

Session S3 Électrique  
Unité d'APP 2

---

## **ÉLECTROMAGNÉTISME**

**L'imagerie par résonance magnétique  
au service des sciences judiciaires**

---

### **GUIDE DE L'ÉTUDIANT**

Département de génie électrique et de génie informatique  
Faculté de génie  
Université de Sherbrooke

Été 2023

**Version :** 5 mai 2023

**Note :** En vue d'alléger le texte, le masculin est utilisé pour désigner les femmes et les hommes.

Unité d'APPI conçue et guide rédigé par : Yves Bérubé-Lauzière, Ph.D., Professeur  
Révisions mineures par Abdelaziz Ramzi (automne 2020), Max Hofheinz (automne 2021, été 2023)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Consignes</b>	<b>4</b>
1.1	Connaissances antérieures . . . . .	4
1.2	Déroulement de l'unité d'APP . . . . .	4
1.3	Utilisation des téléphones cellulaires, tablettes et ordinateurs . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Problématique</b>	<b>6</b>
2.1	Contexte . . . . .	6
2.2	Imagerie par résonance magnétique . . . . .	6
2.3	Mandat . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Guide de lecture</b>	<b>15</b>
3.1	Références essentielles à consulter . . . . .	15
3.2	Séquences des lectures . . . . .	15
3.2.1	Pour procédural 1 - Électrostatique de base . . . . .	15
3.2.2	Pour procédural 2 - Dipôle, énergie et capacité électriques, matériaux diélectriques . . . . .	15
3.2.3	Pour procédural 3 - Champs magnétiques . . . . .	16
3.2.4	Pour procédural 4 - Diélectriques réels, méthode des images, forces magnétiques et introduction à la loi d'induction de Faraday et équations de Maxwell . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Activités de l'unité</b>	<b>16</b>
4.1	Procédural 1 - Électrostatique de base . . . . .	16
4.1.1	Consignes . . . . .	16
4.1.2	Exercices proposés . . . . .	16
4.2	Procédural 2 - Dipôle, énergie et capacité électriques, matériaux diélectriques . . . . .	18
4.2.1	Consignes . . . . .	18
4.2.2	Exercices proposés . . . . .	18
4.3	Procédural 3 - Champs magnétiques . . . . .	20
4.3.1	Consignes . . . . .	20
4.3.2	Exercices proposés . . . . .	20
4.4	Procédural 4 - Diélectriques réels, méthode des images, forces magnétiques . . . . .	21

---

4.4.1	Consignes . . . . .	21
4.4.2	Exercices proposés . . . . .	21
4.5	Tutorat 2 . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Productions à remettre - Rapport d'APP</b>	<b>25</b>
5.1	Consignes . . . . .	25
5.2	Format et contenu du rapport . . . . .	25
5.3	Remise . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Évaluations</b>	<b>25</b>
6.1	Évaluation du rapport . . . . .	25
6.2	Examens . . . . .	26

# 1 Consignes

## 1.1 Connaissances antérieures

Cette unité d'APP suppose que vous êtes à l'aise avec les calcul différentiel et intégral multivariables et vectoriel (CDIMV) qu'elle utilise abondamment. Cette unité ne porte toutefois pas sur le CDIMV, mais ce dernier est un outil essentiel. Il peut toutefois être bénéfique d'aller réviser en cours de route les sujets du CDIMV qui sont utilisés en électromagnétisme, cela permettra d'approfondir la compréhension et la maîtrise du CDIMV dans un contexte d'application concret.

## 1.2 Déroulement de l'unité d'APP

### Semaine 1

- Tutorat 1
- Étude personnelle et exercices
- Procédural 1
- Procédural 2
- Procédural 3

### Semaine 2

- Étude personnelle et exercices
- Procédural 4
- Consultation facultative
- Rédaction du rapport d'APP
- Remise des livrables
- Tutorat 2
- Examen formatif
- Consultation facultative
- Examen sommatif

Pour la résolution de la problématique et le rapport, vous travaillez en équipes de 2. Il y a un seul rapport à remettre par équipe. La section 5 donne les directives concernant le rapport.

Lors des procéduraux, ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le procédural auquel vous assisterez.

## 1.3 Utilisation des téléphones cellulaires, tablettes et ordinateurs

L'utilisation des téléphones cellulaires, tablettes et ordinateurs est **autorisée avec restriction**. La consultation des courriels et des réseaux sociaux, faire des appels téléphoniques, envoyer des messages texte, aller sur YouTube, jouer à des jeux, ou tout autre usage inapproprié pour les activités d'une APP ou d'évaluation sont strictement interdits. Utilisez votre bon sens!

Le port de casques d'écoute ou d'écouteurs est interdit pendant les activités avec un tuteur.

**Le tuteur peut vous expulser d'une activité sans avertissement et sans appel si vous contrevenez aux règles précédentes. En outre, vous pourriez écoper d'une sanction pouvant aller jusqu'à l'expulsion de l'APP, d'activités pédagogiques, ou d'évaluation, avec nécessité de reprise à un moment où l'APP ou l'activité pédagogique sera donnée de nouveau.**

## 2 Problématique

### L'imagerie par résonance magnétique au service des sciences judiciaires

#### 2.1 Contexte

On importe depuis un an de façon très astucieuse une substance illicite. On insère cette substance dans diverses sortes de fruits. Les douanes ont intercepté certains de ces fruits qui sont en très petite quantité comparativement au lot de fruits qui transitent par les ports. La diversité des fruits utilisés et leur petit nombre les rend d'autant plus difficiles à intercepter. Jusqu'à maintenant, pour déterminer si un fruit contient la substance illicite, on le coupe, ce qui l'altère de façon irrémédiable et empêche de déterminer sa destination. Cela rend les enquêtes laborieuses et on n'arrive pas à découvrir qui importe la substance.

Les autorités ont besoin d'une approche plus systématique et plus subtile. Leur stratégie est d'imager en 3D les fruits sans les altérer (imagerie non-destructive) et d'insérer des sondes miniatures dans ceux qui contiennent la substance pour pouvoir les suivre par GPS et ainsi remonter aux importateurs. Les autorités ont essayé la tomodensitométrie (imagerie tomographique par rayons X), mais le contraste est insuffisant pour déceler la substance. Les autorités se tournent vers l'imagerie par résonance magnétique (IRM), capable d'imager à haut contraste les matériaux composés d'eau. Des tests concluants ont été réalisés à l'aide d'un appareil d'IRM médical. Un autre avantage de l'IRM est sa capacité à faire de l'analyse chimique avec un excellent pouvoir de discrimination et d'identification de différentes substances, ce qui servira dans d'autres enquêtes plus fines. Afin d'accélérer leur enquête, les douanes sont disposées à acheter plusieurs appareils pour échantillonner un plus grand nombre de fruits dans plusieurs ports. En outre, plusieurs pays ont le même problème et se sont concertés. Votre employeur, l'employeur JudiScience, où vous faites un stage, se spécialise dans les hautes technologies pour l'investigation judiciaire. Elle voit là une opportunité d'affaires. Les appareils d'IRM médicaux sont très coûteux. De plus, on n'a pas ici besoin d'appareils aussi volumineux que ceux destinés à imager le corps humain ; il ne s'agit que de fruits dont les plus gros ont la taille d'un pamplemousse.

#### 2.2 Imagerie par résonance magnétique

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) exploite le phénomène de résonance magnétique nucléaire (RMN), qui est à la base un phénomène quantique, mais qu'on peut en grande partie modéliser avec des concepts de mécanique et d'électromagnétisme classiques.<sup>1</sup> La RMN consiste faire tourner les moments magnétiques des noyaux des atomes (d'où le nom nucléaire) du nucléaires (de petits dipôles magnétiques) dans chaque atome, tels des rotateurs de petits moteurs dans un champ magnétique externe.

<sup>1</sup> Bien qu'il y ait le mot nucléaire dans son nom, la RMN est inoffensive pour les êtres vivants. Toutefois, dû à l'appréhension populaire pour le mot nucléaire, celui-ci a été omis dans le nom de l'IRM qui est utilisée de façon routinière en milieu hospitalier. Le seul danger que comporte l'IRM est lié à l'utilisation d'un champ magnétique intense qui peut accélérer les objets métalliques ferromagnétiques à des vitesses dangereuses. Les gens ayant certaines prothèses orthopédiques peuvent ne pas pouvoir subir d'examen par IRM. En outre, les personnes ayant un stimulateur cardiaque ne sont en aucun cas autorisées à s'approcher d'un appareil d'IRM. On doit aussi faire attention aux personnes qui ont des pièces métalliques dans leur corps, souvent à leur insu (cela arrive p. ex. avec les soudeurs qui ont souvent sans le savoir des éclats métalliques dans les yeux). Les personnes tatouées ressentent aussi souvent un brûlement lorsqu'elles subissent un examen d'IRM, car certaines couleurs de tatouages contiennent des particules de fer. Un questionnaire exhaustif doit être rempli préalablement à une séance d'IRM.

