. 5-7
  - Théorème de la divergence, Sect. 1.5, p. 7
  - Rotationnel d'un champ de vecteurs, Sect. 1.7, pp. 8-10
  - Théorème de Stokes, Sect. 1.8, pp. 11-12
  - Opérateur laplacien, Sect. 1.9, p. 12
  - 11_Corson-Lorrain_FrontCover_VectorIdentitiesThms.PDF, regarder les identités vectorielles pour les opérateurs vectoriels présentées dans la colonne de droite

Partie 4 : Ondes et équations de Maxwell

Note : Vous n'avez pas besoin de faire les lectures qui suivent pour le procédural 4, car elles concernent plus la résolution de la problématique que le procédural en tant que tel ; toutefois, vous en aurez besoin pour résoudre la problématique. Toutes les notions vues précédemment dans l'APP vous permettront de comprendre ces lectures.

- 13_NotesDeCours_YBL_EM-Maxwell-Ondes.pdf

7.3 Références complémentaires

Il s'agit ici de documentation complémentaire non-obligatoire. Les références citées ici pourraient vous être utiles au cours de vos études ou votre carrière d'ingénieur. Les notions contenues dans ces références ne seront pas évaluées lors des examens.

- *Notes de cours de YBL sur les angles solides*
  (fichier 08_NotesDeCours_YBL_AnglesSolides.pdf)

- *Notes de cours de YBL sur les phénomènes ondulatoires*
  (fichier 12_NotesDeCours_YBL_PhenomOndul.pdf)

8 Sommaire des activités

Semaine 1

- Tutorat 1
- Étude personnelle et exercices
- Procédural 1
- Procédural 2
- Procédural 3

Semaine 2

- Étude personnelle et exercices
- Procédural 4
- Consultation facultative
- Rédaction du rapport d'APP
- Remise des livrables
- Tutorat 2
- Examen formatif
- Consultation facultative
- Examen sommatif

9 Santé et sécurité

Dans le cadre de la présente activité, vous êtes réputé avoir pris connaissance des politiques et directives concernant la santé et la sécurité. Ces documents sont disponibles sur les sites WEB de l'Université de Sherbrooke, de la Faculté de génie et du Département. Les principaux sont mentionnés ici et sont disponibles dans la section Santé et sécurité du site WEB du Département :
https://www.gel.usherbrooke.ca/santesecurite/

- Politique 2500-004 : Politique de santé et sécurité en milieu de travail et d'études
- Directive 2600-042 : Directive relative à la santé et à la sécurité en milieu de travail et d'études
- Sécurité en laboratoire et atelier au Département de génie électrique et de génie informatique

10 Politiques et règlements

Dans le cadre de la présente activité, vous êtes réputés avoir pris connaissance des politiques, règlements et normes d'agrément suivants.

Règlements de l'Université de Sherbrooke

- Règlement des études : https://www.usherbrooke.ca/registraire/

Règlements facultaires

- Règlement facultaire d'évaluation des apprentissages / Programmes de baccalauréat

- Règlement facultaire sur la reconnaissance des acquis

Normes d'agrément

- Informations pour les étudiants au premier cycle : https://www.usherbrooke.ca/genie/etudiants-actuels/au-baccalaureat/bcapg
- Informations sur l'agrément : https://engineerscanada.ca/fr/agrement/a-propos-de-l-agrement

Si vous êtes en situation de handicap, assurez-vous d'avoir communiqué avec le *Programme d'intégration des étudiantes et étudiants en situation de handicap* à l'adresse de courriel :
prog.integration@usherbrooke.ca

11 Intégrité, plagiat et autres délits

Dans le cadre de la présente activité, vous êtes réputé avoir pris connaissance de la déclaration d'intégrité relative au plagiat : https://www.usherbrooke.ca/ssf/antiplagiat/jenseigne/declaration-dintegrite/

12 Activités de l'unité

12.1 Formation à la pratique procédurale 1

12.1.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

12.1.2 Exercices proposés

Partie 1 : Calcul différentiel à plusieurs variables

Différentielle totale

Exercice 1. Calculer la différentielle totale de $\frac{x}{z}e^{\sin(xy)}$. Que signifie la différentielle totale en général ?

