

Chapitre 6

Électromagnétisme

Le champ électromagnétique (EM) représente l'état d'excitation qui existe dans l'espace dû à la présence de charges électriques. Il est généralement décrit comme étant composé de deux champs, soit les champs électrique et magnétique, le champ électrique étant causé par des charges stationnaires et le champ magnétique par des charges en mouvement (aussi appelées courants). Pour cette raison, les charges stationnaires et en mouvement sont souvent considérées comme étant les sources du champ EM. Le champ EM peut être envisagé comme un système auto-suffisant dans la mesure où les champs électrique et magnétique sont produits et modifiés par les charges électriques et qu'en même temps ces champs exercent des forces sur les charges électriques, les mettant en mouvement, ce qui conséquemment altère le champ EM. Ces interactions avec les charges, et plus généralement avec la matière, et les variations dans l'espace et le temps du champ EM sont décrites par les équations de Maxwell et la force de Lorentz.

Il est à noter que de la perspective de la théorie de la relativité restreinte, les champs électrique et magnétique sont un tout. Un exemple frappant de cela est celui d'une charge électrique se déplaçant à vitesse constante dans un repère donné. Si un observateur se déplace avec la charge à la même vitesse que celle-ci, ce qui en d'autres mots signifie que cet observateur est dans un second repère avec une vitesse relative par rapport au premier, alors dans ce second repère il n'y a pas de champ magnétique, mais plutôt seulement un champ électrostatique. La théorie de la relativité indique comment le champ magnétique dans le premier repère se transforme en un champ électrique dans le second par l'entremise d'une transformation de Lorentz. Pour cette raison il est plus approprié de considérer le champ électromagnétique comme un tout, plutôt que de l'envisager comme étant composé de deux entités différentes. L'étude de la théorie de la relativité en lien avec l'électromagnétisme dépasse le cadre du présent ouvrage, pour cela le lecteur est référé à la littérature, voir p. ex. [JACKSON, CLASSICAL ELECTRODYNAMICS, 3RD ED] qui donne une excellente description.¹

Notions un peu plus détaillées sur la relativité restreinte (pour le lecteur intéressé; on peut omettre de lire). On notera qu'historiquement c'est la découverte du fait que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous des transformations inertielles au sens de Galilée qui a mené à la découverte de la théorie de la relativité. Une trans-

¹ Pour une introduction plus de base et intuitive, mais néanmoins complète à la relativité restreinte, une excellente référence est le livre de French [FRENCH, SPECIAL RELATIVITY].

formation inertielle entre deux repères au sens de Galilée (transformation galiléenne) indique comment passer des coordonnées d'un repère aux coordonnées d'une autre repère se déplaçant à vitesse constante par rapport au premier. Si on considère un mouvement relatif des repères selon un axe et que x est la coordonnée par rapport au premier repère et x' la coordonnée par rapport au second repère, avec v la vitesse relative entre les deux repères, (p. ex. le second repère se déplaçant relativement au premier vers la droite à vitesse v), alors la relation entre les deux coordonnées, appelée transformation galiléenne, est donnée par $x' = x - vt$, où t est le temps supposé être le même dans les deux repères. Or, Einstein a le premier clairement montré que le temps doit être considéré comme étant un concept relatif au repère auquel il se rapporte et de là la transformation galiléenne doit être remplacée par une transformation de Lorentz. La transformation de Lorentz, qui fait intervenir la vitesse relative v et la vitesse de la lumière dans le vide c_0 , indique comment la coordonnée x et le temps t relatifs au premier repère se transforment en la coordonnée x' et le temps t' relatifs au second repère. Une telle transformation est donnée par

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}, \\ t' &= \frac{t - vx/c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

On voit donc que le temps se transforme aussi d'un repère à un autre, tout comme la coordonnée. La notion de temps universel telle qu'envisagée par Newton n'est donc pas valable. On note des éqs. (6.1) que si la vitesse relative entre les repères est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière ($v \ll c_0$), alors on retrouve la transformation galiléenne avec $t' = t$.

On définit souvent les quantités suivantes :

$$\beta = v/c_0, \quad (6.2)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (6.3)$$

ce qui permet de réécrire la transformation de Lorentz sous la forme plus succincte et élégante

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta c_0 t), \\ c_0 t' &= \gamma(c_0 t - \beta x). \end{aligned} \quad (6.4)$$

En outre, souvent on définit $x_0 = c_0 t$ et $x_1 = x$, et de façon analogue pour les variables primées, ce qui permet d'écrire la transformation de Lorentz très simplement comme

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1), \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Cette forme met encore plus en évidence que le temps et l'espace ont un rôle équivalent et qu'ils ne peuvent être considérés indépendamment, ce qui mène au concept d'espace-temps.

On notera pour terminer qu'Einstein n'est pas le seul à avoir développé la relativité restreinte. Le premier est Lorentz, qui a grandement contribué aux développements théoriques de l'électromagnétisme, et qui est le premier arrivé à la transformation qui porte son nom en montrant que les équations de Maxwell étaient invariantes sous cette transformation. Toutefois, contrairement à Einstein, Lorentz n'a pas apporté une explication claire et intuitive de cette transformation. C'est Einstein, par l'introduction du concept de relativité de la simultanéité qui y est arrivé. Einstein a en quelque sorte expliqué la transformation de Lorentz. Poincaré, qui s'est aussi intéressé à l'invariance des équations de Maxwell d'un point de vue mathématique, est également arrivé à la transformation de Lorentz presque en même temps que Lorentz. On mentionnera en outre que les expériences de Fizeau et de Michelson-Morley, antérieures aux travaux de Lorentz, Poincaré et Einstein, ont aussi joué un rôle déterminant dans le développement de la relativité restreinte.

6.1 Introduction historique

L'électromagnétisme et son aboutissement aux équations de Maxwell est une des grandes réalisations de la physique du XIX^e siècle avec la mécanique statistique. L'électromagnétisme est sans doute le domaine de la physique qui a eu et qui continue à avoir la plus grande influence sur l'humanité. Les équations de Maxwell forment un ensemble de quatre équations aux dérivées partielles couplées qui relient les dérivées spatiales et temporelles des champs électrique et magnétique aux charges et courants électriques.² Les équations de Maxwell constituent une synthèse de tout ce qui est connu sur les phénomènes électromagnétiques classiques, dont elles permettent une description complète. Il a fallu plus de 50 ans pour arriver à ces équations. Elles font suite à de nombreuses découvertes expérimentales. Plus particulièrement, les expériences qui ont permis d'arriver à une théorie des phénomènes électromagnétiques sont celles de

- Coulomb et Cavendish sur l'électrostatique ;
- Ohm sur les courants et la résistance électrique ;
- Ørsted qui a observé qu'un courant électrique défléchit l'aiguille d'une boussole, donc qu'un courant donne lieu à un champ magnétique, établissant ainsi pour première fois une connexion entre l'électricité et le magnétisme ;
- Biot et Savart qui ont poursuivi la voie ouverte par Ørsted en élucidant davantage la nature du champ magnétique engendré par un courant électrique ; et
- Faraday, qui, fasciné par la découverte d'Ørsted, s'est donné comme objectif de déterminer si un champ magnétique, à son tour, permet d'induire un courant électrique, arrivant ainsi à sa célèbre loi d'induction.

