Chapitre 2

Systèmes de coordonnées orthogonales

Le système de coordonnées cartésiennes (aussi appelées coordonnées rectangulaires) est bien connu et ne sera pas discuté ici de nouveau. Dans ce chapitre, nous étudierons d'autres systèmes de coordonnées d'usage commun en sciences physiques et en ingénierie. Il s'agit des coordonnées polaires dans le plan, et des coordonnées cylindriques et sphériques dans l'espace.

2.1 Coordonnées polaires dans le plan

2.1.1 Définition

Pour repérer un point P dans le plan à l'aide de coordonnées cartésiennes, on utilise les projections du vecteur position $\vec{r}$ de ce point sur les axes de coordonnées (figure 2.1 (a)). Un façon alternative de repérer ce point est d'utiliser l'angle θ que fait le vecteur position avec l'axe des x et la longueur $r = ||\vec{r}\,||$ du vecteur position. Ceci est illustré à la figure 2.1 (b).

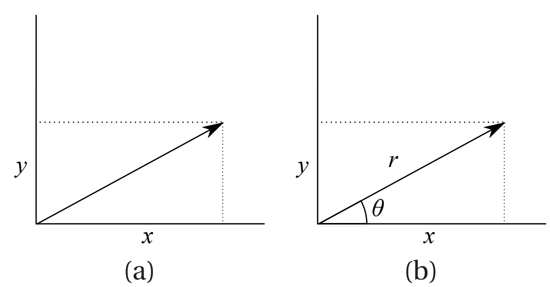


FIGURE 2.1

L'angle θ est dans ce cas appelé *angle polaire*. Les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaire (r,θ) du point sont données (à l'aide d'un peu de trigonométrie élémentaire) par

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{2.1}$$

et inversement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta &= y/x. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En coordonnées polaires, le vecteur position $\vec{r}$ d'un point arbitraire s'écrira

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{e}_x + r\sin\theta\,\hat{e}_y = r(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y), \tag{2.3}$$

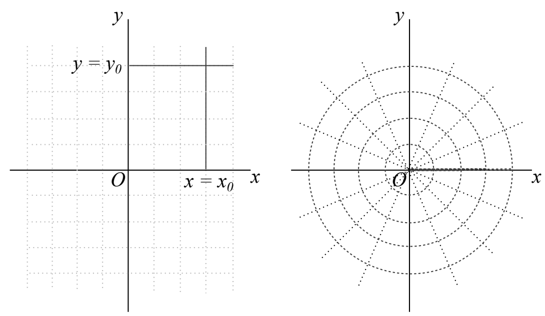
ce qu'on écrira aussi parfois sous la forme (par abus de notation)

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta). \tag{2.4}$$

Exercice de lecture 2.1. Trouver les coordonnées polaires du point ayant pour coordonnées cartésiennes $(1,1)$.

2.1.2 Courbes de coordonnées

Pour un système de coordonnées donné, on définit les *courbes de coordonnées constantes* (ou simplement courbes de coordonnées) comme étant les courbes pour lesquelles les coordonnées sont laissées libres de varier une à la fois, les autres étant maintenues constantes. P.ex. dans le cas des coordonnées cartésiennes, les courbes de coordonnées sont des droites horizontales et verticales. Les droites horizontales sont déterminées en laissant x varier et en maintenant constante la coordonnée y (p.ex. $y = y_0$ où y_0 est une constante) et les droites verticales sont déterminées en laissant y varier et en gardant x constante (p.ex. $x = x_0$, où x_0 est une constante), voir figure 2.2 (a). Tout point du plan peut être considéré comme situé à l'intersection de deux courbes de coordonnées, une pour la coordonnée x et l'autre pour la coordonnée y (p.ex. le point (x_0, y_0) illustré à la figure 2.2. Dans le cas des coordonnées polaires, les courbes de coordonnées sont des rayons émanant de l'origine du plan (pour ces rayons θ est constant) et des cercles ayant l'origine comme centre (pour ces cercles r est constant) ; voir figure 2.2 (b).