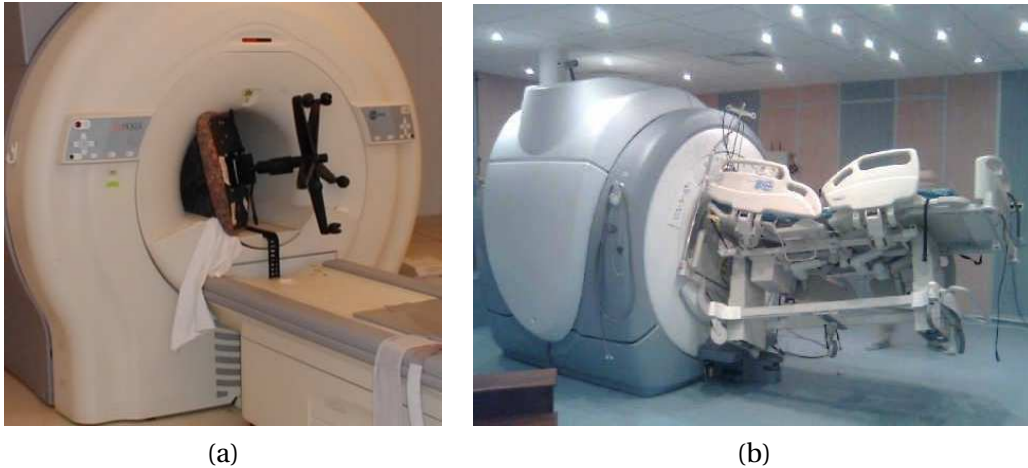


FIGURE 1. Dangers liés au champ magnétique statique puissant. (a) Chaise prise dans l'appareil. (b) Lit d'hôpital complet. Ces incidents sont généralement dus à de la négligence ou à la méconnaissance des dangers liés aux champs magnétiques puissants.

On place un matériau dans un champ magnétique composé d'un champ magnétique constant puissant (appelé champ statique) de l'ordre de quelques Tesla (T) et d'un champ magnétique oscillant dans les radiofréquences (champ radiofréquence). Le champ statique a pour effet de mettre en précession à une fréquence précise dans les radiofréquences (fréquence de précession) l'axe des moments magnétiques (dipôles magnétiques) associés aux particules chargées dans le matériau. Cette fréquence précise dépend de la nature de la particule chargée et des liaisons et environnement chimiques qui l'entourent. Le champ radiofréquence, lorsque syntonisé à la fréquence de précession, donne lieu pour sa part, par résonance, à une excitation collective des moments magnétiques. Ceux-ci émettent alors chacun de façon cohérente (c.à.d. de façon synchronisée entre eux) une onde électromagnétique. Étant donnée la cohérence, ces ondes individuelles se superposent de façon constructive menant à une onde résultante détectable avec une antenne et donnant lieu à un signal mesurable (signal de résonance). Différents composés chimiques possèdent différentes fréquences de résonance pour un champ statique fixé. Ainsi, lorsque la fréquence d'excitation est balayée, on voit alors apparaître des pics dans le signal en fonction de la fréquence, ce qui permet d'obtenir de l'information sur la composition ou l'état chimique d'un matériau. Un tel signal est appelé un spectre de RMN et on parle alors de spectroscopie RMN. Souvent, la (ou les) même(s) antenne(s) est(sont) utilisée(s) pour générer le champ magnétique oscillant d'excitation et pour détecter subséquentment l'onde électromagnétique résultant d'une résonance.

La précession due au champ statique est analogue à celle de l'axe de rotation d'une toupie qui pivote sur elle-même, cet axe de rotation tournant lui-même (« mouvement de précession ») autour de la direction verticale du champ gravitationnel (v. figure 2 en annexe). En imagerie médicale et pour l'imagerie des fruits, on s'intéresse aux noyaux des atomes d'hydrogène (noyaux qui sont des protons), car ils donnent un signal fort étant donné que les noyaux d'hydrogène sont les plus abondants dans les organismes vivants, dont les animaux et les végétaux, qui sont principalement constitués d'eau ( $H_2O$ ).

Dans sa forme la plus simple, l'IRM vise à déterminer d'où vient le signal de résonance, c.à.d. déterminer où il y a des moments dipolaires magnétiques dans un milieu et en quelle quantité. On parle alors de localisation spatiale du signal. Plus précisément, on cherche à mesurer la distribution spatiale



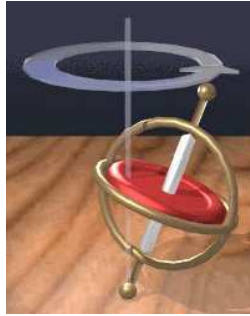


FIGURE 2. Toupie qui précesse autour de l'axe de la gravité (axe vertical).

de la densité des moments dipolaires, donc des protons. On obtient alors des images avec contraste en densité protonique.<sup>2</sup> La localisation du signal exploite le fait que la fréquence de précession dépend de l'intensité du champ statique. L'idée de base est que si on fait varier spatialement l'intensité du champ statique, on pourra alors déterminer d'où vient un signal en regardant sa fréquence. Il s'agit donc d'une localisation par la fréquence; la fréquence de précession pour un champ statique  $\vec{B}_{\text{stat}}$  quelconque est donnée par  $\omega_{\text{préc}} = \gamma \|\vec{B}_{\text{stat}}\| = \gamma B_{\text{stat}}$  et la précession a lieu autour de la direction de ce champ statique; le cas  $\vec{B}_{\text{stat}} = \vec{B}_0$  en est un exemple particulier. Idéalement, on voudrait qu'à chaque point de l'espace corresponde une et une seule fréquence. Pour produire des variations spatiales de champ statique, on utilise des gradients linéaires de champs magnétiques. Un gradient linéaire de champ magnétique, communément simplement appelé gradient de champ, est un champ magnétique dirigé dans une certaine direction et dont l'intensité varie linéairement dans l'espace dans cette direction. Un exemple est un gradient de champ dirigé selon  $z$  dont la forme est  $\vec{G}_z = cz\hat{e}_z$ , où  $c$  est une constante. Or, il n'est pas possible de produire avec des gradients statiques (constants dans le temps), un ensemble de fréquences (plus précisément un champ scalaire de fréquences) pour lequel chaque point de l'espace possède une valeur de fréquence qui lui est unique.

Néanmoins, pour obtenir la localisation spatiale on procède par étapes et on ajoute dans un premier temps un gradient de champ  $\vec{G}_z$ , comme décrit plus haut au champ statique constant  $\vec{B}_0$  qui pointe aussi dans la direction de l'axe  $z$ . Ainsi on a un champ  $\vec{B}_{\text{stat}}(z) = \vec{B}_0 + \vec{G}_z(z) = (B_0 + cz)\hat{e}_z$ . Ceci permet de déterminer de quel plan transverse à l'axe  $z$  (ou coupe) le signal provient, mais pas d'où vient le signal dans cette coupe (plan transverse), car la fréquence est constante dans cette coupe.

Pour avoir une localisation du signal en 3D, il faut aussi déterminer d'où provient le signal dans une coupe. Pour cela on applique aussi des gradients dynamiques. On n'ira pas ici dans ces détails de la localisation spatiale et on se concentrera sur le gradient de champ selon  $z$ .

Vous avez à ce stade les éléments pour comprendre l'essentiel d'un appareil d'IRM qui est un instrument sophistiqué nécessitant donc au niveau électromagnétique : 1) un électroaimant puissant (appelé aimant principal) pour générer le champ statique constant, 2) des bobines radiofréquence pour exciter les moments magnétiques des noyaux, et 3) des bobines de gradient de champ pour localiser spatiale-

<sup>2</sup>On peut aussi faire des images avec d'autres contrastes, notamment en exploitant  $T_1$  et  $T_2$  dans l'équation de Bloch. Cela est fort utilisé en imagerie médicale, mais on ne peut pas aborder cela ici. En outre, on peut aussi faire de l'imagerie spectroscopique, donc obtenir pour chaque point dans un milieu un spectre. Cette approche est un sujet actif de recherche d'importance pour la médecine, car on pourra alors déterminer non seulement où il y a des lésions (p. ex. des tumeurs), mais aussi la nature biochimique de ces lésions. On pourra ainsi caractériser au niveau moléculaire les lésions.

