ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Yves Bérubé-Lauzière, Ph.D.

Département de génie électrique et de génie informatique
Université de Sherbrooke

version 2.4

Table des matières

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Quelques notations, nombres réels et intervalles

Dans ce qui suit, $\mathbb{R}$ représente l'ensemble de tous les nombres réels. Le symbole ∞ signifie l'« infini ». Ce n'est pas un nombre à strictement parler, mais on peut le voir comme un nombre infiniment grand, ou si on veut un nombre plus grand que n'importe quel autre nombre fini. Donc, si on pense avoir trouvé le plus grand nombre, alors l'infini est encore plus grand.

Le symbole $\in$ signifie « est élément de », comme p.ex. $x \in A$ veut dire que x est un élément de l'ensemble A (ou plus simplement x est dans A). La barre horizontale $|$ signifie « tel que », comme p.ex. $\{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$ signifie l'ensemble des x éléments de $\mathbb{R}$ tel que x est plus grand que 2. Le symbole $\forall$ sera aussi parfois utilisé ; il signifie « pour tout » comme p.ex. dans $\forall x \in A$ qui se lit « pour tout x élément de A ». Un autre symbole qu'on rencontre également est $\exists$ qui signifie « il existe » comme p.ex. dans $\forall x \in A\ \exists y \in A \mid y < x$, ce qui se lit « pour tout x élément de A il existe y dans A tel que y est plus petit que x ». On utilisera ici moins souvent les symboles $\forall$ et $\exists$, mais il est bon de savoir ce qu'ils signifient. Une expression du type $\forall x \in A\ \exists y \in A \mid y < x$ s'appelle une *proposition mathématique* ou simplement une proposition.

Exercice de lecture 1.1. Écrivez en mots la signification de la proposition mathématique suivante : $\exists a \in A\ \forall b \in A \mid a + b < 0$.

Dans la suite du présent document, on utilisera souvent des sous-ensembles des nombres réels sous forme d'*intervalles*. Voici les différents types d'intervalles qu'on rencontrera et leurs définitions.

Définition des intervalles	
Intervalle ouvert	$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Intervalle fermé	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \| a \leq x \leq b\}$
Intervalles semi-ouverts	$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \| a \leq x < b\}$
	$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \| a < x \leq b\}$
Intervalles infinis (demi-droites)	$]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \| x > a\}$
	$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \| x \geq a\}$
	$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \| x < a\}$
	$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \| x \leq a\}$
Droite réelle	$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

1.2 Utilisation de l'algèbre

Généralement lorsqu'on a à résoudre un problème de nature mathématique en sciences et génie, on a recours à l'algèbre pour faire les calculs. Plus spécifiquement, que ce soit pour des calculs faits à la main ou réalisés à l'aide d'un programme informatique sur ordinateur, il est de loin plus avantageux d'utiliser des variables pour désigner les quantités impliquées dans le problème à résoudre. Dans un calcul à la main, on manipule les variables et ce n'est qu'à la toute fin qu'on remplace ces variables par leurs valeurs numériques pour arriver à une réponse. Dans un programme informatique, on définit des variables qu'on pose égales aux valeurs numériques et ce sont les variables qui sont manipulées à l'intérieur du programme (et non pas les valeurs numériques directement). L'utilisation de variables dans ce cas permet de rendre plus clair le code du programme et son déroulement. Cela rend aussi plus facile d'apporter des correctifs ou changements au programme, comme p.ex. pour résoudre des bugs, ou pour une mise à jour du programme avec de nouvelles valeurs des données. Il est important de bien garder cela en tête lorsqu'on résoud un problème de nature mathématique. Si le lecteur n'est pas à l'aise avec cette façon de faire, c'est une habileté qu'il se doit de développer et de pratiquer dès maintenant. L'exercice qui suit donne une opportunité d'exercer cette habileté.

Exercice de lecture 1.2. La théorie du magnétisme dit qu'une particule chargée de charge q se déplaçant à la vitesse v dans un champ magnétique B subit une force F perpendiculaire à la fois à la vitesse et au champ magnétique. La grandeur de cette force est $F = qvB$. Cette force fait en sorte que la particule suit une trajectoire sous forme d'orbite circulaire si sa vitesse est initialement perpendiculaire au champ magnétique. La 2$^{\text{e}}$ loi de Newton de la mécanique dit d'autre part que la force exercée sur un objet de masse m est donnée par le produit de cette masse et de l'accélération a de l'objet, c'est-à-dire $F = ma$. Dans le cas d'un mouvement circulaire, l'accélération est appelée accélération centripète et est donnée par $a = v^2/r$, où r est le rayon du cercle et v la vitesse de l'objet. Supposons que la particule chargée mentionnée précédemment soit de masse m.

(a) Donnez une expression algébrique pour le rayon de la trajectoire de la particule à l'aide des équations sus-mentionnées.
(b) Donnez une expression pour la période de révolution T d'un objet qui parcourt un cercle de rayon r à une vitesse constante v (c.à.d. le temps pour faire un tour du cercle).
(c) À l'aide des résultats obtenus en (a) et (b), donnez une expression pour la période de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique.
(d) Un proton, qui possède une charge positive $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C et une masse $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg décrit une orbite circulaire ayant un rayon de 14 cm dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique de 0.35 T. Déterminez la vitesse orbitale du proton et sa période de révolution.

Exercice de lecture 1.3. Résoudre pour θ l'équation suivante :

$$a \sin(\theta + \varphi) + b \sin(\theta - \psi) = 0.$$

Note : Ceci est un exercice permettant de réviser certaines identités de la trigonométrie.

1.3 Sommations

La somme de N quantités $x_1, x_2, \ldots, x_N$ s'écrit à l'aide du symbole de sommation $\sum$ (version majuscule de la lettre grecque « sigma ») sous la forme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N \equiv \sum_{k=1}^{N} x_k, \tag{1.1}$$

qu'on écrira aussi sous la forme $\sum_{k=1}^{N} x_k$ par économie d'espace dans du texte. Cette expression se lit « la somme pour k variant (ou allant) de 1 à N des x_k ». La lettre k est appelée variable de sommation et elle est qualifiée de variable « muette », car toute autre lettre peut remplacer k dans le rôle de variable de sommation, cela ne change pas le résultat; p.ex.

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{l=1}^{N} x_l = \sum_{m=1}^{N} x_m = \ldots$$

qu'on abrègera souvent $\sum x_k$ lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion sur la plage de valeurs que peut prendre la variable de sommation k. En développant explicitement les sommations on démontre les règles suivantes

1. $\sum_{k=1}^{N}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k + \sum_{k=1}^{N} y_k$;
2. $\sum_{k=1}^{N} a x_k = a \sum_{k=1}^{N} x_k$;
3. $\sum_{k=1}^{N} a = na$.

Exercice de lecture 1.4. Calculez $\sum_{k=1}^{4} k$ et $\sum_{k=1}^{4} 2k^2$.

Chapitre 2

Fonction d'une variable réelle

2.1 Définition élémentaire d'une fonction d'une variable réelle

Définition : Une fonction d'une variable réelle x est une prescription $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à chaque valeur de $x \in \mathbb{R}$ associe une autre valeur réelle (et une seule) dénotée par $f(x) \in \mathbb{R}$.

Notons l'importance dans la définition qu'à chaque valeur de x il ne correspond qu'une seule valeur $f(x)$. P.ex. la prescription $f(x)$ illustrée à la figure 2.1 n'est pas une fonction. On parlera communément d'une *fonction réelle* dans le cas où on est en présence d'une fonction satisfaisant la définition précédente. Un exemple de fonction est donné par $f(x) = x^2$ dont le graphe est illustré à la figure 2.2. Ici, à chaque valeur de x correspond le carré de cette valeur. À noter que la variable dont la fonction dépend (ici x) pourrait être dénotée par un autre symbole, p.ex. t. Cela ne change en rien la fonction (ultimement, la variable ne fait que représenter des valeurs numériques et on dit qu'elle est *muette*). En pratique, on utilisera des noms de variables qui ont un sens dans le contexte du problème considéré, p.ex. on utilise communément x pour décrire une variable spatiale et t pour le temps. On pourrait même utiliser la lettre x pour désigner une fonction, p.ex. $x(t)$ pour décrire comment la position x d'un objet varie en fonction du temps t.

Le *domaine d'une fonction* est l'ensemble des valeurs sur lesquelles la fonction est évaluée. P.ex. si la fonction $f(x)$ est évaluée pour les valeurs de x contenues dans l'intervalle $[a, b]$, alors cet intervalle est le domaine de f. L'*image d'une fonction* f est l'ensemble des valeurs prises par cette fonction sur le domaine considéré. P.ex. si on a $f(x) = x^2$ considérée sur le domaine $[-2, 3]$, alors l'image de f sera l'intervalle $[0, 9]$, car toutes les valeurs que f peut prendre sur l'intervalle $[-2, 3]$ sont comprises entre 0 et 9.

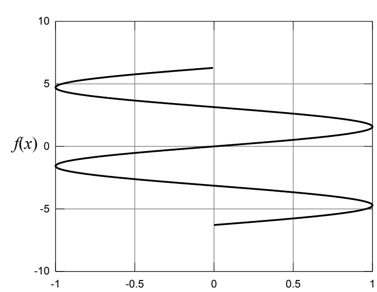


FIGURE 2.1

Exercice de lecture 2.1. Expliquez pourquoi la prescription illustrée à la figure 2.1 n'est pas une fonction.

Exercice de lecture 2.2. Soit $f(x) = x^3$. Supposons qu'on vous dise que l'image de f est l'intervalle $]-64, 8]$ (intervalle semi-ouvert). Quel est le domaine de f ?

2.2 Graphe d'une fonction

On représente communément les fonctions de façon graphique sous forme de courbe par leur *graphe* cartésien. On construit ce graphe en faisant correspondre à chaque valeur de x la valeur $y = f(x)$ et en portant dans le plan cartésien un point à la hauteur y au dessus de la valeur de x correspondante sur l'axe horizontal (ou de façon équivalente en traçant un point à la position du couple (x, y) dans le plan). En traçant plusieurs tels points pour différentes valeurs de x, on obtient la courbe. La figure 2.2 illustre le graphe de la fonction $f(x) = x^2$.

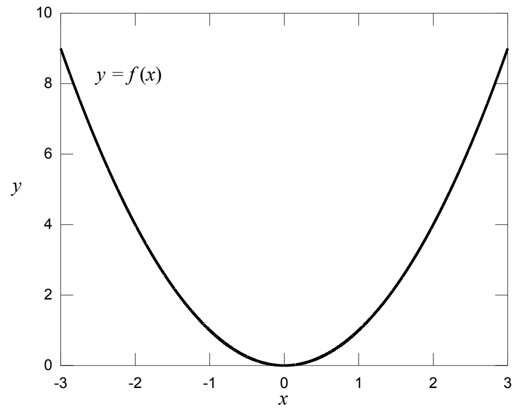


FIGURE 2.2

Exercice de lecture 2.3. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = x + 1$. À quoi correspond ce graphe ?

2.3 Fonctions avec propriétés particulières

Fonctions paires et impaire Une fonction f est dite *paire* si

$$f(-x) = f(x). \tag{2.1}$$

Une fonction f est dite *impaire* si

$$f(-x) = -f(x). \tag{2.2}$$

La fonction $f(x) = x^2$ illustrée à la figure 2.2 est un exemple de fonction paire. La fonction $\cos(x)$ est aussi une fonction paire (convainquez-vous en !). La figure 2.3 illustre une fonction impaire. De par sa définition, une fonction paire est une fonction symétrique par rapport à l'axe des y (axe vertical qui passe par $x = 0$), ou si on veut, les valeurs pour les x négatifs sont la réflexion miroir à travers l'axe des y des valeurs pour les x positifs. Pour une fonction impaire, les valeurs pour les x négatifs sont la réflexion à travers l'axe des y suivi d'une seconde réflexion à travers l'axe des x.

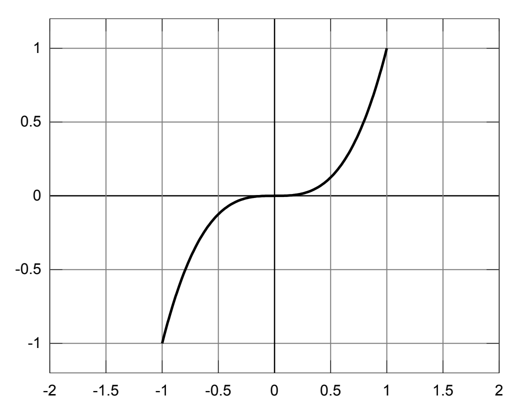


FIGURE 2.3

Exercice de lecture 2.4. La fonction $f(x) = x^4$ est-elle paire ?

Exercice de lecture 2.5. Soit $f(x)$ une fonction quelconque. (a) Montrez que $g(x) = f(x) + f(-x)$ est une fonction paire. Indice : Regardez que vaut $g(-x)$. (b) Montrez que $h(x) = f(x) - f(-x)$ est une fonction impaire.

Fonctions périodiques Une fonction f est dite *périodique* de période L si

$$f(x+L) = f(x). \tag{2.3}$$

L'inverse de la période, c.à.d. $1/L$, est appelée la *fréquence*. Dans le cas où x est une variable spatiale, L sera une longueur ; $\kappa = 1/L$ est alors appelée *fréquence spatiale*. Supposons plutôt qu'on ait une fonction temporelle $s(t)$, c.à.d. une fonction s qui dépend du temps t (cela pourrait, p.ex., représenter un signal électrique). Alors si ce signal est périodique de période T (donc $s(t) = s(t+T)$), sa fréquence $1/T$ est habituellement dénotée par la lettre f ($f = 1/T$)[1]. La figure 2.4 illustre une fonction périodique (on ne montre ici que quelques périodes de la fonction). On voit que la fonction à l'intérieur d'une période définie par tout intervalle de longueur L se répète sur tout intervalle de longueur L mis bout à bout à cet intervalle. Une fonction périodique est donc entièrement connue si on la connaît sur une période (en d'autre mots, l'information sur une telle fonction est entièrement contenue dans une période).

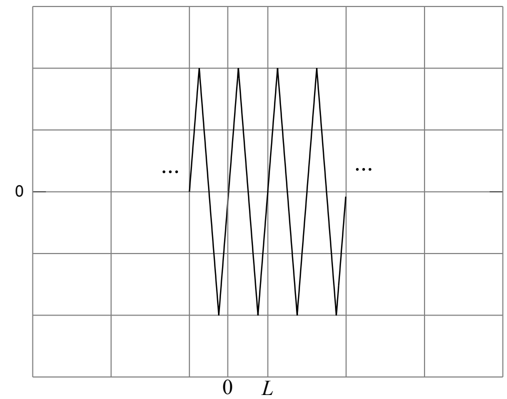


FIGURE 2.4

Exercice de lecture 2.6. La fonction $f(x) = \cos(x)$ est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Exercice de lecture 2.7. La fonction $f(x) = \cos(x/L)$ est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

Exercice de lecture 2.8. La fonction $f(x) = \cos(\frac{2\pi x}{L})$ est-elle périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

2.4 Addition, soustraction, multiplication et quotient de fonctions

Rappelons brièvement que si on a deux fonctions f et g, alors leur somme $f+g$ sera donnée par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, leur différence $f-g$ par $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, leur produit fg par $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x)$ et leur quotient f/g par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (le quotient est défini pour toute valeur de x telle que $g(x) \neq 0$, car on ne peut pas diviser par zéro).

Exercice de lecture 2.9. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^7$. À quelle fonction correspond la fonction fg ?

2.5 Composition de fonctions

Soit $y = f(x)$ une première fonction (de la variable x) et $z = g(y)$ une seconde fonction (de la variable y). Comme $y = f(x)$, on peut écrire $z = g(f(x))$, ce qui est équivalent à dire qu'on calcule d'abord $y = f(x)$ et on évalue la fonction g à la valeur de y obtenue. Ceci est illustré à la figure 2.5. Pour x prenant toutes ses valeurs possibles, $z = g(f(x))$ est une nouvelle fonction de x qu'on

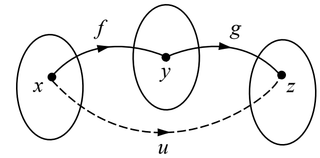


FIGURE 2.5

[1]Attention à ne pas confondre la lettre f utilisée ici, avec la même lettre f souvent utilisée pour dénoter une fonction comme on l'a fait jusqu'à maintenant.

pourrait dénoter par $u(x) = g(f(x))$. Cette nouvelle fonction u est appelée la *composition* de g avec f et on la dénote par $u = g \circ f$ qui se lit « g rond f » (attention à ne pas confondre la composition de 2 fonctions avec leur produit, ce n'est pas du tout la même chose). Donc, par définition,

$$u(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{2.4}$$

Exercice de lecture 2.10. Soit $f(x) = x^4$ et $g(x) = \cos(x)$. (a) À quelle fonction correspond $u = g \circ f$? (b) À quelle fonction correspond $v = f \circ g$? Que constatez-vous par rapport à (a), obtenez-vous la même chose ? Note : Il se peut que vous soyez un peu confondus ici, car on a écrit les fonctions f et g comme dépendant de la même variable x. Rappelez-vous, comme il a été dit précédemment, que la variable dont une fonction dépend n'est qu'une variable qui ultimement représente des nombres (variable muette). P.ex. les fonctions $p(x) = x^5, x \in [1,2]$ et $q(t) = t^5, t \in [1,2]$ représentent la même fonction, on n'a fait que changer la variable de nom. Au besoin, si vous êtes confondus, changez de nom les variables utilisées.