Dérivée totale

Exercice 2. Soit $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4$. On considère que x et y dépendent à leur tour d'une troisième variable t de la façon suivante : $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$.

a) Si on trace les points correspondant à $(x(t), y(t))$ dans le plan, quel lieu géométrique cela représente-t-il ?
b) Calculer la dérivée totale de f par rapport à t lorsque x et y dépendent de t tel que spécifié. Expliquer le résultat à l'aide d'un graphe de f.

Dérivation en chaîne

Exercice 3. On a vu la dérivée totale d'une fonction (on avait une fonction $f(x,y)$ et on considérait que x et y étaient elles-mêmes des fonctions d'une autre variable t qu'on pourrait considérer comme le temps et dans ce cas $x(t)$ et $y(t)$ décriraient le déplacement bi-dimensionnel d'un objet). On avait alors

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

On suppose maintenant que x et y dépendent de deux variables, disons u et v, au lieu d'une seule. Donc $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$. Alors, en supposant v constant, on peut considérer x et y comme dépendant de la seule variable u.

a) Écrire dans ce cas une équation pour $\frac{\partial f}{\partial u}$. Faites de même pour v. Note : Vous avez ainsi démontré la règle de dérivation en chaîne.
b) On suppose maintenant que f soit une fonction de x, y et z et que ces dernières dépendent de deux autres variables u et v. Donner les expressions pour $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$. Note : Ceci sera utile lorsqu'on

considérera des surfaces, car un vecteur position $\vec{r}$ qui dépend de deux variables u et v (donc $\vec{r}(u,v)$) définit la forme paramétrique d'une surface dans l'espace. Les variables u et v sont les paramètres de cette surface.

Dérivée directionnelle, gradient et extréma d'une fonction

Exercice 4. La température dans une pièce est décrite par la fonction $T(x,y,z) = -(x^2+y^2+z^2)+4x+8y+2z+11$ (une telle fonction température est un exemple d'un champ scalaire, c.à.d. à chaque point est associée une température). Supposons que vous êtes au point $(x,y,z) = (2,6,1)$.

a) Quel est le taux de variation de la température dans la direction spécifiée par le vecteur $\vec{v} = (1,1,1)$?
b) Dans quelle direction devez-vous vous déplacer afin que ce soit plus frais le plus rapidement possible ?
c) Trouver le point (x,y,z) où la température atteint son maximum et donnez la valeur de ce maximum.

Exercice 5. Le potentiel électrique d'une charge ponctuelle de valeur q située en $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est donné par

$$V(\vec{r}) = V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{||\vec{r}-\vec{r}_0||} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}},$$

où ε_0 est une constante appelée la permittivité du vide. Calculer le champ électrique $\vec{E}$. Note : Le champ électrique est donné par moins le gradient du potentiel ; on verra cela à l'APP 2.

Partie 2 : Systèmes de coordonnées orthogonales

Exercice 6. Trouver les coordonnées sphériques du point ayant pour coordonnées cartésiennes $(-2,2,-3)$.

Exercice 7. Le potentiel électrique d'un dipôle électrique orienté selon l'axe z (c.à.d. la droite reliant les deux charges est selon l'axe z) est à une grande distance du dipôle donné en coordonnées sphériques par

P. 14 Corson - Lorrain

$$V = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

où q est la valeur de chacune des charges en valeur absolue (les charges sont de signes opposés), a est la distance entre les charges et ε_0 est la permittivité du vide (à une grande distance du dipôle signifie que $r \gg a$). Calculer le champ électrique $\vec{E}$. Indice : Il est évidemment préférable d'utiliser ici l'expression du gradient en coordonnées sphériques.