(a) (b)

FIGURE 2.2

2.1.3 Base locale orthonormée

En chaque point $\vec{r}$ de coordonnées polaires (r,θ), on peut définir une base locale orthonormée. Le premier vecteur de cette base, appelé *vecteur radial*, est un vecteur unitaire dénoté $\hat{e}_r$ parallèle au vecteur position et dans le même sens que ce dernier ; $\hat{e}_r$ sera donc donné par

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y, \tag{2.5}$$

ce qu'on écrira souvent sous la forme simplifiée suivante : $\hat{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$. Le second vecteur unitaire, dénoté $\hat{e}_\theta$ est simplement donné par $(\cos(\theta+\pi/2), \sin(\theta+\pi/2))$ qui sera nécessairement perpendiculaire à $\hat{e}_r$. Ainsi

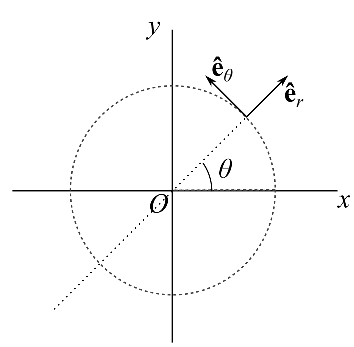


FIGURE 2.3

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{e}_x + \cos\theta\,\hat{e}_y. \tag{2.6}$$

Les vecteurs $\hat{e}_r$ et $\hat{e}_\theta$ sont illustrés à la figure 2.3. Le vecteur $\hat{e}_\theta$ est parfois appelé vecteur tangentiel, car il est tangent aux cercles r = constante (l'équation d'un tel cercle, p.ex. pour $r = r_0$, où r_0 est une constante, est donnée de façon paramétrique par $\vec{r}(\theta) = r_0(\cos\theta\,\hat{e}_x + \sin\theta\,\hat{e}_y) = r_0(\cos\theta, \sin\theta)$). À noter que dans certains ouvrages les vecteurs unitaires $\hat{e}_r$ et $\hat{e}_\theta$ sont respectivement dénotés par $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Pour tous les points le long d'un rayon (c.à.d. $\theta = \theta_0$ = constante), on voit que les bases locales sont identiques si on considère qu'on peut les faire coïncider en les faisant glisser en un même point. On note également qu'à l'origine du plan, on ne peut pas définir de base locale, car l'angle θ n'est pas défini pour ce point.

Si on a un vecteur $\vec{A}$ fixé au point de coordonnées polaires (r, θ), alors on pourra l'écrire comme une décomposition dans la base locale orthonormée comme suit :

$$\vec{A} = A_r\,\hat{e}_r + A_\theta\,\hat{e}_\theta. \tag{2.7}$$

Exercice de lecture 2.2. Supposons qu'on ait le vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point $\vec{r} = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ donné par $\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y$ dans la base orthonormée cartésienne. Trouver l'expression de ses composantes A_r et A_θ dans la base locale orthonormée des coordonnées polaires.

Dans le cas des coordonnées polaires, le vecteur position d'un point est donné par

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r. \tag{2.8}$$

2.2 Coordonnées cylindriques dans l'espace

2.2.1 Définition

Pour repérer un point P dans l'espace en coordonnées cylindriques, les coordonnées x et y du point sont remplacées par des coordonnées polaires, et pour la troisième dimension, on utilise la coordonnée z usuelle. Dans ce cas, l'angle est par convention dénoté par ϕ (au lieu de θ) et la distance de P à l'axe z est dénotée par ρ (au lieu de r). Ceci est illustré à la figure 2.4. L'angle ϕ est appelé *angle azimutal*. Les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (ρ, ϕ, z) du point sont données par

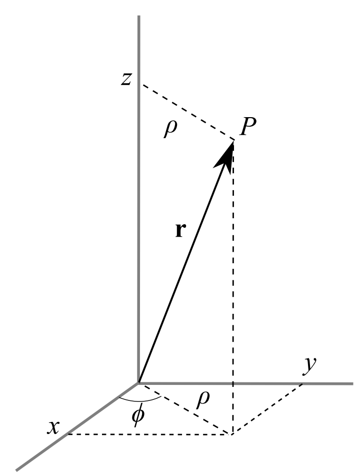


FIGURE 2.4

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi, \\ y &= \rho\sin\phi, \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.9}$$

et inversement

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \tan\phi &= y/x, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.10}$$

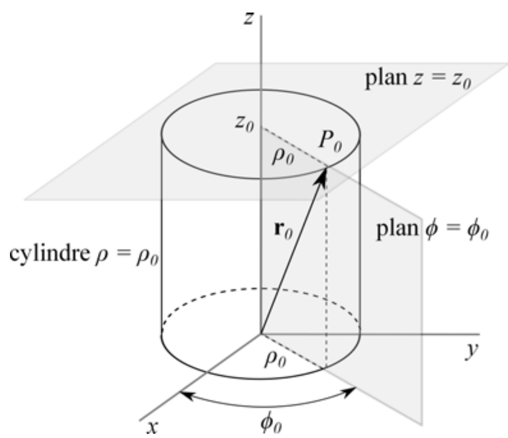


FIGURE 2.5

En coordonnées cylindriques, le vecteur position $\vec{r}$ d'un point arbitraire s'écrira

$$\vec{r} = \rho\cos\phi\hat{e}_x + \rho\sin\phi\hat{e}_y + z\hat{e}_z. \tag{2.11}$$

