Solution # 5 Calculer les dérivées partielles $1^{ère}$ et 2^{ndes} de $f(x,y) = \sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -y^2\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos(xy) + y(-\sin(xy))\cdot x$$

$$= \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cos(xy) + x(-\sin(xy))\cdot y$$

$$= \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

On remarque que les dérivées partielles mixtes sont égales, ce qui est toujours le cas lorsque celles-ci sont des fonctions continues. Il y a un théorème qui démontre cela dont on ne fera pas la démonstration

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\sin(xy)$$

Solution #6 Calculer les dérivées partielles premières de $f(x,y,z) = x\cos^2\left(\frac{xy}{z^4}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos^2\left(\frac{xy}{z^4}\right) + x \cdot 2\cos\left(\frac{xy}{z^4}\right)\left(-\sin\left(\frac{xy}{z^4}\right)\right) \cdot \frac{y}{z^4}$$

$$= \cos^2\left(\frac{xy}{z^4}\right) - 2\left(\frac{xy}{z^4}\right)\cos\left(\frac{xy}{z^4}\right)\sin\left(\frac{xy}{z^4}\right)$$

en utilisant l'identité trigonométrique $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$, on peut réécrire $\frac{\partial f}{\partial x}$ sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos^2\left(\frac{xy}{z^4}\right) - \left(\frac{xy}{z^4}\right)\sin\left(\frac{2xy}{z^4}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 2\cos\left(\frac{xy}{z^4}\right)\sin\left(\frac{xy}{z^4}\right) \cdot \frac{x}{z^4}$$

$$= \frac{2x^2}{z^4}\cos\left(\frac{xy}{z^4}\right)\sin\left(\frac{xy}{z^4}\right)$$

$$= \frac{x^2}{z^4}\sin\left(\frac{2xy}{z^4}\right)$$

où on a de nouveau utilisé que $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\, 2\cos\left(\frac{xy}{z^4}\right)\left(-\sin\left(\frac{xy}{z^4}\right)\right) \cdot xy \cdot (-4z^{-5})$$

$$= \frac{4x^2y}{z^5}\sin\left(\frac{2xy}{z^4}\right)$$

Solution #8

31° en radians correspond à $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$. Or, on connait $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$.

On va utiliser une série de Taylor au 1er ordre.

Donc

$$f(x+h) \simeq f(x) + f'(x)\,h$$

Ici $x = \frac{\pi}{6}$ et $h = \frac{\pi}{180}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \cos(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\sin(31°) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0{,}5151$$

Un calcul plus exact donne $\sin(31°) = 0{,}51504\ldots$

Exercice #9

a) $a+b=(1-3,2+1,3-2)=(-2,3,1)$

b) $3a-2b=([3\cdot 1-2\cdot -3],[3\cdot 2-2\cdot 1],[3\cdot 3-2\cdot -2])=(9,4,13)$

- Ils sont décrits dans la même base.

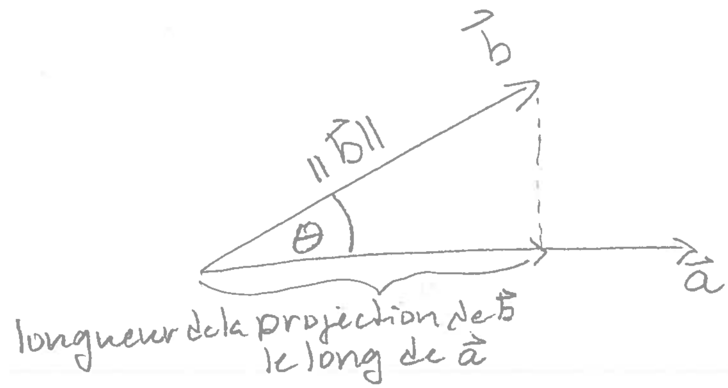
Exercice #10

$$u = [3, 2, 1]$$
$$v = [-2, 1, 2]$$
$$u \bullet v = 3 \cdot -2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -2$$

Vecteurs non-orthogonaux, pour être orthogonaux le produit scalaire doit être 0.