Partie 3 : Identités vectorielles

Exercice 8. Démontrer l'identité vectorielle suivante :

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

12.2 Formation à la pratique procédurale 2

12.2.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

12.2.2 Exercices proposés

Partie 1 : Courbes dans le plan et l'espace (trajectoires)

Exercice 1. Paramétrisation de courbes

[…, …, …] [x(t), y(t), z(t)]

(a) Donner une représentation paramétrique du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (ceci est le pourtour d'un disque de rayon 1 centré à l'origine).
(b) Donner une représentation paramétrique du disque d'équation $x^2+y^2 \leq 1$ (ceci est la région contenue à l'intérieur du cercle de rayon 1).
(c) Donner une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Indice : Inspirez vous de (a).
(d) Donner une représentation paramétrique de la courbe dans le plan associée au graphe d'une fonction $f(x)$.

Exercice 2. La position d'une particule dans l'espace en fonction du temps t est donnée par le vecteur $\vec{r}(t) = (4\cos t, 3\sin t, t)$.

décrire graphique

(a) Décrivez géométriquement la trajectoire suivie par la particule. Indice : Considérez d'abord ce qui se passe en x et y et utilisez que $\cos^2 + \sin^2 = 1$.
(b) Quel est le vecteur vitesse de la particule au temps $t = 0$ et quelle est sa vitesse ?

Exercice 3. Soient $\vec{v}(t)$ et $\vec{w}(t)$ deux vecteurs de l'espace qui dépendent d'un paramètre t.

(a) Donner une formule pour $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{v}(t) \cdot \vec{w}(t)\big)$.
(b) Donner une formule pour $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\vec{v}(t) \times \vec{w}(t)\big)$.

Note : Les formules que vous obtenez montrent que la structure de la règle de dérivation d'un produit de deux fonctions vue en calcul différentiel élémentaire s'applique aux produits scalaire et vectoriel de deux vecteurs. On montre aussi aisément qu'on a des formules semblables lorsqu'on prend la différentielle d'un produit scalaire ou vectoriel de vecteurs, à savoir on a $\mathrm{d}\big(\vec{v}\cdot\vec{w}\big) = \big(\mathrm{d}\vec{v}\big)\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\big(\mathrm{d}\vec{w}\big)$ et $\mathrm{d}\big(\vec{v}\times\vec{w}\big) = \big(\mathrm{d}\vec{v}\big)\times\vec{w} + \vec{v}\times\big(\mathrm{d}\vec{w}\big)$. Ces relations pour les différentielles sont utiles dans certains cas en électromagnétisme.

Partie 2 : Surfaces dans l'espace

Exercice 4. Paramétrisation de surfaces et volumes contenus à l'intérieur de surfaces

(a) Paramétriser la surface d'une sphère de rayon a centrée à l'origine (c.à.d. en $(0,0,0)$). Quel type de coordonnées est-il naturel d'utiliser pour cela ?

(b) Paramétriser la surface d'une sphère de rayon a centrée au point (x_0, y_0, z_0).
(c) Paramétriser la portion située dans le premier octant de la surface d'une sphère de rayon a centrée à l'origine.
(d) Paramétriser la portion située dans le premier octant du volume d'une sphère de rayon a centrée à l'origine.
(e) Soit un cône de révolution autour de l'axe des z avec apex (pointe du cône) à l'origine et s'évasant vers le haut (c.à.d. vers les z positifs) ; le demi-angle à l'apex du cône est α. Faire un dessin de ce cône et paramétriser la surface de révolution de ce cône entre son apex et la hauteur $z = c$. Quel types de coordonnées sont utiles pour cet exercice ?
(f) Paramétriser le volume contenu à l'intérieur du cône spécifié en (e) entre l'apex et $z = c$.