Les coordonnées cylindriques sont en fait des coordonnées polaires auxquelles on adjoint une troisième dimension, soit celle selon z. Les coordonnées cylindriques sont un exemple de coordonnées non-linéaires, par opposition à des coordonnées linéaires (comme p.ex. les coordonnées cartésiennes) dans lesquelles le coordonnées sont directement les coefficients dans les combinaisons linéaires qui servent à exprimer le vecteur position d'un point en terme des vecteurs de base.

Les coordonnées cylindriques sont généralement utilisées pour résoudre des problèmes faisant intervenir une géométrie cylindrique. Un exemple est la décription de la propagations d'ondes électromagnétiques dans un guide d'onde cylindrique (une fibre optique et un cable coaxial sont des exemples), ou bien pour décrire l'écoulement d'un fluide dans un tuyau cylindrique. C'est la géométrie du problème qui généralement dicte les coordonnées qu'on utilisera pour le résoudre.

Exercice de lecture 2.3. Trouver les coordonnées cylindriques du point ayant pour coordonnées cartésiennes $(2, 2, 1)$.

2.2.2 Surfaces de coordonnées constantes

Dans l'espace, par opposition au plan, on a des *surfaces de coordonnées constantes* au lieu de courbes de coordonnées constantes. Ces surfaces sont définies comme étant les surfaces pour lesquelles les coordonnées considérées sont constantes une à la fois. Dans le cas des coordonnées cylindriques, ces surfaces sont des cylindres correspondant à ρ = constante (d'où le nom des coordonnées) et des plans, un type de plans correspondant à z = constante et un autre type correspondant à ϕ = constante. Tout point de l'espace peut être considéré comme situé à l'intersection d'un cylindre et deux plans. Cela est illustré à la figure 2.5.

2.2.3 Base locale orthonormée

En chaque point $\vec{r}$ de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), on peut définir une base locale orthonormée. Les vecteurs sont tout à fait analogues à ceux des coordonnées polaires dans le plan, hormis l'ajout du vecteur unitaire selon z. Ainsi, les vecteurs sont donnés par

$$\begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\phi\,\hat{e}_y = (\cos\phi, \sin\phi, 0), \\ \hat{e}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y = (-\sin\phi, \cos\phi, 0), \\ \hat{e}_z &= (0,0,1). \end{aligned} \tag{2.12}$$

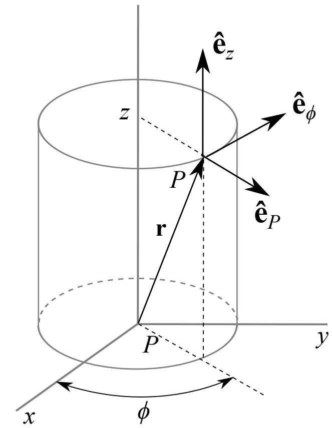


FIGURE 2.6

Ces vecteurs sont illustrés à la figure 2.6. À noter que dans certains ouvrages les vecteurs unitaires $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ et $\hat{e}_z$ sont respectivement dénotés par $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$.

Si on a un vecteur $\vec{A}$ fixé au point de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), alors on pourra l'écrire comme une décomposition dans la base locale orthonormée comme suit :

$$\vec{A} = A_\rho \hat{e}_\rho + A_\phi \hat{e}_\phi + A_z \hat{e}_z. \tag{2.13}$$

Exercice de lecture 2.4. Supposons qu'on ait le vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point $\vec{r} = (x, y, z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$ donné par $\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z$ dans la base orthonormée cartésienne. Trouver l'expression de ses composantes A_ρ, A_ϕ et A_z dans la base locale orthonormée des coordonnées cylindriques.

Dans le cas des coordonnées cylindriques, le vecteur position d'un point est donné par

$$\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z. \tag{2.14}$$

2.3 Coordonnées sphériques dans l'espace

2.3.1 Définition

Pour repérer un point P avec vecteur position $\vec{r}$ dans l'espace en coordonnées sphériques (voir figure 2.7 (a)), on utilise :

- la distance du point à l'origine du système de coordonnées, cette distance dénotée par r correspondant à la longueur du vecteur position, c.à.d. $r = ||\vec{r}\,||$;
- l'angle que fait le vecteur position avec l'axe des z, cet angle, appelé *angle polaire*, est dénoté par θ ; il mesure l'angle entre le zénith vers lequel pointe l'axe des z et le vecteur position ;
- l'angle azimutal dénoté par ϕ, qui mesure l'angle entre la projection du vecteur position dans le plan $x - y$ et l'axe des x ; c'est le même que celui utilisé en coordonnées cylindriques.