Exercice de lecture 2.11. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = \log(x)$. (a) À quelle fonction correspond $g \circ f$? (b) À quelle fonction correspond $f \circ g$? Que remarquez-vous dans ce cas ?

Le résultat de l'exercice de lecture 2.11 est vrai peut importe $g(x)$, c.à.d. soit $f(x) = x$ et $g(x)$ une fonction quelconque. Alors, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ sera égale à $g(x)$, car peu importe ce qu'on donne à f comme valeur, elle retourne cette valeur (p.ex. $f(3) = 3$, $f(-10) = -10$, etc...). Donc, si on donne $g(x)$ à f, elle retournera $g(x)$. Également, si on considère $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$, car $f(x) = x$. On voit donc que $f(x) = x$ est l'*élément neutre pour la composition de fonctions* (on la dénotera par $I(x) = x$ dans ce contexte), car si on la compose avec une autre fonction, elle redonne cette autre fonction. Ceci est tout à fait analogue au nombre 1 pour la multiplication. Si on multiplie 1 par n'importe quel autre nombre, on réobtient cet autre nombre ; le nombre 1 est dit élément neutre pour la multiplication.

Exercice de lecture 2.12. Quel est l'élément neutre pour l'addition ? En d'autres mots, quel nombre, qui additionné à n'importe quel autre nombre, redonne cet autre nombre ?

La composition de fonctions est une opération très souvent utilisée. P.ex., on peut considérer la fonction $f(t) = \sin(\frac{\pi t}{T})$ comme étant composée des fonctions $\sin(t)$ et $\frac{\pi t}{T}$. On utilisera souvent ce genre de décomposition lorsqu'on aura à dériver des fonctions plus tard.

Exercice de lecture 2.13. Écrivez de quelles fonctions est composée la fonction $g(x) = e^{-x^2}$.

2.6 Inverse d'une fonction (ou fonction inverse)

On a vu à la section précédente que la fonction $I(x) = x$ est l'élément neutre pour la composition de fonctions. Supposons qu'on ait trouvé une fonction $h(x)$ telle que $(h \circ f)(x) = (f \circ h)(x) = x(= I(x))$, alors on appelle h la *fonction inverse* (ou *fonction réciproque*) de f et on la dénote par f^{-1} ; donc

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x. \tag{2.5}$$

Cette dernière équation nous dit que $f(x)$ est ramenée à x par la fonction f^{-1}. On aura aussi

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x. \tag{2.6}$$

De façon plus abstraite, on écrit aussi $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. Attention à ne pas confondre ici le "-1" avec un exposant ; $f^{-1}(x)$ n'est pas égale à $1/f(x)$.

Chapitre 3

La dérivée d'une fonction

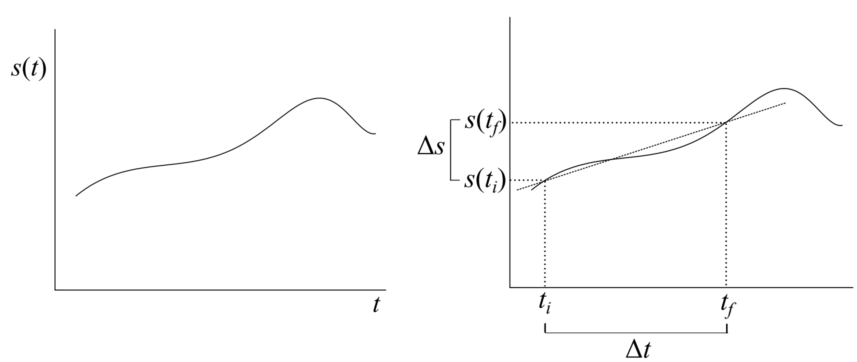
3.1 Introduction à la notion de dérivée d'une fonction

Une bonne façon de motiver l'introduction de la dérivée d'une fonction est de considérer une situation physique simple, à savoir l'étude d'un objet en mouvement (c.à.d. sa cinématique).

Soit un objet dont la position s en fonction du temps t est illustrée à la figure 3.1 (a). La position est ici exprimée sous la forme d'une fonction $s(t)$ et la figure illustre le graphe de cette fonction. Considérons la distance nette parcourue par l'objet entre les positions finales et initiales correspondant aux instants t_i et t_f (ou si on veut la distance nette parcourue dans l'intervalle $\Delta t = t_f - t_i$ à partir du temps t_i). Cette distance est donnée par (voir Fig. 3.1 (b))

$$\Delta s = s(t_f) - s(t_i). \tag{3.1}$$

La vitesse moyenne de l'objet entre ces deux positions, qu'on dénotera par $\bar{v}$, est alors donnée par la



(a) (b)

FIGURE 3.1

distance parcourue divisée par le temps de parcours $\Delta t = t_f - t_i$, soit

$$\bar{v} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{3.2}$$

Cette vitesse moyenne correspond à la pente de la droite reliant le point $(t_i, s(t_i))$ au point $(t_f, s(t_f))$ (une telle droite est aussi appelée une corde ou une sécante).

Considérons maintenant un intervalle de temps plus court à partir de t_i tel qu'illustré à la fig. 3.2. Alors, il se sera écoulé moins de temps entre les deux instants qu'on considère et l'objet se sera moins déplacé, mais la vitesse moyenne entre ces deux instants sera plus représentative de la *vitesse instantanée* au temps t_i. On voit ainsi que plus on réduit l'écart entre t_i et t_f (c.à.d. plus on rapproche t_f de t_i), meilleure sera notre approximation de la vitesse instantanée au temps t_i. On dit alors qu'on fait tendre t_f vers t_i, ce qu'on indique par $t_f \to t_i$ et qui se lit "t_f tend vers t_i". Dans ce qui suit, on utilisera une notation un peu différente, mais toutefois tout à fait équivalente. Comme on peut écrire $t_f = t_i + \Delta t$, où $\Delta t = t_f - t_i$, on dénotera le déplacement entre t_i et $t_i + \Delta t$ $(= t_f)$ par

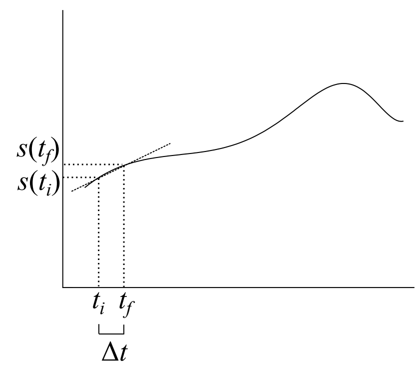


FIGURE 3.2

$$\Delta s = s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$$

et la vitesse moyenne sera donnée par

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}. \tag{3.3}$$

Maintenant, si on désire obtenir la vitesse instantanée en t_i, il suffit de diminuer Δt de plus en plus jusqu'à le faire tendre vers zéro. Il semble à prime abord y avoir une difficulté à faire cela, car on aura alors une division par zéro dans l'équation précédente. Or, il faut se rappeler que si $\Delta t \to 0$, alors le numérateur $s(t_i + \Delta t) - s(t_i)$ tendra lui aussi vers zéro (la distance parcourue sera elle aussi très petite si le temps de parcours est très petit). En réalité, ce qui se passe (sauf dans des cas pathologiques qu'on ne considérera pas ici), c'est que le rapport entre Δs et Δt demeure un nombre fini et si on regarde la situation géométriquement sur la figure 3.2, on voit que ce rapport donne la *pente de la droite tangente* (appelée simplement la tangente) à la courbe qui est un nombre parfaitement bien défini. La vitesse instantanée s'écrit alors

$$v(t_i) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t}, \tag{3.4}$$

où $\lim_{\Delta t \to 0}$ indique que l'on prend la limite de la quantité qui suit lorsque Δt tend vers zéro. On n'étudiera pas ici en détail la notion de limite et ses subtilités, comme p.ex. la limite à gauche et la limite à droite ; on réfère le lecteur à d'autres ouvrages sur le calcul différentiel et intégral. Il suffit ici de considérer qu'on fait tendre une quantité vers une autre. À noter qu'en pratique, lorsqu'on évalue une expression telle que celle donnée à l'équation précédente (éq. 3.4), il faut d'abord calculer le rapport et ensuite prendre la limite[1]. Un exemple de comment on fait cela sera donné plus loin. Comme il a été évoqué précédemment, lorsque l'on porte sur notre graphique la vitesse instantanée de la position en fonction du temps, cette vitesse instantanée correspond à la pente de la tangente. Ceci est illustré à la figure 3.3.

[1]On ne se questionnera pas dans le présent ouvrage à savoir si la limite donnée à l'équation 3.4 existe. Il faut cependant mentionner qu'il y a des cas où cette limite n'existe pas en un point donné, et alors, la fonction n'admet pas de dérivée en ce point. Notons, toutefois, qu'il s'agit là de cas pathologiques qui ne se présente que très rarement dans les applications pratiques.

Donc, pour résumer, si on connaît la fonction position $s(t)$ d'un objet en fonction du temps, on peut obtenir sa vitesse instantanée en un temps donné t en calculant la quantité

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \tag{3.5}$$

Cette quantité est appelée la *dérivée* de la fonction $s(t)$ par rapport à t et elle est dénotée par

$$s'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}. \tag{3.6}$$

Cette dernière équation constitue en fait la définition de ce qu'est la dérivée. Une autre notation, appelée notation de Leibniz, tout autant utilisée est

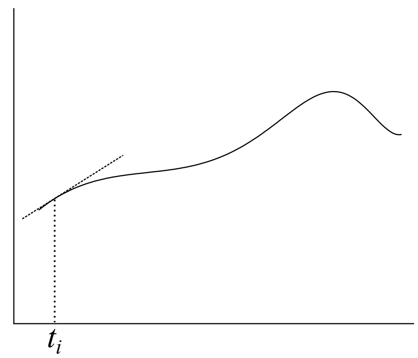


FIGURE 3.3

$$s'(t)=\frac{ds}{dt}. \tag{3.7}$$

Dans cette notation, on voit la dérivée comme le rapport de quantités infiniment petites (dites *infinitésimales*) ds et dt qui correspondent grossièrement à $ds\approx\lim_{\Delta t\to 0}s(t+\Delta t)-s(t)$ et $dt\approx\lim_{\Delta t\to 0}\Delta t$. Il est bien mentionné "grossièrement" ici, car tel que vu précédemment, on prend la limite seulement une fois que le rapport a été calculé et pas avant comme la notation $\frac{ds}{dt}$ pourrait le suggérer à prime abord. Attention, dans cette dernière notation, on ne peut pas simplifier le "d" au numérateur avec celui du dénominateur. Ceci est simplement une notation pour indiquer la limite.

Une autre notation qu'on retrouve parfois est $\dot{s}(t)$ (c.à.d. un point est mis au dessus de s). Celle-ci a été introduite par Newton, qui a découvert le calcul différentiel en même temps que Leibniz. La notation de Newton est toutefois généralement réservée au cas où la variable indépendente est le temps. Newton appelait une dérivée une *fluxion*.

La dérivée est elle-même une fonction dont on peut tracer le graphe. Dans le contexte présent d'un corps en mouvement, ce graphe illustre sa vitesse à chaque instant (c.à.d. sa vitesse instantanée). La figure 3.4 montre le graphe de la dérivée de la fonction illustrée précédemment à la figure 3.1.

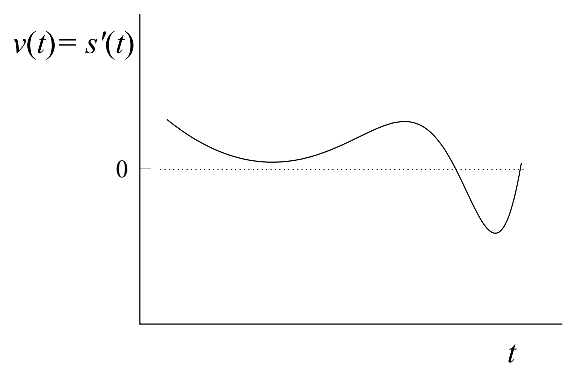


FIGURE 3.4

3.2 Calcul d'une dérivée à partir de la définition

Pour calculer la dérivée d'une fonction donnée, on doit appliquer la formule donnée à l'équation 3.6. Cela se fait en deux étapes : on calcule d'abord le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ et ensuite on prend la limite.

Voyons des exemples concrets de comment on fait cela. Supposons que la fonction position soit une fonction linéaire du temps, c.à.d.

$$s(t)=mt+b.$$

Cette fonction est donc une droite lorsqu'on la représente graphiquement et sa pente est m. On s'attend donc à ce que sa dérivée qui est la pente de la tangente soit m, car une droite et sa tangente coïncident. Calculons la dérivée selon sa défintion et voyons si on arrive au résultat attendu. On a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} &= \frac{m\cdot(t+\Delta t)+b-(mt+b)}{\Delta t}\\ &= \frac{mt+m\Delta t+b-mt-b}{\Delta t}\\ &= m.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} m = m,$$

car m est une constante et la limite d'une constante est la constante elle-même. On retrouve donc, comme on s'y attendait, que la dérivée d'une droite correspond à sa pente.

Considérons un cas un peu plus compliqué où la position est une fonction quadratique du temps donnée par

$$s(t) = t^2.$$

Une telle dépendance quadratique est souvent rencontrée en cinématique. Alors, calculons d'abord le rapport

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} &= \frac{(t+\Delta t)^2-t^2}{\Delta t}\\ &= \frac{t^2+2t\Delta t+\Delta t^2-t^2}{\Delta t}\\ &= \frac{2t\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}\\ &= 2t+\Delta t.\end{aligned}$$

En prenant la limite, on obtient

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t) = 2t.$$

Ainsi, la dérivée de la fonction quadratique est une fonction linéaire.

Exercice de lecture 3.1. À l'aide de la définition de la dérivée faisant intervenir une limite, calculer la dérivée d'une fonction constante $s(t) = c$.

Exercice de lecture 3.2. À l'aide de la définition de la dérivée faisant intervenir une limite, calculer la dérivée de la fonction cubique $s(t) = ct^3$, où c est une constante.

Ceci complète l'introduction au concept de la dérivée dans laquelle on a insisté sur les principes afin que l'étudiant saisisse bien la signification de la dérivée. On s'est notamment fortement basé sur la cinématique et les notions de position et de vitesse pour une introduction naturelle à ce concept. Toutefois, maintenant que le concept a été introduit et compris, on n'a plus besoin de faire référence à la cinématique et du jargon associé. Dans un contexte plus général, la dérivée d'une fonction a la signification de taux de variation de cette fonction et donne la pente de la tangente à la courbe définie par le graphe de cette fonction (ou plus simplement pente de la tangente au graphe de la fonction). C'est de cette signification qu'il est important de se rappeler.

Dorénavant, on utilisera généralement x comme variable et $f(x)$ pour désigner une fonction. Avec ces notations $f'(x)$ dénotera la dérivé de la fonction ; on utilisera aussi la notation $\frac{df}{dx}$ pour ce faire. La dérivée seconde de la fonction sera dénotée $f''(x)$ ou bien $\frac{d^2f}{dx^2}$. Finalement, $f^{(n)}(x)$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$ désigneront la n^e dérivée de f, c.à.d. lorsqu'on prend les dérivées successives de f n fois. On considérera que la dérivée 0^e d'une fonction est la fonction elle-même.

Après avoir obtenu une fonction dérivée $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, il arrivera souvent qu'on veuille évaluer cette fonction en un point donné, disons $x = a$. Pour ce faire, les notations suivantes seront utilisées :

$$f'(a),\ \left[f'(x)\right]_{x=a},\ f'(x)\Big|_{x=a},\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a},\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a},\ \left[\frac{df}{dx}\right]_{x=a},\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a},\ \text{ou}\quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}. \tag{3.8}$$

Ce sont toutes des notations équivalentes.

3.3 Règles de dérivation

En guise d'introduction à cette section, supposons que l'on veuille calculer la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^9 + \cos x^2 + \log x}\,(x^2+3x)^4}{(x^3+e^x+7)^2}.$$

Appliquons la définition de la dérivée. Ainsi,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{\sqrt{(x+h)^9 + \cos(x+h)^2 + \log(x+h)}\,\left((x+h)^2+3(x+h)\right)^4}{\left((x+h)^3+e^{(x+h)}+7\right)^2} - \frac{\sqrt{x^9+\cos x^2+\log x}\,(x^2+3x)^4}{(x^3+e^x+7)^2}\right\}.$$

On constate rapidement que la tâche sera colossale si on continue ainsi, les expressions devenant vite très lourdes. En pratique, on ne calcule que très rarement la dérivée d'une fonction à partir de la définition comme ça a été fait à la section précédente (c.à.d. avec les limites). On utilise plutôt des formules des dérivées pour les fonctions usuelles (fonctions exposant, trigonométriques, exponentielle, etc...) ainsi que les règles pour dériver la somme, différence, multiplication, quotient, ou composition de fonctions. Ces règles de dérivation sont obtenues à partir de la définition de la dérivée, mais une fois qu'on connait ces règles, on les utilise directement dans les calculs de dérivées sans faire appel à la définition utilisant une limite. C'est à ces sujets qu'est dédiée la présente section où on passera aux aspects plus techniques de la dérivation qui sont utiles en pratique pour obtenir la dérivée d'une fonction. On va d'abord développer des formules pour quelques fonctions simples comme les fonctions constantes et les fonctions puissance pour ensuite obtenir les règles de dérivation pour la somme, différence, multiplication, quotient, ou composition de fonctions. À la section suivante, on trouvera des formules pour les fonctions usuelles.