Exercice 5. Une fourmi est contrainte de se déplacer sur une surface dans l'espace spécifiée par la forme paramétrique suivante du vecteur position : $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u, u^2 - v, u + v^2)$. La fourmi se trouve au point pour lequel $(u, v) = (0, 0)$.

a) Donnez deux directions indépendantes possibles en $(u, v) = (0, 0)$ dans lesquelles la fourmi peut aller (il s'agit de directions tangentes à la surface en ce point).
b) La fourmi désire regarder selon la direction normale à la surface en $(u, v) = (0, 0)$. Donnez un vecteur unitaire dans cette direction.
c) Calculez l'équation de la droite normale à la surface en $\vec{r}(1, 1)$ (c.à.d. $(u, v) = (1, 1)$).
d) Calculez l'équation du plan tangent à la surface en $\vec{r}(1, 1)$.
e) Dans l'espace tridimensionnel dans lequel la surface est plongée, il fait une température donnée par la distribution suivante : $T(x, y, z) = 2(x-1)^2 + (y-1) + (z-1)$. La fourmi a chaud. Elle aimerait savoir en quel point de la surface sur laquelle elle se trouve il fait le plus frais. Donnez-lui les valeurs de u et v de ce point ainsi que les coordonnées (x, y, z) de ce point et la température en ce point.

Exercice 6. Faire exercice 20, Sect. 10.5, p.449 dans Kreyszig. *Le tuteur fera cet exercice avec les étudiants. Il s'agit ici d'une surface sous forme du graphe d'une fonction. Le cas présent est l'analogue pour une surface au cas d'une courbe associée au graphe d'une fonction.*

Exercice 7. On est sur une portion de la terre où la topographie peut être modélisée par la fonction hauteur suivante : $z = h(x, y) = \sin(x)\sin(y) + 1$. Le pilote d'un engin spatial veut décoller dans la direction de la normale à la surface de la terre au point $(x, y) = (\pi/4, \pi/2)$. Dans quelle direction s'envolera-t-il ?

Exercice 8. Soit une surface définie de façon implicite par $F(x, y, z) = 0$ et une courbe $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sur cette surface (on ne donne pas la forme explicite de cette courbe, mais on suppose qu'elle est contenue dans la surface). Soit un point P sur la surface par lequel la courbe passe (on supposera $P = \vec{r}(t_0)$). Montrez avec la dérivée totale et l'équation $F(x, y, z) = 0$ que le gradient de F (ici F est vue comme une fonction de 3 variables) est perpendiculaire au vecteur tangent à la courbe en ce point. Note : Ceci signifie qu'en tout point de la surface, le gradient est perpendiculaire à la surface à ce point, car ce qui vient d'être démontré est vrai pour toute courbe contenue dans la surface, donc tout vecteur tangent à cette surface.

Partie 3 : Champs scalaires et vectoriels

Champs scalaires

Exercice 9. Tracer les isothermes (courbes de température constante T) du champ de température suivant dans le plan : $T(x, y) = 2x - y$.

Exercice 10. Décrire les surfaces de niveau $f(x,y,z) = \text{const.}$ de la fonction $f(x,y,z) = 9x^2+4y^2+25z^2$?

Champs vectoriels

Notions théoriques sur les lignes de champ qui ne sont pas couvertes dans les lectures : On traite d'abord des lignes de champ pour un champ vectoriel dans le plan. Les notions se généraliseront aisément au cas de l'espace. Dans ce qui suit $\vec{r}$ désigne le vecteur position d'un point arbitraire dans le plan, $\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \equiv (x,y)$. Par définition, une *ligne de champ* pour un champ de vecteurs $\vec{v}(\vec{r}) = v_x(x,y)\hat{e}_x + v_y(x,y)\hat{e}_y$ est une *courbe dont le vecteur tangent en tout point de cette courbe est proportionnel au champ de vecteur en ce point.* Dit autrement, le vecteur vitesse à une courbe représentant une ligne de champ est proportionnel au champ de vecteur en tout point le long de la courbe.