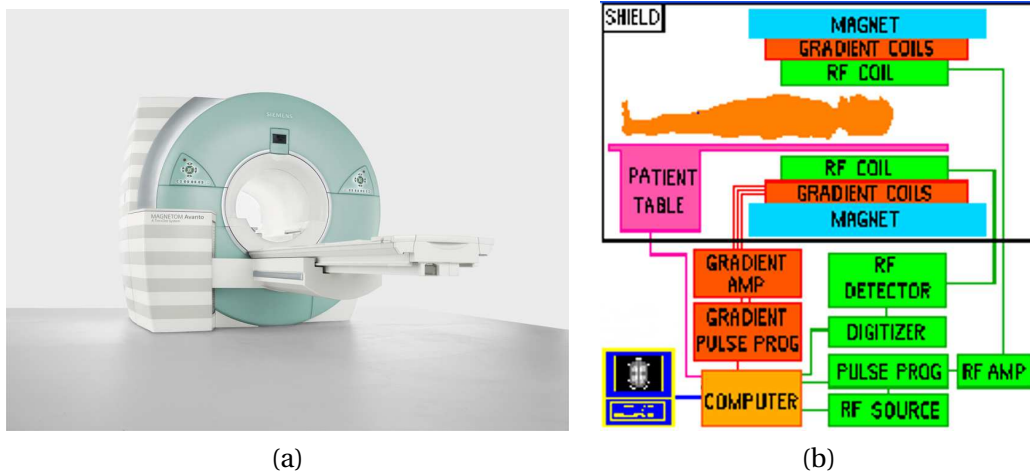


FIGURE 3. (a) Appareil d'IRM de la compagnie Siemens. (b) Schéma de principe d'un appareil d'IRM.

ment le signal. Un tel appareil comporte aussi pour son opération des éléments électroniques et informatiques qu'on ne discutera pas ici.

La figure 3 (a) montre un appareil typique d'IRM médical et (b) montre un schéma de principe de son fonctionnement.

## 2.3 Mandat

JudiScience propose aux autorités de développer des appareils d'IRM moins chers et sur mesure pour leur application. Vous êtes mandaté pour faire des calculs analytiques d'électromagnétisme pour l'étude préliminaire pour ce projet.<sup>3</sup>

Vous vous penchez d'abord sur le principe de fonctionnement de l'IRM. Pour commencer, vous dérivez l'équation qui régit l'évolution temporelle d'un moment magnétique dans un champ magnétique quelconque. Il vous semble plausible qu'un moment magnétique, qui au fond est un petit aimant, subisse un couple lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique. C'est ce qui arrive notamment lorsqu'on tient fermement deux aimants l'un près de l'autre et qu'on relâche un des aimants. Ce dernier aura tendance à s'aligner avec les lignes de champ de l'autre aimant. Ainsi, dans un premier temps, vous cherchez une équation qui décrit le couple subi par un moment magnétique dans un champ magnétique. Pour ce faire, vous utilisez une intégrale sur un parcours fermé pour montrer que le couple  $\vec{N}$  que subit par rapport à son centre un moment magnétique  $\vec{m}$  (considéré comme un petit anneau circulaire de courant) plongé dans un **champ magnétique  $\vec{B}$  est donné par  $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$** . Pour obtenir ce résultat, vous utilisez que la force magnétique sur un élément de longueur vectoriel  $d\vec{l}$  parcouru par un courant  $I$  est donnée par  **$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$** . On rappellera, de la mécanique, que le couple exercé par une force  $\vec{F}$  en un point  $P$  par rapport à une origine  $O$  (vecteur position  $\vec{r} = \vec{OP}$ ) est donné par la longueur du bras de levier (segment  **$\vec{OP} = \|\vec{r}\|$** ) multiplié par la composante de la force perpendiculaire à ce bras de levier, soit  **$\|\vec{N}\| = \|\vec{r}\| \cdot F_{\perp}$** ,

<sup>3</sup>On se limite ici à des calculs analytiques, comme on le fait généralement en premier lieu dans une conception préliminaire. Une conception approfondie nécessite des méthodes et analyses numériques avancées sur ordinateur. On utilise notamment la méthode des éléments finis pour les calculs de champs magnétiques.

ce qui de façon vectorielle s'écrit  $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Pour faciliter l'intégrale à calculer sur un parcours fermé, et sans perte de généralité, vous considérez la boucle comme étant un cercle de rayon  $\rho$  dans le plan  $xy$  et le champ magnétique pointant dans une direction arbitraire. Vous supposez également que l'anneau est suffisamment petit pour que le champ magnétique soit considéré spatialement constant sur les dimensions de l'anneau. Cette hypothèse est raisonnable, puisque l'anneau est ultimement associé à une particule chargée qui fait partie des constituants d'un atome.

Avec ce premier résultat exprimant le couple sur un moment magnétique, vous êtes maintenant prêt à trouver l'équation de l'évolution temporelle d'un moment magnétique dans un champ magnétique. De la mécanique, vous vous rappelez que l'équivalent de la 2<sup>e</sup> loi de Newton pour le mouvement de rotation stipule que le couple sur un objet donne la dérivée par rapport au temps du moment cinétique (dénnoté  $\vec{J}$  ici)<sup>4</sup>. Pour sa part, le moment cinétique est le produit du moment d'inertie  $I$  par la vitesse angulaire de rotation  $\vec{\Omega}$ , soit  $\vec{J} = I\vec{\Omega}$ .<sup>5</sup> Dans le cas d'une particule chargée, comme un proton, qui pivote sur elle-même, vous comprenez que son moment magnétique  $\vec{m}$  est proportionnel à son moment cinétique, car plus la particule tourne rapidement sur elle-même, plus on peut lui associer un courant élevé (une particule chargée qui pivote sur elle-même peut être considérée comme des petits éléments de charge tournant autour de l'axe de rotation et à chaque élément de charge en mouvement on peut associer un courant, le courant total étant la somme de tous les éléments de courant). On a ainsi  $\vec{m} = \gamma \vec{J}$ , où  $\gamma$  est la constante de proportionnalité entre le moment magnétique et le moment cinétique appelée rapport gyromagnétique pour la particule considérée. Ainsi, vous arrivez à l'équation

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma \vec{m} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Vous détaillez dans votre rapport les calculs qui vous ont mené à cette équation, appelée équation de Larmor.

Vous êtes curieux et décidez de faire les calculs pour voir le lien de proportionnalité entre le moment magnétique du proton et son moment cinétique et déterminer la constante de proportionnalité  $\gamma$ . Vous calculez d'abord le vecteur moment magnétique du proton en faisant l'hypothèse que le proton est une sphère chargée de rayon  $a$ , de charge  $q$  et de densité de charge uniforme  $\rho_q$  tournant à une fréquence angulaire  $\Omega$ . Pour ce faire, vous supposez que le proton tourne autour de l'axe des  $z$  et le subdivisez en éléments infinitésimaux que vous intégrez pour calculer son moment magnétique total. De façon analogue, vous calculez le moment cinétique du proton en supposant qu'il tourne à une fréquence angulaire  $\Omega$ , que sa masse est  $m$  et qu'elle est distribuée uniformément dans son volume avec une densité  $\rho_m$ .<sup>6</sup>

Vous comparez la valeur de la constante de proportionnalité  $\gamma$  que vous obtenez à celle de la littérature en calculant le ratio de celle de la littérature sur la vôtre et constatez qu'elles ne correspondent

<sup>4</sup>Le moment cinétique est aussi appelé moment angulaire.

<sup>5</sup>Il peut sembler étonnant que la vitesse angulaire soit indiquée ici comme un vecteur. Cela signifie en fait que la vitesse angulaire est celle d'une rotation autour d'un axe spécifié par un vecteur unitaire  $\hat{u}$ . Ainsi  $\vec{\Omega} = \Omega \hat{u}$ , où  $\Omega$  est la vitesse angulaire au sens usuel en rad/s (grandeur de la vitesse angulaire). La nature vectorielle de  $\vec{\Omega}$  permet de spécifier avec une seule quantité vectorielle la vitesse de rotation et l'axe autour duquel cette rotation s'effectue.

<sup>6</sup>Selon les données scientifiques, la charge électrique totale  $q$  du proton est égale à une charge élémentaire positive  $e = +1.602\,176\,565 \times 10^{-19}$  C) et son rayon  $a$ , appelé rayon de charge, est de l'ordre de 0,85 fm (fm = femtomètre =  $10^{-15}$  m). La masse du proton est  $m = m_p = 1.672\,62 \times 10^{-27}$  kg. Vous n'avez toutefois pas besoin de toutes ces valeurs numériques, comme vous le constaterez. Donnez d'abord l'expression analytique du rapport gyromagnétique et n'utilisez que les valeurs numériques à la toute fin.

pas, celle de la littérature étant  $\gamma = 42.577 \text{ MHz/T}$ .<sup>7</sup> Vous consignez ce ratio dans votre rapport ainsi que tous les calculs associés. Après avoir entendu parler un peu de la mécanique quantique qui règne dans le monde des particules microscopiques, vous vous doutez bien que votre calcul basé sur un raisonnement purement classique ne doit ultimement pas être tout à fait correct pour un proton. Vous faites une petite recherche sur Internet pour savoir ce qu'il en est et donnez brièvement la raison dans votre rapport.

