Calcul intégral à plusieurs variables :

Integration partielle et successive

- $\frac{\partial[F(x,y)+K]}{\partial x} = f(x,y)$

↳ y est une constante dans cette dérivée donc on peut écrire $= \int [F(x,y) + K(y)]\,dy$

$$= \int [\int F(x,y)\,dx]\,dy$$

$$= \int\int f(x,y)\,dx\,dy$$

- après avoir fait une intégrale double, le truc est de faire une dérivée partiel pour vérifié si la réponse donne bien la formule de départ

Intégrale double

- $\iint_R f(P)\,dr = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta r_i$

↳ R s'appelle le domaine d'intégration

- $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \sum f(P_i)\,\Delta x_i\,\Delta y_i$

Evaluation intégrale double

- $\iint_R f(x,y)\,dr = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

Calcul aire planes

- $\iint_R dr = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\,dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\,dx$

- $\iint_R dr = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\,dy = \int_c^d [\psi_2(x) - \psi_1(x)]\,dx$

Volume

- $V = \iint_R [\phi_2(x,y) - \phi_1(x,y)]\,dx\,dy$

Intégrales triples

- $\iiint_V f(x,y,z)\,dv = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\theta_1(x,y)}^{\theta_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

Changement variable integrale multiple

- $dv = (\vec{PQ}, \vec{PR}, \vec{PS}) = \det \begin{vmatrix} (PQ)_x & (PR)_x & (PS)_x \\ (PQ)_y & (PR)_y & (PS)_y \\ (PQ)_z & (PR)_z & (PS)_z \end{vmatrix}$

$\Downarrow$

- $dv = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

$\Downarrow$

- $dv = \left| \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} \right| du\, dv\, dw$

donc La formule de Changement de Variable

- $\iiint_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_V f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} \right| du\, dv\, dw$

Integral de ligne :

C = curve

- $\int_C F(r) \cdot dr = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$

- $\int_C F(r) \cdot dr = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz)$

$$= \int_a^b (F_1 x' + F_2 y' + F_3 z')\, dt$$