De façon qualitative, pour tracer une ligne de champ passant par un point $\vec{r}_0$, on trace à partir de ce point un petit segment (à la limite infinitésimal, mais en pratique de longueur finie petite), qu'on dénote $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}x\hat{e}_x + \mathrm{d}y\hat{e}_y$ dont la direction est la même que celle de $\vec{v}$ en ce point (en pratique on prend $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{e}_x + \Delta y\hat{e}_y$). Ensuite, au bout de ce segment, on a un nouveau point et on recommence, on trace à partir de ce nouveau point un petit segment, etc. On construit ainsi de proche en proche la ligne de champ passant par un point $\vec{r}_0$. Pour tracer une autre ligne de champ, on prend un nouveau point $\vec{r}_0$ qui n'est pas sur une ligne de champ déjà tracée et on répète le processus. De façon imagée, on trace les lignes de champ à l'aide de courbes qui suivent naturellement les lignes de champ.

De façon plus mathématique, soit $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$ une paramétrisation d'une courbe correspondant à une ligne de champ. Puisque $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ est le vecteur tangent à cette courbe, on doit donc avoir par définition d'une ligne de champ que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lambda\vec{v}(\vec{r}), \tag{12}$$

où λ est une constante. Comme λ est une constante, on peut redéfinir le paramètre de la courbe et plutôt utiliser $s = \lambda t$ (on aurait aussi pu prendre $\lambda = 1$ directement dès le départ). On aura alors l'équation différentielle vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \vec{v}(\vec{r}).$$

Cette dernière équation, qu'on peut considérer comme une définition mathématique définissant les lignes de champ, est l'*équation différentielle des lignes de champ.* En composantes, on a alors

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v_x(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = v_y(x,y),$$

qui est un *système d'équations différentielles.*[8] *La solution aux équations différentielles des lignes de champ donne les équations des lignes de champ.* Ce système est en général couplé, c.à.d. qu'on ne peut pas ré-

[8]De façon plus générale, noter qu'à l'éq. (12), λ pourrait être une fonction de $\vec{r}$ ($\lambda = \lambda(\vec{r}) = \lambda(x,y)$), mais cela rend les choses plus compliquées et avec une constante qu'on peut ultimement prendre égale à 1, de toute façon, cela définit les lignes de champ, c.à.d. on peut définir les lignes de champ par l'éq. précédente. Cette définition des lignes de champ n'est ainsi pas unique, car on aurait pu choisir toute fonction de $\vec{r}$ devant $\vec{v}$ dans la définition et il y a une infinité de choix pour cette fonction. On note que lorsqu'on calcule de rapport $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}s)/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s) = v_y/v_x$, alors la fonction arbitraire disparaît. Donc, on pourrait définir des lignes de champ par $(x, y(x))$ ou $(x(y), y)$ et alors il n'y a plus de constante. le choix $y = y(x)$ mène à la méthode des isoclines pour tracer les courbes intégrales et donc résoudre graphiquement le système d'équations différentielles.

soudre indépendemment les équations pour x et y, car les composantes v_x et v_y de $\vec{v}$ dépendent généralement à la fois de x et de y tel que les équations l'indiquent. Une ligne de champ est aussi appelée une *courbe intégrale*, car elle correspond à résoudre ce système d'équations différentielles, donc à « trouver les intégrales » de ce système d'équations différentielles. La solution au système d'équations différentielles des lignes de champ peut-être difficile à trouver (comme c'est généralement le cas avec des équations différentielles) et différentes techniques peuvent être utilisées. Notamment, ces équations différentielles peuvent être nonlinéaires et ne se résolvent pas avec les méthodes simples vues en S1.