Vous décidez de déterminer comment l'éq. (1) prédit mathématiquement la précession de l'axe d'un moment magnétique en présence seulement d'un champ magnétique statique  $\vec{B}_0$  que vous prenez orienté selon les  $z$  positifs ( $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ ), tel que cela est fait conventionnellement en RMN et en IRM. Cette précession est appelée précession libre. Vous explicitez alors l'éq. (1) en trois équations différentielles ordinaires pour les composantes  $m_x$ ,  $m_y$  et  $m_z$  du moment magnétique  $\vec{m}$ , dont deux sont couplées et la troisième est évidente à résoudre. Pour résoudre les équations couplées, vous utilisez une astuce qui consiste à définir une variable complexe  $\zeta_{xy} = m_x + jm_y$ , où  $j = \sqrt{-1}$ , ce qui donne lieu à une équation différentielle très simple pour  $\zeta_{xy}$  en remarquant que  $m_y - jm_x = -j(m_x + jm_y)$  et en définissant  $\omega_0 = \gamma B_0$ .

La solution obtenue permet de déterminer autour de quel axe la précession s'effectue, à quelle fréquence autour de celui-ci et dans quel sens. Vous interprétez la solution que vous obtenez à l'aide d'un petit schéma et consignez tout cela dans votre rapport. Vos lectures mentionnaient que plus le champ statique est intense, plus la fréquence de précession est élevée (c.à.d. plus la précession est rapide); vous êtes maintenant en mesure d'expliquer cela dans votre rapport.<sup>8</sup>

Vous avez considéré la précession libre, pour laquelle il n'y a qu'un champ statique. Vous aimeriez tenir compte de l'excitation radiofréquence dans l'éq. (1) et il vous faut déterminer le champ magnétique  $\vec{B}_1(t)$  correspondant. Vous avez compris qu'en présence uniquement d'un champ statique, un moment magnétique précesse dans un sens déterminé autour d'un axe à une certaine fréquence. Si vous ajoutez un champ magnétique tournant autour de l'axe de précession dans le bon sens, alors cela devrait avoir un effet optimal sur le moment magnétique. Pour arriver à cette conclusion, vous faites une analogie avec la situation où on agite de l'eau dans un bol. Si l'eau tourne déjà dans un sens, et qu'on l'agite avec une cuillère dans le même sens qu'elle tourne déjà et à la bonne vitesse, cela aidera l'eau à continuer de tourner, alors que si on l'agite dans le sens opposé, l'eau finira par s'arrêter.<sup>9</sup> Cela vous indique le type de champ à considérer, qui, en résumé doit être un champ qui tourne dans le même sens et autour du même axe que la précession libre, mais qui pourrait être à une fréquence  $\omega_{RF}$  différente de  $\omega_0$ . On désignera par  $B_1(t)$  l'amplitude (ou enveloppe) de ce champ.<sup>10</sup> On aura résonance lorsque sa fréquence est syntonisée sur la fréquence de précession libre, c.à.d. lorsque  $\omega_{RF} = \omega_0$ . De ces considérations, vous écrivez une formule mathématique pour  $\vec{B}_1(t)$  et ajoutez le terme qui lui correspond dans l'éq. (1) à celui du champ statique. Vous consignez ces développements dans votre rapport et l'équation obtenue. Celle-ci apparaît plus difficile à résoudre et vous n'entreprenez pas cette tâche.

Dans une expérience de RMN, on ne détecte évidemment pas le signal d'un seul moment dipolaire magnétique, le signal serait trop faible. Il s'agit plutôt du signal provenant d'un ensemble de moments

<sup>7</sup>Attention à mettre votre constante de proportionnalité dans les mêmes unités que celles données ici.

<sup>8</sup>Cela est exploité en RMN ainsi qu'en IRM, où des champs plus intenses donnent de meilleures résolutions spatiales.

<sup>9</sup>Note : Il ne faut toutefois pas pousser cette analogie trop loin et en tirer trop de conclusions. Cette analogie aide toutefois à comprendre ce qui se passe. Une autre analogie est lorsqu'on donne une poussée à un enfant sur une balançoire, si la poussée est dans le bon sens au bon instant (donc à la bonne fréquence), alors cela l'aidera à maintenir, voire à augmenter, l'amplitude de ses balancements, mais si la poussée n'est pas au bon instant ou dans le bon sens, alors l'enfant arrêtera de balancer.

<sup>10</sup>Cette enveloppe ne doit pas varier trop vite dans le temps afin de ne pas introduire des fréquences sur une trop large bande autour de la fréquence centrale  $\omega_{RF}$ .

magnétiques. Il faut alors considérer l'aimantation macroscopique  $\vec{M}$  qui est le moment magnétique dipolaire par unité de volume (ou densité volumique de moment magnétique). Pour un petit volume  $v$  d'un matériau contenant  $N$  moments magnétiques, où  $N$  est un très grand nombre (typiquement de l'ordre du nombre d'Avogadro), on a donc  $\vec{M} = \frac{1}{v} \sum_{n=1}^N \vec{m}_n$ , où les  $\vec{m}_n$  sont les moments magnétiques individuels. En électromagnétisme macroscopique, on définit aussi l'aimantation par  $\vec{M} = n\vec{m}$ , où  $n$  est le nombre de dipôles magnétiques par unité de volume et  $\vec{m}$  le moment magnétique d'un dipôle individuel. Cette dernière expression est moins exacte que la précédente, car elle sous-entend que tous les dipôles sont dans un même état  $\vec{m}$ , ce qui n'est généralement pas le cas. La différence n'est toutefois pas significative ici, car on s'intéresse à une quantité macroscopique. L'évolution de l'aimantation obéit l'équation de Bloch donnée par

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B} - \frac{(M_z - M_z^0)\hat{e}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_{xy}}{T_2}, \quad (2)$$

où  $\vec{M}_{xy}$  est la partie transverse (c.à.d. dans le plan  $xy$ ) de l'aimantation,  $M_z$  est sa partie longitudinale (c.à.d. dans le même sens que le champ statique  $\vec{B}_0$  selon  $z$ ) et  $M_z^0$  est la valeur initiale (à l'équilibre) de l'aimantation qui dans ce cas est selon  $z$ . Les temps  $T_1$  et  $T_2$  sont des temps dits de relaxation qui résultent de l'interaction des moments magnétiques avec leur milieu ( $T_1$ ) et entre eux ( $T_2$ ). Ces termes n'apparaissent évidemment pas dans l'éq. (1) décrivant l'évolution d'un moment magnétique isolé. Avec ce que vous avez fait précédemment, vous n'êtes pas capable de démontrer les termes avec les temps de relaxation, mais vous êtes capable d'au moins déduire le premier terme dans l'équation de Bloch. Vous consignez ce petit développement dans votre rapport. Vous vous dites que vous en savez suffisamment sur la RMN pour l'instant et que vous devez aborder l'IRM et ses aspects techniques.

Le principe de fonctionnement de l'IRM établi, vous vous penchez ensuite sur l'implémentation de l'appareil IRM.

Vous considérez d'abord l'aimant principal qui doit produire un champ magnétique constant aussi uniforme que possible et puissant. Cela est possible à l'aide d'un solénoïde, sachant que le champ à l'intérieur d'un solénoïde est approximativement uniforme lorsque le solénoïde est suffisamment long et qu'on n'est pas trop près des extrémités. Pour l'imagerie des fruits, un volume d'imagerie d'environ  $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  est requis. Vous considérez un diamètre de 20 cm pour le solénoïde (rayon  $a = 10 \text{ cm}$ ). Comme il faut y déceler des petites anomalies, votre appareil doit donner des images avec une très bonne résolution spatiale. Selon la littérature, une intensité de champ de 7 T au centre de l'aimant principal devrait donner une résolution suffisante dans un temps d'acquisition raisonnable. Pour alimenter l'aimant vous disposez d'une source de courant de 500 A maximum. Pour fabriquer le solénoïde, vous considérez du fil de 5 mm de diamètre enroulé sur tout le long d'un cylindre, et ce en un nombre suffisant d'épaisseurs, c.à.d. il peut y avoir plusieurs couches d'enroulement de fil si nécessaire. Vous ne savez pas si vous devez opter pour du fil supraconducteur, ce qui fera augmenter significativement le coût de développement et d'achat de votre appareil, car il faut alors un système de refroidissement à l'hélium liquide. Une alternative est du fil de cuivre peu coûteux, mais qui nécessitera certainement un système de refroidissement puissant étant donné le fort courant. Pour déterminer quelle solution il faudra adopter, vous aurez donc à évaluer la puissance totale dissipée dans la longueur du fil de cuivre nécessaire pour voir si le cuivre est un matériau approprié.

Avant de commencer ce calcul, vous vous questionnez à savoir si un champ de l'ordre de quelques T est un champ intense. Pour cela, vous prenez 1 T comme référence et le comparez aux valeurs champ

magnétique terrestre moyen que vous trouvez dans la littérature pour donner approximativement combien de fois le champ magnétique terrestre représente un champ de 1 T.

