Chapitre 4

Surfaces dans l'espace

Note : Ceci est un complément à la Section 10.5 dans Kreyszig et précise ce qui est dit à la section 10.6.

4.1 Courbes de coordonnées sur une surface

Soit $\vec{r}(u,v)$ la paramétrisation d'une surface donnée explicitement par

$$\begin{aligned} \vec{r}(u,v) &= x(u,v)\,\hat{e}_x + y(u,v)\,\hat{e}_y + z(u,v)\,\hat{e}_z \\ &\equiv \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

(Note : Dans certains ouvrages on utilise $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ou des notations semblables pour désigner $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ et $\hat{e}_z$)

Définissons ce qu'on entend par *courbes de coordonnées* sur une surface. Une surface est un objet bidimensionnel et donc sa paramétrisation dépend de deux paramètres. Une courbe de coordonnées est une courbe obtenue en maintenant un des deux paramètres fixe. Soit $\vec{r}(u_0,v_0)$ un point fixé sur une surface, alors $\vec{r}(u,v_0)$ où v_0 est une constante sera appelée courbe de coordonnée en u (car c'est u qui varie dans ce cas). Cette courbe de coordonnées passe par le point $\vec{r}(u_0,v_0)$. Ceci est illustré à la figure 4.1, où on montre quelques courbes de coordonnées. De même, $\vec{r}(u_0,v)$ sera appelée courbe de coordonnée en v (passant par $\vec{r}(u_0,v_0)$).

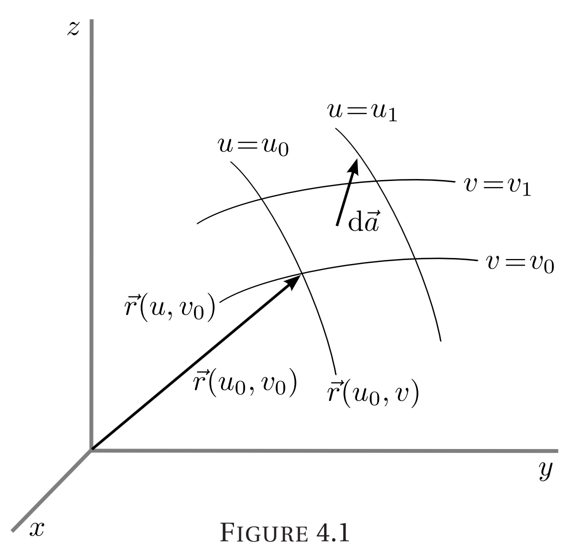

FIGURE 4.1

Note : Par abus de langage, on référera souvent à un point $\vec{r}(u,v)$ sur une surface par ses *coordonnées* (u,v) et on parlera du point (u,v), alors qu'en réalité c'est $\vec{r}(u,v)$ qui est le point sur la surface.

