Chapitre 1

Phénomènes ondulatoires

1.1 L'oscillateur harmonique

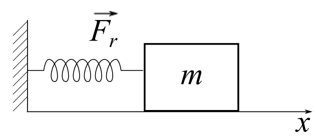

FIGURE 1.1

L'exemple typique d'un oscillateur harmonique est un système mécanique masse-ressort tel que celui illustré à la figure 1.1, où la masse m peut glisser sans friction sur une surface horizontale et est reliée à une paroi verticale fixe via un ressort de force de rappel $F = -kx$, où x est la position de la masse relative à la position de détente du ressort (c.à.d. lorsque le ressort n'est ni comprimé, ni étiré) et k est la raideur ou constante de rappel du ressort. On considérera ici le cas où aucune force externe n'est appliquée sur la masse. Ce système, apparemment anodin, joue un très grand rôle en physique, car plusieurs phénomènes naturels se produisent ultimement sous forme d'oscillations.[1]

Intuitivement, étant donné la force de rappel du ressort, si la masse est portée à une position initiale différente de la position de détente du ressort, ou si on lui donne une impulsion initiale à partir de la position de détente, ou dans le cas d'une combinaison des deux situations initiales précédentes, elle se mettra alors à effectuer un mouvement de va-et-vient (oscillation) de part et d'autre de la position de détente du ressort. C'est bien ce que l'on retrouve mathématiquement comme on le montrera dans ce qui suit. On parle alors d'oscillations libres, car il n'y a pas de force externe (dans le cas, aussi intéressant, où une force externe est appliquée on parle alors d'oscillateur forcé ; on ne traitera pas ce cas explicitement ici ; il est laissé en exercice en fin de chapitre).

1.1.1 Traitement avec la deuxième loi de Newton

Avec la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse est donnée par

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{1.1}$$

[1] On peut affirmer qu'essentiellement dans la Nature à un niveau fondamental, tout vibre (ou oscille) ou tout tourne !

La solution générale de cette équation peut-être écrite sous la forme

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t - \varphi\right), \tag{1.2}$$

où les constantes A et φ sont respectivement l'amplitude et la phase en radians (rad) de l'oscillation, qui sont déterminées à partir des conditions initiales (le signe négatif devant la phase dans l'argument du cosinus est un choix qui simplifie légèrement certains des résultats qui suivront).

La quantité $\sqrt{k/m}$ apparaissant dans la solution a des unités de rad/s étant donné qu'elle est multipliée par le temps et que le tout est dans l'argument d'une fonction cosinus. On appelle cette quantité la *fréquence angulaire* ou *fréquence naturelle* de l'oscillateur. Elle correspond à la fréquence des oscillations et on la dénotera par ω ; donc

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{rad/s}), \tag{1.3}$$

qu'on utilise aussi souvent sous la forme

$$k = m\omega^2. \tag{1.4}$$

Avec cette définition, l'équation différentielle peut être écrite sous la forme communément rencontrée

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{1.5}$$

appelée *équation harmonique*, et la solution peut être réécrite comme

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \varphi\right). \tag{1.6}$$

On voit que plus le ressort est raide (rigide), donc k élevé, plus la fréquence ω sera élevée et aussi plus la masse est faible, plus ω sera élevée. La fréquence en cycles par secondes ou Hertz (Hz), qui correspond au nombre de va-et-vient par seconde, est donnée via la relation

$$\omega = 2\pi\nu \quad \Longleftrightarrow \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.7}$$

et la période d'une oscillation (un cycle) est

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.8}$$

Considérons maintenant les conditions initiales générales suivantes :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

On a

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin\left(\omega t - \varphi\right) \tag{1.10}$$

et donc

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= A\cos\varphi = x_0 \\ \dot{x}(0) &= A\omega\sin\varphi = v_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} A\cos\varphi &= x_0 \\ A\sin\varphi &= v_0/\omega \end{aligned}$$

d'où on tire

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \tag{1.11}$$

$$\tan\varphi = \frac{v_0}{\omega x_0}. \tag{1.12}$$

Des éqs. (1.2) et (1.10), on voit que les position et vitesse maximales en valeur absolue sont données par

$$\begin{aligned} x_{max} &= A, \\ v_{max} &= \omega A. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2 Ondes scalaires