3.3.1 Dérivée d'une fonction constante

Soit $f(x) = c$, où c est une constante (c.à.d. un nombre comme p.ex. 2). Alors, en utilisant la définition de la dérivée, on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dans le développement précédent, on a utilisé le fait que $0/h = 0$ et que la limite est prise après que le quotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ait été calculé. Ainsi, la dérivée d'une constante vaut zéro, ce qui dans la notation de Leibniz s'écrit

$$\frac{d}{dx}(c) = 0. \tag{3.9}$$

3.3.2 Dérivées des fonctions de puissances entières

On sait que $x^0 = 1$; c'est donc une constante. Ainsi

$$\frac{d}{dx}(x^0) = 0. \tag{3.10}$$

On a vu à la section précédente que si $f(x) = x = x^1$, alors

$$\frac{d}{dx}(x) = 1. \tag{3.11}$$

Vous pouvez réobtenir ce résultat par vous-même en appliquant la définition de la dérivée à $f(x) = x$; une autre façon de voir basée sur un argument plus intuitif est que cette fonction est une droite de pente 1, donc sa dérivée sera 1.

On a également vu à la section précédente que la dérivée de $f(x) = x^2$ était $f'(x) = 2x$ (on a considéré $s(t) = t^2$ à la section précédente). Donc, dans la notation de Leibniz

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x. \tag{3.12}$$

Considérons maintenant la fonction cubique $f(x) = x^3$. Alors, si on applique la définition de la dérivée, on obtient

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2. \tag{3.13}$$

On démontre de façon tout à fait similaire que

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3. \tag{3.14}$$

On voit un certain motif apparaître des cas précédents, à savoir que si $f(x) = x^n$, où n est un entier positif ou nul, alors

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}. \tag{3.15}$$

On pourra accepter ce résultat tel que, mais pour ceux que ça intéresse en voici la preuve. En utilisant le théorème du binôme, on a que

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Avec cela, on a pour $f(x) = x^n$ que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat annoncé.

P.ex., si on a à dériver $f(x) = x^{100}$, alors le résultat sera $f'(x) = 100x^{99}$. On a donc une première formule pour la dérivé de toute puissance entière ou nulle de x. On reviendra plus tard sur le cas où la puissance est négative, comme p.ex. x^{-2}, ou bien rationelle $x^{p/q}$, où p et q sont des entiers (un exemple est $\sqrt{x} = x^{1/2}$). On verra que la formule précédente pour les puissances entières s'applique aussi pour les puissances non-entières ou négatives.

3.3.3 Dérivée d'une fonction multipliée par une constante

Considérons maintenant la situation où on a une fonction $g(x)$ qui est le produit d'une constante c par une fonction $f(x)$, donc $g(x) = cf(x)$. Alors, la dérivé de g en partant de la définition de la dérivée sera donnée par

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Or (nous ne le démontrerons pas), la limite d'une constante multiplée par une fonction est égale à la constante multipliée par la limite de la fonction. De cela, on tire que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} c\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

En notation de Leibniz, ce dernier résultat équivaut à

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}(f(x)). \tag{3.16}$$

En mots, la dérivée d'une constante multipliée par une fonction est égale à la constante multipliée par la dérivée de cette fonction.

3.3.4 Dérivée d'une somme de fonctions

Considérons une fonction $g(x)$ qui est la somme de deux autres fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, donc $g(x) = (f_1+f_2)(x) = f_1(x)+f_2(x)$. Alors, en utilisant les définitions de la dérivée et de la somme de deux fonctions, on a

$$\begin{aligned} g'(x) = (f_1+f_2)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1+f_2)(x+h) - (f_1+f_2)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) + f_2(x+h)\big) - \big(f_1(x) + f_2(x)\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) - f_1(x)\big) + \big(f_2(x+h) - f_2(x)\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right) \\ &= f_1'(x) + f_2'(x). \end{aligned}$$

Dans le développement précédent, on a utilisé sans le démontrer (mais cela est vrai) que la limite d'une somme est la somme des limites. Ainsi, on est arrivé au résultat

$$\frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x)) = \frac{d}{dx}(f_1(x)) + \frac{d}{dx}(f_2(x)). \tag{3.17}$$

En mots, la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées.

Exercice de lecture 3.3. Soit $f(x) = x^5 + 3x^2$. Trouvez $f'(x)$.

Exercice de lecture 3.4. Dérivée d'une différence de fonctions : Soit $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. En utilisant un développement tout à fait semblable à celui pour trouver la dérivée d'une somme de fonctions, trouvez une formule pour la dérivée d'une différence de fonctions (donc de g donnée ici).

De l'exercice de lecture précédent, on a donc que

$$\frac{d}{dx}(f_1(x) - f_2(x)) = \frac{d}{dx}(f_1(x)) - \frac{d}{dx}(f_2(x)). \tag{3.18}$$

En mots, la dérivée d'une différence de fonctions est égale à la différence des dérivées.

3.3.5 Dérivée d'un produit de fonctions

Soit g le produit de deux fonctions f_1 et f_2. Donc $g(x) = (f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$. Alors, la dérivée de g s'obtient par

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1 f_2)(x+h) - (f_1 f_2)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) f_2(x+h) - f_1(x) f_2(x)}{h}. \end{aligned}$$

À ce stade du développement, il est impossible d'aller plus loin, sans utiliser une astuce. On va "ajouter zéro" au numérateur de l'expression précédente sous la forme de $f_1(x) f_2(x+h) - f_1(x) f_2(x+h)$ (note : ajouter zéro en ajoutant et en retranchant la même quantité est une astuce souvent utilisée dans des démonstrations mathématiques, on en verra un autre exemple un peu plus loin). On obtient ainsi

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) f_2(x+h) - f_1(x) f_2(x+h) + f_1(x) f_2(x+h) - f_1(x) f_2(x)}{h}.$$

On peut alors faire des mises en évidence pour obtenir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f_1(x+h) - f_1(x)\big) f_2(x+h) + f_1(x) \big(f_2(x+h) - f_2(x)\big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \right) f_2(x+h) + f_1(x) \left(\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} \right) \right]. \end{aligned}$$

On est ici en présence de limites de produits. Sans le démontrer, on a que la limite d'un produit est égal au produit des limites si ces limites existent. Utilisant cela, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \lim_{h\to 0} f_2(x+h) + \lim_{h\to 0} f_1(x) \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} \\ &= f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x). \end{aligned}$$

On voit donc que la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées, mais plutôt la dérivée de la première fonction multipliée par la deuxième plus la première fonction multipliée par la dérivée de la seconde. Dans la notation de Leibniz, ceci équivaut à

$$\frac{d}{dx}\big(f_1(x) f_2(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(f_1(x)\big) f_2(x) + f_1(x) \frac{d}{dx}\big(f_2(x)\big). \tag{3.19}$$

Appliquons la formule de dérivation d'un produit au cas où une des fonctions est une constante. Donc, soit $g(x) = cf(x)$, alors

$$g'(x) = (c)' f(x) + c f'(x).$$

Or, on sait que la dérivée d'une constante vaut zéro, d'où on arrive à

$$g'(x) = c f'(x).$$

On retombe donc bien sur la formule obtenue précédemment à l'éq. 3.16.

Exercice de lecture 3.5. Soit $f(x) = (x^7+2x)(3x^3+2x+1)$. Trouvez $f'(x)$ en utilisant la règle de dérivation d'un produit. Vérifiez ce résultat calculant cette dérivée d'une autre façon, soit en multipliant d'abord les deux polynômes et en calculant la dérivée du polynôme obtenu.

3.3.6 Dérivée d'un quotient de fonctions

Soit $g(x) = (f_1/f_2)(x) = f_1(x)/f_2(x)$ le quotient des fonctions f_1 et f_2. Alors,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1/f_2)(x+h) - (f_1/f_2)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f_1(x+h)}{f_2(x+h)} - \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x) - f_1(x)f_2(x+h)}{f_2(x+h)f_2(x)}\right]. \end{aligned}$$

À ce stade on ajoute zéro sous la forme de $-f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x)$. On obtient alors

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f_1(x+h)f_2(x) - f_1(x)f_2(x) + f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(x+h)}{f_2(x+h)f_2(x)}\right].$$

On peut faire des mises en évidence pour obtenir

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\big(f_1(x+h) - f_1(x)\big)f_2(x) - f_1(x)\big(f_2(x+h) - f_2(x)\big)}{f_2(x+h)f_2(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{f_2(x+h)f_2(x)}\left[\left(\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h}\right)f_2(x) - f_1(x)\left(\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}\right)\right] \\ &= \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{\big(f_2(x)\big)^2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir cette dernière expression, on a utilisé que $\lim_{h\to 0} 1/f(x+h) = 1/\lim_{h\to 0} f(x+h)$ sans le démontrer. On acceptera ce résultat[2]. Dans la notation de Leibniz la dérivée d'un quotient s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\big(f_1(x)\big)f_2(x) - f_1(x)\frac{d}{dx}\big(f_2(x)\big)}{\big(f_2(x)\big)^2}. \tag{3.20}$$

On voit que la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées, mais plutôt une expression plus complexe.

[2] Noter que la dérivée d'un quotient n'est pas toujours égal au quotient des limites.

Comme première application de la dérivé d'un quotient, revenons sur la fonction $f(x) = x^n$. On a vu que si n est un entier positif ou nul, on a la formule $f'(x) = nx^{n-1}$. Qu'en est-il si n est négatif? Dans ce cas, on peut écrire $f(x) = 1/x^{-n}$, où $-n$ sera alors positif. Posons $m = -n$, donc m sera positif et alors $f(x) = 1/x^m$. On peut ainsi réécrire $f(x)$ comme un quotient de fonctions, à savoir $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$, où $f_1(x) = 1$ et $f_2(x) = x^m$. Appliquons la formule du quotient à ce cas. On a alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{\big(f_2(x)\big)^2} \\ &= \frac{(1)'x^m - 1\cdot(x^m)'}{(x^m)^2} \\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1}. \end{aligned}$$

Si maintenant on retourne à n au lieu de m (on remplace $m = -n$ dans la dernière équation), on obtient

$$f'(x) = nx^{n-1}, \tag{3.21}$$

où maintenant n est un entier négatif. On voit que la même formule est valable tant pour les entier positifs que les entiers négatifs. En fait, cette formule est aussi vraie si n est un nombre rationnel (c.à.d. un nombre pouvant s'exprimer comme le rapport de deux nombres n'ayant pas de diviseurs communs) et aussi si n est un nombre réel quelconque (comme p.ex. $n = \sqrt{2}$) ; on en verra la démonstration lorsque nous considérerons la dérivé des fonctions exponentielles.

Exercice de lecture 3.6. Soit $f(x) = \frac{x+a}{x^2+b}$. Trouvez $f'(x)$.

3.3.7 Dérivée d'une composition de fonctions : règle de dérivation en chaîne

Soit $u(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x))$. On appellera parfois g la fonction extérieure et f la fonction intérieure. On désire trouver la dérivée de u par rapport à x. Pour ce faire, on applique la définition de la dérivée à cette fonction. On a alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(x+h) - (g\circ f)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{h}. \end{aligned}$$

À ce stade, il faut utiliser une astuce pour aller plus loin. On va dans ce cas-ci "multiplier par 1" avec le facteur suivant : $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}$. En insérant ce terme dans l'équation précédente, on obtient

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Si on utilise le fait que la limite d'un produit est le produit des limites (en autant que chacune des limites existe), alors on arrive au résultat suivant

$$u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x+h)-f(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

On voit que le premier terme du produit correspond à la dérivée de g évaluée en $f(x)$, c.à.d. on a $g'(f(x))$[3], et le deuxième terme du produit est la dérivée de f. On arrive ainsi au résultat

$$u'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{3.22}$$

Ce dernier résultat s'appelle la *règle de dérivation en chaîne*[4]. En mots, pour dériver la composition d'une fonction, on dérive la fonction extérieure (ici g) qu'on évalue à la fonction intérieure et on multiplie par la dérivée de la fonction intérieure (ici f). En notation de Leibniz, la règle de dérivation en chaîne s'écrit

$$\frac{d}{dx}(u(x)) = \frac{dg}{df} \times \frac{df}{dx}. \tag{3.23}$$

Une façon équivalente de réécrire la formule précédente est de poser $u = g(y)$ et $y = f(x)$, alors

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx}. \tag{3.24}$$

La dérivation en chaîne est une des règles les plus puissantes du calcul différentiel et est extrêmement utile en pratique. Avant de faire un calcul avec la règle de dérivation en chaîne, il est important de bien identifier les fonctions en présence et comment elles sont composées entre elles (c.à.d. quelle fonction est fonction de laquelle). C'est là la difficulté la plus fréquente rencontrée dans l'application de cette règle. Voyons des exemples typiques.

Exemple 3.1. Dériver la fonction suivante $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^{100}$.

Solution. Cette fonction est composée des fonctions $g(x) = x^{100}$ et $h(x) = x^3+2x-1$et on a $f(x) = g(h(x))$. On a donc $g'(x)100x^{99}$ et $h'(x) = 3x^2+2$. Avec ces résultats, l'application de la dérivation en chaîne donne

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = 100(x^3+2x-1)^{99} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^3+2x-1\right) = 100(x^3+2x-1)^{99}(3x^2+2). \ \square$$

Exemple 3.2. Obtenir la dérivée de $f(x) = \cos(ax)$, où a est une constante.

Solution. On verra plus loin que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$. Alors $f'(x) = -\sin(ax) \cdot a = -a\sin(ax)$. $\square$

Exercice de lecture 3.7. Soit $f(x) = (2x+9)^7$. Trouvez $f'(x)$.

Exercice de lecture 3.8. Soit $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \big(f(x)\big)^{-1}$. Attention ici, l'exposant -1 ne signifie pas la fonction inverse, mais bien la puissance -1. À l'aide de la dérivation en chaîne (et non pas avec la formule pour un quotient), trouvez $g'(x)$.

[3] Attention, au risque de se répéter, c'est $f(x)$ qui est l'argument de g' et non pas $f'(x)$; en d'autres mots l'argument de la dérivée de la fonction extérieure est la fonction intérieure

[4] La démonstration précédente pour en arriver à l'expression de la dérivée d'une composition de fonctions n'est pas parfaitement rigoureuse, mais elle satisfera les besoins du présent ouvrage.

3.3.8 Dérivée de la fonction inverse d'une fonction

On va ici obtenir une formule pour trouver la dérivée de la fonction inverse d'une fonction. Pour ce faire, on appliquera la règle de dérivation en chaîne. Soit $f(x)$ la fonction considérée et $f^{-1}(x)$ sa fonction inverse. On a vu au chapitre 2 que la fonction inverse satisfait (voir éq. 2.6)

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x. \tag{3.25}$$

Si on dérive de part et d'autre de l'égalité dans cette équation et en appliquant la règle de dérivation en chaîne, on obtient

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1,$$

d'où on tire

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, \tag{3.26}$$

ce qu'on peut écrire sous la forme équivalente

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'\Big|_{f^{-1}(x)}}. \tag{3.27}$$

En mots, pour obtenir la dérivée de la fonction inverse d'une fonction, on divise 1 par la dérivée de la fonction évaluée à la fonction inverse.

Voyons un exemple de la règle de dérivation de la fonction inverse.

Exemple 3.3. Calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{x}$.

Solution. Soit $f(x) = x^2$, alors sa fonction inverse pour $x > 0$ est $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. On sait que $f'(x) = 2x$. Ainsi

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

On peut, de façon analogue à l'exemple précédent, calculer la dérivée de la racine n^e comme le démontre l'exercice suivant.

Exercice de lecture 3.9. Soit $f(x) = x^n$. Alors $f^{-1}(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$. Montrez que $\left(\sqrt[n]{x}\right)'$ sera donné par $\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Avec le résultat du dernier exercice et la dérivée d'une puissance, on montre que la dérivée d'une puissance rationnelle $n = p/q$ de x (où p et q sont des entiers sans diviseurs communs) satisfait aussi l'équation $(x^n)' = nx^{n-1}$.

3.4 Dérivées des fonctions usuelles

Maintenant qu'on a vu les formules générales de la dérivation, on va s'attarder à obtenir des formules pour les dérivées des fonctions usuelles, c.à.d. les fonctions trigonométriques et leurs inverses, ainsi que les fonctions exponentielles et logarithmiques. Il existe bien d'autres fonctions que ces dernières, mais on se limitera à celles-ci ici.

Pour les fonctions considérées ici, on fera les démonstrations de comment on obtient les dérivées dans certains cas et dans d'autres on donnera simplement le résultat. Il convient de mentionner ici que le lecteur a avantage à consulter des tables de dérivées s'il désire connaître la dérivée d'autres fonctions que celles considérées ici.

3.4.1 Fonctions trigonométriques

L'obtention des dérivées des fonctions trigonométriques requière qu'on se rappelle des identités trigonométriques suivantes :

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \tag{3.28}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B. \tag{3.29}$$

Trouvons maintenant la dérivée de $\cos x$. À partir de la définition, on a

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.
\end{aligned}$$

Pour pouvoir aller plus loin, il nous faut évaluer les limites suivantes :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \tag{3.30}$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}. \tag{3.31}$$

Sans le démontrer, on ne donnera ici que les résultats de ces limites qui sont : $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$. Avec ces résultats, on obtient que

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{3.32}$$

De façon tout à fait analogue, on obtient que

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{3.33}$$

Connaissant les dérivées de $\sin x$ et $\cos x$, on obtient aisément la dérivée de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ à l'aide de la formule du quotient qui donne

$$(\tan x)' = \sec^2 x. \tag{3.34}$$

Exercice de lecture 3.10. Montrer, avec la formule de la dérivée du quotient et de la connaissance des dérivées des fonctions cosinus et sinus, que la dérivée de la tangente est bien donnée par l'éq. 3.34.