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{\| \mathrm{u} \| \| \mathrm{v} \|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot 3}$$
$$\theta = \arccos(\frac{-2}{3\sqrt{14}}) = 1.75 \, \mathrm{rad}$$

Solution #11



Sur le dessin, on voit que la longueur ℓ de la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ est donnée via trigonométrie simple par

$$\ell = \|\vec{b}\| \cos\theta$$

Or, on sait du produit scalaire que

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \ell = \|\vec{b}\| \cos\theta = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

Le vecteur projection de $\vec{b}$ selon $\vec{a}$ sera donné par la longueur ℓ de la projection multipliée par le vecteur unitaire parallèle et dans le même sens que $\vec{a}$. Ce vecteur unitaire est donné par $\hat{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

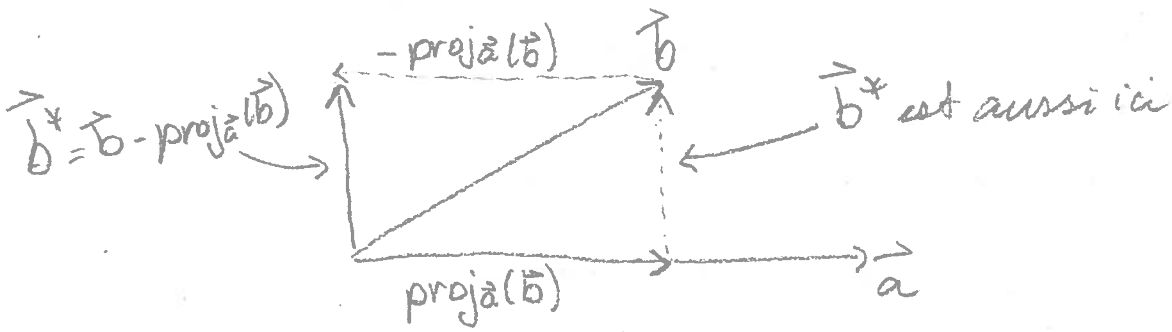
Donc

$$\mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \ell\,\hat{u} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\cdot\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$= \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$$

Solution #12

Dessin de la situation



On voit du dessin que $\vec b^*$ est $\perp$ à $\vec a$. Démontrons-le mathématiquement maintenant. Il faut montrer que le produit scalaire de $\vec b^*$ avec $\vec a$ est nul.

On a

$$\vec b^* \cdot \vec a = \left(\vec b - \text{proj}_{\vec a}(\vec b)\right) \cdot \vec a$$

$$= \left(\vec b - \frac{\vec b \cdot \vec a}{\|\vec a\|^2}\vec a\right) \cdot \vec a$$

$$= \vec b \cdot \vec a - \frac{(\vec b \cdot \vec a)(\vec a \cdot \vec a)}{\|\vec a\|^2} \quad (\text{or } \vec a \cdot \vec a = \|\vec a\|^2)$$

Or $\vec a \cdot \vec a = \|\vec a\|^2$, d'où

$$\vec b^* \cdot \vec a = \vec b \cdot \vec a - \frac{(\vec b \cdot \vec a)\cancel{\|\vec a\|^2}}{\cancel{\|\vec a\|^2}} = 0$$

Solution # 13

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^{\perp} = (a,b) \cdot (-b,a) = -ab + ba = 0$$

Donc $\vec{v}$ et $\vec{v}^{\perp}$ sont bien perpendiculaires.