Il convient ici de souligner, que ce qui a mené à ces avancées (hormis celles de Coulomb et Cavendish) a été l'invention de la pile électrochimique par Volta.³ Il s'agit d'une technologie qui a permis la génération de courants électriques à volonté et de façon contrôlée, ce qui était impossible jusqu'alors.⁴

²Pour revenir à la notion de champ EM en lien avec la relativité restreinte, on notera qu'il est possible de mettre les équations de Maxwell sous une forme, appelée forme covariante, qui est manifestement invariante sous les transformations de Lorentz à l'aide du formalisme mathématique de l'analyse tensorielle. Dans ce formalisme, le tenseur de Faraday regroupe les champs électrique et magnétique et représente ainsi le champ EM comme un tout.

³Fait intéressant, Volta a développé sa pile après avoir pris connaissance des travaux de Galvani sur l'« électricité animale ». Galvani, un médecin-anatomiste, avait observé que lorsque deux disques de métaux différents sont connectés par l'entremise d'une patte de grenouille, celle-ci se contracte, ce qui indique le passage d'un courant électrique. On trouvera un résumé passionnant des travaux de Galvani sur Wikipedia [https://fr.wikipedia.org/wiki/Luigi_Galvani]. Volta comprend que l'origine de l'électricité ne provient pas nécessairement de la patte de l'animal, mais plutôt des métaux. Il remplace alors la patte par un papier buvard imbibé de saumure (eau salée) servant d'électrolyte. Le papier buvard est alors placé entre les deux disques métalliques. Cet assemblage forme ce qui peut être appelé une *couche galvanique*. Il observa qu'il y avait alors échange d'électricité entre les deux disques métalliques ainsi que l'apparition d'une tension entre ceux-ci. Ceci mena Volta à énoncer la loi stipulant que la force électromotrice (f.é.m.) d'une couche galvanique, obtenue en mettant en contact deux électrodes métalliques par l'entremise d'un électrolyte, est la différence entre deux *potentiels d'électrode*, chacun de ces potentiels ne dépendant que de la nature du métal. Conséquemment, deux électrodes faites d'un même métal ne peuvent développer de tension entre elles. Volta alla plus loin en branchant d'abord deux couches galvaniques en série, ce qui permet d'augmenter la tension. Finalement, il développa la configuration dans laquelle des couches galvaniques sont empilées, les métaux de nature différentes (zinc et argent dans son cas) des couches subséquentes étant en contact direct. Cet empilement porte le nom de *pile* de Volta ou *pile voltaïque*. Le fait d'empiler plusieurs couches permet d'augmenter encore davantage la tension, proportionnelle au nombre de couches, et ainsi de libérer une énergie électrique plus importante. On trouvera sur Wikipédia des informations supplémentaires sur Volta et les piles voltaïques [https://fr.wikipedia.org/wiki/Alessandro_Volta, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pile_voltaïque].

⁴Jusqu'à cette invention, la seule façon de produire de l'électricité était par l'entremise de décharges électriques, qui sont

Cela a ouvert la porte à des découvertes impliquant des courants dans des fils et des bobinages de fils formant des électroaimants.

Gauss et Ampère ont aussi fait d'importantes contributions théoriques en formulant mathématiquement sous forme d'équations trois des quatre lois fondamentales de l'électromagnétisme. Le génie de Maxwell a été de mettre ensemble ces équations, réécrivant au passage la loi de Faraday sous une forme plus mathématique, et, de façon plus importante, en trouvant qu'une correction devait être apportée à l'équation d'Ampère afin que l'ensemble d'équations soit cohérent avec la nécessaire conservation de la charge. Cette correction a mené Maxwell à introduire le courant de déplacement, qui est lié à la dérivée temporelle du champ électrique et qui permet de tenir compte de la possibilité de générer des champs magnétiques par l'entremise de champs électriques variant dans le temps. Cela est analogue et constitue en quelque sorte la réciproque de la loi de Faraday, qui stipule qu'un champ magnétique qui varie dans le temps induit un champ électrique. Cette réciprocité entre les champs électrique et magnétique permet la possibilité d'*ondes électromagnétiques* qui s'auto-entretiennent et qui peuvent se propager dans le vide. La correction de Maxwell lui a en effet permis de dériver des équations d'onde pour les champs électrique et magnétique, menant à la prédiction de l'existence d'ondes électromagnétiques (1864). Maxwell découvre en outre que ces ondes doivent se propager à une vitesse égale à la vitesse de la lumière, qui avait déjà à cette époque été mesurée avec une bonne précision, et qui maintenant pouvait être exprimée en termes de constantes électriques et magnétiques fondamentales. Cette découverte a de plus conduit à l'unification de deux domaines qui n'entretenaient aucun lien jusqu'alors, soient l'électromagnétisme et l'optique. Ceci a été une contribution énorme à la science, reposant sur l'unification récente de l'électricité et du magnétisme. En outre, les travaux de Maxwell fournissaient une théorie solide sur laquelle fonder l'optique, permettant finalement de décrire à partir de principes fondamentaux des phénomènes comme l'interférence et la polarisation de la lumière. À défaut de se répéter, cela constituait une percée plus que majeure.

La prédiction de Maxwell de l'existence des ondes EM demeurait toutefois théorique et peu acceptée par ses contemporains, jusqu'à ce que Hertz démontre leur existence dans une série d'expériences ingénieuses et remarquables (1887). Hertz a alors démontré de façon convaincante qu'il pouvait générer, transmettre et détecter de telles ondes à l'aide d'appareils électriques, et que ces ondes avaient les mêmes propriétés que la lumière, à savoir qu'elles pouvaient être polarisées et qu'elles pouvaient être réfractées par des matériaux. Peu après, Marconi a exploité l'existence d'ondes EM pour les télécommunications. Il a réalisé la première transmission transatlantique sans fil d'un message de Poldhu en Cornouailles, Angleterre jusqu'à Signal Hill à St-Jean de Terre-Neuve, au Canada, soit une distance d'environ 3 500 km. Finalement, tel que mentionné précédemment, les développements modernes de l'électromagnétisme classique⁵, incluant la théorie de la relativité restreinte, doit beaucoup à H. A. Lorentz. Pour des descriptions plus complètes de l'histoire fascinante de l'électromagnétisme, le lecteur est invité à consulter le traité en deux volumes de Whittaker *A History of the Theories of Aether and Electricity*, ainsi que les introductions historiques dans les livres de Jackson *Classical Electrodynamics* et de Born & Wolf *Principles of Optics*.

imprévisibles et très difficilement contrôlables.

⁵Car il y a aussi une théorie électromagnétique quantique!