Rappelons ici que $\sec x = 1/\cos x$. En se basant sur la connaissance des dérivées de $\cos x$ et $\sin x$, on obtient les dérivées des autres fonctions trigonométriques moins fréquemment utilisées $\sec x = 1/\cos x$, $\text{cosec } x = 1/\sin x$ et $\text{cotan } x = 1/\tan x = \cos x/\sin x$. Les résultats sont les suivants :

$$(\sec x)' = \sec x \, \tan x, \tag{3.35}$$

$$(\text{cosec } x)' = -\text{cosec } x \, \text{cotan } x, \tag{3.36}$$

$$(\text{cotan } x)' = -\text{cosec}^2 x. \tag{3.37}$$

Exercice de lecture 3.11. Montrer les formules précédentes pour les dérivées de sec, cosec et cotan.

Il reste maintenant à trouver les dérivées des fonctions trigonométriques inverses. Rappelons en premier lieu les identités trigonométriques suivantes :

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \tag{3.38}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \tag{3.39}$$

$$\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}. \tag{3.40}$$

Notons que les fonctions $\arccos x$, $\arcsin x$ et $\arctan x$ sont aussi souvent respectivement dénotées, notamment sur les calculatrices, par $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$ et $\tan^{-1} x$ (on n'utilisera pas ces notations dans le présent ouvrage, car elles peuvent porter à confusion ; en effet on peut confondre le -1 comme étant un exposant, alors que ce n'est pas le cas). En guise de révision, voyons comment l'éq. 3.38 est obtenue. Rappelons que $\arccos x$ signifie l'arc (ou l'angle) qui a comme cosinus la valeur x. Soit θ cet angle, alors

$$\theta = \arccos x,$$

est équivalent à

$$\cos\theta = x.$$

Le triangle rectangle avec angle θ correspondant à cette situation est illustré à la figure 3.5 (pour ce triangle le cosinus de θ est donné par le rapport de la longueur du côté adjacent (qui vaut x ici) à la longueur de l'hypothénuse (qui vaut 1 ici). On voit donc à partir de cette figure que

$$\sin\theta = \sin(\arccos x) = \text{opposé}/\text{hypothénuse} = \sqrt{1-x^2}.$$

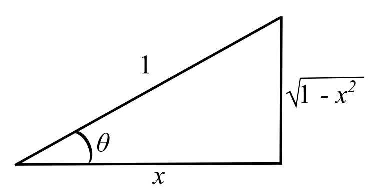


FIGURE 3.5

On a ainsi obtenu l'équation 3.38. On raisonne de façon similaire pour obtenir les équations 3.39 et 3.40. Une façon plus algébrique d'obtenir l'équations 3.38 est d'utiliser l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On a alors que $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Sachant que $\cos(\arccos x) = x$, on obtient que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$. On obtient de la même façon les équations 3.39 et 3.40.

Exercice de lecture 3.12. En vous aidant d'un triangle comme il a été fait dans le raisonnement précédent, obtenez les équations 3.39 et 3.40. Montrez également que $\sec(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\text{cosec}(\arcsin x) = \frac{1}{x}$.

Revenons aux dérivées. Pour obtenir la dérivée de $\arccos x$, on utilise la formule de la dérivée de la fonction inverse

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}.$$

Or $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, d'où

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.41}$$

De façon tout à fait similaire, on obtient que

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.42}$$

Finalement, pour $\arctan x$, on a

$$(\arctan x)' = \frac{1}{-\sec^2(\arctan x)}.$$

Or en utilisant l'éq. 3.40, cette dernière équation mène à

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{3.43}$$

Ceci termine cette section sur les dérivées des principales fonctions de la trigonométrie.

Exercice de lecture 3.13. Soit $f(x) = \cos(x^2)$. Calculer $f'(x)$.

3.4.2 Fonctions exponentielles et logarithmiques

Trouvons maintenant la dérivée de la fonction exponentielle e^x, aussi souvent dénotée par $\exp x$. Rappelons la propriété suivante de la fonction exponentielle : $e^{a+b} = e^a e^b$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(e^x\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.\end{aligned}$$

Des propriétés du nombre e (qu'on ne démontrera pas ici), on a que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Avec ce résultat, on obtient

$$\left(e^x\right)' = e^x. \tag{3.44}$$

La fonction exponentielle est donc sa propre dérivée, ce qui est une propriété remarquable de cette fonction.

La fonction logarithme naturel $\ln x$ (qui correspond au logarithme en base e) est la fonction inverse de la fonction exponentielle; on a $e^{\ln x} = x$ et $\ln e^x = x$. Rappelons la propriété suivante de la fonction logarithme (qui découle directement du fait que c'est la fonction inverse de l'exponentielle)

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b. \tag{3.45}$$

Pour obtenir la dérivée de la fonction logarithme, on utilise la formule de dérivation de la fonction inverse et le fait que $(e^x)' = e^x$ pour obtenir

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Donc en notation de Leibniz, on a

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}. \tag{3.46}$$

Considérons maintenant la fonction $f(x) = a^x$. On peut réécrire cette fonction de la façon suivante à l'aide de l'exponentielle et du logarithme naturel :

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Cette forme permet de trouver aisément la dérivée de a^x à partir de la dérivée de e^x et de la règle de dérivation en chaîne. En effet,

$$\begin{aligned}\left(a^x\right)' &= e^{x\ln a} \ln a \\ &= a^x \ln a.\end{aligned}$$

Donc, en notation de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a. \tag{3.47}$$

La fonction $\log_a x$ est la fonction inverse de a^x (à noter que $a = 10$ (base 10) est souvent utilisé en pratique). Par la règle de dérivation de la fonction inverse, on obtient

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}, \tag{3.48}$$

ce qui équivaut en notation Leibniz à

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x \ln a}. \tag{3.49}$$

Exercice de lecture 3.14. Calculer la dérivée de x^r, où r est un nombre réel quelconque. Indice : Écrivez x^r comme $x^r = e^{r \ln x}$ et utilisez les formules de dérivation pour l'exponentielle et le logarithme naturel. Comment cela se compare-t-il au résultat de la dérivée de x^n, avec n entier, fréquemment mentionné ?

Exercice de lecture 3.15. Soit $f(x) = (\ln x) \cdot (\cos x)$. Trouvez $f'(x)$.

Exercice de lecture 3.16. *Exercice facultatif* : On définit les fonctions suivantes

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

respectivement appelées cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique (on dénote aussi ces fonctions par ch$x$ et sh$x$ dans certains textes).

a) Montrer que la fonction $\cosh x$ est une fonction paire et que $\sinh x$ est une fonction impaire.

b) Montrer qu'on a l'identité suivante :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

Cette dernière identité ressemble beaucoup à l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, sauf que pour les fonctions hyperboliques on a un signe moins dans l'identité.

c) Montrer les formules suivantes pour les dérivées des fonctions cosh et sinh :

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \cosh' x = \sinh x$$

et

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \sinh' x = \cosh x.$$

Ces formules ressemblent beaucoup au formules de dérivation pour les fonctions trigonométriques cos et sin, sauf qu'il n'y a pas de signe négatif qui apparaît. Étant donné la ressemblance des propriétés des fonctions hyperboliques avec celles des fonctions trigonométriques, c'est pour cela qu'on parle de cosinus et de sinus hyperbolique, car ces propriétés rappellent celles des fonctions trigonométriques. On définit également la tangente hyperbolique de façon analogue à la tangente trigonométrique par $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.

3.5 Différentielle d'une fonction

On a vu au début du présent chapitre que la dérivée d'une fonction $f(x)$ est par définition donnée par

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{3.50}$$

On dénotera la différence $f(x+\Delta x) - f(x)$ par Δf qui correspond à la variation de la fonction entre les points x et $x+\Delta x$. Ainsi, on a l'équation suivante (équivalente à la précédente)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \tag{3.51}$$

Si on ne prend pas la limite, mais qu'on suppose que Δx est très petit, on peut écrire l'approximation suivante

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x), \tag{3.52}$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme

$$\Delta f \approx f'(x)\Delta x. \tag{3.53}$$

Cette dernière équation nous dit que l'accroissement (ou si on veut la variation) de la fonction au point x (c.à.d. Δf) est approximativement donné par le taux de variation de la fonction (c.à.d. la dérivée $f'(x)$) multipliée par le pas qu'on fait en x (c.à.d. Δx). Si, à la limite on fait un pas en x infinitésimal[5] (qu'on

[5] Par *infinitésimal*, on entend une quantité extrêmement petite, voire infiniment petite.

dénotera par dx) alors l'accroissement de f deviendra aussi infinitésimal, ce qu'on dénotera par df. On obtient alors l'équations suivante

$$df = f'(x)dx. \tag{3.54}$$

Noter que dans cette dernière équation, on a égalité, ce n'est plus une approximation, car on est passé à des quantités infinitésimales dx et df. Cette dernière équation sera très utile lorsqu'on étudiera la notion d'intégrale d'une fonction, en particulier dans les changements de variables. La quantité infinitésimale df donnée par l'équation 3.54 est appelée la *différentielle de la fonction f*. En utilisant la notation de Leibniz, on peut réécrire l'équation de la différentielle sous la forme suivante :

$$df = \frac{df}{dx}dx. \tag{3.55}$$

Dans cette dernière équation, c'est comme si on pouvait simplifier les dx dans le membre de droite de l'égalité pour obtenir df du côté gauche de l'égalité. C'est là un des avantages de la notation de Leibniz, car elle est très intuitive.

Pour illustrer la différentielle dans un contexte plus concret, la dérivée représentant la vitesse v, alors la distance parcourue en un temps dt sera $ds = vdt$, où $v = ds/dt$. P. ex. si on se déplace à 100 km/h en un instant donné et qu'on veut savoir la distance parcourue en un intervalle très petit à partir de cet instant, p. ex. un intervalle de 0.1 s, alors la distance parcourue dans ce petit intervalle sera $ds =$ 100 km/h ×(1/3600) h = 27.8 m, ce qui est une courte distance comparativement à la vitesse et à l'échelle de temps considérée (heures).

3.6 Approximation au premier ordre d'une fonction

Partons de nouveau de la définition de la dérivée, mais considérons explicitement cette fois un point particulier qu'on dénotera par x_0. Alors, par définition, la dérivée en ce point est donnée par

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}. \tag{3.56}$$

Tel qu'à la section précédente, si on ne prend pas la limite, on a alors l'approximation suivante

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h}, \tag{3.57}$$

ce qu'on peut réécrire sous la forme

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h. \tag{3.58}$$

Cette approximation sera d'autant plus exacte que h est petit. En utilisant x au lieu de $x_0 + h$ (c.à.d. $x = x_0 + h$), on peut réércire l'approximations précédente sous la forme

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.59}$$

On parle alors d'*approximation au premier ordre de la fonction f en un point voisin de x_0*, ce point voisin étant x. On dit aussi plus simplement *approximation au premier ordre au voisinage de x_0*. On parle de premier ordre ici, car $h = x - x_0$ apparaît à la première puissance dans les équations 3.58 et 3.59.

Exercice de lecture 3.17. Soit $f(x) = x^2$. Quelle est l'erreur absolue et en pourcentage que l'on fait si on calcule $f(1.1)$ à l'aide de la valeur approchée donnée par l'approximation au premier ordre au voisinage de $x_0 = 1$ (équation 3.58) comparativement à la valeur exacte obtenue en calculant directement le carré de 1.1 ? Faites de même pour $f(1.01)$.

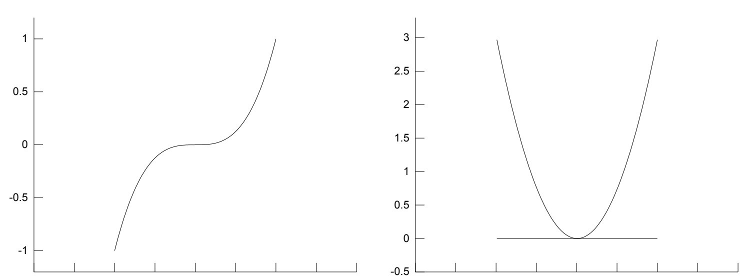
Notons pour terminer cette section qu'on peut préciser davantage de telles approximations (p.ex. obtenir une formule donnant une borne supérieure sur l'erreur qu'on fait avec de tells approximations) ainsi qu'obtenir des approximations à des ordre supérieurs avec les séries de MacLaurin et Taylor discutées au chapitre 4. De telles approximations sont souvent utilisées pour obtenir des valeurs approchées de fonctions en des points où il est difficile d'obtenir une valeur exacte de la fonction. On dit alors qu'on *développe* une fonction en série de MacLaurin ou de Taylor et pour cette raison, l'approximation au premier ordre est aussi appelée un *développement au premier ordre* de la fonction. Pour les développements d'ordres supérieurs, on parle de développement au 2$^{\text{e}}$ ordre, 3$^{\text{e}}$ ordre, etc.

Exercice de lecture 3.18. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Donner une valeur approchée de $\sqrt{4.1}$. Comparer avec la valeur plus précise obtenue à l'aide d'une calculatrice.

Exercice de lecture 3.19. Montrer que l'approximation au premier ordre de $\sin x$ au voisinage de $x_0 = 0$ est $\sin x \approx x$. Cette approximation est très souvent utilisée en pratique lorsqu'il faut approximer $\sin x$ pour des petites valeurs de x.

3.7 Maxima, minima, inflexions - points critiques d'une fonction

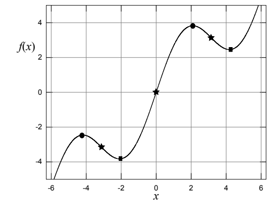
Dans l'exemple de la position en fonction du temps considéré plus tôt (voir figure 3.3), on remarque que là où la fonction atteint un maximum, la dérivée est nulle (en un maximum, la droite tangente est horizontale, et donc sa pente est nulle). La dérivée est aussi nulle pour un minimum et ça se produit également dans certains cas (et pas toujours) pour d'autres points appelés points d'inflexion, qui sont des points où la concavité d'une fonction change, p.ex. la fonction $f(x) = x^2$ illustrée à la figure 2.2 a une concavité dite vers le haut). Les points où la dérivée d'une fonction s'annulent sont des exemples de *points critiques*. La figure 3.6 (a) illustre la fonction $f(x) = x^3$ contenant un point d'inflexion en $x = 0$ qui est aussi un point critique dans ce cas (car la dérivée est nulle). La partie (b) de la même figure montre la dérivée de cette fonction qui est nulle en zéro.



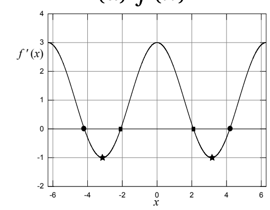
(a) (b)

FIGURE 3.6

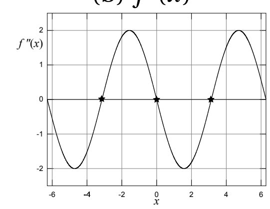
Attention, un point d'inflexion n'est pas toujours un point critique comme l'illustre la figure 3.7 (a) sur laquelle on voit la fonction donnée par $f(x) = x + 2\sin x$ qui a plusieurs minima et maxima locaux ainsi que des points d'inflexion (les minima sont illustrés par des carrés, les maxima par des cercles et les points d'inflexion par des étoiles). Les parties (b) et (c) de la figure 3.7 montrent la dérivée et la dérivée seconde de la fonction. On voit qu'aux points d'inflexion, la dérivée n'est pas nulle ici ; la dérivée seconde, elle, est toutefois nulle.



(a) $f(x)$



(b) $f'(x)$



(c) $f''(x)$

FIGURE 3.7

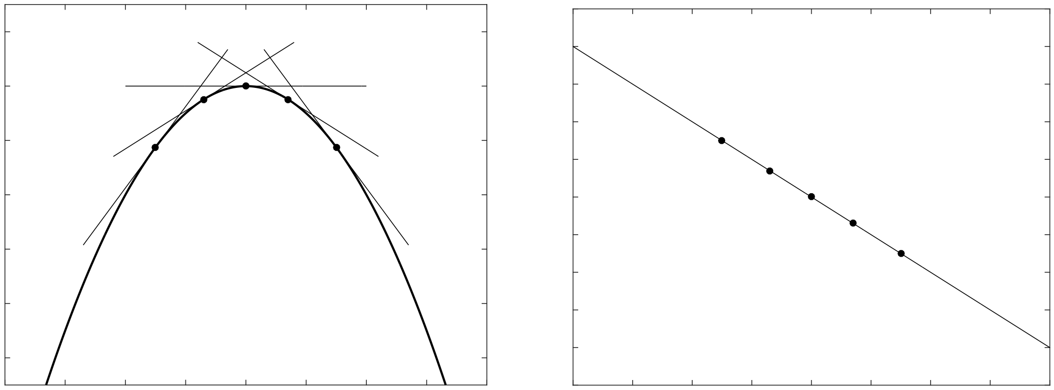
De façon plus précise, on définit les *points critiques* d'une fonction comme étant les points où la dérivée de la fonction est nulle ou bien où la dérivée n'existe pas.