Dans l'espace, les concepts précédents se généralisent aisément. On arrive alors par un raisonnement similaire au précédent aux équations différentielles suivantes

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = v_x(x, y, z),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = v_y(x, y, z),$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = v_z(x, y, z).$$

Exercice 11. Soit le champ de vecteurs $\vec{v} = -\hat{e}_x + \hat{e}_y$ dans le plan.

a) Tracer ce champ de vecteurs et le décrire qualitativement.
b) Tracer de façon qualitative les lignes de champ de ce champ de vecteurs (il faut avoir lu les notions théoriques précédentes). À quoi correspondent les lignes de champ (les décrire) ?
c) Résoudre les équations différentielles des lignes de champ pour ce champ de vecteurs (v. notions théoriques précédentes). On obtiendra ainsi des équations analytiques pour les lignes de champ. Décrire ce que représentent ces équations. On arrive ainsi à des équations correspondant à la description données en b). Note : Ici ces équations sont faciles à résoudre ; notamment elles sont découplées et chacune d'elle est une équation simple.

Exercice 12. Soit le champ de vecteurs $\vec{v} = -y\hat{e}_x + x\hat{e}_y$ dans le plan.

a) Tracer ce champ de vecteurs. À quoi correspond-il (interprétation) ?
b) Tracer de façon qualitative les lignes de champ de ce champ de vecteurs. À quoi correspondent les lignes de champ ? Cela est-il cohérent avec votre interprétation en a) ?
c) Écrire ce champ de vecteurs en coordonnées polaires. Note : Il faut aussi mettre le champ de vecteurs en termes des vecteurs unitaires des coordonnées polaires. On constatera qu'en coordonnées polaires, ce champ de vecteurs est beaucoup plus facile à interpréter.
d) [*Facultatif :* Résoudre les équations différentielles des lignes de champ pour ce champ de vecteurs. Décrire ce que représentent les équations obtenues. Cela est-il en accord avec la description donnée en b) ? Note : Ici ces équations peuvent être difficiles à résoudre, car couplées, d'où le fait que cette partie soit facultative. Noter qu'il y a des techniques pour résoudre ce type de système d'équations couplées, qui sont des équations linéaires. On ne verra toutefois pas ça ici. Cela sera vu à la session S5 sur les asservissements.]

Exercices supplémentaires (*si le temps le permet*)

Exercice 13. Tracer le champ de vecteurs correspondant au champ électrique dans l'espace d'un dipôle électrique orienté selon l'axe z de charges q séparées d'une distance a, ce champ étant donné en coordonnées sphériques par

$$\vec{E} = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta). \tag{13}$$

12.3 Formation à la pratique procédurale 3

12.3.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

12.3.2 Exercices proposés

Partie 1 : Calcul intégral à plusieurs variables

Intégrale double et son évaluation

Exercice 1. Évaluer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^3 (1+2x-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

Exercice 2. Évaluer l'intégrale double suivante sur la région R définie par les courbe frontières spécifiées

$$\iint_R (x^2+2xy+3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad R: y=0, x=3, y=x.$$

Exercice 3. En utilisant les coordonnées cartésiennes, calculer l'intégrale suivante sur la région illustrée à la figure 1.

$$\iint_R (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Note : On refera cet exercice plus loin en utilisant les coordonnées polaires.

Calcul d'aires planes et de volumes sous un graphe

Exercice 4. À l'aide d'une intégrale double, trouver l'aire de la région R décrite par les courbes frontières spécifiées ci-bas et donner une représentation graphique de cette région.

$$R: y=2x, 3y=x, x=1, x=3.$$

Exercice 5. Écrivez l'intégrale double en coordonnées cartésiennes permettant de calculer le volume d'une sphère de rayon a. Indice : Utiliser le huitième d'une sphère situé dans le premier octant du système de coordonnées cartésiennes. Pour obtenir le volume total, il suffit de multiplier par 8. Note : On ne vous demande pas d'évaluer cette intégrale ici, mais juste de l'écrire.