En choisissant le centre du solénoïde en  $z = 0$  cm, la zone d'intérêt d'imagerie se situe entre  $z_{\min} = -10$  cm et  $z_{\max} = 10$  cm. Vous vous proposez de trouver une expression analytique pour le champ magnétique sur l'axe du solénoïde de longueur finie  $L$  en fonction de  $z$ . Pour ce faire, vous vous rendez compte qu'il faut calculer une intégrale semblable à un des exemples que vous avez vu dans vos lectures sur l'électromagnétisme; une table d'intégrales sera utile. À l'aide d'un logiciel de votre choix, vous affichez sur un même graphique, pour des longueurs de solénoïde  $L = 20$  cm, 40 cm, 60 cm et 100 cm, l'expression analytique du champ sur l'axe en fonction de  $z$  dans la zone d'intérêt en normalisant cette expression analytique à sa valeur au centre du solénoïde. Vous vous attendez à ce que 20 cm soit trop court pour avoir un champ suffisamment uniforme le long du volume d'imagerie requis et que 100 cm soit un peu long en pratique, car encombrant. Toutefois, ces longueurs vous permettent de visualiser comment le champ varie le long de l'axe du solénoïde (en particulier dans la zone d'intérêt), et ce en fonction de la longueur du solénoïde. Pour chacune des longueurs de solénoïde, vous devez calculer avec votre expression analytique le rapport, exprimé en pourcentage, de la valeur du champ à une extrémité de la zone d'intérêt sur l'axe (on prendra  $z = z_{\max}$ ) sur la valeur du champ au centre du solénoïde sur l'axe ( $z = 0$ ), c.à.d. on veut  $B_{\text{axe } z}(z = z_{\max})/B_{\text{axe } z}(z = 0)$  en %. Ceci permettra d'évaluer avec une mesure quantitative l'uniformité du champ magnétique le long du solénoïde dans la zone d'intérêt.

L'expression analytique du champ le long de l'axe permet aussi de calculer le nombre de tours de fil requis pour avoir le champ voulu au centre du solénoïde pour chacune des longueurs envisagées de ce dernier. Vous pourrez ainsi évaluer la longueur totale de fil nécessaire. Pour cela, il faudra possiblement plusieurs enroulements de fil en couches (plusieurs épaisseurs de fil). Dans cette éventualité, on négligera l'accroissement du rayon des tours de fils s'il faut plusieurs couches de fil.

De là, vous pourrez estimer la puissance totale dissipée dans un fil fait de cuivre en utilisant la conductivité de ce matériau. À la lumière des résultats obtenus, il vous faut discuter la faisabilité d'un système utilisant du fil de cuivre.

Après l'aimant principal, il faut considérer la génération d'un gradient de champ selon  $z$ .<sup>11</sup> Il est commun d'utiliser une paire de Maxwell constituée de deux spires circulaires ayant un axe commun et dans lesquelles circulent des courants égaux en sens opposés. Ici, l'axe des spires sera coïncident avec celui de l'aimant principal et vous choisissez le rayon des spires égal à celui de l'aimant principal. En outre, par des considérations de symétrie, vous positionnez les spires à des distances égales de part et d'autre du centre  $z = 0$  (spires positionnées en  $z = -b$  et  $z = b$ , espacement entre spires de  $2b$ ). En utilisant le principe de superposition, vous écrivez une expression analytique pour le champ magnétique produit par la paire de Maxwell sur leur axe et montrez que ce champ donne en bonne approximation un gradient linéaire croissant selon  $z$  (c.à.d. une fonction linéaire croissante de  $z$ ) lorsque leur espacement et les sens des courants dans les spires sont bien choisis. Pour ce faire, vous développez en série de Taylor autour de  $z = 0$  votre expression analytique et choisissez  $b$  de façon à ce que le champ soit le plus linéaire possible en  $z$ .

<sup>11</sup>On omet les gradients selon  $x$  et  $y$  tel que mentionné ci-haut; les principes de génération sont semblables, mais les géométries des bobines pour obtenir ces gradients sont plus complexes, car ces gradients doivent être perpendiculaires à l'axe de l'aimant principal. Les calculs analytiques pour ces bobines sont limités et il faut rapidement passer à des calculs numériques sur ordinateur.

En supposant l'approximation linéaire pour le gradient de champ de long de l'axe vous déterminez le courant nécessaire pour un gradient de 10 mT/mètre, qui est un ordre de grandeur typique en IRM. Pour valider vos calculs, vous affichez sur un graphique à l'aide d'un logiciel l'expression exacte du gradient de champ ainsi que son approximation linéaire pour les comparer. Vous notez que l'utilisation d'une paire de Maxwell avec le rayon que vous avez choisi limite la linéarité du gradient produit à une zone plus petite que la zone d'intérêt et qu'il y a peut-être des façons de faire mieux. Vous proposez deux approches envisageables pour améliorer la zone de linéarité et les discutez brièvement.

En ce qui a trait aux bobines radiofréquences un collègue expert des systèmes radiofréquences s'occupera de cette partie.



### 3 Guide de lecture

La présente section donne les références essentielles à consulter. Il est nécessaire de faire toutes les lectures demandées et au moment demandé afin de bien réussir cette unité.

#### 3.1 Références essentielles à consulter

Note : Tous les documents PDF énumérés dans ce qui suit sont disponibles sur la page WEB de l'unité.

- *Notes de cours de YBL sur l'électromagnétisme*
- *Parties du livre de Paul Lorrain, Dale P. Corson, François Lorrain*, (Les phénomènes électromagnétiques, Dunod)
- *Notes de cours de YBL sur le calcul différentiel et intégral - chapitre 4 sur les séries de MacLaurin et de Taylor*

#### 3.2 Séquences des lectures

##### 3.2.1 Pour procédural 1 - Électrostatique de base

Note : Les pages données dans les lectures réfèrent aux numéros de pages apparaissant dans les livres ou notes de cours.

Noter que dans les documents PDF qui servent pour les lectures qui suivent, il y a aussi des indications qui ont été ajoutées sur ce qui n'est pas à lire ainsi que des notes supplémentaires aidant à la compréhension.

- Notes de cours de YBL sur l'électromagnétisme, du début jusqu'à la fin de la section 6.3.2 pp. 143-156 (ce qui concerne la relativité débutant au bas de p. 143 jusqu'à fin de p. 144 est facultatif; ne lire que si cela vous intéresse et si vous avez le temps)
- Corson-Lorrain, chap. 3 au complet, sauf l'exemple en pp. 55-57 sur le Soleil et l'exemple en pp. 55-57 sur le théorème d'Earnshaw. Note : Il y a de la redondance entre les sections 3.1 et 3.2 de la version anglaise et les sections 3.1 et 3.2 de la version française. Toutefois, il est plus naturel et moins abstrait de commencer avec la loi de Coulomb comme c'est fait dans la version anglaise et historiquement, la loi de Coulomb a été découverte bien avant que la notion de champ électrique apparaisse.
- Corson-Lorrain, chap. 4 :
  - Sect. 4.1 à 4.3 inclusivement, sauf l'exemple sur le générateur thermoionique en pp. 69-72
  - Sect. 4.5, sauf sous-section 4.5.3 ; dans la sous-section 4.5.4, lire seulement la partie 1), pas les autres
  - Sect. 4.6

##### 3.2.2 Pour procédural 2 - Dipôle, énergie et capacité électriques, matériaux diélectriques

- Corson-Lorrain, chap. 5, section 5.1 seulement
- Corson-Lorrain, chap. 6, sect. 6.1 à 6.4 incl. et 6.7
- Corson-Lorrain, chap. 7, au complet



### 3.2.3 Pour procédural 3 - Champs magnétiques

- Notes de cours de YBL sur le calcul différentiel et intégral, chap. 4 sur les séries de MacLaurin et de Taylor (requis dans certains développements à venir dans le livre et pour la problématique ; à lire pour ceux qui n'ont jamais vu les séries de Taylor ou qui ne s'en rappellent pas)
- Notes de cours de YBL sur l'électromagnétisme, section 6.3.3 sur la magnétostatique au complet
- Corson-Lorrain, chap. 14 au complet
- Corson-Lorrain, chap. 15 au complet

### 3.2.4 Pour procédural 4 - Diélectriques réels, méthode des images, forces magnétiques et introduction à la loi d'induction de Faraday et équations de Maxwell

- Corson-Lorrain, chap. 8, section 8.1 seulement
- Corson-Lorrain, chap. 9, section 9.1 seulement
- Corson-Lorrain, chap. 17 au complet sauf l'exemple sur la striction en pp. 300-301 (ne sautez toutefois pas l'exemple sur l'effet Hall qui commence au bas de p. 302, effet important dans de nombreuses applications) ; lire les exemples sur les ceintures de van Allen (pp. 301-302) et sur la tache solaire et sur les champs magnétiques naturels en pp. 317-321 seulement si ça vous intéresse (c'est intéressant, mais si vous êtes serré dans le temps, omettez-les).
- Notes de cours de YBL sur l'électromagnétisme, section 6.3.4 sur la loi d'induction de Faraday au complet et section 6.3.5 sur la synthèse des équations de l'électromagnétisme

## 4 Activités de l'unité

### 4.1 Procédural 1 - Électrostatique de base

#### 4.1.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

#### 4.1.2 Exercices proposés

**Exercice 1.** Champ électrique (exercice 3.1 dans Corson-Lorrain) :

Une charge  $+Q$  est placée en  $x = a$ ,  $y = 0$ , et une charge  $-Q$  en  $x = -a$ ,  $y = 0$ . Calculer le vecteur  $\vec{E}$  au point  $x = a$ ,  $y = 2a$ .