La dérivée fournit un moyen de trouver les minima et maxima d'une fonction[6]. Pour ce faire, on doit d'abord identifier où se trouvent les zéros de la dérivée (c.à.d. là où la dérivée est nulle). Ensuite, pour déterminer la nature du point critique, c.à.d. s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum, il faut regarder le signe de la dérivée seconde (pour un maximum, la dérivée seconde sera négative, dans le cas d'un minimum, elle sera positive). Voyons cela sur un graphique. La figure 3.8 (a) montre le cas d'un maximum. On voit que dans le voisinage d'un maximum, la fonction dérivée est positive à gauche du maximum, elle vaut zéro au maximum et elle devient négative après le maximum (voir figure 3.8 (b)). La fonction dérivée est donc décroissante au maximum, ce qui fait que la dérivée de la fonction dérivée (donc la dérivée seconde de la fonction) est négative au maximum. Au voisinage d'un minimum, c'est l'inverse qui se produit ; comme le lecteur s'en convaincra par lui-même en se faisant un croquis et en utilisant un argument similaire, il constatera que la dérivée seconde à un minimum est positive.

Il arrive aussi que pour certains types de maxima et de minima, la dérivée seconde soit nulle. Un exemple est la fonction $f(x) = x^4$ qui a un minimum en $x = 0$, mais sa dérivée seconde est nulle (voire même sa dérivée troisième). Dans ces cas, il faut analyser ce qui se passe tout juste avant le point critique et tout juste après. Pour $f(x) = x^4$, on voit que sa dérivée $f'(x) = 4x^3$ tout juste avant $x = 0$ est négative, alors qu'elle est positive tout juste après $x = 0$, ce qui permet de conclure qu'on a un minimum. Dans certains autres cas particuliers, il faut également analyser les dérivées d'ordres supérieurs. Nous n'entrerons pas davantage dans l'analyse de ces cas ici.

Exercice de lecture 3.20. Trouver à l'aide du calcul différentiel la valeur de x qui correspond au minimum de la fonction polynomiale quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes et $a > 0$. Note : Ceci est une parabole avec concavité vers le haut et le résultat est bien connu, le minimum est situé en $x = \frac{-b}{2a}$.

[6]En fait, c'est en cherchant une méthode pour trouver les minima et maxima d'une fonction que Leibniz en est venu à découvrir la dérivée d'une fonction indépendemment de Newton, qui lui, étant physicien, a découvert la dérivée dans le cadre de ses études sur la mécanique.



(a) (b)

FIGURE 3.8. (a) Fonction au voisinage d'un maximum et droites tangentes de la fonction en différents points avant et après le maximum et au maximum. Les pentes des droites tangentes correspondent aux valeurs de la dérivée aux différents points. (b) Fonction dérivée avec valeurs des pentes des tangentes aux points mis en évidence en (a).

3.8 Une introduction aux dérivées partielles

Jusqu'à maintenant, on a considéré des fonctions d'une seule variable. Un exemple d'une telle fonction est $f(x) = \sin(x^4 + \ln x - 2)$. Il arrive souvent qu'on ait à considérer des fonctions de plusieurs variables indépendantes, comme p.ex. la fonction suivante à deux variables

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

et qu'on veuille calculer leurs dérivées par rapport aux différentes variables. Dans cet exemple de $f(x, y)$, supposons que l'on veuille calculer la dérivée par rapport à x, ce qu'on dénotera par $\frac{\partial}{\partial x} f$ et qui se lit "del f del x". Pour ce faire, on considérera que y est une constante et que x varie et on dérive simplement par rapport à x. Ceci donnera

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 4y^2) = 2x.$$

Si maintenant on dérive par rapport à y, on aura

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 4y^2) = 8y.$$

De façon plus formelle, on définit les dérivées partielles de la façon suivante

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}. \tag{3.61}$$

On voit donc la totale analogie avec la dérivée d'une fonction d'une seule variable. On peut en outre aisément généraliser la notions de dérivée partielle pour une fonction de plus de 2 variables.

Exercice de lecture 3.21. Soit $T(x, y, z) = e^{xyz} + \cos z + y^2$. Calculer (a) $\frac{\partial T}{\partial x}$, (b) $\frac{\partial T}{\partial y}$ et (c) $\frac{\partial T}{\partial z}$.

On peut, comme pour les dérivées de fonctions à une seule variable, calculer des dérivées d'ordre supérieur, comme p.ex. $\frac{\partial^2}{\partial x^2}f$ ou $\frac{\partial^2}{\partial y^2}f$. Or, comme on a plusieurs variables, on peut aussi calculer des dérivées partielles mixtes, comme p.ex. $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f$, ce qui signifie qu'on dérive d'abord f par rapport à y et ensuite par rapport à x. P.ex. si on a $f(x,y) = x^4 + 5x^3y^4 + 9y$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 4x^3 + 15x^2y^4$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y) = 60x^2y^3.$$

Exercice de lecture 3.22. Reprenant la fonction $f(x,y) = x^4 + 5x^3y^4 + 9y$ qui vient d'être considérée, calculer $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y)$. Que remarquez-vous en comparant ce résultat à celui de $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y)$?

La conclusion obtenue au dernier exercice de lecture, à savoir l'égalité des dérivées partielles mixtes $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x,y)$ est vraie en général pour les fonctions habituellement rencontrées dans les applications (on n'en fera toutefois pas la démonstration ici). Ceci signifie que l'ordre des dérivées partielles n'est pas important lorsqu'on calcule des dérivées partielles mixtes.

On arrêtera ici sur les dérivées partielles de fonctions à plusieurs variables, la présente section se voulant uniquement une brève introduction sur ce sujet.

3.9 Exercices

Exercice 3.1. À l'aide de la définition de la dérivée faisant intervenir une limite, calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^4$.

Exercice 3.2. Soit la fonction polynomiale $p(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + d$. Calculer $\frac{d^3p}{dx^3}$, ou a, b, c et d sont des constantes.

Exercice 3.3. La position d'un objet le long d'une droite est donnée par $x(t) = \sec t + \log_{10} t^2$. Quelle est la vitesse de cet objet ?

Exercice 3.4. En utilisant que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et la formule pour la dérivée d'un quotient, montrer que $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$.

Exercice 3.5. Calculer la dérivée de la fonction rationelle $q(x) = \frac{x^3+7x+2}{x^2+3}$ (c'est le nom qu'on donne à des fonctions qui sont des quotients de polynômes).

Exercice 3.6. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln(\cos x)$.

Exercice 3.7. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 9^{x^8+x^5+2}$.

Exercice 3.8. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{e^{x^2}}$.

Exercice 3.9. Soit la fonction $u(x) = \cos(\frac{x-1}{x+1})$. Calculer la différentielle du de cette fonction.

Exercice 3.10. Soit la fonction $u(x) = e^{x^2 \sin(x^3)}$. (a) Calculer la différentielle du de cette fonction. (b) Donner l'approximation au premier ordre de $u(x)$ au voisinage de $x_0 = 0$.

Exercice 3.11. Dans l'exercice de lecture 3.16, on a introduit les fonction cosinus et sinus hyperboliques définies par $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et il était demandé de démontrer que ces fonctions satisfont l'identité $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ et que leurs dérivées sont données par $\cosh' x = \sinh x$ et $\sinh' x = \cosh x$. Soit $\cosh^{-1} x$ la fonction inverse de $\cosh x$. Trouver la dérivée de $\cosh^{-1} x$. Indice : Utiliser la formule pour la dérivée d'une fonction inverse et ensuite utiliser l'identité $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Exercice 3.12. Le profil en hauteur d'une portion de montagne russe par rapport à la coordonnée x au sol est donné par la fonction polynomiale $h(x) = 5x^3 - 6x^2 - 9x - 2$. Trouver les hauteurs maximale et minimale de la portion de montagne russe. La montagne russe va-t-elle sous terre ?

Exercice 3.13. Soit la fonction à 2 variables suivante $f(x, y) = e^{x^2+y^3}$. Calculer (a) $\frac{\partial}{\partial x} f$, (b) $\frac{\partial}{\partial y} f$, (c) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f$, (d) $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f$. (e) Que constatez-vous en comparant les résultats de (c) et (d) ? Ce résultat est vrai en général en autant que la fonction considérée soit "gentille" (c.à.d. qu'elle ne présente pas de singularités), ce qui est souvent le cas dans les applications en ingénierie.

Chapitre 4

Séries de MacLaurin et de Taylor

4.1 Séries de puissances

Les polynômes, qui sont des fonctions du type $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, constituent des fonctions avec lesquelles il est facile de travailler et qui sont simples à calculer, car il s'agit d'une somme pondérée de puissances de x (ces différentes puissances x^n sont appelées *monômes*). Ici *N est l'ordre du polynôme* et les quantités $a_n, n = 0, \ldots, N$ sont des constantes appelées les *coefficients du polynôme*. Une question qui se pose naturellement est de savoir si on peut approximer une fonction $f(x)$ (p. ex. une fonction sinusoidale $f(x) = \sin x$) par un polynôme. Cela s'avère être possible, mais l'approximation ne peut être valide que dans une certaine plage de valeurs de x, cette plage étant dépendante de la fonction considérée et de l'erreur qu'on est prêt à accepter. P. ex. dans le cas particulier de la fonction sinusoidale, on sait que cette fonction est bornée entre -1 et +1 pour toute valeur de x, alors qu'un polynôme prend de grandes valeurs (négatives ou positives) lorsque x est grand. Plus précisément dans ce cas, on peut s'attendre à ce que l'approximation par un polynôme soit bonne pour une certaine plage de valeurs de x au voisinage de $x = 0$ (p. ex. si on trace le graphe de la fonction $\sin x$ au voisinage de zéro, elle est bien approximée par la droite d'équation $y = x$) et que plus on prendra un polynôme d'ordre élevé, meilleure sera l'approximation et éventuellement plus grande sera la plage couverte par cette approximation. Ultimement, si on prend la somme pondérée d'un nombre infini de monômes, on peut espérer que l'approximation devienne parfaite. Certaines technicalités font que cette approximation ne peut pas toujours être parfaite, qu'elle ne soit pas valide pour toutes les valeurs de x, ni voire même être possible dans certains cas. Nous reviendrons sur ce point plus bas, mais supposons pour le moment qu'on puisse écrire une fonction $y = f(x)$ sous la forme d'une somme infinie de puissances de x comme suit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{4.1}$$

Une telle somme infinie est appelée une *série de puissances*, voire plus simplement une série et on dit dans ce cas qu'on fait le *développement* de la fonction $f(x)$ en série de puissances (ou de façon équivalente qu'on développe cette fonction en série de puissances).

4.2 Séries de MacLaurin

Proposons nous maintenant de déterminer les coefficients a_n. Le coefficient a_0 est facile à obtenir en prenant $x = 0$ de part et d'autre de l'équation 4.1. On a alors

$$a_0 = f(0).$$

Maintenant, prenons la dérivée de part et d'autre de l'équation 4.1. Le terme a_0, étant constant, disparaît et on obtient alors

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots. \tag{4.2}$$

Prenons ici aussi, $x = 0$ de part et d'autre de cette dernière équation. On obtient

$$a_1 = f'(0).$$

Dérivons une seconde fois l'équation 4.1, ce qui revient à dériver l'équation 4.2. On obtient ainsi

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots. \tag{4.3}$$

En posant $x = 0$, cela donne

$$2a_2 = f''(0) \iff a_2 = \frac{f''(0)}{2}.$$

Si on dérive de nouveau et qu'on pose $x = 0$ de nouveau, on obtient

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3\cdot 2}.$$

En continuant ainsi à dériver et à poser $x = 0$, on arrive à l'expression générale suivante pour les coefficients de la série

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

ce qui permet d'écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4.4}$$

Ici $n!$ dénote la factorielle de n donnée par $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (produit des entiers successifs jusqu'à n) et $f^{(n)}(x)$ dénote la $n^{\text{ième}}$ dérivée de f ; par convention $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$. On voit ainsi qu'il est possible d'écrire la fonction sous forme d'une série de puissances et que les coefficients de cette série s'expriment en terme des dérivées successives évaluées à zéro de la fonction f considérée. Une série de puissances ayant la forme donnée à l'équation 4.4 est appelée *série de MacLaurin*. Ici, comme les coefficients de la série font intervenir les valeurs en zéro de la fonction et de ses dérivées, on parle de *développement autour de zéro, ou centré en zéro.*

Exemple 4.1. Voici un exemple concret de développement d'une fonction en série, soit celui de la fonction $f(x) = \cos x$.

Solution. Pour faire ce développement, il nous faut calculer les dérivées successives de $\cos x$ et les évaluer en zéro. On a donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x \Longrightarrow f(0) = 1, \\
f'(x) &= -\sin x \Longrightarrow f'(0) = 0, \\
f''(x) &= -\cos x \Longrightarrow f''(0) = -1, \\
f^{(3)}(x) &= \sin x \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 0, \\
f^{(4)}(x) &= \cos x \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 1, \\
&\dots
\end{aligned}$$

On voit qu'il y a une périodicité dans les dérivées successives de la fonction cosinus, car à partir de la 4$^{\text{ième}}$ dérivée, on retombe sur la fonction elle-même. En utilisant les résultats précédents et les formules pour les coefficients d'une série de MacLaurin faisant intervenir des factorielles, on obtient

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \tag{4.5}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{4.6}$$

On montre que ce développement converge pour toute valeur de x. Donc, l'intervalle de convergence est l'ensemble de tous les nombres réels.

Exemple 4.2. Développement de la fonction $1 - x^2$.

Solution. Cette fonction étant déjà sous la forme d'un polynôme, elle est déjà son développement en série. La somme n'a pas besoin d'aller jusqu'à l'infini dans ce cas. Les coefficients sont donnés par $a_0 = 1$ et $a_2 = -1$. Tous les autres coefficients sont nuls.

Exercice de lecture 4.1. Trouver le développement en série de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$.

4.3 Notions sur la convergence des séries

Les développements précédents supposent que la somme infinie a un sens mathématique bien défini. A priori, il n'est pas évident qu'on puisse additionner un nombre infini de termes et que le résultat soit un nombre fini, ou même que le résultat soit bien défini (c.à.d. qu'il existe). L'exemple suivant simple convaincra facilement le lecteur. Considérons la somme infinie suivante : $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1+(-1)+1+(-1)+1+\dots$. Alors, si on regroupe les termes deux par deux de la façon suivante : $(1+(-1))+(1+(-1))+\dots$, on serait tenté de dire que puisque chaque regroupement vaut zéro, alors la somme (infinie) vaudra aussi zéro. Or, si on applique le même argument, mais en regroupant différemment de la façon suivante : $1+((-1)+1)+((-1)+1)+\dots$ on pourrait aussi dire que la somme vaut 1 ! La somme infinie n'est donc pas bien définie. Dans de tels cas, on dit que la série ne converge pas.

Nous n'entrerons pas dans tous les détails de la convergence des séries ici. Au besoin, le lecteur pourra consulter un livre d'analyse mathématique où cela est discuté. L'objectif ici est que le lecteur ait une connaissance fonctionnelle des séries pour qu'il sache les utiliser. On supposera donc que les fonctions considérées ici admettent un développement en série. Il suffit de mentionner à ce stade que les séries de puissances admettent chacune une plage de valeurs de la variable x pour lesquelles la somme infinie sera bien définie. Dans certains cas, cette plage peut être l'ensemble de tous les nombres réels, et dans d'autres cas elle sera plus restreinte. Cette plage s'appelle l'*intervalle de convergence*. Il existe des techniques pour déterminer l'intervalle de convergence d'une série donnée, mais nous n'aurons pas le temps d'aborder en détails cet aspect ici et le lecteur est référé à d'autres ouvrages. Il y a un cas particulier, qui donne une bonne idée de la notion de convergence et c'est celui de la série géométrique. Considérons d'abord la somme suivante :

$$S_N = 1 + r + r^2 + \ldots + r^N = \sum_{n=0}^{N} r^n. \tag{4.7}$$

Pour être plus explicite dans certains cas, on dénotera la somme par $S_N(r)$ pour montrer explicitement qu'elle dépend de la valeur de la variable r. Cette somme est appelée *somme géométrique*, car elle consiste en l'addition des nombres d'une *progression géométrique* définie par la suite des puissances d'un nombre donné (en l'occurence r ici), c.à.d. $r^0 = 1, r^1, r^2, r^3, \ldots$. Ce nombre r est appelé la *raison* de la progression géométrique. Revenons à la somme S_N et multiplions-la par r. On obtient alors

$$rS_N = r + r^2 + \ldots + r^N + r^{N+1}. \tag{4.8}$$

En soustrayant les équations précédentes, on obtient

$$S_N - rS_N = 1 - r^{N+1}, \tag{4.9}$$

ce qui permet d'obtenir la somme S_N comme suit

$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}. \tag{4.10}$$

La série géométrique est simplement la somme géométrique lorsqu'on fait tendre N vers l'infini, c.à.d.

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}. \tag{4.11}$$

On voit de l'expression précédente[1] que si la valeur absolue de x est plus grande que 1 ($|x| > 1$), alors x^N tendra vers une valeur infinie (positive ou négative selon que x est positif ou négatif). Donc, dans ce cas, la série prend une valeur infinie, c.à.d. elle ne converge pas vers une valeur finie réelle. D'autre part, si x vaut 1, alors on a une division de zéro par zéro, ce qui n'est pas défini (cela est appelé une indétermination). Pour voir ce que cela veut dire, revenons à la somme géométrique dans le cas où la raison vaut 1. On a alors $S_N(1) = N + 1$, ce qui tendra vers l'infini lorsque $N \to \infty$. Un autre cas à traiter est celui pour lequel $x = -1$. On a alors $S(1) = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$, cas qu'on a discuté précédemment et pour lequel on a montré que la valeur obtenue ne peut pas être définie. Finalement, dans le cas $|x| < 1$, on a que $\lim_{N\to\infty} x^{N+1} \to 0$ peu importe si x est positif ou négatif. Ainsi $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

On voit donc que la série géométrique converge seulement lorsque $|x| < 1$. Pour résumer, on écrira cela sous la forme

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \;,\; |x| < 1 \tag{4.12}$$

et $|x| < 1$ est l'intervalle de convergence pour la série géométrique. On adoptera la même notation pour écrire les développements en série de fonctions.