Exercice #14

$u = [1, -2, 2]$
$v = [3, -1, -1]$
$w = [-1, 0, -1]$
$x = [-3, 6, -6]$
$u \times v = [4, 7, 5]$
$v \times u = [-4, -7, -5]$
$v \cdot (u \times w) = 9$
$u \times (u \times w) = (-24, 3, 15)$
$u \times x = (0, 0, 0)$

Solution #16

L'éq. paramétrique d'une droite est donnée par

$$\vec{r} = P_0 + t\vec{d}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position d'un point sur la droite et t la valeur du paramètre correspondant à ce point. Dans le cas présent

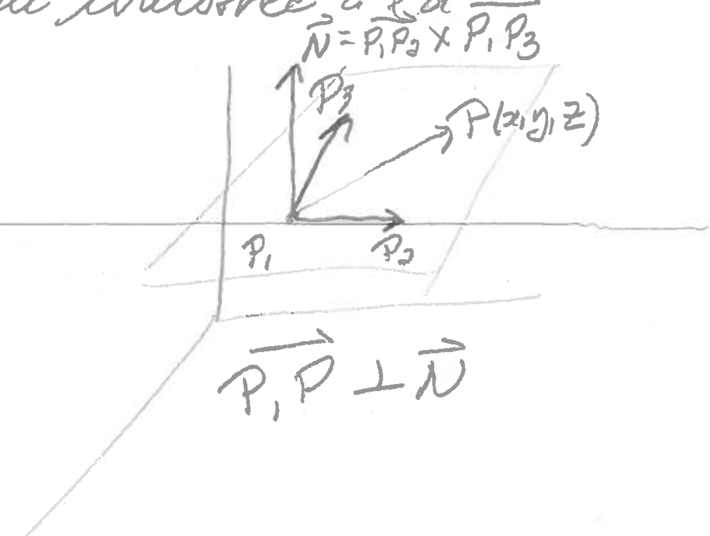
$$\vec{r} = (1,4,-1) + t(1,1,1)$$
$$= (1+t, 4+t, -1+t)$$

ce qui est équivalent à

$$x = 1+t$$
$$y = 4+t$$
$$z = -1+t$$

Solution #17

Il faut tout d'abord trouver un vecteur normal au plan. Un point $P=(x,y,z)$ arbitraire du plan relié à un point connu du plan donnera un vecteur qui est $\perp$ au vecteur normal. L'éq. d'un plan est basée sur cette idée illustrée à la figure ci-contre



On doit donc avoir que P satisfait à l'éq. suivante

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} = 0 .$$

a) Calculons $\vec{N}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 2, -8)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (-1, -1, -9)$$

$$\vec{N} = (-26, -10, 4) = 2(-13, -5, 2)$$

On peut prendre $\vec{N}' = (-13, -5, 2)$ comme normale

$$\overrightarrow{P_1P} = (x-1, y-2, z-3)$$

L'équation du plan est donc

$$(x-1, y-2, z-3) \cdot (-13, -5, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -13x + 13 - 5y + 10 + 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x + 5y - 2z - 17 = 0$$

Solution #17 (suite)

b) C'est le même genre d'exercice que le précédent.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, -3, -2)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -6, -4) = 2(-1, -3, 2)$$

On voit que $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\overrightarrow{P_1P_3}$ sont colinéaires, donc leur produit vectoriel sera nul. Si on ne s'était pas aperçu que ces deux vecteurs sont colinéaires, en calculant explicitement leur produit vectoriel, on obtient bien que le résultat est nul. En effet

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \left((-3)(-4) - (-2)(-6), (-2)(-2) - (-1)(-4), (-1)(-6) - (-3)(-2)\right)$$
$$= (0, 0, 0)$$

Les points P_1, P_2 & P_3 sont sur une même droite et il y a en fait une infinité de plans contenant cette droite (et donc les points P_1, P_2, P_3).

Solution #18

Pour spécifier un plan, il faut 3 pts. On en a déjà un qui est donné, soit $P_1 = (2,1,2)$. Il faut en trouver 2 autres qui seront sur la droite, soit

$$P_2 = \vec{r}(t=0) = (1,1,1)$$

$$P_3 = \vec{r}(t=1) = (0,1,2)$$

Alors $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,0,-1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,0,0)$

$$\Rightarrow \vec{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (0,2,0) = 2(0,1,0)$$

On peut prendre $\vec{N}' = (0,1,0)$ comme normale.

L'éq. du plan sera donc

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N}' = 0 \iff (x-2, y-1, z-2)\cdot(0,1,0) = 0$$

$$\Rightarrow y - 1 = 0$$

$$y = 1$$