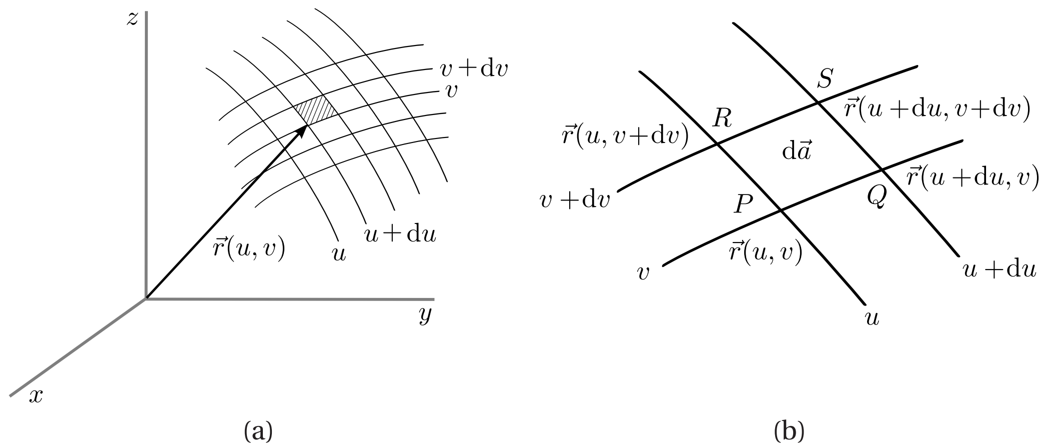

FIGURE 4.2

4.2 Élément d'aire sur une surface paramétrée

Considérons un bout d'une surface paramétrée dans un voisinage du point $\vec{r}(u,v)$ tel qu'illustré à la figure 4.2 (a). On désire trouver une expression pour l'élément d'aire sur cette surface montré en hachuré sur la figure et contenu entre les courbes de coordonnées u et $u+\mathrm{d}u$ et v et $v+\mathrm{d}v$. Un aggrandi de la situation est montré à la figure 4.2 (b), où on voit que l'élément d'aire est contenu entre les points $P=\vec{r}(u,v)$, $Q=\vec{r}(u+\mathrm{d}u,v)$, $R=\vec{r}(u,v+\mathrm{d}v)$ et $S=\vec{r}(u+\mathrm{d}u,v+\mathrm{d}v)$. Cet élément, étant en fait infinitésimal, a la forme d'un parallélogramme infinitésimal sous-tendu par les vecteurs $\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(u+\mathrm{d}u,v)-\vec{r}(u,v)$ et $\overrightarrow{PR}=\vec{r}(u,v+\mathrm{d}v)-\vec{r}(u,v)$. Or, on sait calculer l'aire sous-tendue par deux vecteurs, elle est donnée par leur produit vectoriel (voir notes de cours sur la géométrie vectorielle). Comme ici on a une aire contenue entre des points infinitésimalement près les uns des autres (ou si on veut, compris entre des courbes de coordonnées infinitésimalement rapprochées), c'est pour cela qu'on parle d'un élément d'aire et celui-ci est donné par

$$\mathrm{d}\vec{a}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}. \tag{4.2}$$

L'élément d'aire est vectoriel, car il a une orientation déterminée par l'ordre dans lequel on fait le produit vectoriel entre $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$. Ultimement, pour calculer des aires qui sont des nombres, on prendra sa norme donnée par $dA=\|\mathrm{d}\vec{a}\|$. Le sens de l'élément d'aire est celui de la normale à la surface au point où il se situe étant donné que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont tangents à la surface ; on précisera cela sous peu.

On peut exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en terme d'une dérivée (de même pour $\overrightarrow{PR}$) en faisant appel à la notion de différentielle (voir notes de cours sur le calcul différentiel à une variable). En effet, dans

$$\overrightarrow{PQ}=\vec{r}(u+\mathrm{d}u,v)-\vec{r}(u,v), \tag{4.3}$$

v peut être considéré comme fixe, car c'est le même qui apparaît dans les deux termes formant $\overrightarrow{PQ}$, et ainsi on a

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u \tag{4.4}$$

(on peut aussi arriver à ce résultat en multipliant et en divisant par du le membre de droite de l'éq. 4.3 pour faire apparaître une dérivée). De façon similaire, on a

$$\overrightarrow{PR} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{4.5}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{a} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\mathrm{d}u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\mathrm{d}v \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Or, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ est la normale à la surface au point $\vec{r}(u,v)$, et donc on a

$$\mathrm{d}\vec{a} = \vec{N}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.7}$$

Si on ne veut que l'élément d'aire, on prend alors la norme du dernier résultat et on a ainsi

$$\mathrm{d}a = ||\mathrm{d}\vec{a}|| = ||\vec{N}||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{4.8}$$

En certaines occasions, on utilise le vecteur unitaire $\hat{n} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}$ pour représenter la normale à la surface. On peut alors écrire d$\vec{a}$ sous la forme

$$\mathrm{d}\vec{a} = \frac{\vec{N}}{||\vec{N}||}||\vec{N}||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \hat{n}\,||\vec{N}||\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \hat{n}\,\mathrm{d}a. \tag{4.9}$$

Ceci est une forme qui est couramment utilisée pour écrire les intégrales de surfaces, notamment dans les théorèmes de la divergence et de Stokes qui seront vus plus loin. Cependant, pour les calculs, la forme la plus souvent utile est celle apparaissant à l'éq. (4.7) (bien qu'on utilise aussi parfois la forme $\hat{n}\,\mathrm{d}a$ dans des cas simples où la normale unitaire est évidente et l'élément d'aire est simple à exprimer, comme p. ex. en coordonnées cartésiennes dans un plan ou en coordonnées polaires dans un plan).