6.2 Équations de continuité

Une notion qui reviendra à maintes reprises dans le présent ouvrage est celle d'*équation de continuité*. Ces équations étaient bien connues à l'époque de Maxwell, car on en rencontre en hydrodynamique, dont la théorie était alors assez bien développée, notamment suite aux travaux d'Euler. Une des équations de continuité les plus simples à obtenir et à comprendre est celle pour exprimer la loi de conservation de la masse pour un fluide dans un volume donné. Soit $\rho_m(\vec{r}, t)$ (kg/m^3) la masse volumique (ou densité⁶) d'un fluide qui s'écoule en suivant un champ de vitesses $\vec{v}(\vec{r})$ dans une région de l'espace. Si on considère un volume \mathcal{V} dans cette région, alors le taux de variation de la masse dans ce volume doit être égal à la masse nette qui sort de ce volume. Cette masse sortante nette correspond au flux de masse sortant de la surface \mathcal{S} qui borne le volume \mathcal{V} . Pour évaluer ce flux, il faut connaître la masse par unité de surface qui se déplace dans le fluide. Or, en un point \vec{r} donné du volume, la matière se déplace dans la direction de la vitesse en ce point, soit $\vec{v}(\vec{r})$. Ainsi, la masse qui se déplace par unité de surface dans la direction de \vec{v} est donnée par $\rho_m \vec{v}$ (on se convainc aisément de cela à l'aide d'une analyse dimensionnelle qui montre que $\rho_m \vec{v}$ a des unités de masse par unité de surface (kg/m^2). Avec cela, le flux de masse est donné par l'intégrale de flux suivante :

$$\Phi = \oint_{\mathcal{S}} (\rho_m \vec{v}) \cdot \hat{n} \, da, \quad (6.6)$$

où $\hat{n} \, da \equiv d\vec{a}$ est un élément d'aire de la surface bornant le volume \mathcal{V} et \hat{n} le vecteur normal unitaire à cet élément d'aire. Comme la masse dans le volume à un instant t est donnée par (dans ce qui suit $d\mathcal{V}$ dénote un élément de volume; ne pas confondre le \mathcal{V} dans l'élément de volume avec la vitesse $v = ||\vec{v}||$)

$$M(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho_m \, d\mathcal{V}, \quad (6.7)$$

on a alors

$$\frac{dM}{dt} = -\Phi, \quad (6.8)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_m \, d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} (\rho_m \vec{v}) \cdot \hat{n} \, da. \quad (6.9)$$

Cette équation traduit en termes mathématiques la loi de conservation de la masse. On peut convertir l'intégrale de surface du membre de droite de cette équation en une intégrale de volume par le théorème de la divergence et en entrant la dérivée temporelle de la masse dans l'intégrale du membre de gauche, on obtient

$$\oint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} \, d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) \, d\mathcal{V}. \quad (6.10)$$

Le volume \mathcal{V} étant arbitraire, on obtient

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0, \quad (6.11)$$

qui est l'*équation de continuité de la masse* correspondant à la loi de conservation de la masse.

⁶Qu'on pourrait appeler « densité massique ».

On peut interpréter $\rho_m \vec{v}$ comme une « densité de courant massique » \vec{J}_m qu'on définira par

$$\vec{J}_m = \rho_m \vec{v}. \quad (6.12)$$

Le vecteur \vec{J}_m formalise mathématiquement la notion de courant au sens usuel, p. ex. le courant dans une rivière, car plus la vitesse de l'eau dans une rivière est grande, plus on dira que le courant est fort. Également, plus la densité du fluide est grande, plus grande sera la quantité de mouvement ou l'énergie cinétique et plus on dira alors que le courant est fort. Ceci traduit la notion intuitive de transport de masse. Un lien peut aussi être établi entre $\rho_m \vec{v}$ et la quantité de mouvement. En effet, comme ρ_m correspond à une masse par unité de volume, $\rho_m \vec{v}$ correspond à une quantité de mouvement par unité de volume, plus précisément à une *densité de quantité de mouvement* $\vec{\mathcal{P}} (\equiv \vec{J}_m)$ dans le fluide. Avec cela, on peut définir la quantité de mouvement totale dans un volume de fluide par

$$\vec{P} = \int_V \vec{\mathcal{P}} dV = \int_V \rho_m \vec{v} dV. \quad (6.13)$$

Les dernières définitions permettent de réécrire l'équation de continuité (équ. (6.11)) sous les formes équivalentes suivantes

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_m = 0, \quad (6.14)$$

ou

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} = 0. \quad (6.15)$$

Pour terminer, on note que des équations de continuité semblables à celles obtenues ici sont omniprésentes en physique (dynamique des fluides, transfert de chaleur, propagation de la lumière en milieux diffusants, etc...). On en rencontrera une autre en électromagnétisme dans ce qui suit en lien avec l'énergie du champ électromagnétiques; une équation de continuité sera aussi obtenue pour le courant de probabilité en mécanique quantique.

6.3 Précis d'électromagnétisme

6.3.1 Charge et conduction électrique d'un point de vue classique

On prendra ici un point de vue classique sur la conduction électrique. Essentiellement, ce point de vue considère la charge comme une distribution et le courant électrique comme un fluide chargé qui « coule » dans des conduits (conducteurs). C'est d'un tel point de vue inspiré de l'hydrodynamique, qui a été étudiée bien avant l'électromagnétisme, que le concept de courant électrique a été développé historiquement (d'où le nom par analogie au courant d'un fluide, comme par exemple le courant de l'eau dans une rivière) et c'est le point de vue qu'on prendra ici. Il convient de mentionner qu'ultimement, c'est la mécanique quantique qui décrit la conduction dans les matériaux, car la charge vient par paquets et on n'a plus un fluide. On utilisera aussi le concept de charge ici dans le sens de corpuscules de charge se comportant comme des points matériels chargés. Le traitement quantique est plus subtil. Notamment, les porteurs de charge peuvent aussi avoir un comportement ondulatoire et des effets d'interférence peuvent apparaître. On n'entrera pas dans cela ici, en se limitant au point de vue classique.

Charge et densité de charge

Lorsqu'on a une distribution de charge de densité volumique de charge $\rho_q(\vec{r})$, l'élément de charge dq contenu dans un élément de volume $d\nu$ est donné par

$$dq = \rho_q(\vec{r}) d\nu. \quad (6.16)$$

Ainsi, la charge totale contenue dans un volume fini \mathcal{V} est obtenue en intégrant l'équation précédente; on a donc

$$q = \int_{\mathcal{V}} \rho_q(\vec{r}) d\nu. \quad (6.17)$$

Courant électrique

Par définition, le courant électrique I est la quantité de charge qui passe à travers une surface donnée par unité de temps. Donc, s'il passe une quantité de charge Δq dans un temps Δt , on aura un courant

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (6.18)$$

et à la limite, le courant instantané est donné par

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (6.19)$$

Densité de courant électrique

On a vu la définition formelle du courant électrique à la section précédente. Or, ce qui cause un courant est une distribution de charge en mouvement, donc qui a une vitesse. Plus la vitesse de la distribution de charge est élevée, plus le courant sera élevé et également, plus la charge en mouvement est importante, plus, aussi, le courant est élevé. La vitesse étant un vecteur, le courant a donc aussi une nature vectorielle. Si on considère le courant comme un vecteur, on s'attend alors à ce que son expression soit du type

$$\vec{I} \sim q \vec{v}, \quad (6.20)$$

où q est la charge et \vec{v} sa vitesse. Ceci est une expression approximative qui sera précisée dans ce qui suit. On ne se préoccupe souvent pas de cette nature vectorielle du courant, car on a fréquemment affaire à des courants dans des fils qu'on considère minces. Toutefois, même dans ce cas, le courant suit la direction du fil, et donc est implicitement un vecteur. De façon plus précise, le courant dans un élément de longueur vectoriel $d\vec{l}$ de ce fil, est dans la direction de $d\vec{l}$ (c.à.d. le courant et $d\vec{l}$ sont colinéaires).