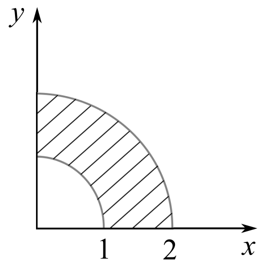

FIGURE 1. Région d'intégration pour l'exercice 3.

Intégrale triple

Exercice 6. Utiliser une intégrale triple en coordonnées cartésiennes pour calculer le volume d'une sphère de rayon a. Comparer l'intégrale que vous avez à évaluer ici avec celle de l'exercice 5 qui correspond au même volume.

Exercice 7. Évaluer l'intégrale

$$\iiint_V x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

où V est le domaine volumique à l'intérieur de la sphère centrée à l'origine de rayon a. Noter qu'ici on calcule l'intégrale d'une fonction scalaire sur un domaine volumique contenu à l'intérieur de la sphère ; on ne calcule donc pas un volume. Vous devez calculer cette intégrale à l'aide des coordonnées cartésiennes.

Exercice 8. Le moment d'inertie I par rapport à un axe donné d'un ensemble de N masses ponctuelles m_i, $i = 1,\ldots,N$ est donné par $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp,i}^2$, où $r_{\perp,i}$ est la distance perpendiculaire de la masse m_i à l'axe donné. Le moment d'inertie est un concept qui apparaît en mécanique lorsqu'on décrit le mouvement de masses qui tournent autour d'un axe donné. Dans le cas d'un corps continu plutôt qu'un ensemble de masses discrètes, on partitionne l'objet en masses infinitésimales $\mathrm{d}m = \rho_m \mathrm{d}v$, où ρ_m est la densité de masse de l'objet (en kg/m^3) et $\mathrm{d}v$ est un élément de volume. La somme précédente devient alors une intégrale sur le volume de l'objet et on a

$$I = \int_V r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int_V r_\perp^2 \rho_m \mathrm{d}v.$$

Le moment d'inertie est l'équivalent pour le mouvement de rotation à la masse pour le mouvement de translation. Plus le moment d'inertie d'une objet est grand, plus il sera difficile de le faire tourner, tout comme plus la masse d'un objet est grande, plus il sera difficile de mettre en mouvement cet objet.

a) Calculer le moment d'inertie d'une sphère de rayon a et de densité de masse volumique qui croit avec le rayon selon $\rho_m = r\frac{\rho_{max}}{a}$ pour un axe qui passe par le centre de cette sphère (ici ρ_{max} est une constante). Quel système de coordonnées est-il préférable d'utiliser pour ce calcul ? Note : Ici, pour les fins de l'exercice, on a choisi une densité de masse non-uniforme (croissante avec le rayon), mais bien souvent les objets réels ont une densité de masse en bonne approximation uniforme, c.à.d. ρ_m est constante.
b) Écrire le moment d'inertie obtenu en a) en terme de la masse totale de la sphère. Cela va nécessiter au préalable le calcul d'une autre intégrale. Quel système de coordonnées est-il préférable d'utiliser ici pour calculer cette intégrale ?

Changements de variables dans une intégrale

Note : Les exercices dans la section qui suit se basent sur la formule utilisant le jacobien.

Exercice 9. Refaire l'exercice 3 ci-haut en utilisant un changement de variables aux coordonnées polaires.

Partie 2 : Intégrales le long de courbes

Exercice 10. Faire exercice 15, Sect. 10.1, p.426 dans Kreyszig.

Exercice 11. Faire exercice 1, Sect. 10.1, p.425 dans Kreyszig.

Exercice 12. Faire exercice 11, Sect. 10.1, p.425 dans Kreyszig.

12.4 Formation à la pratique procédurale 4

12.4.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

12.4.2 Exercices proposés

Partie 1 : Indépendance de chemin

Exercice 1. Faire exercice 1, Sect. 10.2, p.432 dans Kreyszig.

Exercice 2. Faire exercice 14, Sect. 10.2, p.432 dans Kreyszig.

