Dérivé partiels :

- $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - \underset{z}{f(x,y)}$
- $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - \underset{z}{f(x,y)}$
- $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

Exemple 2.4.1

$z = x^2 + 3xy$

$\Delta_y z = x^2 + 3x(y+\Delta y) - (x^2 + 3xy)$

$\Delta_y z = 3x\Delta y$

$\Delta_x z = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)y - (x^2+3xy)$

$\Delta_x z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3xy + 3\Delta xy - x^2 - 3xy$

$\Delta_x z = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3y\Delta x$

$\Delta z = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x)(y+\Delta y) - (x^2+3xy)$

$\Delta z = x^2 + 2x\Delta x + 3xy + 3x\Delta y + 3\Delta xy + 3\Delta x\Delta y - x^2 - 3xy$

$\Delta z = 2x\Delta x + 3x\Delta y + 3y\Delta x + 3\Delta x\Delta y + \Delta x^2$

- $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$
- Dérivé partiel c'est seulement par rapport à la variable de dérivation le reste est considérer comme une constante

Exemple 2.4.4:

$U = x\cosh(yz) + xyz + x^2\tan(z+3x) + \ln(y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \cosh(yz) + yz + 2x\tan(z+3x) + 3x^2\sec^2(z+3)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = zx\sinh(yz) + xz + \frac{1}{y}$

$\frac{\partial u}{\partial z} = yx\sinh(yz) + xy + x^2\sec^2(z+3x)$

Différentiel totale :

- $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \textcircled{0}\Delta x + \textcircled{0}\Delta y$ → $\boxed{\text{Expression de l'accroissement}}$

- $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ → $\boxed{\text{différentiel totale}}$

↳ Cette formule est à partir de Δz de la première ligne

Dérivé totale:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

Etapes

① Trouver dérivé partiel de la formule de chaque variables

↳ $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial h}$ (celle n'ont pas d'importance)

Dérivé en chaine:

- $$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r}$$

- $$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial s}$$

② Trouver les dérivés partiel des variables des autres formules

↳ Ceux qui seront remplacer

③ intégré les deux ensemble en fonction de la variable cherché

Dérivé directionnelle:

- $$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \sin(\theta)$$

- Si on cherche un maximum on fait la dérivé de $\frac{dz}{ds} = f(\theta)$ (si on cherche un maximum et θ) et on la fait égalé à 0

- $$\left[\frac{dz}{ds}\right]_{\theta = \text{point}}$$

- Si on cherche lorsqu'elle est nulle on a simplement à faire égaler la formule trouver à 0 et le tout fonctionnera

- $$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

- gradient de la fonction z = $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}}$ ⟶ au point chercher

  ↳ $\vec{\nabla} f$ ou $\vec{\nabla} z$

- $$\frac{dz}{ds} = (\vec{\nabla} z) \cdot \vec{u}$$

- Pour trouver un vecteur unitaire on divise par son module

Dérivées partiels d'ordre superieur:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(\partial z/\partial x)}{\partial x} = f''_{xx}(x, y) = [f'_x(x, y)]'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\partial z/\partial y)}{\partial x} = f''_{yx}(x, y) = [f'_y(x, y)]'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\partial z/\partial x)}{\partial y} = f''_{xy}(x, y) = [f'_x(x, y)]'_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial(\partial z/\partial y)}{\partial y} = f''_{yy}(x, y) = [f'_y(x, y)]'_y$$

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
- Tu derives une fois ensuite tu rederive le resultat

Extremum d'une fonction:

- Maximum relatif si $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$
- Minimum relatif si $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$
- au point $(x_0, y_0) \to \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Système de coordonnées polaire: (x, y, z)

- $\vec{r} = r\cos(\theta)\hat{e}_x + r\sin(\theta)\hat{e}_y$

équivalent $\rightarrow$ $\vec{r} = (r\cdot\cos(\theta),\ r\cdot\sin(\theta))$

- $\vec{r} = r\hat{e}_r$

$\rightarrow$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r \cdot \cos(\theta)$

$y = r \cdot \sin(\theta)$

$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$

Système de coordonnée cylindrique: (ρ, φ, z)

- $\vec{r} = \rho\cos(\theta)\hat{e}_x + \rho\sin(\theta)\hat{e}_y + z\hat{e}_z$

$\rightarrow$ $x = \rho\cdot\cos(\theta)$

$y = \rho\cdot\sin(\theta)$

$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan(\theta) = y/x$

Base locale orthonormée:

- Un vecteur $\vec{A}$ fixé au point (ρ, φ, z) donne

$$\vec{A} = A_\rho\hat{e}_\rho + A_\varphi\hat{e}_\varphi + A_z\hat{e}_z$$

- $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$

Coordonnée sphériques:

- $\vec{r} = r\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + r\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + r\cos(\theta)\hat{e}_z$

$\rightarrow$ $x = r\cdot\sin(\theta)\cos(\varphi)$

$y = r\cdot\sin(\theta)\sin(\varphi)$

$z = r\cos(\theta)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\tan(\varphi) = y/x$

$\cos(\theta) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$