On va maintenant considérer la situation dans laquelle on a une densité volumique de charge ρ_q , c.à.d. ρ_q est la charge par unité de volume. On suppose que la densité de charge se déplace à vitesse \vec{v} dans une région de l'espace. Alors, la quantité de charge traversant, dans cette région, un élément de surface Δa perpendiculaire à la vitesse \vec{v} pendant un temps Δt est donnée par la charge contenue dans un élément de volume $\Delta V = \|\vec{v}\| \Delta t \Delta a$, car toute la charge contenue dans cet élément de volume aura

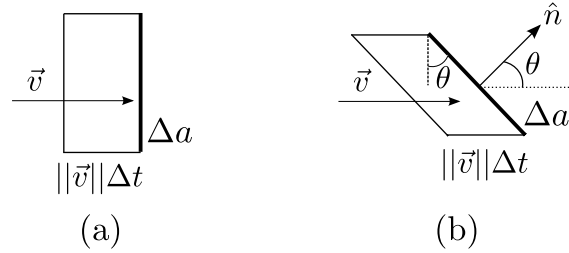


FIGURE 6.1

le temps de passer à travers l'élément de surface pendant ce temps (figure 6.1 (a)). Ainsi, la charge qui passe à travers l'élément de surface est donnée par

$$\Delta q = \rho_q \Delta V = \rho_q ||\vec{v}|| \Delta t \Delta a, \quad (6.21)$$

et donc le courant correspondant est

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_q ||\vec{v}|| \Delta a. \quad (6.22)$$

On a écrit ici ΔI et non I , étant donné qu'on considère le courant à travers un élément de surface (en outre, l'équation a un Δ d'une quantité dans son membre de droite).

On va maintenant traiter le cas plus général dans lequel l'élément de surface n'est pas perpendiculaire à la vitesse (figure 6.1 (b)). On considère alors l'élément de surface comme étant un vecteur $\Delta \vec{a} = \Delta a \hat{n}$, où Δa est l'aire de l'élément de surface et \hat{n} spécifie son orientation dans l'espace. Soit θ l'angle entre la vitesse et l'élément de surface (figure 6.1 (b)). On voit dans ce cas qu'on doit prendre en compte un facteur de projection pour calculer le courant, puisque l'aire efficace rencontrée par la charge est donnée par

$$\Delta a_{\text{eff}} = \Delta a \cos \theta. \quad (6.23)$$

On a alors, plutôt que l'éq. (6.22), l'équation suivante :

$$\Delta I = \rho_q ||\vec{v}|| \Delta a \cos \theta, \quad (6.24)$$

qu'on peut écrire sous forme vectorielle comme

$$\Delta I = \rho_q \vec{v} \cdot \Delta \vec{a}. \quad (6.25)$$

La quantité $\rho_q \vec{v}$ apparaissant ici est appelée la *densité de courant* et est dénotée \vec{J} . Les unités de \vec{J} sont des ampères par mètre carré (A/m²). On a donc

$$\vec{J} = \rho_q \vec{v} \quad (6.26)$$

et

$$\Delta I = \vec{J} \cdot \Delta \vec{a}, \quad (6.27)$$

ou sous forme infinitésimale

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (6.28)$$

Si on désire obtenir le courant total à travers une surface \mathcal{S} , il faut alors intégrer l'éq. (6.28) sur cette surface et ainsi

$$I = \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (6.29)$$

Le vecteur \vec{J} correspond donc au courant par unité de surface dans la direction dans laquelle la charge se dirige. C'est \vec{J} qui ultimement doit être considéré comme la quantité fondamentale à la notion de courant en électromagnétisme classique. On notera la ressemblance entre l'éq. (6.26) et la relation approximative donnée à l'éq. (6.20). C'est en fait l'éq. (6.26) qui formalise l'idée derrière l'éq. (6.20). En outre, l'éq. (6.29) formalise aussi le fait que lorsqu'une densité de courant est confinée à un fil de petite section transverse, on intègre habituellement la densité de courant sur cette section transverse et on parle alors d'un courant d'un certain nombre d'ampères dans le fil.

On remarquera la ressemblance de l'argument développé ici et celui qui mène à la notion du flux d'un champ de vecteurs. On voit ainsi de l'éq. (6.29) que le courant I à travers une surface correspond au flux de la densité de courant à travers cette surface.

Conservation de la charge

De façon analogue à la conservation de la masse en hydrodynamique vue précédemment, la charge doit aussi être conservée, car on ne peut créer spontanément de la charge. Ainsi, dans une région de volume \mathcal{V} bornée par une surface fermée \mathcal{S} , le taux de variation de la charge dans cette région doit être égal au courant total entrant dans cette surface. On utilisera plutôt le courant sortant qu'on dénotera I et ainsi on doit avoir

$$\frac{dq}{dt} = -I. \quad (6.30)$$

Si on utilise les expressions de la charge en terme de la densité de charge (eq. (6.17)) et du courant en terme de la densité de courant (eq. (6.29)) dans l'équation précédente, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho_q d\mathcal{V} = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (6.31)$$

En tant la dérivée temporelle sous l'intégrale dans le membre de gauche de l'équation précédente et en invoquant le théorème de la divergence pour le terme de droite, on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_q}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{J} d\mathcal{V}. \quad (6.32)$$

Cette dernière équation étant valide pour tout volume \mathcal{V} , les intégrands doivent être égaux, ce qui donne

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (6.33)$$

qui est appelée *équation de continuité de la charge* qui décrit de façon locale la conservation de la charge.

6.3.2 Électrostatique - force de Coulomb, champ électrique et théorème de Gauss

On va considérer dans ce qui suit des phénomènes impliquant des charges immobiles, soit le domaine de l'électrostatique. Dans ce cas, la densité de charge ne varie pas dans le temps $\partial \rho_q / \partial t = 0$ et il n'y a pas de courant ($\vec{J} = \vec{0}$). L'équation de continuité de la charge est donc trivialement satisfaite.