Avec un peu de trigonométrie, on établit aisément le lien entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cylindriques. En effet, en référant à la figure 2.7 (b) qui est la même que celle en (a), sauf qu'on y a aussi indiqué les coordonnées cylindriques, on remarque que la coordonnée z du point est

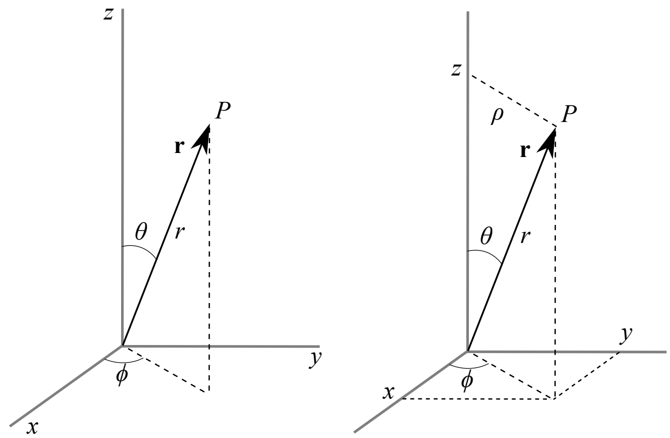


FIGURE 2.7

donnée par $r\cos\theta$ et la coordonnée ρ est donnée par $r\sin\theta$. Ainsi, on trouve que les relations entre les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et sphériques (r,θ,ϕ) du point sont données par

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

et inversement

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \tan\phi &= \frac{y}{x}, \\ \cos\theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

En coordonnées sphériques, le vecteur position $\vec{r}$ d'un point arbitraire s'écrira

$$\vec{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{e}_x + r\sin\theta\sin\phi\hat{e}_y + r\cos\theta\hat{e}_z. \tag{2.17}$$

Les coordonnées sphériques sont un autre exemple de coordonnées non-linéaires pour des raisons analogues à celles pour les coordonnées cylindriques.

Les coordonnées sphériques sont généralement utilisées pour résoudre des problèmes faisant intervenir une géométrie sphérique. Un exemple est la diffraction d'une onde électromagnétique par une particule sphérique. Dans ce cas, la forme de la particule dicte l'utilisation de coordonnées sphériques.

À noter que certains problèmes faisant intervenir les coordonnées sphériques présentent une symétrie azimutale, c.à.d. que les quantités ne dépendent pas de l'angle ϕ. Dans ce cas, les seules coordonnées d'intérêt sont r et θ et on est alors ramené à des coordonnées polaires. C'est pour cette raison qu'en physique l'angle azimutal n'est pas nommé θ, mais plutôt ϕ et que c'est l'angle polaire qui est nommé

θ. C'est la convention utilisée dans la grande majorité des livres de physique et d'ingénierie. Cependant, dans plusieurs livres de mathématiques, on trouvera les angles θ et ϕ interchangés, c.à.d. que par rapport au présent ouvrage, θ est ϕ et ϕ est θ. Attention dans ce cas aux confusions possibles!

Exercice de lecture 2.5. Trouver les coordonnées sphériques du point ayant pour coordonnées cartésiennes $(1,3,1)$.

2.3.2 Surfaces de coordonnées constantes

Dans le cas des coordonnées sphériques, les surfaces de coordonnées constantes sont des sphères correspondant à r = constante (d'où le nom de ces coordonnées), des plans correspondant à ϕ = constante et des cônes correspondant à θ = constante. Tout point de l'espace peut être considéré comme situé à l'intersection de ces trois types de surfaces. Cela est illustré à la figure 2.8.

