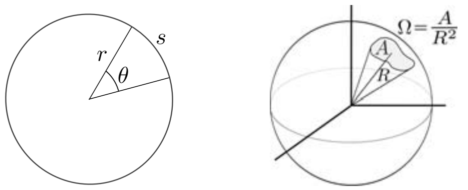

(a) (b)

FIGURE 5.1. (a) Angle plan. (b) Angle solide.

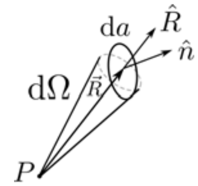

FIGURE 5.2

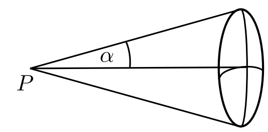

FIGURE 5.3

5.4 Angles solides

On va ici définir la notion d'angle solide, qui est un concept généralement moins connu. En se référant à la figure 5.1 (a), on se rappellera qu'un angle θ dans le plan en radians (rad) sous-tendu par un arc de cercle est défini par le rapport de la longueur s de l'arc et du rayon, soit

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

Ainsi, un tour complet (ou *angle complet*) représente un angle de 2π rad, puisque la circonférence est $2\pi r$. Un angle solide est l'analogue d'un angle plan, mais dans l'espace (figure 5.1 (b)). *Un angle solide, typiquement dénoté par* Ω*, sous-tendu par une aire* A *sur une sphère est défini par le rapport de cette aire sur le rayon* R *au carré de cette sphère*, soit

$$\Omega = \frac{A}{R^2}. \tag{5.2}$$

Un angle solide est donc défini par rapport au centre d'une sphère. Ainsi, un angle solide complet correspond à l'aire totale de la sphère et l'angle solide correspondant vaut 4π. Dans le cas d'un élément d'aire infinitésimal $\mathrm{d}a$ sur la surface d'une sphère de rayon R, l'angle solide est donné par

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}a}{R^2}. \tag{5.3}$$

On utilise souvent les coordonnées sphériques pour calculer les angles solides. Dans ce cas, un élément d'aire sur la surface de la sphère est donné par $\mathrm{d}a = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$ et ainsi l'élément d'angle solide dans ce cas est

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi. \tag{5.4}$$

On notera que sur une sphère, un élément d'aire infinitésimal est toujours perpendiculaire au rayon de la sphère. Dit autrement, la normale à l'élément d'aire est parallèle au rayon vecteur $\vec{R}$. Dans le cas où on a un élément d'aire qui n'est pas perpendiculaire au rayon vecteur reliant un point P à l'élément d'aire, l'élément d'angle solide sous-tendu par l'élément d'aire relativement au point P sera la projection perpendiculaire de cet élément d'aire par rapport au rayon vecteur. Si on définit l'élément d'aire vectoriel $\mathrm{d}\vec{a} = \hat{n}\mathrm{d}a$, où $\hat{n}$ est la normale à l'élément d'aire, et le rayon vecteur normalisé $\hat{R} = \vec{R}/R$, on a alors que l'élément d'angle solide sous-tendu par l'élément d'aire par rapport au point P est donné par (figure 5.2)

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\hat{R}\cdot\mathrm{d}\vec{a}}{R^2}. \tag{5.5}$$

Exercice de lecture 5.2. Quel est l'angle solide soustendu par une demie-sphère?

Exercice de lecture 5.3. Montrer que l'angle solide sous-tendu par une portion de sphère (calotte sphérique) ayant α comme angle conique est donné par $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$ (v. figure 5.3). Indice : Utiliser les coordonnées sphériques en prenant l'axe z comme axe par rapport auquel l'angle α est défini.