**Exercice 2.** Soit une sphère chargée de rayon  $a$  et de densité de charge dont la dépendance en fonction de la distance à l'origine  $r$  et de l'angle polaire  $\theta$  est donnée par  $\rho_q = K \frac{r^2}{a^2} \sin \theta$ , où  $K$  est une constante.

- Quelle est la densité de charge maximale et pour quelle valeur de  $r$  et  $\theta$  a-t-elle lieu?
- Représenter graphiquement cette densité de charge.
- Calculer la charge totale contenue dans la sphère.

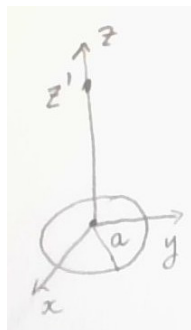


FIGURE 4

**Exercice 3.** Soit un anneau mince circulaire de rayon  $a$  et de charge électrique totale  $Q$  distribuée uniformément sur l'anneau. L'anneau est positionné dans le plan  $xy$  et centré à l'origine (figure 4).

- Calculer le champ électrique de cet anneau en un point  $(0, 0, z')$  sur son axe de symétrie (axe  $z$ ). Quel principe est utilisé pour calculer le champ? Qu'est-ce également qui aide à calculer le champ ou à réduire les calculs? Note : Il est beaucoup plus difficile de calculer le champ en un point arbitraire hors axe.
- Quelle force ressentira une charge ponctuelle de 1 C en  $z' = 1$  m si l'anneau est d'un rayon de 10 cm et porte lui aussi une charge de 1 C?
- Calculer le potentiel électrique au même point qu'en a). Quel principe est utilisé pour calculer le potentiel?

**Exercice 4.** Câble coaxial et long conducteur cylindrique.

- On considère un câble coaxial de longueur infinie. Montrer qu'à une distance  $\rho$  de l'axe du câble dans la région entre les deux conducteurs, le champ électrique est donné par  $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0\rho)$ , où  $\lambda$  est la charge par unité de longueur sur le conducteur intérieur et le vecteur  $\vec{E}$  est orienté vers l'extérieur si  $\lambda$  est positive.
- Trouver la différence de potentiel électrique entre deux surfaces cylindriques de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) autour d'un conducteur cylindrique infini de densité de charge  $\lambda$  par unité de longueur.

**Exercice 5.** Conduction dans un milieu non uniforme (exercice 4.5 dans Corson-Lorrain) :

Deux électrodes de cuivre à faces planes et parallèles sont séparées par une plaque d'épaisseur  $s$  dont la conductivité  $\sigma$  varie linéairement de  $\sigma_0$ , près de l'électrode positive, à  $\sigma_0 + a$  près de l'électrode négative. On néglige les effets de bord. La densité de courant est  $J$ .

Trouver le champ électrique dans la plaque conductrice en fonction de la distance  $x$  à l'électrode positive.

**Exercice 6.** Conduction dans un milieu inhomogène (exercice 4.9 dans Corson-Lorrain) :

Dans un milieu inhomogène, la conductivité  $\sigma$  est fonction des coordonnées. Montrer que, en régime stationnaire, ou quand  $\vec{E} = -\nabla V$ , si  $\sigma$  ne s'annule nulle part,

$$\Delta V + \nabla V \cdot \nabla \tau = 0$$

où  $\tau = \ln \sigma$ .

**Exercice 7.** Film résistif (exercice 4.11 dans Corson-Lorrain)

Un film carré de Nichrome, un alliage de nickel et de chrome (utilisé pour des résistances à faible tolérance), a des électrodes de cuivre déposées sur deux bords opposés.

Montrer que la résistance entre les électrodes ne dépend que de l'épaisseur du film et de sa conductivité, tant qu'il reste carré. Cette résistance surfacique s'exprime en Ohm par carré.

## 4.2 Procédural 2 - Dipôle, énergie et capacité électriques, matériaux diélectriques

### 4.2.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

### 4.2.2 Exercices proposés

**Exercice 1.** Soit une coquille sphérique de rayon  $a$  sur laquelle il y a une densité surfacique de charge  $\sigma_q = \sigma_0 \cos \theta$ .

- Représenter graphiquement cette densité surfacique de charge.
- Calculer le moment dipolaire de cette coquille sphérique chargée.
- Selon le graphe fait en a), le résultat en b) a-t-il du sens?

**Exercice 2.** On a vu à la section 6.2 du livre de Corson-Lorrain que l'énergie potentielle d'une distribution de charge est donnée par

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \rho_q V d\nu,$$

où  $d\nu$  est l'élément de volume (il y a beaucoup de «  $\nu$  » ici!). Il est mentionné au début de la section 6.2 que puisque la densité de charge  $\rho_q$  et le potentiel  $V$  sont tous deux liés à  $\vec{E}$ , alors il doit y avoir moyen d'exprimer  $\mathcal{E}$  uniquement en termes de  $\vec{E}$ . Cela est l'argument clé pour démontrer, à l'aide d'identités vectorielles, qu'on a aussi

$$\mathcal{E} = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\nu, \quad (3)$$

où  $E^2 \equiv ||\vec{E}||^2 = \vec{E} \cdot \vec{E}$ .

- Donner les relations qui relient  $\rho_q$  et  $V$  à  $\vec{E}$ .

- b) Démontrer l'identité vectorielle  $\nabla \cdot (V \nabla V) = \nabla V \cdot \nabla V + V \nabla^2 V$ .
- c) À partir des relations données en a), montrer que l'identité vectorielle démontrée en b) peut être mise sous la forme  $\rho_q V = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \nabla \cdot (V \nabla V) = \epsilon_0 E^2 - \epsilon_0 \nabla \cdot (V \nabla V)$ .
- d) Utiliser le résultat de c), un théorème de l'analyse vectorielle, ainsi que l'hypothèse que le potentiel est nul à l'infini pour montrer que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \rho_q V dv = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv.$$

On vient de faire une preuve élégante du résultat principal de la section 6.2 du livre à partir d'un argument de départ et des compétences en calcul différentiel et intégral vectoriel développées à l'APP 1! Bravo!

**Exercice 3.** Calculer l'énergie potentielle d'un dipôle électrique. Quelle équation du livre faut-il utiliser?

**Exercice 4.** Conducteurs cylindriques et câble coaxial - énergie électrostatique, tension et capacité

- a) Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques concentriques (ou coaxiaux). Les câbles coaxiaux sont très utilisés pour la transmission de signaux à hautes fréquences. Soient  $a$  le rayon externe du conducteur interne et  $b$  le rayon interne du conducteur externe (le conducteur externe est aussi appelé gaine). Si on suppose qu'il y a une tension  $V$  entre les conducteurs interne et externe, quelle est la charge par unité de longueur  $\lambda$  sur le conducteur interne?
- b) Pour le câble coaxial décrit en a), calculer la capacité par unité de longueur d'un tel câble. Indice : Pour ce calcul, on peut se baser sur ce qui a été fait en a) ; pour conclure, on utilisera la relation  $C = Q/V$ .
- c) Pour le câble coaxial décrit en a), calculer l'énergie électrique par unité de longueur dans le champ entre les conducteurs interne et externe lorsque la différence de potentiel entre ces conducteurs est  $V$ .
- d) Un autre type de ligne de transmission pour des signaux ou de la puissance consiste en deux fils parallèles. Nous supposons que les fils ont un rayon  $r$  et portent une charge  $\pm\lambda$ . Leurs centres sont séparés d'une distance  $D$ . Calculer la capacité par unité de longueur entre les deux fils. Vous pouvez supposer que la distribution de la charge sur un fil est peu influencée par l'autre, ce qui est le cas pour  $D > 5r$ .

**Exercice 5.** Condensateur à faces planes et parallèles (exercice 6.8 dans Corson-Lorrain).

Montrer que la capacité d'un condensateur à faces planes et parallèles à  $N$  plaques est

$$C \approx \epsilon_0 (N-1) \frac{A}{t}$$

où  $A$  est l'aire d'une face d'une plaque et  $t$  est la distance entre les plaques. Réfléchissez à des manières différentes de brancher les plaques. Laquelle vous paraît la plus utile?