[1] Ici, au lieu d'utiliser la variable r, on a utilisé la variable x pour poursuivre avec notre discussion sur les séries de puissances. Notez que le nom de la variable choisi est en réalité sans importance.

4.4 Séries de Taylor

Il n'est pas toujours possible ou commode de développer une fonction en série autour de zéro. Il est parfois plus approprié de faire un développement autour de $x = x_0$. Par exemple, si on veut évaluer une fonction près d'une valeur $x = x_0$, alors le résultat convergera plus rapidement que si on faisait le développement autour de zéro. On développera alors la fonction en puissances de $x - x_0$. On parle dans ce cas de *série de Taylor* et on voit qu'une série de MacLaurin est un cas particulier de série de Taylor, nommément le cas $x_0 = 0$. D'ailleurs, une série de MacLaurin est aussi communément appelée série de Taylor autour de zéro ou tout simplement série de Taylor, car il est généralement évident autour de quelle valeur on fait le développement. Par un raisonnement tout à fait analogue à celui fait pour les séries de MacLaurin (il faut évaluer la fonction et ses dérivées en x_0 plutôt qu'en 0), on obtient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.13}$$

Une forme équivalente à l'équation précédente souvent rencontrée en pratique est obtenue en posant $x = x_0 + h$. On obtient alors

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n. \tag{4.14}$$

Cette dernière forme est particulièrement utile lorsqu'on veut obtenir une valeur approchée d'une fonction près d'une valeur connue de celle-ci et de ses dérivées en x_0.

Exercice de lecture 4.2. *Facultatif :* Faire le développement pour en arriver à l'expression donnée à l'équation 4.13 pour une série de Taylor.

4.5 Calculs de valeurs approchées de fonctions

Tel qu'évoqué précédemment, les développements en séries de puissances sont très utiles en pratique, notamment ils permettent d'obtenir des valeurs approchées des fonctions. L'exemple suivant en illustre un cas.

Exemple 4.3. Trouver une valeur approchée de $\sqrt{4.1}$.

Solution. Pour ce faire, on utilise l'éq. (4.14) avec $x_0 = 4$ et $h = 0.1$. On a donc $f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} \implies f(4) = \sqrt{4} = 2, \\
f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \implies f'(4) = \frac{1}{4}, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \implies f''(4) = -\frac{1}{32}, \\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} \implies f^{(3)}(4) = \frac{3}{256}, \\
\cdots
\end{aligned}$$

On aura donc, en s'arrêtant à la 2^{e} puissance dans le développement en série, on a ici

$$\sqrt{4.1} \approx 2 + \frac{1}{4} \times 0.1 - \frac{1}{64} \times 0.1^2 = 2.0248,$$

ce qui est près de la valeur plus exacte 2.02484375. Dépendant du degré de précision désiré sur la valeur approchée qu'on cherche à calculer, on arrêtera plus ou moins loin dans le développement. P. ex. ici, le terme en h^3 dans la série vaut approximativement 2×10^{-6}. Noter qu'on aurait aussi pu définir $f(x) = \sqrt{4+x}$ et faire un développement autour de Taylor autour de $x = 0$, on serait arrivé au même résultat.

4.6 Exercices

Exercice 4.1. Faire le développement en série de MacLaurin de la fonction $\sin x$. Note : Le monôme de puissance 1 dans ce développement correspond à l'approximation au premier ordre de la fonction $\sin x$ tel que vu dans un des exercices de lecture.

Exercice 4.2. Développer en série de Taylor autour de $z = 0$ jusqu'au 3$^{\text{e}}$ ordre inclusivement la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+b)^2 + a^2}} = \left[(z+b)^2 + a^2\right]^{-1/2}.$$

Note : Cette fonction intervient en électrostatique lorsqu'on considère le potentiel électrique engendré par un anneau circulaire uniformément chargé. Cette fonction donne la dépendance du potentiel sur l'axe de l'anneau.

Chapitre 5

L'intégrale d'une fonction

5.1 Introduction à la notion d'intégrale d'une fonction

Pour introduire la notion d'intégrale d'une fonction, on fera de nouveau appel à la cinématique. Avant d'aller plus loin, on fera la remarque préliminaire suivante : on sait que si un objet se déplace à une vitesse constante v_{cst}, alors pendant un intervalle de temps Δt l'objet aura parcouru une distance donnée par $\Delta s = v_{cst}\Delta t$. Ceci est illustré à la figure 5.1; on note que l'aire du rectangle qu'on y montre correspond à la distance parcourue pendant l'intervalle Δt.

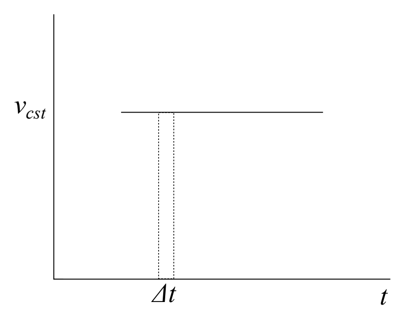


FIGURE 5.1

Maintenant, considérons une situation un peu plus complexe dans laquelle un objet se déplace à une vitesse $v(t)$ non constante. Avec une telle vitesse, on désire déterminer la distance totale parcourue par l'objet entre un instant initial t_i et un instant final t_f. La figure 5.2 (a) illustre la situation. Une façon d'en arriver à une approximation de la distance recherchée est de tout d'abord diviser l'intervalle de temps allant de t_i à t_f en sous-intervalles de longueurs égales Δt et de considérer que la vitesse est constante dans chacun de ces petits sous-intervalles. Ceci est illustré à la figure 5.2 (b). Alors, selon la

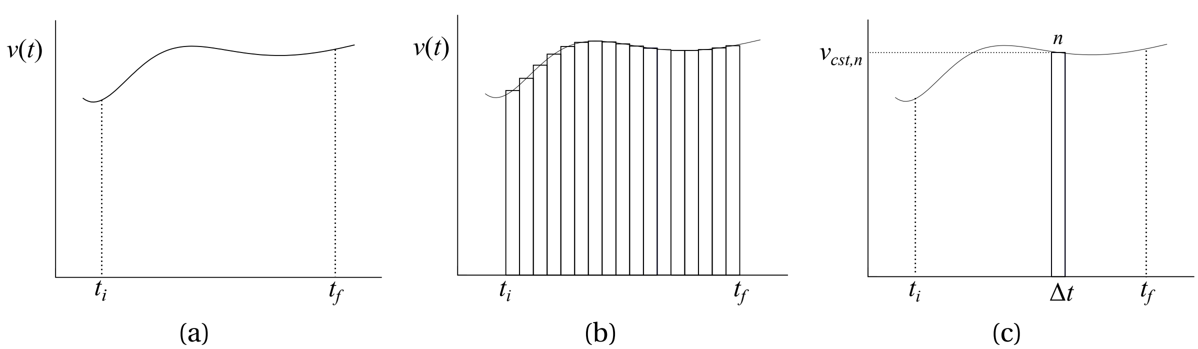


FIGURE 5.2

remarque préliminaire, la distance parcourue dans un sous-intervalle spécifié par un indice n donné, tel qu'illustré à la figure 5.2 (c), sera donnée par la vitesse supposée constante dans ce sous-intervalle[1], notons-la pour l'instant $v_{cst,n}$, multipliée par Δt. Insistons de nouveau sur le fait que le produit $v_{cst,n}\Delta t$ correspond à l'aire du petit rectangle illustré à la figure 5.2 (c). L'approximation de la distance totale parcourue pourra alors être obtenue en additionnant les petites distances parcourues dans les sous-intervalles, ce qu'on pourrait dénoter pour l'instant de façon un peu cavalière par

$$d_{tot} \approx \sum_n v_{cst,n}\Delta t;$$

cela sera précisé plus loin. On remarquera que la somme de ces petites distances, chacune correspondant à une aire, est aussi une approximation de l'aire totale sous la courbe de la vitesse entre les instants t_i et t_f. On voit en outre que plus on utilisera des intervalles petits (à la limite infiniment petits en faisant tendre Δt vers zéro), meilleure sera l'approximation de l'aire exacte sous la courbe qui correspond à la distance qu'on désire calculer. On voit la notion de limite poindre de nouveau à l'horizon!

Formalisons maintenant l'argumentation précédente en termes mathématiques; la figure 5.3 servira à accompagner la discussion qui suit. On subdivise tout d'abord l'intervalle de temps allant de t_i à t_f en N sous-intervalles égaux de longueur $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$. On dénotera par t_0 l'instant t_i et par t_N l'instant t_f. On utilisera l'indice n pour dénombrer les sous-intervalles, avec $n = 0$ désignant le sous-intervalle commençant en t_0, $n = 1$ le sous-intervalle commençant en $t_1 = t_0 + \Delta t$, et ainsi de suite jusqu'au dernier sous-intervalle d'indice $n = N - 1$ commençant en $t_{N-1} = t_0 + (N-1)\Delta t$ et se terminant en t_N. Un sous-intervalle arbitraire d'indice générique n débute donc en $t_n = t_0 + n\Delta t$. Comme vitesse constante dans chacun des sous-intervalles, on prendra la vitesse au début du sous-intervalle; donc, pour l'indice n, ceci correspond à $v(t_n)$. Noter qu'on pourrait choisir comme vitesse constante, n'importe quelle valeur de la vitesse dans le sous-intervalle comme p.ex. aussi la valeur au centre ou à la fin de celui-ci. Toutefois, on peut démontrer rigoureusement qu'en bout de ligne, ça ne change pas le résultat final (un petit exercice sur ce point est donné plus bas). Par simplicité, on choisira donc la valeur du début. Avec ces notations, l'approximation de la distance totale parcourue, qui est aussi l'aire sous la courbe entre t_i et t_f qu'on dénotera par $A(t_i, t_f)$, est donnée par la somme suivante

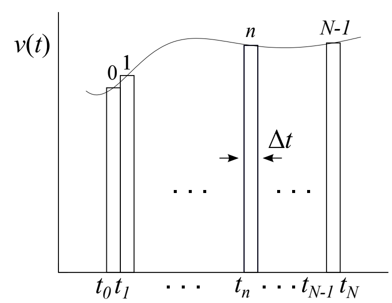


FIGURE 5.3

$$d_{tot} = A(t_i, t_f) \approx \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n)\Delta t = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n) = \frac{t_f - t_i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n), \tag{5.1}$$

où on a utilisé le fait qu'on peut sortir Δt du signe de sommation étant donné qu'il est constant. Finalement, en faisant tendre vers l'infini le nombre de sous-intervalles, c.à.d. en prenant $N \to \infty$ ce qui fera que $\Delta t \to 0$, on obtient la valeur exacte de la distance totale recherchée (et de l'aire) donnée par

$$d_{tot} = A(t_i, t_f) = \lim_{N\to\infty} \frac{t_f - t_i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n). \tag{5.2}$$

[1] Ceci est en bonne approximation vrai en autant que l'intervalle soit suffisamment court.

La limite de la somme qu'on vient d'écrire s'appelle l'*intégrale* entre t_i et t_f de la fonction $v(t)$ et on la dénote par[2]

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)dt \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{t_f - t_i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n). \tag{5.3}$$

L'intervalle allant de t_i à t_f est appelé l'*intervalle d'intégration* et t_i et t_f sont appelés les *bornes d'intégration*. Dans l'équation précédente, le signe $\int$ est le symbole désignant l'intégrale. Sa forme en "S" stylisé rappelle que l'intégrale est une somme. Le symbole dt apparaissant à droite de l'intégrale (on dit qu'il est "sous l'intégrale" ou qu'il apparaît "sous le signe d'intégration"), est appelé *élément différentiel* (ou *élément infinitésimal*). Il rappelle le fait que dans la somme sous-jacente à une intégrale, il y a des longueurs d'intervalles qui sont impliquées ; l'élément différentiel est également très commode lorsqu'on fait des changements de variables, ce qu'on verra plus tard. La fonction qui apparaît après le signe d'intégration, donc qu'on désire intéger, en l'occurence v ici, est appelée l'*intégrand*.

Il est à noter qu'on voit souvent la notation moins rigoureuse suivante pour désigner la limite impliquée dans l'intégrale :

$$\int_{t_i}^{t_f} v(t)dt = \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} v(t_n)\Delta t. \tag{5.4}$$

Bien qu'attirante intuitivement et parfois commode, car elle fait ressortir la nature infiniment petite de la longueur des sous-intervalles considérés dans une intégrale, cette notation n'a pas un sens mathématique bien défini ; on doit se rapporter à l'équation 5.3 pour cela.

On verra plus loin un exemple sur comment on calcule une somme et sa limite qui apparaîssent à l'équation 5.3, mais en pratique on n'a pas besoin de le faire en raison des considérations qui suivent. On sait que la distance totale parcourue que l'on cherchait initialement sera donnée par la différence entre la position finale $s(t_f)$ et la position initiale $s(t_i)$. On peut donc écrire l'équation d'importance capitale suivante :

$$s(t_f) - s(t_i) = \int_{t_i}^{t_f} v(t)dt. \tag{5.5}$$

Cette dernière équation est en fait si importante qu'elle porte le nom de *théorème fondamental du calcul intégral*. Ce qu'elle dit d'important est que pour calculer l'intégrale d'une fonction, il faut trouver une autre fonction dont la dérivée est égale à celle qu'on veut intégrer (la vitesse v est la dérivée de la position s dans l'équation précédente). Si on arrive à connaître cette autre fonction, alors on obtient la valeur de l'intégrale en soustrayant les valeurs de cette autre fonction obtenues aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Pour cette raison, l'**intégration d'une fonction revient à trouver l'*anti-dérivée* de cette fonction**. L'anti-dérivée d'une fonction est une autre fonction dont la dérivée est égale à cette fonction. L'anti-dérivée d'une fonction est aussi communément appelée *fonction primitive* (ou simplement primitive). *La principale difficulté rencontrée lorsqu'on est débutant en intégration, par opposition à la dérivation, est que pour l'intégration il faut en quelque sorte "penser à l'envers". En effet, au risque de se répéter, en intégration on cherche une fonction (la primitive) dont la dérivée est égale à la fonction qu'on désire intégrer (l'intégrand), alors qu'en dérivation le processus est assez direct, on part d'une fonction et*

[2]Plus précisément, la limite d'une somme telle qu'écrite ici s'appelle une *somme de Riemann* et l'intégrale ainsi définie s'appelle *intégrale de Riemann* en l'honneur du mathématicien Bernhard Riemann qui, le premier, les a étudiées de façon rigoureuse pour donner des fondations solides à l'intégration. Dans certaines situations, toutefois, la définition de Riemann de l'intégrale a des limites et des généralisations sont nécessaires, dont l'intégrale de Lebesgue fait partie. On n'entrera pas davantage dans ces détails ici.

on applique des règles et formules pour trouver la dérivée. Si on revient à l'exemple de la cinématique qu'on a considéré pour être plus concret, dans le cas de la vitesse, sa primitive est la fonction position. Noter que la primitive d'une fonction n'est pas unique, car si on trouve une primitive, on peut toujours y ajouter une constante (la dérivée d'une constante étant nulle).

Revenons, pour un exemple concret, au calcul de la limite de la somme apparaîssant à l'équation 5.3 pour montrer comment cela se fait en pratique. On ne reviendra pas sur de tels calculs par la suite, car par le théorème fondamental, cela n'est pas nécessaire. Considérons la fonction $v(t) = t$ qu'on intégrera sur l'intervalle allant de 0 à 1. Subdivison l'intervalle en N sous-intervalles. Dans ce cas, on aura $\Delta t = 1/N$, $t_n = n/N$ et $v(t_n) = t_n = n/N$. Ainsi, la limite de la somme à effectuer est

$$\begin{aligned} \int_0^1 t\,dt &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} n. \end{aligned}$$

Rappelons le résultat suivant[3] : $\sum_{m=1}^{M} m = \frac{M(M+1)}{2}$. Dans le cas présent, on a $M = N-1$. Donc

$$\int_0^1 t\,dt = \lim_{N\to\infty} \frac{(N-1)N}{2N^2} = \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Remarquons que dans ce genre d'exercices, il y a toujours à calculer des sommes numériques du genre de celle qui s'est présentée ici. Dans le cas présent, il s'agissait d'une somme relativement facile à évaluer et les choses se complexifient rapidement. Note : On vérifie géométriquement que le résultat obtenu à l'éq. 5.6 est bien correct, car l'intégrale évaluée correspond à l'aire sous la courbe $v(t) = t$, or cette aire est celle d'un triangle dont la base est d'une longueur d'une unité et la hauteur est aussi d'une unité ; un tel triangle a bien une aire de 1/2 (faire un dessin pour voir cela si nécessaire).

Exercice de lecture 5.1. *Facultatif :* Dans l'exemple qui vient d'être traité dans le texte, la valeur de la fonction utilisée pour chacun des sous-intervalles est celle au début. Refaire le calcul pour la même fonction, mais cette fois en utilisant les valeurs aux fins des intervalles.

Exercice de lecture 5.2. Calculer $\int_0^2 v(t)\,dt$ à l'aide de l'équation 5.3 dans le cas où $v(t) = c =$ constante.