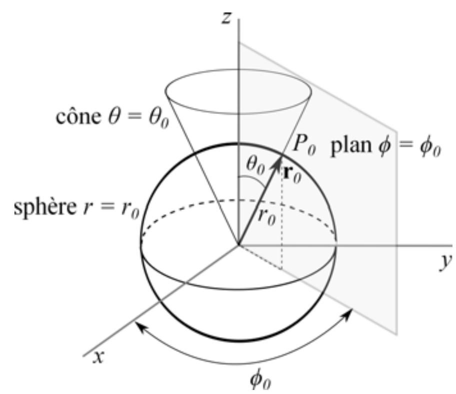


FIGURE 2.8

2.3.3 Base locale orthonormée

En un point général $\vec{r}$ de coordonnées sphériques (r,θ,ϕ), on peut définir une base locale orthonormée. Le premier vecteur, dénoté par $\hat{e}_r$ et associé à la coordonnée r, est parallèle au vecteur position et dans le même sens que ce dernier[1] ; $\hat{e}_r$ sera donc donné par

$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{2.18}$$

Un autre vecteur, celui-ci associé à la coordonnée ϕ et dénoté $\hat{e}_\phi$, peut aisément être obtenu en fixant r et θ. Dans ce cas, on voit de la figure 2.8 et de l'équation 2.17 que le vecteur position décrit un cercle horizontal de rayon $\rho = r\sin\theta$, parallèle au plan $x - y$ et à une hauteur $z = r\cos\theta$ par rapport à ce dernier Le vecteur tangent à ce cercle donnera $\hat{e}_\phi$ et si on fait référence à la situation similaire des coordonnées polaires dans le plan (dans le cas présent ϕ joue le rôle du θ des coordonnées polaires), on aura

$$\hat{e}_\phi = -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y. \tag{2.19}$$

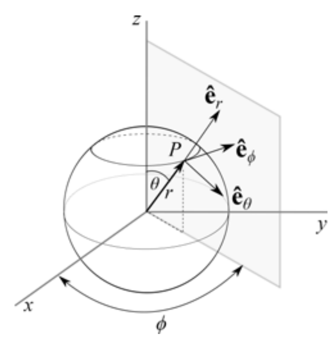


FIGURE 2.9

Un troisième vecteur dénoté $\hat{e}_\theta$ peut alors être obtenu en faisant le produit vectoriel entre $\hat{e}_r$ et $\hat{e}_\phi$, plus précisément $\hat{e}_\theta = -\hat{e}_r \times \hat{e}_\phi$ (le signe négatif apparaît, car $\hat{e}_\theta$ doit pointer vers les valeurs croissantes de θ). On obtient ainsi

$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z. \tag{2.20}$$

Note : Le vecteur $\hat{e}_\theta$ correspond au vecteur tangent au cercle décrit par le vecteur position obtenu en fixant r et ϕ. Sur ce cercle, seul θ varie et avec un petit raisonnement, on déduit que le vecteur tangent à ce cercle est bien donné par le vecteur apparaissant à l'équation 2.20.

[1] Ceci est tout à fait analogue au vecteur unitaire radial des coordonnées polaires dans le plan.

L'ensemble de vecteurs $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi\}$ (dans cet ordre) forme une base locale orthonormée. Ces vecteurs sont illustrés à la figure 2.9. À noter que dans certains ouvrages les vecteurs unitaires $\hat{e}_r$ et $\hat{e}_\theta$ et $\hat{e}_\phi$ sont respectivement dénotés par $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

Pour résumer, les vecteurs de base locaux dans le cas des coordonnées sphériques sont donnés par

$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),\\
\hat{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta),\\
\hat{e}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{e}_x + \cos\phi\,\hat{e}_y = (-\sin\phi, \cos\phi, 0).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Noter que la base locale change de point en point et que chaque point de l'espace a son trièdre de vecteurs (noter toutefois que sur un rayon émanant de l'origine, tous les trièdres sont les mêmes si on les ramène coïncidents pour les comparer).

Si on a un vecteur $\vec{A}$ fixé au point de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), alors on pourra l'écrire comme une décomposition dans la base locale orthonormée comme suit :

$$\vec{A} = A_r\,\hat{e}_r + A_\theta\,\hat{e}_\theta + A_\phi\,\hat{e}_\phi. \tag{2.22}$$

Exercice de lecture 2.6. Supposons qu'on ait le vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ au point $\vec{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ donné par $\vec{A} = A_x\hat{e}_x + A_y\hat{e}_y + A_z\hat{e}_z$ dans la base orthonormée cartésienne. Trouver l'expression de ses composantes A_r, A_θ et A_ϕ dans la base locale des coordonnées sphériques.

Dans le cas des coordonnées sphériques, le vecteur position d'un point est donné par

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r. \tag{2.23}$$

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1. On considère la droite passant par l'origine avec angles sphériques θ_0 et ϕ_0 donnée par

$$\vec{r}(t) = t(\sin\theta_0\cos\phi_0, \sin\theta_0\sin\phi_0, \cos\theta_0), \quad t \in]-\infty, \infty[.$$

Quelle est l'équation de cette droite en coordonnées cylindriques ?