On va maintenant étudier deux situations tirées de la mécanique menant à des oscillations sous forme d'ondes dans des milieux continus, soit le cas de la corde vibrante et celui d'ondes de pression dans un gaz décrivant notamment les ondes sonores. Dans le cas de la corde vibrante, il s'agit d'ondes transverses, alors que les ondes de pression sont longitudinales. Ces deux exemples physiques sont simples à comprendre et à visualiser, étant de nature mécanique. Ces phénomènes ondulatoires peuvent être décrits par l'*équation des ondes scalaire* qui est une *équation aux dérivées partielles*. On obtiendra à partir des principes de base de la mécanique l'équation des ondes pour la corde vibrante. On décrira ensuite les ondes de pression et en quoi il s'agit d'ondes longitudinales. On ne dérivera pas l'équation des ondes dans ce cas, car cette dérivation est un peu longue et ce n'est pas nécessaire ici. On verra plus loin les ondes électromagnétiques, qui sont un exemple d'ondes vectorielles transverses et qui découlent des équations de Maxwell. Le traitement des ondes scalaires permettra d'acquérir une solide compréhension de base des phénomènes ondulatoires et la compréhension des ondes vectorielles, telles qu'en électromagnétisme, en sera facilitée.

1.2.1 Ondes transverses : la corde vibrante et l'équation des ondes

La corde vibrante a une longue histoire étant donné sa présence dans de nombreux instruments de musique et la théorie de la corde vibrante permet de comprendre les sons émis par ceux-ci. La figure 1.2 (a) schématise une corde vibrante tendue à l'aide d'un poids. On considérera la corde fixée à ses deux extrémités, correspondant sur la figure à l'extrémité de gauche fixée à une paroi et l'extrémité de droite étant le point sur le dessus d'une poulie via laquelle on peut régler la tension dans la corde à l'aide d'une masse qu'on peut changer dépendant de la tension désirée. La figure 1.2 (b) montre des oscillations réelles dans une telle corde, appelées *oscillations ou ondes stationnaires*,[2] et (c) illustre différentes possibilités d'oscillations stationnaires qui sont des états naturels d'oscillation de la corde. Dans de telles oscillations, chacun des points de la corde oscille à amplitude constante avec un mouvement harmonique à la même fréquence que tous les autres points, l'amplitude variant toutefois le long de la corde d'un point à un autre. De telles oscillations stationnaires constituent ce qui est appelé des *modes normaux*. Tous les modes normaux, sauf le plus bas, contiennent des points, appelés *noeuds*, où le déplacement est nul en tout temps. Les points d'amplitude maximale sont appelés *ventres ou antinoeuds*.

[2] Par opposition à des ondes progressives qui se déplaceraient vers la droite ou vers la gauche le long de la corde, on y reviendra brièvement plus loin.

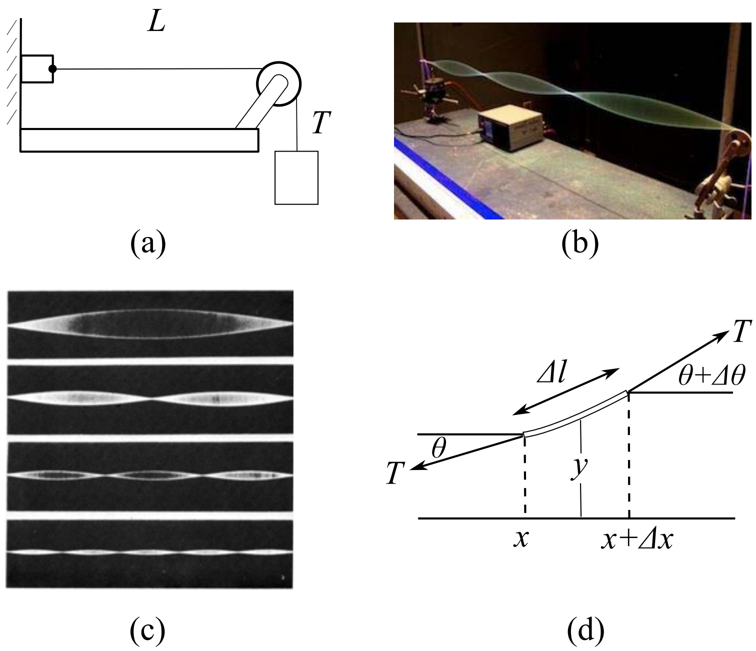

FIGURE 1.2. (a) Schéma d'un montage typique pour tendre une corde vibrante. (b) Montage réel pour observer les vibrations d'une corde. (c) Oscillations stationnaires (modes normaux) d'une corde vibrante (tiré de D.C. Miller, *The Science of Musical Sounds*, Macmillan, New York, 1922). (d) Schéma pour analyser le mouvement d'un élément d'une corde vibrante et déduire l'équation du mouvement de la corde.