Exercice de lecture 5.3. Calculer $\int_0^2 v(t)\,dt$ à l'aide de l'équation 5.3 dans le cas où $v(t) = t^2$. Le résultat suivant sera utile : $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Ceci complète l'introduction portant sur l'intégrale dans laquelle on a insisté sur les principes afin que l'étudiant en saisisse bien la signification. On s'est ici de nouveau notamment fortement appuyé sur la cinématique et les notions de position, de déplacement et de vitesse pour une introduction naturelle à l'intégration. On notera que sans cet appui sur des considérations physiques, il aurait été difficile d'arriver au théorème fondamental du calcul intégral ; ces considération physiques ont certes été d'une grande utilité. Tel qu'il a été mentionné pour la dérivée, maintenant que les concepts ont été introduits

[3]Ce résultat s'obtient de la façon suivante. On a $\sum_{m=1}^{M} m = 1+2+\ldots+(M-1)+M$. Si on écrit cette somme à l'envers, on a aussi $\sum_{m=1}^{M} m = M+(M-1)+\ldots+2+1$. Si on addition la somme et la somme à l'envers en regroupant les termes selon leur ordre, on voit qu'on a $2\cdot\sum_{m=1}^{M} m = (M+1)+(M+1)+\ldots+(M+1)$; la quantité $M+1$ y apparaît M fois. Ainsi, on a $2\sum_{m=1}^{M} m = M(M+1)$, donc $\sum_{m=1}^{M} m = \frac{M(M+1)}{2}$.

et compris, on n'a plus besoin de faire référence à la cinématique et au jargon associé. Dans un contexte plus général, l'intégrale d'une fonction donne l'aire sous la courbe définie par le graphe de cette fonction. On utilisera dorénavant x comme variable et $f(x)$ pour désigner une fonction.

Selon le théorème fondamental du calcul intégral, dans tout exercice d'intégration, la première tâche à effectuer est de trouver la primitive de la fonction qu'on désire intégrer (l'intégrand) indépendemment des bornes d'intégration. On dénote cela par

$$\int f(x)dx.$$

On parle alors d'une *intégrale indéfinie*, car les bornes ne sont pas spécifiées (définies), et ce qu'on entend par là est la primitive de la fonction $f(x)$. Dans le cas où les bornes d'intégration sont spécifiées, comme dans

$$\int_a^b f(x)dx,$$

on parle alors d'une *intégrale définie*. Si on connaît une primitive $F(x)$ à la fonction $f(x)$ (c.à.d. une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$, alors, par le théorème fondamental, la valeur de l'intégrale définie s'obtient comme suit :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

La dernière équation sera souvent écrite sous la forme suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b, \tag{5.7}$$

où $F(x)\Big|_a^b$ signifie F évaluée à la borne supérieure indiquée (soit b) moins F évaluée à la borne inférieure (soit a), c.à.d. $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

À noter que plusieurs fonctions n'ont pas de primitives connues (c.à.d. exprimables en terme de fonctions simples, un exemple classique est la fonction $\ln x$), même s'il s'agit de fonctions continues (c.à.d. ne présentant pas de sauts) et dérivables. Par contre, toutes les fonctions, hormis des cas vraiment pathologiques, admettent une dérivée. Pour intégrer des fonctions qui n'admettent pas de primitives, on a généralement recours à des méthodes numériques qui permettent d'obtenir une valeur approchée d'une intégrale. Une approche élémentaire pour faire cela est d'avoir recours directement l'approximation donnée à l'éq. 5.1 et d'utiliser de très petits sous-intervalles. Il y a toutefois des méthodes plus sophistiquées pour intégrer numériquement une fonction.

Dans ce qui suit, on passera aux aspects plus techniques de l'intégration qui sont utiles dans son applicatin pratique.

Exercice de lecture 5.4. Calculer l'intégrale suivante $\int_0^4 x^2 dx$. Selon le théorème fondamental du calcul intégral, il vous faut tout d'abord trouver une fonction $F(x)$ telle que sa dérivée soit égale à x^2. Indice : On sait que la dérivée de x^3 vaut $3x^2$; donc quelle pourrait être une fonction dont la dérivée donne x^2 ?

5.2 Intégrales indéfinies (primitives) des fonctions usuelles

Tel que mentionné précédemment, l'intégration revient à trouver l'anti-dérivée (ou primitive) d'une fonction ; c'est ce que dicte le théorème fondamental du calcul intégral. On énoncera dans la présente section les intégrales indéfinies (ou primitives) des fonctions usuelles simples. Pour ce qui est de fonctions plus compliquées, on discutera plus loin, sans être exhaustif, de techniques pour trouver la primitive d'une fonction.

On a vu, au chapitre 3 sur la dérivation, les formules de dérivées des diverses fonctions communément rencontrées. Toutes ces formules peuvent être reformulées pour l'intégrale. P.ex. sachant que $(\cos x)' = -\sin x$, on peut écrire que

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c, \tag{5.8}$$

où c est une constante. La fonction $-\cos x + c$ est bien une primitive de $\sin x$, car $\frac{d}{dx}(-\cos x + c) = \sin x$. En appliquant le même raisonnement, on a les formules suivantes obtenues directement du calcul différentiel :

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, \tag{5.9}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c, \tag{5.10}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c, \tag{5.11}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \tag{5.12}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c, \tag{5.13}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c, \tag{5.14}$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c, \tag{5.15}$$

$$\int \text{cosec}^2\ x\, dx = -\text{cotan}\ x + c, \tag{5.16}$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c, \tag{5.17}$$

$$\int \text{cosec}\ x\text{cotan}\ x\, dx = -\text{cosec}\ x + c, \tag{5.18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin\ x + c, \tag{5.19}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan\ x + c, \tag{5.20}$$

Le formules précédentes sont des formes de base du calcul intégral et on les vérifie en notant que la dérivée du membre de droite de ces équations donne bien l'intégrant apparaissant dans l'intégrale du membre de gauche. Bien d'autres fonctions que celles apparaissant dans la liste précédente peuvent être intégrées. P.ex., ces formules ne disent pas comment calculer une intégrale indéfinie telle que

$$\int 2x\cos(x^2+1)\,dx,$$

alors que cette fonction peut bel et bien être intégrée. On verra plus loin des techniques pour ce faire.

5.3 Propriétés de l'intégration

Propriété 1 : Une intégrale sur un intervalle de longueur nulle vaut zéro Intuitivement, ce résultat est évident en se rappelant que l'intégrale d'une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a,b]$ représente l'aire sous la courbe du graphe de cette fonction entre a et b. Donc, si l'intervalle est de longueur nulle, il n'y aura pas d'aire d'où le résultat nul. La démonstration va comme suit. Selon le théorème fondamental du calcul intégral, si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors[4]

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0. \tag{5.21}$$

Propriété 2 : L'inversion des bornes d'intégration inverse le signe de l'intégrale On a le résultat suivant

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5.22}$$

qu'on démontre comme suit. Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$. Alors

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)\,dx &= F(a) - F(b)\\ &= -(F(b) - F(a))\\ &= -\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

C'est un résultat qui est souvent utilisé conjointement avec la règle du changement de variable dans le cas où on a à calculer une intégrale définie.

Propriété 3 : Intégrale sur un intervalle séparé en sous-intervalle On sait que l'intégrale définie représente l'aire sous la courbe définie par le graphe de $f(x)$. Ainsi, si c est entre a et b, l'aire sous la courbe entre a et b peut être obtenue en additionnant les aires entre a et c et entre c et b. Voici la démonstration : Soit $F(x)$ une primitive de $f(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.23}$$

[4] On verra plus loin qu'une primitive existe toujours pour une fonction continue.

En effet

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(c) + F(c) - F(a) \\ &= \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.\end{aligned}$$

Remarquer qu'on a ici utilisé le truc d'ajouter zéro à un moment donné dans le développement ; ce zéro a été ajouté sous la forme de $-F(c)+F(c)$.

Exercice de lecture 5.5. Soit $g(x)$ définie sur l'intervalle $[0,2]$ par $g(x) = 3$ si $0 \le x < 1$ et $g(x) = -1$ si $1 \le x \le 2$. Calculer $\int_0^2 g(x)dx$.

Propriété 4 : Une constante sous le signe de l'intégrale peut être sortie de l'intégrale Cette propriété est basée sur le fait que si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors $G(x) = kF(x)$ sera une primitive de $g(x) = kf(x)$. Avec cela on démontre que

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \tag{5.24}$$

En effet

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx &= kF(b) - kF(a) \\ &= k(F(b) - F(a)) \\ &= k\int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Propriété 5 : L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales Si $F_1(x)$ est une primitive de $f_1(x)$ et $F_2(x)$ une primitive de $f_2(x)$, alors $F_1(x) + F_2(x)$ sera une primitive de $f_1(x) + f_2(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx &= (F_1(b) + F_2(b)) - (F_1(a) + F_2(a)) \\ &= (F_1(b) - F_1(a)) + (F_2(b) + F_2(a)) \\ &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.\end{aligned}$$

On a donc le résultat

$$\int_a^b \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx. \tag{5.25}$$

Propriété 6 : Toute fonction continue admet une primitive (ou une intégrale indéfinie) Soit f une fonction continue et posons

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{5.26}$$

alors on va montrer que $F'(x) = f(x)$; donc F est une primitive de f. Avant de procéder avec la démonstration, notons que dans une intégrale définie, la variable d'intégration, en occurence t dans l'équation précédente, est une variable muette comme il a déjà été mentionné précédemment. L'intégrale précédente ne dépendra pas de t qui disparaît une fois l'intégration faite ; elle dépendra plutôt de x qui apparaît comme borne. Calculons maintenant la dérivée de $F(x)$ telle que donnée à l'éq. 5.26 à l'aide de la définition de la dérivée. Ainsi

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned}$$

Or, si on considère h très petit (ce qu'on fait en prenant la limite pour h tendant vers zéro), alors on aura $\int_x^{x+h} f(t)dt \approx f(x)h$. En substituant ce résultat dans l'équation précédente, les h s'annuleront et on obtiendra

$$F'(x) = f(x),$$

ce qui est le résultat annoncé. Ce résultat montre que toute fonction continue possède une primitive. Il ne nous dit toutefois pas que cette primitive peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Il existe en effet des fonctions pour lesquelles on n'arrive pas à trouver de primitive en terme de fonctions élémentaires. Le résultat $F'(x) = f(x)$ avec F telle que définie à l'éq. 5.26 peut être réécrit sous la forme suivante :

$$f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt. \tag{5.27}$$

Voyons un exemple de la propriété 6.

Exemple 5.1. Soit la fonction suivante définie par une intégrale

$$F(x) = \int_\pi^x \sin t \, dt.$$

Donner une expression explicite pour $F(x)$ et calculer ensuite la dérivée de $F(x)$.

Solution. On a que $(-\cos t)' = \sin t$, donc

$$\int_\pi^x \sin t \, dt = -\cos t\Big|_\pi^x = -(\cos x - \cos\pi) = -\cos x - 1,$$

donc $F(x) = -\cos x - 1$. Ainsi $F'(x) = \sin x$.

5.4 Techniques pour trouver la primitive d'une fonction

Il importe de mentionner ici brièvement qu'il existe diverses techniques pour trouver la primitive d'une fonction selon le type de fonction considérée (fonction rationelle, trigonométrique, *etc*). Notons parmi ces techniques l'intégration par parties, la décomposition en fractions partielles de fonctions rationnelles avant leur intégration, les changements de variables judicieux, les substitutions géométriques, *etc.* Il s'agit d'un art dans lequel on devient habile avec la pratique. Cet art ne sera pas abordé dans tous ses détails ici et le lecteur est référé à d'autres ouvrages consacrés au calcul différentiel et intégral pour une revue exhaustive de ces techniques. L'objectif du présent ouvrage est de rendre le lecteur fonctionnel avec le calcul intégral en lui fournissant les outils essentiels. Mentionnons, et on y a fait allusion plus haut, qu'il n'est pas toujours possible de trouver une expression explicite pour la primitive de certaines fonctions en terme de fonctions élémentaires, un exemple est la fonction $\ln x$. Dans le cas où on doit intégrer une telle fonction, on a alors recours à des techniques d'intégration numérique.

5.4.1 Intégrale d'une fonction dont l'argument est multiplié par une constante

Voyons tout d'abord une formule simple très souvent utile en pratique. Supposons qu'on ait une fonction $f(x)$ dont on connait une primitive $F(x)$, c.à.d. $\int f(x)dx = F(x)$, ou de façon équivalente $F'(x) = f(x)$. Si a est une constante, on a alors

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax). \tag{5.28}$$

En effet, si on dérive $\frac{1}{a}F(ax)$ par rapport à x, on obtient $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}F(ax)\right) = \frac{1}{a}aF'(ax) = f(ax)$.

Voyons un exemple d'application de la formule qui vient d'être discutée.

Exemple 5.2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int \cos(ax)dx.$$

Solution. Comme on sait que la dérivée d'un sinus est un cosinus, on a donc ici $F(x) = \sin x$; ainsi

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\sin(ax).$$

On vérifie bien ce résultat en dérivant le membre de gauche de l'équation pour retrouver l'intégrand qui apparaît sous le signe de l'intégrale.

Exercice de lecture 5.6. Calculer $\int e^{137u}du$.

5.4.2 Formule du changement de variable et substitutions

Cas de l'intégrale indéfinie Revenons à une intégrale présentée plus haut, soit

$$\int 2x\cos(x^2+1)dx.$$

On voit que si on utilise une nouvelle variable u en posant $u = x^2+1$, alors $\frac{du}{dx} = 2x$. On a donc à intégrer

$$\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx. \tag{5.29}$$

On voit ainsi apparaître une dérivation en chaîne. En effet, considérons la fonction $\sin u$ où u est considérée comme fonction de x. Alors $(\sin u)' = \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$. Ainsi on a une dérivée sous le signe d'intégration, et on est en fait en présence de l'intégrale suivante

$$\int \frac{d}{dx}(\sin u)\, dx,$$

qu'on peut alors intégrer directement pour obtenir

$$\int \frac{d}{dx}(\sin u)\, dx = \sin u = \sin(x^2+1).$$

À noter que puisque la différentielle de u est donnée par $du = \frac{du}{dx}dx$, l'intégrale donnée à l'équation 5.29 peut aussi s'écrire

$$\int \cos(u) du,$$

qu'on peut intégrer directement étant donné qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction élémentaire.

L'intégrale qu'on vient de considérer est un exemple du cas général suivant

$$\int f(g(x))g'(x)dx,$$

qui peut se réécrire sous la forme suivante en utilisant la dérivation en chaîne

$$\int \frac{d}{dx}F(g(x))dx,$$

où F est la primitive de f. Ainsi, si on connaît une primitive F de f, on peut alors écrire le résultat suivant

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)), \quad \text{où } F'(u) = f(u). \tag{5.30}$$

On vérifie avec la règle de dérivation en chaîne que, si on dérive le membre de droite de cette dernière équation, on obtient bien l'intégrand sous le signe d'intégration. L'éq. 5.30 est appelée l'*équation du changement de variables pour les intégrales*, car si on pose $u = g(x)$ et qu'on écrit $g'(x)dx$ comme $\frac{du}{dx}dx = du$ (c'est comme si on cancellait les dx pour ne garder que du), alors une façon équivalente d'écrire l'intégrale est

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du. \tag{5.31}$$

On a ainsi changé à la variable u. La forme du membre de droite de la dernière équation montre bien que pour résoudre l'intégrale, il faut trouver la primitive de $f(u)$. Le changement à la nouvelle variable u simplifie l'intégrale qu'on a à effectuer, d'où le nom de la méthode.

Voyons un autre exemple d'application de la formule du changement de variables.

Exemple 5.3. Calculer l'intégrale indéfinie suivante

$$\int x^3 e^{x^4} dx.$$

Solution. Posons $u = x^4$, alors $du = 4x^3 dx$. On a donc

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \int e^u \frac{1}{4} du;$$

On peut sortir le facteur $\frac{1}{4}$ de l'intégrale et on obtient ainsi

$$\int x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{4} e^u = \frac{1}{4} e^{x^4}.$$

Exercice de lecture 5.7. Calculer $\int (6x^2 + 6x + 1) \sin(2x^3 + 3x^2 + x + 29) dx$.

Cas de l'intégrale définie - bornes d'intégration On a vu la formule du changement de variable (règle de substitution) dans le contexte de l'intégrale indéfinie. Dans le cas où on a une intégrale définie avec ses bornes d'intégration comme suit

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx,$$

alors lorsqu'on pose $u = g(x)$, on a que si x vaut a (borne d'intégration inférieure) alors u vaut $g(a)$ et si x vaut b, alors u vaut $g(b)$. On a ainsi la règle de substitution suivante pour les intégrales définies

$$\int_a^b f\left(g(x)\right) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du. \tag{5.32}$$

Au lieu d'utiliser la formule précédente, où on change les bornes selon le changement de variable (on dit *faire suivre les bornes*), on peut aussi évaluer l'intégrale indéfinie $\int f\left(g(x)\right) g'(x) dx$, poser $u = g(x)$, calculer l'intégrale indéfinie $\int f(u) du$, disons que ça donne $F(u)$, resubstituer $u = g(x)$ pour obtenir $F(g(x))$ et finalement évaluer $F(g(x))$ entre les bornes a et b qui donne finalement le résultat $F(g(b)) - F(g(a))$ qui sera le même que celui donné à l'éq. 5.32. Les deux approches sont équivalentes et on choisira celle avec laquelle on est le plus à l'aise. Voici un exemple qui illustre ces deux façons de faire.