Force de Coulomb

Une première loi qui mène à une des équations de Maxwell est la loi de force de Coulomb qui indique que la force entre deux charges électriques ponctuelles q et q' est inversement proportionnelle à leur distance au carré et est selon la droite joignant les deux charges; il s'agit donc d'une force centrale⁷. De façon plus précise la force exercée par la charge q' sur la charge q est donnée par

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{||\vec{r} - \vec{r}'||^2} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||}, \quad (6.34)$$

où $\epsilon_0 = 8,854\,187\,82 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$ est la *permittivité du vide* (une constante fondamentale) et \vec{r} et \vec{r}' sont respectivement les positions des charges q et q' . Ici le vecteur $\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{||\vec{r} - \vec{r}'||}$ est un vecteur unitaire qui pointe de la charge q' vers la charge q . On peut réécrire l'éq. (6.34) comme

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q q' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}. \quad (6.35)$$

Pour obtenir la force exercée par la charge q sur la charge q' , on n'a qu'à intervertir les vecteurs \vec{r} et \vec{r}' et on a $\vec{F}_{q \rightarrow q'} = -\vec{F}_{q' \rightarrow q}$.

Champ électrique

On définit le champ électrique causé par la charge q' sur la charge q en \vec{r} par la relation

$$\vec{F}_{q' \rightarrow q} = q \vec{E}_{q'}(\vec{r}), \quad (6.36)$$

ce qui donne

$$\vec{E}_{q'}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}. \quad (6.37)$$

Principe de superposition

Lorsqu'il y a plusieurs charges, chacune des charges crée son propre champ indépendamment des autres et on a observé expérimentalement que le champ résultat est la somme vectorielle des champs de chacune des charges. Il s'agit du *principe de superposition*. Si maintenant on s'intéresse à une distribution de charge de densité volumique de charge $\rho_q(\vec{r}')$, alors le champ créé par un élément de charge $dq' = \rho_q(\vec{r}')dV'$ de cette distribution, où dV' est un élément de volume, est donné par

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rho_q(\vec{r}') dV' \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3}. \quad (6.38)$$

Le champ total en \vec{r} causé par la distribution de charge est obtenu en sommant les contributions de chacun des éléments de charge sur tout le volume \mathcal{V} de la distribution. Ceci mène à l'intégrale suivante pour le champ total :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho_q(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{||\vec{r} - \vec{r}'||^3} dV'. \quad (6.39)$$

⁷De façon analogue à la force gravitationnelle entre deux masses.

Étant donné le principe de superposition, la force subie par une charge électrique est la somme des forces exercées par tous les champs électriques formant le champ électrique total. Ainsi, la relation entre la force sur une charge électrique q et le champ électrique d'une autre charge ponctuelle donnée à l'éq. (6.36) se généralise à la forme suivante :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}, \quad (6.40)$$

où \vec{E} est le champ total et \vec{F}_e est appelée la force électrique sur une charge.

Théorème de Gauss

On va maintenant considérer une charge ponctuelle q' à l'intérieur d'une surface fermée \mathcal{S} englobant un volume \mathcal{V} tel qu'illustré à la figure 6.2. Pour simplifier les notations, on dénotera par \vec{R} le vecteur $\vec{r} - \vec{r}'$ reliant le point P' où la charge se trouve à P où un élément de surface se trouve et par \hat{R} le vecteur unitaire associé à \vec{R} , c.à.d. $\hat{R} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$. Avec ces notations, l'élément de flux du champ électrique à travers un élément de surface $d\vec{a}$ est donné par

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R} \cdot d\vec{a}}{R^2}, \quad (6.41)$$

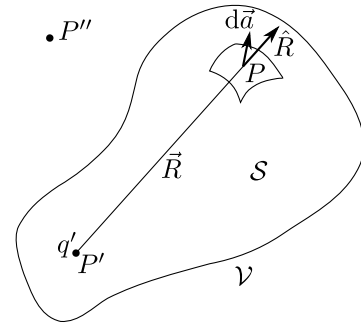


FIGURE 6.2

où $\hat{R} \cdot d\vec{a}/R^2$ est l'angle solide $d\Omega$ sous-tendu par l'élément de surface $d\vec{a}$ relativement au point P' . On a ainsi

$$\vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} d\Omega. \quad (6.42)$$

Pour obtenir le flux total sortant de la surface, on intègre sur la surface fermée, soit

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} d\Omega. \quad (6.43)$$

Comme le point P' est à l'intérieur de la surface, celle-ci sous-tend un angle solide de 4π stéradians, donc $\oint_{\mathcal{S}} d\Omega = 4\pi$, et alors

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q'}{\epsilon_0}. \quad (6.44)$$

Si le point P' avait plutôt été à l'extérieur de la surface, comme P'' tel qu'illustré sur la figure 6.2, alors l'angle solide sous-tendu par la surface aurait été nul. On arrive ainsi au *théorème de Gauss sous forme intégrale* qu'on formule comme suit :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0}, \quad (6.45)$$

où q_{in} est la charge à l'intérieur. Ceci est le théorème de Gauss pour une charge unique. Pour un ensemble discret de charges, il est manifeste que

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i, \quad (6.46)$$

où une somme est sur les charges à l'intérieur de la surface \mathcal{S} . On peut ainsi généraliser l'éq. (6.45) et l'écrire sous la forme

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{\text{in,tot}}}{\epsilon_0}, \quad (6.47)$$

où $q_{\text{in,tot}}$ est la charge totale à l'intérieur de la surface \mathcal{S} .

Si on a plutôt une distribution de charge, les champs de chacun des éléments de charge s'additionnent et le théorème de Gauss demeure valide; on a alors

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho_q(\vec{r}) d\upsilon, \quad (6.48)$$

où ρ_q est la densité de charge à l'intérieur de la surface. Cette dernière équation est une des lois fondamentales de l'électrostatique. On notera qu'elle découle de la nature de la force entre des charges : 1) qui dépend de l'inverse de leur distance au carré, 2) qui est centrale et 3) pour laquelle le principe de superposition s'applique.

En appliquant le théorème de la divergence au membre de gauche de l'éq. (6.48), on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\upsilon = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho_q d\upsilon. \quad (6.49)$$

Cette dernière équation devant être vraie pour tout volume \mathcal{V} , on arrive alors au *théorème de Gauss sous forme différentielle*:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (6.50)$$

qui est une des équations de Maxwell. On peut se servir de cette équation dans la résolution de problèmes pratiques d'électrostatique. Il est, toutefois, généralement plus simple de travailler avec des fonctions scalaires à partir desquelles on peut dériver des quantités vectorielles. C'est ce qu'on va faire plus bas en introduisant un potentiel scalaire pour le champ électrique.

Pour la résolution de problèmes pratiques, le théorème de Gauss sous forme intégrale telle que donnée à l'éq. (6.47) s'applique à des situations dont la géométrie est hautement symétrique. On peut notamment utiliser le théorème de Gauss pour retrouver la loi de Coulomb. Pour ce faire, on considère une charge ponctuelle q , qu'on positionnera à l'origine par simplicité, et on calcule le flux de champ électrique (intégrale de surface) généré par cette charge sur la surface d'une sphère de rayon r centrée sur la charge. Dû à la symétrie : 1) le champ électrique doit être radial, donc dirigé selon \hat{e}_r qui est aussi la normale à la surface de la sphère, et 2) le champ doit avoir une amplitude E qui est la même sur toute cette surface (donc constante sur cette surface). L'intégrale de surface est ainsi très facile à calculer, on a alors

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (6.51)$$

soit

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad (6.52)$$

qui est la loi de Coulomb en utilisant que $\vec{E} = E\hat{e}_r$. À partir de la loi de Coulomb, on a dérivé le théorème de Gauss et inversement on obtient la loi de Coulomb à l'aide du théorème de Gauss. Les deux sont donc équivalents.