Équation des ondes

On désire maintenant obtenir une équation décrivant le mouvement d'une corde vibrante. L'équation de la corde vibrante est un des nombreux exemples d'équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrés en physique, c.à.d. des équations faisant intervenir les dérivées partielles d'une quantité par rapport à diverses variables. Dans le cas de la corde vibrante, cette quantité (variable dépendante) est la déflexion transverse de la corde qui dépend du temps t et de la position x le long de l'axe de référence par rapport auquel les oscillations (transverses) de la corde ont lieu. Une corde peut-être considérée comme un milieu continu à une dimension. On supposera que la corde a une densité linéaire (masse par unité de longueur) uniforme μ, qu'elle est de longueur L et fixée à ses deux bouts et que la tension dans la corde est T. La figure 1.2 (d) montre un élément de corde de longueur très petite. L'amplitude $y(x,t)$ des vibrations sera supposée petite et donc l'angle θ que fait la corde par rapport à l'axe des x (ainsi que la variation d'angle $\Delta\theta$ entre les deux bouts de l'élément de corde) est en tout point petit ($\theta(x)$ petit $\forall x$). Dans les développements qui suivent, on utilisera les approximations

$$\begin{aligned} \sin\theta &\approx \theta, & \cos\theta &\approx 1, \\ \sin\Delta\theta &\approx \Delta\theta, & \cos\Delta\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

et on ne gardera que les termes linéaires en θ ou $\Delta\theta$ (termes au premier ordre dans les petites quantités ; on négligera entre autres les termes mixtes $\theta\Delta\theta$). On a

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta, \\ \theta(x+\Delta x) &= \theta + \Delta\theta. \end{aligned}$$

La longueur de l'élément de corde est donnée approximativement par

$$\Delta l = \frac{\Delta x}{\cos\theta}.$$

Or, comme θ est petit, en première approximation $\cos\theta \approx 1$ et donc

$$\Delta l \approx \Delta x. \tag{1.15}$$

Ainsi la masse de l'élément de corde est

$$\Delta m = \mu \Delta l \approx \mu \Delta x. \tag{1.16}$$

Les composantes y et x de la force nette agissant sur l'élément sont données par

$$\begin{aligned} F_y &= T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin(\theta), \\ F_x &= T\cos(\theta + \Delta\theta) - T\cos(\theta). \end{aligned} \tag{1.17}$$

À l'aide des approximations de l'éq. (1.14), on obtient

$$\begin{aligned} F_y &\approx T\Delta\theta, \\ F_x &\approx 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Il n'y a donc pas de force selon x et comme la corde ne se déplace pas en x, il n'y a ainsi pas de mouvement dans cette direction. En utilisant la $2^{\text{ème}}$ loi de Newton ($F = ma$), l'équation du mouvement de l'élément de corde dans la direction y (transverse) est

$$\Delta m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T\Delta\theta. \tag{1.19}$$

L'angle $\Delta\theta$ provient du changement de pente à l'extrémité droite en $x + \Delta x$ de l'élément de corde par rapport à la pente à l'extrémité de gauche en x. Or $\tan\theta$ est la pente en x et $\tan(\theta + \Delta\theta)$ est celle en $x + \Delta x$, c.à.d. on a

$$\tan(\theta) = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x, \quad \tan(\theta + \Delta\theta) = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}.$$

Or pour de petits angles, $\tan(\theta) \approx \theta$ et $\tan(\theta + \Delta\theta) \approx \theta + \Delta\theta$, d'où

$$\tan(\theta + \Delta\theta) - \tan(\theta) \approx \Delta\theta = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x.$$

Avec ces résultats, l'éq. (1.19) devient

$$\mu\Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x\right)$$

qui peut se réécrire

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x\right)$$

On reconnaît dans le membre de droite, lorsque $\Delta x \to 0$, la dérivée seconde de y par rapport à x, d'où il vient

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}.$$

La quantité T/μ a les unités du carré d'une vitesse. Pour cette raison, on définit

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \tag{1.20}$$

On verra que v est en fait la vitesse des ondes progressives qui peuvent se propager le long de la corde. On obtient finalement l'équation

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.21}$$

appelée *équation des ondes* (ou simplement *équation d'onde*) scalaire.[3] Cette équation s'applique ici au déplacement transverse de la corde.