Exemple 5.4. Calculer

$$\int_1^2 (\ln(x))^2 \frac{dx}{x}.$$

Solution. Posons $u = \ln x$. Alors $du = \frac{1}{x} dx$. Pour ce qui est des bornes d'intégration, lorsque $x = 1$, $u = 0$ et lorsque $x = 2$, $u = \ln 2$ (lorsqu'on fait le changement de variables, les bornes d'intégration doivent changer en conséquence de ce changement de variables comme l'indique l'éq. 5.32, où dans l'intégrale à la droite du signe d'égalité, c'est $g(a)$ et $g(b)$ qui apparaissent ; ce ne sont plus les bornes pour x, mais bien celles pour u. Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (\ln(x))^2 \frac{dx}{x} &= \int_0^{\ln 2} u^2 du \\
&= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{(\ln 2)^3}{3}.
\end{aligned}$$

Si on procède plutôt en évaluant d'abord l'intégrale indéfinie, on a alors en posant $u = \ln x$

$$\begin{aligned}\int (\ln(x))^2 \frac{dx}{x} &= \int u^2 du \\ &= \left[\frac{u^3}{3}\right] \\ &= \frac{(\ln x)^3}{3}.\end{aligned}$$

Finalement, on évalue le dernier résultat entre les bornes originales pour obtenir

$$\left.\frac{(\ln x)^3}{3}\right|_1^2 = \frac{(\ln 2)^3}{3} - \frac{(\ln 1)^3}{3}.$$

Comme $\ln 1 = 0$, on réobtient bien le même résultat que précédemment.

Exemple 5.5. Soit $f(x)$ une fonction paire dans l'intervalle $[-a, a]$. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Solution. On va d'abord séparer l'intégrale en deux intégrales comme suit :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Pour la première intégrale à droite de l'égalité, on fait le changement de variables suivant : $y = -x$. Ainsi, $dx = -dy$ et les bornes vont de a à zéro, c.à.d. on a

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_a^0 f(-y)(-dy) = \int_0^a f(-y)dy$$

(on a inversé les bornes pour passer à la dernière intégrale). Comme f est paire, on a $f(-y) = f(y)$ et ainsi

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(y)dy$$

Étant donné que y est une variable muette, on peut la renommer x, et donc on a

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Exercice de lecture 5.8. Soit $f(x)$ une fonction impaire dans l'intervalle $[-a, a]$. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Substitutions On utilise parfois la forme précédente à l'envers, c.à.d. on a une intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

à évaluer et on substitue $x = g(u)$ (d'où le nom de *méthode par substitution*; c'est aussi un changement de variables, mais cette fois-ci, c'est x qu'on change pour quelque chose d'autre, alors que précédemment on posait $u = g(x)$). La formule devient alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du. \tag{5.33}$$

Cette dernière forme semble *a priori* plus compliquée que la forme initiale, mais dans plusieurs cas, c'est plutôt l'inverse, c.à.d. que l'intégrale du membre de droite est plus simple à trouver. Voyons un exemple.

Exemple 5.6. Trouver (on considère une intégrale indéfinie)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

où a est un nombre positif.

Solution. Posons $x = a\cos\theta$, on obtient $dx = -a\sin\theta\,d\theta$ et notre intégrale devient

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{-a\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}} \\
&= \int \frac{-a\sin\theta\,d\theta}{a\sqrt{1-\cos^2\theta}} \\
&= \int \frac{-\sin\theta\,d\theta}{\sin\theta} \\
&= -\int d\theta \\
&= -\theta = -\arccos\left(\frac{x}{a}\right).
\end{aligned}$$

Si on se rappelle de la formule de dérivation pour arccos, on vérifie bien que

$$\frac{d}{dx}\arccos\left(\frac{x}{a}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Exercice de lecture 5.9. Trouver

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

et vérifier le résultat obtenu. Indice : Si on procède comme dans l'exemple précédent, alors on arrive à une intégrale de cosec^2 pour laquelle on connaît la primitive (voir éq. 5.16).

5.4.3 Intégration par parties

Une autre technique d'intégration venant directement du calcul différentiel est l'*intégration par parties*. Cette technique vient de la formule pour la dérivée d'un produit de fonctions réarrangée un peu différemment. Rappelons que la dérivée d'un produit de fonctions u et v est donnée par

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx},$$

qu'on réécrira sous la forme suivante

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}.$$

Alors, si on a à intégrer la fonction $u\frac{dv}{dx}$, on pourra écrire en utilisant l'équation précédente que

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = \int \frac{d}{dx}(uv)dx - \int v\frac{du}{dx}dx.$$

Or $\int \frac{d}{dx}(uv)dx = uv$, car il s'agit de l'intégrale de la dérivée de uv. Ainsi,

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx,$$

ce qu'on réécrit généralement sous la forme

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{5.34}$$

Voyons un exemple d'application de cette formule fort utile.

Exemple 5.7. Calculer

$$\int xe^x dx.$$

Solution. Posons $u = x$, $dv = e^x dx$. Alors, $du = dx$ et $v = e^x$ (pour trouver v, on cherche la primitive de e^x), alors

$$\begin{aligned}\int u\,dv = \int xe^x dx = uv - \int v\,du &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x.\end{aligned}$$

Noter que lorsqu'on utilise l'intégration par parties, il faut choisir quelle fonction sera u et quelle différentielle sera dv. Ce choix doit être fait de façon judicieuxe. Dans l'exemple précédent, si on avait choisi $u = e^x$ et $dv = xdx$, alors on aurait obtenu $du = e^x dx$ et $v = x^2/2$. Ce choix n'aide pas à calculer l'intégrale, car on augmente la puissance de x. Si on ne fait pas le bon choix, on s'en rend généralement vite compte et on n'a alors qu'à recommencer avec une autre possibilité pour u et dv.

Exercice de lecture 5.10. Calculer $\int x \ln x\, dx$.

On utilise souvent (mais pas exclusivement comme l'exercice précédent le montre) l'intégration par parties lorsqu'on a à intégrer un polynôme multiplié par une fonction trigonométrique ou par une exponentielle. Dans ces cas, on pose u comme étant le polynôme. Cela permet d'abaisser le degré du polynôme à chaque application de l'intégration par parties ; pour ce qui est de la fonction trigonométrique ou exponentielle, on retrouve un tel type de fonction après intégration de dv. À remarquer qu'il arrive qu'il faille appliquer l'intégration par parties plusieurs fois successivement pour finalement obtenir une intégrale qu'on peut calculer de façon élémentaire.

Exercice de lecture 5.11. Calculer $\int (x^2 + x) \sin x \, dx$.

Tel que mentionné au début de cette section, outre la formule du changement de variables et l'intégration par parties, il existe de nombreuses autres techniques pour trouver une primitive qui ne seront pas abordées ici. Les principales techniques ont néanmoins été vues.

5.5 Applications de l'intégrale

5.5.1 Valeur moyenne d'une fonction

On sait que si on a un ensemble de nombres $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, alors la moyenne de ces nombres sera donnée par

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n. \tag{5.35}$$

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$. On peut se poser la question à savoir quelle est la valeur moyenne de cette fonction sur cet intervalle. Pour ce faire, discrétisons l'intervalle en N sous-intervalles égaux à la façon de ce qui a été fait à la figure 5.3. La largeur des intervalles sera alors donnée par $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. Considérons les valeurs de la fonction f aux N points $x_n = a + n\Delta x, n = 0, \ldots N - 1$. Alors, un estimé de la valeur moyenne de la fonction sera

$$\bar{f} \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n).$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de cette dernière équation par Δx ; on obtient alors

$$\bar{f} \approx \frac{1}{N\Delta x} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x.$$

Si on fait tendre N vers l'infini, l'approximation de la moyenne deviendrà à la limite exacte et ainsi

$$\bar{f} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\Delta x.$$

En comparant avec la définition de l'intégrale (voir éq. 5.3), on voit que l'expression précédente représente l'intégrale suivante

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.36}$$

Un autre type de valeur moyenne communément utilisée, notamment en électricité, est la valeur RMS (“root mean square”) qui signifie littéralement “la racine carré de la moyenne du carré”. En équation, la valeur RMS d’une fonction sur un intervalle $[a,b]$ est donnée par

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}. \tag{5.37}$$

On voit que sous la racine carrée, on calcule la valeur moyenne du carré de la fonction.

Exercice de lecture 5.12. Soit $f(x)$ définie sur l’intervalle $[0,1]$ par $f(x) = -1$ si $0 \le x < 1/2$ et $f(x) = 1$ si $1/2 \le x \le 1$. (a) Quelle est la valeur moyenne de f sur cet intervalle ? Le résultat obtenu a-t-il du sens ? (b) Quelle est la valeur RMS de f sur cet intervalle ?

5.6 Exercices

Exercice 5.1. Calculer l’aire entre les courbes $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$ dans l’intervalle $[0,1]$. Faire un dessin de la situation avant de faire le calcul pour bien voir de quoi il s’agit.

Exercice 5.2. Un réservoir contient un volume de fluide en litres qui varie en fonction du temps. Un système d’approvisionnement fournit au réservoir un débit apportant un certain nombre de litres par seconde (apport). Toutefois, une fuite dans le réservoir fait en sorte qu’il perd du fluide à un débit spécifié en litres par minute (perte). Note : Dans cet exercice, prendre le temps de bien comprendre le problème et de bien définir les variables et données. Ce sont des aspects importants dans la résolution de tels problèmes.

a) Écrire une équation qui décrit le taux de variation du volume du fluide dans le réservoir.

b) Donner une équation qui permet de calculer le volume de fluide qui a été ajouté au réservoir entre le temps $t = 0$ et un temps $t = t_f$ (ces temps étant en secondes).

c) Pendant l’intervalle de temps $[0, t_f]$, quel volume de fluide le réservoir a-t-il perdu ?

d) Sachant qu’au temps $t = 0$ il y avait un volume de fluide initial V_0 (en litres) dans le réservoir et en supposant que l’approvisionnement soit donné par $a_0(1+\cos(2\pi t/T))$ où a_0 et T sont des paramètres dont les unités sont respectivement des litres par seconde et des secondes et que la perte soit donnée par bt, où t est en minutes.

    i) Quelles sont les unités de b ?

    ii) Quel volume de fluide y aura-t-il dans le réservoir après un temps t_f (en secondes) ?

Note : Le type d’équation obtenu en a) est appelé une *équation différentielle* ; elle relie le taux de variation d’une variable inconnue d’intérêt (plutôt que directement la variable elle-même) à d’autres quantités. L’équation différentielle obtenue ici est relativement simple, car elle n’implique que la première dérivée de l’inconnue qui est ici $V(t)$. On dit que c’est une équation différentielle d’ordre 1. Il existe des équations différentielles d’ordres supérieurs impliquant des dérivées d’ordres supérieurs (dérivée seconde, dérivée troisième, etc...). Très souvent les lois de la nature (p.ex. la loi de Newton en mécanique) mènent à des équations différentielles d'ordre 2, mais ce n'est pas nécessairement toujours le cas. Aussi, lorsqu'on donne une valeur initiale pour la valeur inconnue (comme V_0 ici), on dit alors que c'est une condition initiale.

Exercice 5.3. Un parc forestier contrôlé pour l'étude de la dynamique des populations animales contient un certain nombre de lièvres qui varie en fonction du temps. Le territoire étant protégé est bien fourni en végétaux. Ceci assure un certain taux de reproduction annuel des lièvres. Le territoire contient aussi un certain nombre de renards qui chassent les lièvres correspondant à un certain taux de prédation des lièvres spécifié en nombre de lièvres par année. Les morts naturelles sont également un autre élément de perte pour la population des lièvres. Ces morts sont comptabilisées en termes de taux annuel.

a) Écrire une équation qui décrit le taux de variation du nombre de lièvres en fonction du temps en tenant compte des différents facteurs qui font varier leur population. Définir clairement les variables du problème et spécifier les unités choisies pour le temps.

b) Évidemment, plus il y a de renards, plus le taux de prédation des lièvres sera élevé. On supposera que le taux de prédation est proportionnel au nombre de renards et que le nombre de renards en fonction du temps est une variable contrôlée par la personne responsable du parc forestier (gardien du parc). De façon analogue, plus le nombre de lièvres sera élevé, plus le taux de reproduction des lièvres sera élevé. On peut donc supposer que le taux de reproduction est proportionnel au nombre de lièvres. De même, plus grand est le nombre de lièvres, plus on peut s'attendre à ce que le taux de mortalité soit élevé. On considérera ici aussi que le taux de mortalité est proportionnel au nombre de lièvres. En définissant des variables appropriées, écrire des équations pour : le taux de reproduction, le taux de prédation et le taux de mortalité.

c) Réécrire l'équation obtenue en a) en termes des taux explicités en b).

d) À l'inauguration du parc, on n'a pas introduit de renards pour voir comment se comporterait la population de lièvres en leur absence. On a initialement introduit 4 lièvres dans le parc. On a constaté dans ces conditions, que la constante de proportionnalité pour le taux de mortalité des lièvres est de 1/(an·lièvre). Par contre, les lièvres se reproduisant vite dans ces conditions, on a constaté que la constante de proportionnalité est de 10/(an·lièvre). Donner une expression pour le nombre de lièvre en fonction du temps dans ces conditions. Pour se guider, on peut se demander si la population devrait croître dans ces conditions.

e) Selon les conditions en d). La population croit-elle rapidement? Commenter. Commenter à savoir si une telle croissance est soutenable pour un parc dont les ressources sont limitées? Note : les ressources sont toujours limitées, comme on est en train de le vivre avec la population humaine sur Terre, population qui n'a pas de prédateurs!

Note : Dans le cas où le nombre de renard n'est pas nul, il faut des techniques un peu plus avancées pour trouver l'évolution du nombre de lièvres en fonction du temps. Cela est vu dans le cadre de la théorie des équations différentielles.

Exercice 5.4. Soit le signal sinusoïdal $V(t) = A\sin(2\pi f t)$.

a) Quelle est la période de ce signal?

b) Calculer la valeur RMS de ce signal sur un intervalle d'une durée d'une période.

c) En électricité, lorsqu'on donne la mesure d'une tension alternative (généralement sinusoïdale), qu'on exprime en V.A.C., on donne généralement la valeur RMS. Lorsqu'on vous dit que la tension dans une prise électrique est de 120 V.A.C., quelle est en réalité l'amplitude A du signal sinusoïdal en Volts ?

Exercice 5.5. Soit la fonction escalier

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [0,1[, \\ 4 \text{ si } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Calculer $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 5.6. Calculer

$$\int_0^1 e^{e^{x^2}} e^{x^2} 2x\,dx.$$

Exercice 5.7. Soit la fonction suivante définie par une intégrale

$$F(x) = \int_1^x t^3\,dt.$$

a) Donner une expression explicite pour $F(x)$.

b) Calculer la dérivée de $F(x)$.

Exercice 5.8. Montrer que $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + K$, où K est une constante d'intégration.

Exercice 5.9. Calculer $\int \frac{dx}{x+a}$, où a est une constante.

Exercice 5.10. On considère la position en fonction du temps d'un véhicule sur une ligne droite. Si ce véhicule est parti au temps $t = 0$ de la position x_0 et que sa vitesse en fonction du temps est donnée par $\frac{1}{t^2+b^2}$, où b est une constante. Donner la forme explicite de la fonction qui donne la position en fonction du temps de ce véhicule.

Exercice 5.11. Calculer $\int x^2 e^x\,dx$. Il faut être persévérant !

Exercice 5.12. Calculer $\int e^x \cos x\,dx$. Indice : Utiliser l'intégration par parties deux fois, on voit alors un peu de magie apparaître !

Exercice 5.13. Calculer $\int_0^1 t^2\,dt$ à l'aide de la définition d'une intégrale comme la limite d'une somme. Le résultat suivant sera utile : $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Vérifier le résultat à l'aide du théorème fondamental du calcul intégral (c.à.d. en trouvant la primitive de la fonction).

Exercice 5.14. ***Une petite introduction à la décomposition en fractions partielles et à son utilisation en intégration*** : Une fonction est dite rationelle si elle est le quotient de deux polynômes. On dénote souvent une telle fonction par $R(x)$ qui a donc la forme

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes. Soit la fonction rationelle

$$r(x) = \frac{1}{x^2 - a^2},$$

où a est une constante.

a) Factoriser le polynôme $x^2 - a^2$.

b) On peut écrire $r(x)$ sous la forme

$$r(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Trouver A et B. Cette forme pour $r(x)$ s'appelle sa décomposition en fractions partielles. On peut toujours, pour des fonctions rationelles plus compliquées, les décomposer en fractions partielles. Il y aura généralement plus de termes que le cas simple qu'on considère ici.

c) Avec la décomposition en fractions partielles précédente, trouver

$$\int r(x)\,dx.$$

Note : La décomposition en fractions partielles est l'outil permettant de calculer l'intégrale indéfinie de toute fonction rationelle. La décomposition en fractions partielles est aussi utile pour calculer la transformée de Laplace inverse, ce qui est utile en analyse de circuits et en théorie du contrôle.

Exercice 5.15. Trouver l'intégrale indéfinie

$$\int (7 - x^2)^{5/2}\,dx.$$

Exercice 5.16. Trouver l'intégrale indéfinie

$$\int (x^2 + 9)^{3/2}\,dx.$$

Exercice 5.17. On définit la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ par

$$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

La transformée de Laplace donne une nouvelle fonction, cette fois une fonction de la variable s à cause de la présence du paramètre s dans l'intégrale. La transformée de Laplace est très utilisée pour la conception de filtres analogiques ou pour l'étude des asservissements en temps continu. Calculer la transformée de Laplace suivante $\int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt$. Il faut être persévérant !