Partie 2 : Intégrales sur des surfaces

Exercice 3. Faire exercice 3, Sect. 10.6, p.456 dans Kreyszig. Faites un graphique de la surface considérée.

Exercice 4. Soit $\vec{F} = [0, x, 0]$ et la surface fermée bornée par la portion de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et les plans xy, yz et xz. Calculer explicitement le flux de $\vec{F}$ à travers cette surface fermée à l'aide d'une intégrale de surface. Interprétez votre résultat.

Partie 3 : Analyse vectorielle

Divergence et théorème de la divergence de Gauss

Exercice 5. À l'aide du théorème de la divergence, calculer le flux demandé à l'Exercice 4. Interprétez votre résultat. A-t-il du sens ?

Rotationnel et théorème de Stokes

Exercice 6. Faire exercice 10, Sect. 10.9, p.473 dans Kreyszig.

Exercice 7. Faire exercice 13, Sect. 10.9, p.473 dans Kreyszig. Calculez aussi explicitement l'intégrale de ligne.

Exercices supplémentaires (si le temps le permet)

Exercice 8. Faire exercice 20, Sect. 10.7, p.463 dans Kreyszig.

12.5 Tutorat 2

Au tutorat 2, on fera des schémas des concepts vus pendant l'APP et on révisera ces concepts au besoin. Il sera utile de consulter la section 6 du présent guide qui fournit la liste des connaissances nouvelles acquises pendant l'APP à partir desquelles on pourra élaborer les schémas de concepts.

13 Productions à remettre - Rapport d'APP

13.1 Consignes

- Le rapport est à remettre par équipe de 2 étudiants.
- Notez que bien que le rapport soit à remettre en équipe, vous serez évalués de façon individuelle lors des examens sur les compétences mises en oeuvre pour l'élaboration de ce rapport.

13.2 Format et contenu du rapport

- Le rapport consiste à remettre tous les calculs nécessaires à la résolution de la problématique.
- Un scan en PDF de vos calculs écrits à la main sera accepté en autant que ça soit bien lisible et compréhensible.
- Le rapport devra être repris si la qualité de la communication et de la langue est insatisfaisante. Le correcteur a été formellement averti de retourner les rapports truffés de fautes.

13.3 Remise

- Le rapport doit être remis pour au plus tard 9h le mercredi matin de la 2e semaine d'APP. Il y aura une **pénalité de 20%** si vous êtes en **retard**.
- Le **rapport doit être contenu dans un seul fichier PDF et remis par dépôt électronique** à l'endroit prévu à cet effet sur le site Web du département (**seul le format PDF sera accepté**). Le nom du fichier déposé doit obéir aux conventions de dépôt électronique des travaux.

SVP, n'envoyez pas vos rapports par courriel! Comme le dépôt se fait de façon électronique, veillez à respecter l'heure limite, car dépassé celle-ci il n'est pas garanti que votre rapport soit reçu et donc qu'il pourra être corrigé.

14 Évaluations

Les points pour chacun des éléments d'évaluation, soient les examens et le rapport, seront attribués tel qu'indiqué à la section 2.

14.1 Évaluation du rapport

L'évaluation du rapport se fera selon les éléments de mandats déterminés lors de la séance de tutorat 1. C'est à vous de vous assurer, par votre analyse de la problématique, que votre rapport est complet en répondant à tous les éléments de mandats.

14.2 Examens

Ce qui est matière à examen sommatif et à examen final en fin de session est l'ensemble des connaissances énumérées dans le présent guide d'APP, donc la totalité des programmes d'études et des exercices suggérés et ce qui est relié à la résolution de la problématique. L'évaluation sommative de la présente unité d'APP et l'examen final sont des évaluations théoriques et se tiendront à livres fermés. Un formulaire d'équations sera fourni à la fin de l'examen. Ce formulaire est également sur la page WEB de la présente unité d'APP pour vous permettre de travailler avec pendant l'unité.