Exercice de lecture 6.1. On considère un fil droit mince de longueur infinie uniformément chargé avec densité de charge linéaire λ . Par un argument de symétrie et en utilisant le théorème de Gauss sous forme intégrale, montrer que le champ autour du fil est radial et donné par

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{e}_\rho, \quad (6.53)$$

où ρ la coordonnée cylindrique radiale autour du fil. Indice, comme surface autour du fil, utiliser un petit cylindre centré sur le fil.

Potentiel électrostatique

Tel que vu en mécanique, une force qui dérive d'un potentiel est appelée force conservative et comporte de nombreux avantages. Le champ électrique étant la force par unité de charge, on peut définir la notion de *champ conservatif* et se demander si le champ électrique est conservatif. On a vu qu'une force conservative dérive d'une fonction potentielle. Transposant cela au cas du champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$, pour qu'il soit conservatif, il faut qu'il soit égal au gradient d'une fonction (dans le cas des forces on a introduit un signe négatif et on fera de même pour le champ), c.à.d. on doit trouver une fonction scalaire $V(\vec{r})$ telle que

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}). \quad (6.54)$$

Pour le champ engendré par une charge ponctuelle q' située en \vec{r}' donné à l'éq. (6.37), si on utilise des coordonnées sphériques centrées en \vec{r}' avec R comme coordonnée radiale ($R = \|\vec{r} - \vec{r}'\|$; comme on l'a fait pour le théorème de Gauss), on peut alors écrire le champ comme

$$\vec{E}_{q'}(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{e}_R. \quad (6.55)$$

En utilisant le gradient en coordonnées sphériques⁸, comme le champ n'a pas de composantes en \hat{e}_θ et \hat{e}_ϕ , et que

$$-\frac{1}{R^2} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right), \quad (6.56)$$

on a

$$\vec{E}_{q'}(\vec{r}) = -\hat{e}_R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \right). \quad (6.57)$$

Ainsi, on a trouvé un potentiel donné par

$$V(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \quad (6.58)$$

et donc *le champ électrique est conservatif*. On aurait pu directement arriver à ce résultat à partir de l'éq. (6.37), en remarquant qu'on a la relation suivante (équivalente à l'éq. (6.56), mais qui est peut-être moins évidente à voir à priori, d'où l'approche avec les coordonnées sphériques présentée précédemment) :

$$\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right). \quad (6.59)$$

⁸Rappel : Le gradient en coordonnées sphériques, avec R comme coordonnée radiale et θ et ϕ comme coordonnées angulaires, est donné par : $\nabla = \hat{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \hat{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$.

Ainsi, à partir de l'éq. (6.37), on peut directement écrire :

$$V(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}. \quad (6.60)$$

En présence de plusieurs charges, étant donné le principe de superposition pour les champs, on aura aussi un *principe de superposition pour le potentiel*, avec le potentiel créé par un ensemble de charges ponctuelles étant donné par la somme des potentiels pour chacune des charges.

Dans le cas d'une distribution de charges, à l'aide de la relation de l'éq. (6.59), on peut réécrire l'éq. (6.39) comme

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int_V \frac{\rho_q(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'. \quad (6.61)$$

où on a utilisé le fait qu'on peut sortir le gradient de l'intégrale étant donné que l'intégration est effectuée sur les variables primées. On a donc, dans le cas d'une distribution volumique de charges

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_q(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'. \quad (6.62)$$

Pour le champ électrique en électrostatique, la fonction potentielle $V(\vec{r})$ est appelée le *potentiel électrostatique* (ou plus généralement le *potentiel électrique*). À l'aide de l'éq. (6.54) qui définit le potentiel de façon générale, on a que la différence de potentiel entre deux points P et Q (aussi appelée tension électrique entre ces points) qui est mesurée en Volts (V), peut être écrite comme

$$V(Q) - V(P) = - \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (6.63)$$

où l'intégrale peut être effectuée le long de toute courbe \mathcal{C} allant du point P au point Q étant donné que le champ électrique est conservatif.

Comme le champ électrique est conservatif, on a que son rotationnel est nul en électrostatique :⁹

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (6.64)$$

En combinant le théorème de Gauss sous forme différentielle (eq. (6.50)) et le fait que le champ électrique dérive d'un potentiel (eq. (6.54)), on arrive à

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (6.65)$$

appelée *équation de Poisson de l'électrostatique*. On notera que la solution de cette équation est donnée par l'éq. (6.62). Noter que cette intégrale n'est calculable que pour des géométries simples. C'est généralement avec l'équation de Poisson qu'on résoud numériquement des problèmes d'électrostatiques, p. ex. à l'aide de la méthode des éléments finis, pour des géométries pour lesquelles les approches analytiques sont limitées. Dans des régions de l'espace où la densité de charge est nulle, l'équation de Poisson se réduit à

$$\nabla^2 V = 0, \quad (6.66)$$

appelée *équation de Laplace de l'électrostatique*.

⁹ Cela ne sera toutefois pas toujours vrai comme on le verra plus loin avec la loi de Faraday.

6.3.3 Magnétostatique - loi de Biot-Savart et champ magnétique

On va considérer dans ce qui suit des phénomènes impliquant des courants constants dans le temps menant à l'apparition de champs magnétiques constants dans le temps, soit le domaine de la magnétostatique. Dans ce cas, la densité de charge ne varie pas dans le temps tout comme en électrostatique ($\partial \rho_q / \partial t = 0$), mais il y a des courants non-nuls. Afin de satisfaire l'équation de continuité de la charge (éq. (6.33)), on doit donc avoir la condition suivante pour la densité de courant :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{magnétostatique}). \quad (6.67)$$

Découverte d'Ørsted

En 1820, Ørsted découvre que l'aiguille d'une boussole tourne lorsque celle-ci est à proximité d'un fil conducteur parcouru par un courant continu et que l'aiguille se positionne perpendiculairement au fil. Cette découverte est importante, car c'est la première fois qu'un lien est établi entre l'électricité et le magnétisme. De ses expériences, Ørsted constate les faits suivants pour le champ magnétique autour d'un long fil conducteur droit :

- les lignes du champ s'enroulent autour du fil;
- les lignes de champ se situent dans un plan perpendiculaire au fil;
- lorsque le sens du courant est inversé, la direction du champ s'inverse;
- l'intensité du champ est directement proportionnelle à l'amplitude du courant;
- l'intensité du champ le long du fil (considéré long) est en tout point inversement proportionnelle à la distance de ce point par rapport au fil.