Exercice de lecture 1.1. Faites les calculs qui permettent de passer des éqs. (1.17) aux éqs. (1.18).

Solutions stationnaires de l'équation des ondes - ondes stationnaires et modes normaux

On recherche maintenant des solutions de l'équation d'onde correspondant aux oscillations stationnaires. Rappelons que dans ce cas, tous les points de la corde oscillent à une même fréquence et que l'amplitude de ces oscillations varie en fonction de x. On recherche donc des solutions de la forme

$$y(x,t) = h(x)\cos(\omega t - \varphi), \tag{1.22}$$

où $h(x)$ est l'amplitude et $\cos(\omega t - \varphi)$ est la dépendance temporelle désirée (on a ici inclu une phase φ pour pouvoir tenir compte de positions et vitesses arbitraires en $t = 0$).[4]

Si on insère cette solution dans l'équation des ondes, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^3 h}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2}h = 0. \tag{1.23}$$

Ceci est l'équation familière satisfaite par un sinus ou un cosinus (v. l'équation harmonique (1.5) équivalente pour le cas temporel). Comme la corde est fixée à ses extrémités et en choisissant $x = 0$ pour l'extrémité de gauche, on doit choisir le sinus comme solution, car le déplacement transverse en $x = 0$ doit en tout temps être nul (extrémité fixe). Ainsi, une solution admissible doit prendre la forme

$$h(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right), \tag{1.24}$$

où A est une constante qui correspond à l'amplitude du sinus. Mais ceci n'est pas tout, on doit aussi satisfaire une condition de déplacement nul à l'autre extrémité en $x = L$. On doit donc également avoir

$$\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) = 0,$$

[3] L'équation d'onde est une équation aux dérivées partielles (EDP) dite de type hyperbolique, car sa structure rappelle l'équation d'une hyperbole $x^2 - y^2 = \text{const}$. On n'insistera pas ici sur la classification des EDP.

[4] P.ex. si on prend la phase nulle, alors la forme en $\cos(\omega t)$ suppose que les point sont au repos en $t = 0$, car $\frac{\partial \cos(\omega t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$; si ce n'est pas le cas, il faut alors inclure une phase tel qu'on l'a fait.

ce qui impose que

$$\frac{\omega L}{v} = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty \quad \text{(entiers positifs)} \tag{1.25}$$

(seuls les entiers positifs sont admis ici, car ω, L et v sont des quantités positives). On obtient donc une contrainte sur les valeurs possibles que la fréquence ω peut prendre, ces valeurs étant

$$\omega_n = n\pi\frac{v}{L} = n\omega_1, \tag{1.26}$$

où

$$\omega_1 = \pi\frac{v}{L}. \tag{1.27}$$

Comme l'indique l'éq. (1.26), les valeurs de la fréquence ne peuvent prendre que certaines valeurs discrètes bien définies, elles sont en quelque sorte quantifiées. Ainsi les solutions admissibles correspondant aux oscillations stationnaires permises pour la corde, ou modes normaux, prennent la forme

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{\omega_n}{v}x\right)\cos(\omega_n t - \varphi_n) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t - \varphi_n). \tag{1.28}$$

Par analogie au cas temporel en comparant les éqs. (1.23) et (1.5), on peut définir

$$k = \frac{\omega}{v}, \tag{1.29}$$

qui correspond à une fréquence angulaire spatiale (rad/m). Toujours par analogie au cas temporel, on définit une fréquence spatiale κ, aussi appelée *nombre d'onde*, par

$$k = 2\pi\kappa \quad \Longleftrightarrow \quad \kappa = \frac{k}{2\pi} \tag{1.30}$$

et la *période d'une oscillation spatiale de l'amplitude* $h(x)$ (un cycle), appelée *longueur d'onde*, est donnée par

$$\lambda = \frac{1}{\kappa} = \frac{2\pi}{k}. \tag{1.31}$$

De l'éq. (1.28), on voit en regardant l'argument du sinus qu'on peut écrire $n\pi x/L = 2\pi(n/2L)x$ et que la longueur d'onde d'un mode n particulier est donnée par

