Exercices de révision

Calcul différentiel et intégral

Exercice 1. À l'aide de la définition de la dérivée faisant intervenir une limite, calculer la dérivée de la fonction cubique $f(x) = x^3$.

Exercice 2. À l'aide de la définition de la dérivée faisant intervenir une limite, montrer que la dérivée du produit des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ est donnée par : $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$. Indice : Il faut à un moment donné ajouter et soustraire la même quantité (donc "ajouter zéro"). Ceci est un truc souvent utilisé en mathématiques, de même que multiplier et diviser par une même quantité (donc "multiplier par 1").

Exercice 3. Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{i\sin(x^3)}$.

Exercice 4. Soit la fonction polynomiale $f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 9x - 2$. Trouver les maxima et minima de cette fonction.

Exercice 5. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de $f(x, y) = \sin(xy)$.

Exercice 6. Calculer les dérivées partielles premières de $x\cos^2(\frac{xy}{z^4})$ (ici c'est une fonction à trois variables).

Exercice 7. (*Facultatif*) Calculer $\int_0^1 t^2\,dt$ à l'aide de la définition d'une intégrale comme la limite d'une somme. Vous aurez besoin du résultat suivant : $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Vérifiez votre résultat à l'aide du théorème fondamental du calcul intégral (c.à.d. en trouvant la primitive de la fonction).

Exercice 8. Donnez une valeur approchée de $\sin(31°)$ en utilisant une série de Taylor autour de $\pi/6$ (qui correspond à $30°$). Note : Il faut toujours travailler en radians avec les séries de MacLaurin et de Taylor.

Vecteurs et géométrie vectorielle

Exercice 9. Soit les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dont les composantes dans une base donnée sont $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{b} = (-3, 1, -2)$. (a) Calculer $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. (b) Calculer $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$. (c) Le fait qu'on ne vous spécifie pas explicitement la base ici vous empêche-t-il de faire les calculs ?

Exercice 10. Soit les vecteurs $\mathbf{u} = [3\ 2\ 1]$ et $\mathbf{v} = [-2\ 1\ 2]$. (a) Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ? (b) Trouver l'angle entre les vecteurs.

Exercice 11. (Interprétation du produit scalaire comme la projection d'un vecteur sur la direction d'un autre) : Montrer à l'aide d'un dessin et un peu de trigonométrie que $\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$ est la projection de $\mathbf{b}$ le long de la direction de $\mathbf{a}$. Notez que si on utilise le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{u}}$ donné par $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||}$, alors l'équation de la projection se simplifie pour devenir $\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}}$. Le *vecteur projection* de $\mathbf{b}$ sur la direction définie par $\mathbf{a}$ est donné par $\mathbf{proj_a}(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}||^2}\mathbf{a}$. On voit que ce vecteur est parallèle et a le même sens que $\mathbf{a}$.

Exercice 12. Soit le vecteur $\mathbf{b}^* = \mathbf{b} - \mathbf{proj_a}(\mathbf{b})$ (en mots : pour obtenir $\mathbf{b}^*$, on soustrait de $\mathbf{b}$ sa projection sur $\mathbf{a}$). Faites un dessin la situation. Montrer que $\mathbf{b}^*$ est un vecteur perpendiculaire à $\mathbf{a}$ (c'est en fait la composante perpendiculaire de $\mathbf{b}$ par rapport à $\mathbf{a}$. Faites votre démonstration à l'aide du produit scalaire. Le vecteur $\mathbf{b}^*$ est parfois dénoté par $\mathbf{perp_a}(\mathbf{b})$; une autre notation possible serait $\mathbf{b}^{\perp_\mathbf{a}}$.

Exercice 13. Dans le plan, il est facile de trouver un vecteur perpendiculaire à un autre. Considérons le vecteur $\mathbf{v} = (a, b)$, alors par inspection en se basant sur la formule du produit scalaire, on voit que le vecteur $\mathbf{v}^{\perp} = (-b, a)$ sera perpendiculaire à $\mathbf{v}$. Démontrez cette affirmation à l'aide du produit scalaire.

Exercice 14. Soient les vecteurs suivants : $\mathbf{u} = [1\ -2\ 2]$, $\mathbf{v} = [3\ -1\ -1]$, $\mathbf{w} = [-1\ 0\ -1]$ et $\mathbf{x} = [-3\ 6\ -6]$. Calculer : a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$, d) $\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, e) $\mathbf{u} \times \mathbf{x}$.

Exercice 15. (*Facultatif*) Identité *BAC - CAB* : Considérez les produits vectoriels successifs suivants : $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. a) Montrez géométriquement à l'aide d'un dessin que le résultat de ce produit successif sera un vecteur dans le plan engendré par les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$. b) Démontrez l'identité

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Notez que le membre de droite est bien un vecteur dans le plan engendré par $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ car il s'agit d'une combinaison linéaire de ces vecteurs.

Exercice 16. Droite spécifiée par un point et une direction : Donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point $P_0 : (1, 4, -1)$ et ayant comme vecteur directeur $\mathbf{d} = (1, 1, 1)$.

Exercice 17. Trouvez l'équation du plan passant par les trois points spécifiés en utilisant les produits scalaire et vectoriel. a) $P_1 : (1, 2, 3)$, $P_2 : (-1, 4, -5)$, et $P_3 : (0, 1, -6)$. b) $P_1 : (0, 2, 1)$, $P_2 : (-1, -1, -1)$, et $P_3 : (-2, -4, -3)$.

Exercice 18. Trouvez l'équation du plan contenant le point $(2, 1, 2)$ et la droite d'équation paramétrique $\mathbf{r}(t) = (1 - t, 1, 1 + t)$.

Solutions aux exercices

Exercice 1 : On applique la définition à $f(x) = x^3$. Donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\
&= 3x^2.
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Soit $h(x) = f(x)g(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \big(f(x)g(x)\big)' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

À ce point, on est un peu bloqué. On remarque que si on soustrait $f(x)g(x+h)$ et qu'on ajoute également cette quantité (en fait, on ajoute zéro), ça permettra de faire du progrès. En effet, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)') &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

On utilise à ce point le fait que la limite d'une somme est la somme des limites (si les limites existent) et aussi que la limite d'un produit est le produit des limites. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)') &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Exercice 3 : On utilise la règle de dérivation en chaîne (on l'applique successivement ici 2 fois). Alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{i\sin(x^3)} \cdot i\cos(x^3) \cdot 3x^2 \\
&= 3ix^2\cos(x^3)e^{i\sin(x^3)}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Pour trouver les min et max, on regarde les points où la dérivée s'annule. Ensuite, en ces points, il faut regarder le signe de la dérivée seconde ; en un maximum, elle sera négative (car la dérivée est décroissante en un maximum) et en un minimum, la dérivée sera croissante. Si la dérivée seconde est nulle, alors cela requière une analyse plus poussée. Donc

$$f'(x) = 15x^2 - 12x - 9.$$

Les zéros de cette fonction quadratique sont donnés par

$$\begin{aligned} x &= \frac{12 \pm \sqrt{144+540}}{30} \\ &= \frac{12 \pm 26.1533}{30} \\ &= 1.27 \text{ou} - 0.47. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la dérivée seconde.

$$f''(x) = 30x - 12.$$

La dérivé seconde est positive en $x = 1.27$, donc il s'agit là de la valeur de x pour un minimum de la fonction qui vaut $f(1.27) = -12.865$. La dérivée seconde en $x = -0.47$ est négative, on a donc un maximum de la fonction qui vaut $f(-0.47) = 0.385$.