Loi de Biot et Savart, travaux d'Ampère et induction magnétique

Suite à la découverte d'Ørsted, Biot et Savart, et peu après Ampère, ont réalisé une série d'expériences afin de mieux caractériser la nature des forces magnétiques générés par des courants parcourant des fils. Les expériences d'Ampère étaient particulièrement élaborées et minutieuses. Pour deux fils numérotés 1 et 2, Ampère arrive à l'expression suivante pour l'élément de force entre deux éléments de longueur vectoriels $d\vec{l}_1$ et $d\vec{l}_2$ de chacun des fils parcourus respectivement par des courants I_1 et I_2 (figure 6.3) :

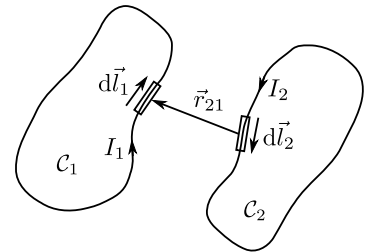


FIGURE 6.3

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21})}{\|\vec{r}_{21}\|^3}, \quad (6.68)$$

où $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$ est la **perméabilité du vide** (une constante fondamentale) et \vec{r}_{21} est la position de l'élément $d\vec{l}_1$ relativement à $d\vec{l}_2$ ($\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$). L'élément de force donné ici représente la force subie par l'élément de longueur $d\vec{l}_1$; il suffit d'inverser les indices 1 et 2 pour obtenir la force subie par l'élément $d\vec{l}_2$.¹⁰ On voit de l'éq. (6.68) que la force magnétique entre deux éléments de fils conducteurs

¹⁰Attention, on n'a pas nécessairement $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. Les forces sont toutefois égales et opposées lorsqu'on intègre sur deux circuits fermés.

parcours par des courants est inversement proportionnelle à leur distance au carré, de façon analogue à la force électrique et à la force gravitationnelle. Toutefois, la nature vectorielle de la force magnétique est passablement plus complexe avec un double produit vectoriel. Ampère n'a pas écrit son résultat sous la forme donnée à l'éq. (6.68), car la notation vectorielle n'existait pas à son époque, mais cette équation représente les résultats d'Ampère dans les notations qu'on utilise de nos jours. Il convient de remarquer que l'éq. (6.68) pourrait laisser entendre que l'équivalent magnétique d'une charge électrique q est la quantité $I d\vec{l}$. Cela est incorrect. L'éq. (6.68) n'a de sens que comme élément d'une somme sur une boucle de courant ou un circuit. Un élément de courant $I d\vec{l}$ n'a en soi aucun sens physiquement, car le courant arriverait de nulle part pour disparaître après avoir parcouru la longueur $d\vec{l}$! La force d'un circuit (ou boucle) de courant \mathcal{C}_2 sur un circuit de courant \mathcal{C}_1 est donnée par la double intégration de l'éq. (6.68) sur chacun des circuits, soit

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \oint_{\mathcal{C}_1} \oint_{\mathcal{C}_2} \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21})}{\|\vec{r}_{21}\|^3}. \quad (6.69)$$

On voit dans l'éq. (6.68) une quantité émanant de l'élément de fil 2 sur l'élément de fil 1 représenté par le produit $I_1 d\vec{l}_1$. Cette quantité est définie comme étant l'élément d'*induction magnétique* causé par un élément de fil $I_2 d\vec{l}_2$ en \vec{r}_2 à une position \vec{r}_{21} par rapport à cet élément, c.à.d. on définit

$$d\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21}}{\|\vec{r}_{21}\|^3}. \quad (6.70)$$

Cette équation est la *loi de Biot-Savart*. Avec cette équation, on peut écrire l'éq. (6.68) comme

$$d\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_{21}, \quad (6.71)$$

qui sera utile plus loin.

Pour uniformiser les notations, notamment avec ce qui a été fait pour le champ électrique, on peut reformuler cette loi comme suit : un élément de fil en \vec{r}' d'élément de longueur vectoriel $d\vec{l}'$ parcouru par un courant constant I engendre une induction magnétique donnée par

$$d\vec{B}_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}. \quad (6.72)$$

Ceci est la forme de la loi de Biot-Savart qu'on utilisera par la suite.

L'induction magnétique totale \vec{B} en un point \vec{r} générée par une boucle de courant \mathcal{C} parcourue par un courant constant I est donnée par intégration de l'expression précédente, soit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}. \quad (6.73)$$

L'induction magnétique \vec{B} est communément appelée plus simplement *champ magnétique*.

Un courant est généralement de façon plus réaliste une densité de courant dans un volume. On a

$$I d\vec{l} = \vec{j} \cdot d\vec{a} d\vec{l}. \quad (6.74)$$

Dans le cas où on s'intéresse au courant dans une section transverse d'un matériau, \vec{j} , $d\vec{a}$ et $d\vec{l}$ sont tous parallèles et on peut ainsi écrire

$$I d\vec{l} = \vec{j} da dl. \quad (6.75)$$

Or, $da\,dl$ est un élément de volume $d\nu$ et on a finalement

$$I\,d\vec{l} = \vec{J}\,d\nu. \quad (6.76)$$

En utilisant cette dernière équation dans l'éq. (6.72), on arrive à l'expression suivante pour un élément de champ magnétique produit par une densité de courant dans un élément de volume :

$$d\vec{B}_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\nu'. \quad (6.77)$$

Le champ total est obtenu dans ce cas en intégrant sur le volume dans lequel il y a la densité de courant, soit

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\nu'. \quad (6.78)$$

Cette expression pour le champ magnétique est l'analogue de l'éq. (6.39) pour le champ électrique. Les deux équations ont des formes similaires, mis à part que celle pour le champ magnétique fait intervenir un produit vectoriel.

On va maintenant appliquer la loi de Biot-Savart obtenue à l'éq. (6.72) au cas d'un long fil droit de longueur infinie parcouru par un courant I . On considère le fil orienté selon l'axe z et on désire obtenir le champ \vec{B} en un point \vec{r} arbitraire tel qu'illustré à la figure 6.4. On utilise des coordonnées cylindriques ρ , ϕ et z pour le point \vec{r} , alors donné par $\vec{r} = \rho \cos\phi \hat{e}_x + \rho \sin\phi \hat{e}_y + z \hat{e}_z$, et on considère un élément de fil en $\vec{r}' = z' \hat{e}_z$ d'élément de longueur $d\vec{l}' = dz' \hat{e}_z$. En insérant cela dans la loi de Biot-Savart, on obtient

$$d\vec{B}_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\rho (-\sin\phi \hat{e}_x + \cos\phi \hat{e}_y)}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'. \quad (6.79)$$

Pour obtenir le champ total, on doit intégrer pour z' allant de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui donne finalement

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\rho, \phi, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (-\sin\phi \hat{e}_x + \cos\phi \hat{e}_y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{e}_\phi. \quad (6.80)$$

Avec cette forme pour \vec{B} , on retrouve tous les faits observés par Ørsted. Notamment, on voit que le champ magnétique autour d'un long fil varie comme l'inverse de la distance au fil (même si pour un élément de fil, l'élément de champ engendré par cet élément de fil lui varie comme l'inverse de la distance au carré tel que spécifié par la loi de Biot-Savart).

Exercice de lecture 6.2. Donner le détail de tous les calculs pour arriver au résultat donné à l'éq. (6.80).