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad L = n\frac{\lambda_n}{2}. \tag{1.32}$$

Ceci correspond au fait observé que la longueur de la corde doit accomoder un nombre entier de demies de courbes sinusoidales (ces courbes étant de longueur λ_n). On a en outre les relations suivantes :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \tag{1.33}$$

et

$$\omega_n = v k_n = \frac{2\pi v}{\lambda_n}, \quad \lambda_n \nu_n = v. \tag{1.34}$$

Avec ces quantités, on peut également écrire la solution correspondant au mode normal n donnée à l'éq. (1.28) comme

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)\cos(\omega_n t - \varphi_n). \tag{1.35}$$

Pour clore sur une note musicale, puisque les fréquences possibles d'une corde vibrante sont des multiples entiers de la fréquence la plus basse ω_1 (v. éqs. (1.26)) et (1.27)), cette dernière revêt un intérêt particulier et est appelée *fréquence fondamentale*. C'est la fréquence fondamentale qui détermine ce qu'on perçoit comme étant le ton caractéristique de la note d'une corde vibrante d'un instrument de musique (on entend moins les oscillations aux autres fréquences, qui elles sont appelées les *harmoniques*). C'est de la fréquence de la fondamentale que découle la tension à appliquer sur une corde d'une longueur et masse donnée pour l'accorder à une note désirée.

Exercice de lecture 1.2. La corde « La » d'un violon doit être accordée pour produire un son à 440 Hz. La longueur et la masse de cette corde (allant du pont jusqu'à la fin du manche) sont 33 cm et 0.125 g. Quelle tension est requise pour obtenir la note désirée ?

Conditions aux limites ou conditions aux frontières

Les conditions sur les déplacements transverses aux extrémités de la corde (ici déplacements nuls en ces points) sont appelées *conditions aux limites ou conditions aux frontières*. C'est elles qui déterminent entièrement la forme que prendra la solution. Cela est vrai en fait dans tout problème faisant intervenir une équation aux dérivées partielles. Ici, on a considéré des conditions aux limites relativement simples, où on fixe la valeur de la solution aux extrémités (déplacements nuls ici). Les conditions aux limites peuvent toutefois être plus complexes et faire intervenir les dérivées de la fonction aux extrémités, ou une combinaison de la fonction et de ses dérivées. Dans le cas où ce sont les valeurs de la fonction recherchée qui sont fixées aux extrémités, on parle alors de *conditions aux frontières de Dirichlet*, dans le cas où ce sont les valeurs de la dérivée qui sont fixées, on a des *conditions de Neumann*. Finalement, si une combinaison des valeurs de la fonction et de ses dérivées est fixée aux extrémités, on a des *conditions aux frontières mixtes (ou de Robin)*.

Superposition de modes sur une corde vibrante - principe de superposition

On a vu que la corde vibrante avec extrémités fixes admet un certain ensemble de solutions ou modes bien défini, chacune des solutions pouvant être répertoriée par un indice n entier positif. Or, comme l'équation d'onde est une *équation linéaire* et que le conditions aux limites sont nulles, toute somme pondérée des solutions obtenues précédemment est aussi une solution. Ceci exprime le *principe de superposition* qui stipule que *toute somme pondérée de solutions est aussi une solution*. Pour interpréter et comprendre physiquement cette constatation a priori mathématique, considérons un instrument de musique à corde comme le piano, dans lequel une corde est frappée en un certain point à un instant donné. Lors de l'impact et pour un bref moment, la corde est défléchie de sa position au repos et sa forme ne ressemble en rien à une fonction sinusoïdale. Dès lors, le corde se met dans un mouvement qui est une simple superposition de la fondamentale et de quelques-unes de ses harmoniques les plus basses (la raison pour laquelle on n'entend généralement pas les harmoniques est que leurs amplitudes sont beaucoup plus faibles que la fondamentale, on résolvera ce problème mathématiquement plus loin). Il s'agit d'un fait physique important que les oscillations fondamentale et harmoniques puissent se produire simultanément et indépendemment, c'est là une manifestation physique du principe de superposition.