**Exercice 6.** Deux condensateurs de capacités  $C_1$  et  $C_2$  portent des charges respectives  $Q_1$  et  $Q_2$ . Les condensateurs ne sont pas connectés ensemble.

- a) Calculer l'énergie potentielle totale  $\mathcal{E}_{\text{tot, avant}}$  des deux condensateurs.
- b) On connecte ensemble les condensateurs en parallèle. Calculer l'énergie potentielle totale  $\mathcal{E}_{\text{tot, après}}$  dans ce cas.

- c) Calculer la différence d'énergie entre après et avant (c.à.d.  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{tot, après}} - \mathcal{E}_{\text{tot, avant}}$ . Si  $\Delta\mathcal{E} < 0$  c'est qu'il y a eu une perte d'énergie dans le processus et si  $\Delta\mathcal{E} > 0$  c'est qu'il y a eu un gain d'énergie. Montrer qu'il y a perte d'énergie. Note : Il y a un peu d'algèbre à faire pour bien voir qu'il y a perte d'énergie.
- d) Où l'énergie s'est-elle perdue?
- e) On débranche les condensateurs. Quelles seront les charges  $Q'_1$  et  $Q'_2$  sur les condensateurs  $C_1$  et  $C_2$  après le débranchement. Aussi, quelle sera alors l'énergie totale des deux condensateurs? Comparer cette énergie à celle obtenue en d) et expliquer.

**Exercice 7.** Condensateur variable avec une carte de circuit imprimé (exercice 7.10 dans Corson-Lorrain).

Un condensateur variable est réalisé avec une plaque conductrice qui peut coulisser en dessous d'une carte de circuit imprimé d'épaisseur  $t$  et de permittivité relative  $\epsilon_r$  qui a été gravée pour laisser une piste de largeur  $y$  dépendant de la position sur la piste  $z$ .

Trouver  $y(z)$  donnant les valeurs suivantes de  $C$  exprimé en farad et  $z$  en mètre :

- a)  $10^{-9}z$
- b)  $10^{-8}z^2$ .

**Exercice 8. Exercice supplémentaire.** Soit une sphère chargée de rayon  $a$  et de densité de charge dont la dépendance en fonction de la distance à l'origine  $r$  et de l'angle polaire  $\theta$  est donnée par  $\rho_q = \rho_{\text{max}} \frac{r}{a} \sin \theta$ , où  $\rho_{\text{max}}$  est une constante. Sans calcul, dire si cette densité de charge donnera lieu à un moment dipolaire électrique et expliquer.

## 4.3 Procédural 3 - Champs magnétiques

### 4.3.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

### 4.3.2 Exercices proposés

**Exercice 1.** Une charge  $q$  se déplace à vitesse  $v$  sur un cercle de rayon  $r$ .

- a) Donner la fréquence de rotation (en Hz) de la particule ainsi que la fréquence angulaire de rotation.
- b) Donner le courant électrique associé à cette charge en rotation sur ce cercle? Rappel : Par définition le courant en un point est la quantité de charge qui passe par ce point en une seconde.
- c) Donner le moment dipolaire magnétique associé à ce mouvement.

**Exercice 2.** Faire exercice 14.6 dans Corson-Lorrain.

**Exercice 3.** À l'exemple de la p. 249 du livre de Corson-Lorrain, la spire est en  $z = 0$ . Si on place plutôt la spire en  $z = z_0$ , quelle est alors l'expression du champ sur l'axe  $z$  en fonction de  $z$ ? Indice : Adaptez l'expression déjà donnée dans le livre, ne refaites pas une intégrale. Note : Ici et dans l'exemple en p. 249, on s'intéresse au champ sur l'axe, car il est facile d'obtenir une expression analytique dans ce cas. Pour le champ hors axe, les expressions sont beaucoup plus complexes et font appel à des fonctions elliptiques.

**Exercice 4.** Faire exercice 14.9 sur les bobines de Helmholtz dans Corson-Lorrain. Note : Le résultat de l'exercice précédent sera utile.

**Exercice 5.** Faire exercice 15.3 dans Corson-Lorrain.

**Exercice 6.** Faire exercice 15.4 dans Corson-Lorrain.

## 4.4 Procédural 4 - Diélectriques réels, méthode des images, forces magnétiques

### 4.4.1 Consignes

- Ayez en votre possession, soit en version papier, ou en version électronique sur votre ordinateur portable ou tablette, le présent guide ainsi que les documents PDF que vous avez lus pour le présent procédural.

Note : Le contenu des procéduraux fait partie de l'examen sommatif, car on ne peut incorporer tous les contenus pédagogiques (voir annuaire) dans la formulation de la problématique.

### 4.4.2 Exercices proposés

**Exercice 1.** On considère un condensateur à faces planes parallèles entre lesquelles il y a un diélectrique conducteur. La permittivité relative du diélectrique  $\epsilon_r$  est constante. Le diélectrique est aussi conducteur avec conductivité constante  $\sigma_{co}$ , qui est beaucoup plus faible que la conductivité des plaques. Ceci fait en sorte que le champ électrique  $\vec{E}$  entre les plaques est uniforme. On met le condensateur sous tension, ce qui donne lieu à une densité surfacique de charge  $\sigma_{ch}$  sur les plaques. Le condensateur est équivalent à un condensateur idéal en parallèle avec une résistance, car il y a des pertes ohmiques dans le diélectrique dû à la conductivité.

- Utiliser le théorème de Gauss pour relier  $\vec{E}$  à  $\sigma_{ch}$ .
- Montrer que si on déconnecte le condensateur de la source de tension, alors sa charge décroît d'un facteur  $e$  en un temps  $\tau = \epsilon / \sigma_{co}$ , avec  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ ;  $\tau$  est le temps de relaxation du condensateur.

Note : Dans les condensateurs réels, le diélectrique est généralement légèrement conducteur tel que considéré dans le présent exercice. C'est pour cela qu'un condensateur réel ne peut pas tenir sa charge indéfiniment.

**Exercice 2.** Méthode de Sawyer et Tower pour mesurer des courbes de polarisation de matériaux diélectriques

La figure 5 illustre la méthode de Sawyer et Tower pour mesurer la courbe de polarisation  $P$  d'un matériau diélectrique en fonction du champ électrique  $E$  appliqué à ce matériau (p. ex. une courbe d'hystérésis). Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  constituent un simple diviseur de tension pour abaisser la tension appliquée

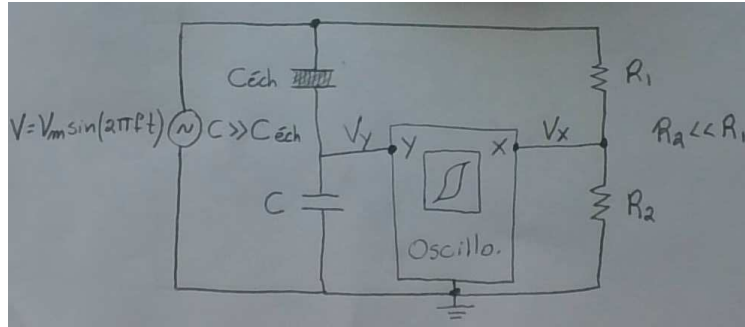


FIGURE 5. Méthode de Sawyer et Tower pour mesure de courbes de polarisation.

dans les kiloVolts à une valeur acceptable pour l'entrée d'un oscilloscope. Pour cette raison,  $R_2 \ll R_1$ .  $C_{éch}$  est un condensateur à plaques parallèles entre lesquelles il y a l'échantillon diélectrique à caractériser et  $C$  est une capacité connue.

- Montrer que si  $C \gg C_{éch}$ , alors presque toute la tension  $V$  de la source se trouve aux bornes de  $C_{éch}$ .
- Montrer qu'en conséquence de a), la tension  $V_X$  pour l'axe  $X$  de l'oscilloscope est proportionnelle au champ électrique  $E$  dans le matériau contenu dans le condensateur  $C_{éch}$ . Supposer que le matériau est d'épaisseur  $d$  entre les plaques. Donner le coefficient de proportionnalité entre  $V_X$  et  $E$ .
- Tel que vu à la section 7.3 du livre de Corson-Lorrain, lorsqu'un matériau diélectrique est assujéti à un champ électrique  $\vec{E}$ , il se développe sur ses surfaces perpendiculaires au champ  $\vec{E}$  une densité surfacique de charge liée  $\sigma_p$  (v. figure 7.1 du livre). Donc, si un tel matériau se trouve entre les deux plaques métalliques d'aire  $A$  d'un condensateur, montrer que la charge sur les plaques sera

$$Q_p = PA,$$

où  $P = ||\vec{P}||$  est la grandeur de la polarisation.

- Comme les capacités  $C_{éch}$  et  $C$  sont en série, elles auront la même charge  $Q_p$ . Montrer que la tension  $V_Y$  à l'entrée de l'oscilloscope est en très bonne approximation proportionnelle à  $P$ . Donner le coefficient de proportionnalité entre  $V_Y$  et  $P$ .