Le principe d'indépendance et de superposition des modes normaux d'un système oscillant joue un rôle fondamental dans l'analyse de vibrations complexes qui peut alors être effectuée à l'aide l'analyse de Fourier. La manifestation du principe de superposition dans le cas d'une corde vibrante a été discutée pour une première fois par Daniel Bernouilli (fils de Jean Bernouilli) dans un ouvrage de 1753.

En conclusion de la discussion précédente, la solution la plus générale de l'équation d'onde pour la corde vibrante avec extrémités fixes aura la forme

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t - \varphi_n). \tag{1.36}$$

Tel que montré plus bas, les constantes A_n et φ_n peuvent être déterminées par analyse de Fourier.

La théorie de la corde vibrante telle que présentée ici est essentiellement celle développée et parachevée en 1759 par Lagrange avec des contributions antérieures de d'Alembert, Euler et Daniel Bernouilli. Lagrange n'a toutefois pas écrit la solution générale sous forme d'une somme infinie. De telles sommes infinies ont pour la première fois été utilisées par Joseph Fourier dans ses travaux sur l'équation de la chaleur et présentées dans son traité *Théorie analytique de la chaleur* en 1822.

Solution de l'équation d'onde pour la corde vibrante par analyse de Fourier - FACULTATIF

On suppose qu'en $t = 0$ (instant initial), la corde ait une forme donnée par la fonction $y_0(x)$, on désire alors déterminer la forme de la corde à tout instant ultérieur. Dans ce cas, $y(x,0) = y_0(x)$ et en utilisant l'éq. (1.36) il vient

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\varphi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \end{aligned} \tag{1.37}$$

où on a défini

$$b_n = A_n \cos(\varphi_n). \tag{1.38}$$

On reconnaît là une série de Fourier de la fonction $y_0(x)$. Bien qu'il soit suffisant de connaître $y_0(x)$ pour déterminer les coefficients b_n, ça ne l'est pas pour déterminer indépendemment les A_n et φ_n. Pour cela, il faut aussi connaître les vitesses transverses de tous ses points, c.à.d. $\dot{y}_0(x) = \partial y(x,t)/\partial t|_{t=0}$. On se restreindra ici au cas où les vitesses initiales sont nulles, ce qui permet de prendre $\varphi_n = 0$ et alors $b_n = A_n$.

Comme la série de Fourier de l'éq. (1.37) ne fait qu'intervenir des sinus, la fonction $y_0(x)$ doit être considérée impaire. En outre, la série de Fourier définit une fonction périodique, dans le cas présent de période spatiale λ_1 donnée par $2\pi/\lambda_1 = \pi/L$, c.à.d. $\lambda_1 = 2L$. Or, on ne s'intéresse qu'à la solution de l'équation d'onde pour x dans l'intervalle $[0,L]$. Ceci revient donc à prolonger la fonction $y_0(x)$ de façon impaire à l'extérieur de l'intervalle $[0,L]$, c.à.d. à définir $y_0(x) = -y_0(-x)$ pour $x \in [-L,0[$ et prolonger de façon périodique et infinie $y_0(x)$ à l'extérieur de l'intervalle $[-L,L]$.

Pour résumer, la procédure pour déterminer les coefficients A_n est de prolonger la fonction $y_0(x)$, a priori définie sur l'intervalle $[0,L]$, de façon impaire sur l'intervalle $[-L,L]$ et ensuite de façon périodique sur toute la droite réelle. On calcule ensuite les coefficients A_n à l'aide d'un développement en séries de Fourier de $y_0(x)$. Rappelons ici que les coefficients d'une série de Fourier en sinus pour une fonction

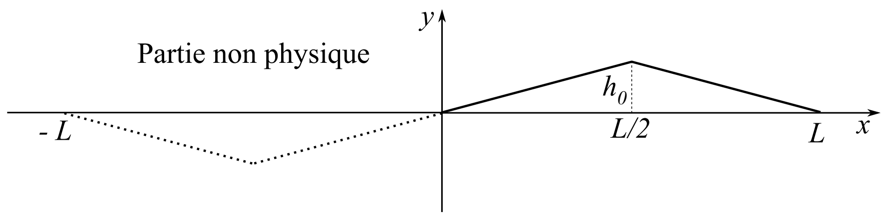

FIGURE 1.3. Forme initiale d'une corde vibrante pincée ou frappée en son centre. La corde est physiquement située entre 0 et L, la partie non physique entre 0 et $-L$ est pour les fins de l'analyse mathématique tel que discuté dans le texte.