Ainsi, vous avez montré qu'une courbe de  $V_Y$  versus  $V_X$  affichée sur l'oscilloscope est, à des facteurs de proportionnalité près, une courbe de  $P$  versus  $E$ . De cette façon, en faisant varier la tension appliquée  $V$  de façon périodique tel qu'illustré sur la figure, on peut notamment tracer des courbes d'hystérésis pour des matériaux diélectriques qui exhibent ce phénomène.

### Exercice 3. Exercice qu'on fera en détail si le temps le permet.

Soit une région de l'espace définissant un volume  $\mathcal{V}$  dans lequel il y a une densité de charge  $\rho_c$ . Pour trouver le potentiel dans cette région, il faut résoudre l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0}.$$

Démontrer que deux solutions pour  $V$  dans cette région ne peuvent différer que par une constante si la composante normale du gradient de  $V$  est définie sur la surface  $\mathcal{S}$  qui limite la région (en d'autres mots,  $\mathcal{S}$  est la frontière du volume  $\mathcal{V}$ ).

Pour démontrer ce qui est demandé, on va dénoter par  $V_1$  et  $V_2$  les deux solutions. Selon l'énoncé, il faut donc montrer que  $V_1 - V_2 = \text{cte}$ . Or, cette dernière égalité est équivalente à ce que le gradient de  $V_1 - V_2$  soit nul (car si le gradient est nul, toutes les dérivées de  $V_1 - V_2$  sont nulles et donc la fonction  $V_1 - V_2$  doit être constante). Or,  $\nabla(V_1 - V_2) = \vec{0}$  est équivalent à ce que la norme du gradient de la différence soit nulle, c.à.d.  $\|\nabla(V_1 - V_2)\|^2 = 0$  (on a mis la norme au carré, ce qui est équivalent). Pour démontrer que la norme au carré est nulle, il est suffisant de démontrer que  $\int_V \|\nabla(V_1 - V_2)\|^2 dV = 0$  (une somme de carrés - une intégrale étant une somme - ne peut être nulle que si les éléments de la somme sont nuls; donc ici si on arrive à montrer que l'intégrale est nulle, son intégrand  $\|\nabla(V_1 - V_2)\|^2$  sera nul). Ainsi, démontrer que  $V_1 - V_2 = \text{cte}$  est équivalent à démontrer que  $\int_V \|\nabla(V_1 - V_2)\|^2 dV = 0$  et c'est de là qu'on va partir. On notera que  $\|\nabla(V_1 - V_2)\|^2 = \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)$  et donc  $\int_V \|\nabla(V_1 - V_2)\|^2 dV = \int_V \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2) dV$ . Voici des indices pour terminer la preuve :

1.  $V_1$  et  $V_2$  satisfont chacune l'équation de Poisson, donc leur différence doit satisfaire l'équation de Laplace  $\nabla^2(V_1 - V_2) = 0$ ; cela sera utile.
2. On utilisera l'identité vectorielle  $\nabla \cdot (f \vec{A}) = \nabla f \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A}$  qu'on écrira pour  $f = V_1 - V_2$  et  $\vec{A} = \nabla(V_1 - V_2)$ .
3. Évidemment, si on parle de la surface frontière à un volume, on pense au théorème de la divergence et donc le théorème devrait être utilisé à un moment donné dans la preuve.
4. Selon l'énoncé, sur la surface  $\mathcal{S}$ , les composantes normales des gradients de  $V_1$  et de  $V_2$  sont égales, c.à.d. on a  $\nabla V_1 \cdot \hat{n} = \nabla V_2 \cdot \hat{n}$ , où  $\hat{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface  $\mathcal{S}$ .

Note : Comme  $V_1$  et  $V_2$  ne diffèrent que par une constante, on aura que le champ électrique  $\vec{E} = -\nabla V$  sera lui uniquement déterminé. On rappellera qu'un potentiel peut toujours être défini à une constante près, sans changer les conséquences physiques.

**Exercice 4.** Faire exercice 9.2 dans Corson-Lorrain.

Note : Cet exercice est une belle utilisation : i) du calcul de champs électriques (chap. 3), ii) de la section 4.6 sur les conducteurs isolés dans des champs électriques statiques et iii) de la méthode des images (sect. 9.1).

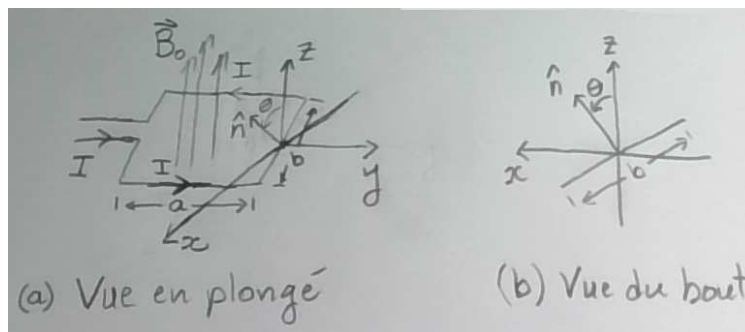


FIGURE 6. Spire rectangulaire dans un champ magnétique uniforme (principe de base du moteur à courant continu).

**Exercice 5.** Une spire rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  et alimentée par un courant constant  $I$  est plongée dans un champ magnétique uniforme  $B_0$  orienté dans le sens des  $z$  positifs (v. figure 6). La normale  $\hat{n}$  au plan de la spire fait un angle  $\theta$  avec le champ magnétique. Une telle spire est un exemple très simplifié d'un moteur à courant continu.



- a) Calculer la force sur chacun des segments de la spire pour ensuite obtenir la force résultante totale sur la spire (au bout par où est amené le courant dans la spire, on supposera que le segment n'est pas interrompu et on négligera les bouts de fils allant à la source de courant; on considérera ces bouts torsadés, donc aucune force cette sur cette partie).
- b) Quel effet ont les éléments de force sur chacun des éléments de longueur des segments de la spire quant à la forme globale de la spire?
- c) Calculer le couple sur la spire par rapport à l'axe qui passe par le centre de la spire (axe  $y$ ). Dans quel sens ce couple fait-il tourner la spire?
- d) Pour quel angle  $\theta$  le couple est-il maximal? minimal? Faites des dessins.

## 4.5 Tutorat 2

Au tutorat 2, on révisera les équations et concepts vus pendant l'APP. Il sera utile de consulter le guide de référence qui fournit la liste des connaissances nouvelles acquises pendant l'APP ainsi que la feuille de formules de l'APP.

## 5 Productions à remettre - Rapport d'APP

### 5.1 Consignes

- Le rapport est à remettre par équipe de 2 étudiants.
- Notez que bien que le rapport soit à remettre en équipe, vous serez évalués de façon individuelle lors des examens sur les compétences mises en oeuvre pour l'élaboration de ce rapport.

### 5.2 Format et contenu du rapport

- Le rapport consiste à remettre tous les calculs nécessaires à la résolution de la problématique.
- Un scan en PDF de vos calculs écrits à la main sera accepté en autant que ça soit bien lisible et compréhensible.
- Le rapport devra être repris si la qualité de la communication et de la langue est insatisfaisante. Le correcteur a été formellement averti de retourner les rapports truffés de fautes.

### 5.3 Remise

- **Le rapport doit être remis avant le début du premier tutorat de fermeture le mercredi matin de la 2e semaine d'APP.** Il y aura une **pénalité de 20%** si vous êtes en **retard**.
- **Le rapport doit être contenu dans un seul fichier PDF et remis par dépôt électronique** à l'endroit prévu à cet effet sur le site Web du département. Le nom du fichier déposé doit obéir aux conventions de dépôt électronique des travaux.

N'envoyez pas vos rapports par courriel! Le dépôt se fait de façon électronique. Veillez à respecter l'heure limite, car dépassé celle-ci il n'est pas garanti que votre rapport soit reçu et donc qu'il pourra être corrigé.

## 6 Évaluations

Les points pour chacun des éléments d'évaluation, soient les examens et le rapport, seront attribués tel qu'indiqué dans le guide de référence.

### 6.1 Évaluation du rapport

L'évaluation du rapport se fera selon les éléments de mandats déterminés lors de la séance de tutorat 1. C'est à vous de vous assurer, par votre analyse de la problématique, que votre rapport est complet en répondant à tous les éléments de mandats.

## 6.2 Examens

Ce qui est matière à examen sommatif et à examen final en fin de session est l'ensemble des connaissances énumérées dans le présent guide d'APP, donc la totalité des programmes d'études et des exercices suggérés et ce qui est relié à la résolution de la problématique. L'évaluation sommative de la présente unité d'APP et l'examen final sont des évaluations théoriques et se tiendront à livres fermés. Un formulaire d'équations sera fourni à la fin de l'examen. Ce formulaire est également sur la page WEB de la présente unité d'APP pour vous permettre de travailler avec pendant l'unité.