périodique $g(x)$ de période $2L$ sont donnés par

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x. \tag{1.39}$$

P.ex., avec cette procédure on trouve que pour la forme initiale de la corde illustrée à la figure 1.3 et un profil des vitesses initial nul le long de la corde, la solution est donnée par

$$y(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8h_0(-1)^m}{(2m+1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)\cos\left(2\pi(2m+1)\nu_1 t\right), \tag{1.40}$$

où $\nu_1 = v/2L$ est la fréquence de la fondamentale. La situation illustrée correspond à une corde initialement pincée en son centre et ensuite relâchée, ou bien à une corde frappée par dessous en son centre qu'on laisse ensuite vibrer comme dans un piano. On voit dans ce cas que les harmoniques ont une amplitude relativement faible comparativement à celle de la fondamentale, l'amplitude des harmoniques décroisant comme le carré de l'inverse de $(2m+1)$. On voit en outre que l'amplitude de la fondamentale, donnée par $8h_0/\pi^2 \approx 0.81h_0$, est près de l'amplitude h_0 de la forme initiale.

Exercice de lecture 1.3. Appliquer la procédure énoncée ci-haut pour arriver à l'éq. (1.40).

Exercice de lecture 1.4. Donner la procédure complète qu'il faudrait suivre pour déterminer les coefficients A_n et les phases φ_n dans le cas où les vitesses initiales transverses des points de la corde ne seraient pas nulles. On supposera une distribution des vitesses transverses initiales donnée par $v_{y,0}(x)(=\dot{y}_0(x))$ avec évidemment $v_{y,0}(0) = 0$ et $v_{y,0}(L) = 0$ (les vitesses aux extrémités doivent être nulles, les points étant fixes).

Points saillants de la théorie de la corde vibrante

Pour terminer la discussion sur la corde vibrante fixée à ses deux bouts, les points saillants sont :

1. la notion de *modes normaux* comme *états de vibration naturels* pour la corde ;
2. le *principe de superposition* que permet de représenter toute *solution comme une somme pondérée (superposition) infinie des modes normaux* et qui mène à l'analyse de Fourier ;
3. le fait que *les conditions aux frontières et les conditions initiales* (c.à.d. la forme et la vitesses initiales de la corde) *déterminent entièrement l'état de la corde à tout instant ultérieur.*

Si on revient à l'éq. (1.36), on voit que si un coefficient A_n est nul, cela signifie que le mode correspondant n'est pas présent dans l'état de vibration de la corde. En outre, plus un coefficient a une grande valeur (en valeur absolue ; on peut aussi considérer le carré) par rapport aux autres coefficients, plus on peut dire que le mode est présent dans l'état de vibration de la corde. Ainsi, un coefficient donné est une mesure de la « présence » du mode correspondant dans l'état de vibration.

Sur une note historique, la compréhension et la description mathématique de la corde vibrante a été un des grands sujets théoriques de la physique au XVIIIe siècle. On ne saurait rester indifférent à la grande beauté de cette théorie, autant du point de vue mathématique que des concepts nouveaux qu'elle a permis d'apporter, notamment la notion de mode et le principe de superposition. Ces concepts jouent un rôle prépondérant en physique moderne, dont en théorie quantique, d'où l'intérêt de les avoir présentés et compris dans un cadre classique.

1.2.2 Ondes longitudinales : acoustique

Les ondes dans le cas de la corde vibrante sont transverses. Un exemple d'ondes longitudinales sont les ondes de pression dans un gaz qui sont à l'origine des sons qui parviennent à nos oreilles et que nous entendons. Les ondes de pression correspondent à des variations de pression dans la direction x, d'où le fait qu'on les qualifie de longitudinales.

De façon plus générale, on désigne par onde acoustique toute onde mécanique dans un matériau ou milieu. Sans en faire la démonstration et avec certaines hypothèses, l'équation des ondes acoustiques dans une direction donnée qu'on choisira comme étant x est donnée par

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \tag{1.41}$$

où $p \equiv p(x, t)$ est la pression dans le matériau. La vitesse v des ondes est donnée dans ce cas par

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \tag{1.42}$$

Ici B est le module de compressibilité du matériau et ρ sa densité.