Divergence du champ magnétique

En utilisant la relation donnée à l'éq. (6.59) et l'identité vectorielle $\nabla \times (f\vec{W}) = (\nabla f) \times \vec{W} + f\nabla \times \vec{W}$, on peut écrire l'expression pour le champ magnétique obtenue à l'éq. (6.78) comme (ici $\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = \vec{0}$, car $\vec{J}(\vec{r}')$ dépend des coordonnées primées)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\nu'. \quad (6.81)$$

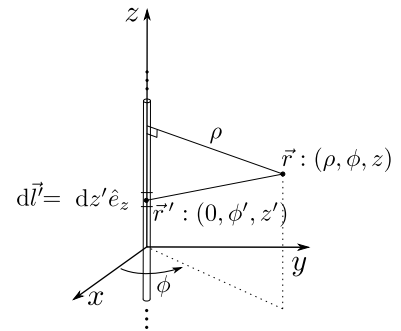


FIGURE 6.4

Du fait que le champ magnétique puisse être écrit comme le rotationnel d'un autre vecteur, il vient immédiatement que sa divergence est nulle, soit

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.82)$$

Ceci est la première équation différentielle de la magnétostatique qui correspond à l'équation $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ de l'électrostatique.

Le fait que la divergence de \vec{B} soit nulle traduit le fait observé expérimentalement que les lignes de champ magnétique se referment toujours sur elles-mêmes. Ainsi, le flux de champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. Cela est équivalent à ce qu'il n'existe pas de monopôles (ou charges) magnétiques, car si de tels monopôles existaient, on aurait une situation analogue au champ électrique pour lequel on a toujours que les lignes de champs émanent des charges électriques ou se terminent sur les charges électriques.¹¹

Rotationnel du champ magnétique en magnétostatique et théorème d'Ampère

On va maintenant calculer le rotationnel du champ magnétique en partant de son expression donnée à l'éq. (6.81). On a

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\nabla \times \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\nu' \right). \quad (6.83)$$

On utilise l'identité vectorielle pour le rotationnel d'un rotationnel, soit : $\nabla \times (\nabla \times \vec{W}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{W}) - \nabla^2 \vec{W}$. Avec cela, on a

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\nu' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{J}(\vec{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\nu', \quad (6.84)$$

où pour la première intégrale, on a utilisé $\nabla \cdot \left(\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$ étant donné que $\vec{J}(\vec{r}')$ ne dépend que des coordonnées primées. On utilise à ce stade les deux identités suivantes :

$$\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \quad (6.85)$$

et

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (6.86)$$

où δ est la fonction delta de Dirac. Avec ces identités, l'éq. (6.84) peut être écrite comme

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) d\nu' + \mu_0 \vec{J}(\vec{r}). \quad (6.87)$$

Une intégration par parties et l'utilisation du théorème de la divergence sur tout l'espace (l'intégrale de surface sera alors à l'infini, où \vec{J} est supposé nul) donne

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\nu'. \quad (6.88)$$

¹¹Dirac a travaillé sur une description théorique des monopôles magnétiques, mais on n'en a jamais observé. Si de tels monopôles existaient, les équations de Maxwell, qui seront vues plus loin, seraient parfaitement symétriques, ce qui leur conférerait encore plus d'élégance. C'est sur la base de cette élégance que Dirac s'est initialement intéressé aux monopôles magnétiques.

Or, pour la magnétostatique, on a $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ (éq. (6.67)), d'où finalement

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.89)$$

Ceci est la seconde équation de la magnétostatique qui correspond à l'équation $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_q / \epsilon_0$ de l'électrostatique.

On peut obtenir un équivalent intégral à l'éq. (6.89) en intégrant cette équation sur une surface ouverte \mathcal{S} bornée par une courbe \mathcal{C} (figure 6.5)

On a alors

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{a}. \quad (6.90)$$

Or, le membre de droite est le courant total I à travers la surface (de façon équivalente qui passe à travers la courbe \mathcal{C}) et le membre de gauche peut être transformé en une intégrale curviligne le long de la courbe \mathcal{C} . On arrive ainsi au *théorème de circulation d'Ampère* donné par

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (6.91)$$

où I est le courant à travers la courbe \mathcal{C} . Le théorème de circulation d'Ampère sous forme intégrale est équivalent à l'éq. (6.89) qu'on appellera théorème de circulation d'Ampère sous forme différentielle.

Le théorème de circulation d'Ampère est l'analogue pour la magnétostatique du théorème de Gauss pour l'électrostatique. Tout comme le théorème de Gauss, le théorème d'Ampère peut être utilisée pour trouver l'expression de champs magnétiques dans des situations dont la géométrie est hautement symétrique. Un exemple est le cas du fil droit infini parcouru par un courant I . Dans ce cas, afin que les lignes de champ magnétique doivent se refermer sur elles-mêmes, et du fait de la grande symétrie, la seule possibilité est que les lignes de champ décrivent des cercles autour du fil et sur ces lignes la grandeur B du champ magnétique est constante. En prenant un cercle de rayon ρ autour du fil et en appliquant le théorème d'Ampère, on obtient $B \cdot 2\pi\rho = \mu_0 I$, soit

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu à l'éq. (6.80) avec la loi de Biot-Savart et qui avait permis de retrouver les observations d'Ørsted. Ici, le résultat a été obtenu beaucoup plus aisément.

Exercice de lecture 6.3. Donner le détail du développement partant de l'éq. (6.84) et menant à l'éq. (6.88).

Potentiel vecteur et transformations de jauge

On a vu à l'éq. (6.81) que le champ magnétique peut être écrit comme le rotationnel d'une autre quantité. Cette quantité est appelée le *potentiel vecteur* dénoté \vec{A} . Ainsi, l'éq. (6.81) peut être écrite comme

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (6.92)$$

avec

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dv'. \quad (6.93)$$

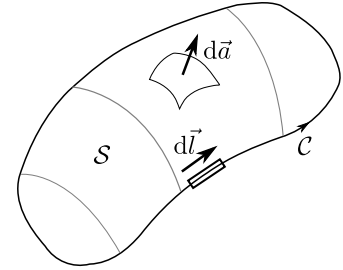


FIGURE 6.5

Noter qu'on aurait pu arriver directement à l'éq. (6.92) en invoquant un théorème de l'analyse vectorielle qui stipule que si la divergence d'un champ de vecteurs est nul (ici $\nabla \cdot \vec{B} = 0$), alors ce champ peut être écrit comme le rotationnel d'un autre champ de vecteurs (soit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$).

Noter que si on ajoute le gradient d'une fonction quelconque au potentiel vecteur \vec{A} , c.à.d. si on définit un nouveau potentiel vecteur \vec{A}' par

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad (6.94)$$

alors comme le rotationnel d'un gradient est nul, ces deux potentiels vecteurs donneront lieu au même champ magnétique. Un changement de potentiel vecteur tel qu'indiqué à l'éq. (6.94) est appelé une *transformation de jauge*. La liberté de transformation de jauge permet de choisir $\nabla \cdot \vec{A}$ comme on le désire (on ne démontrera pas ça ici, bien que ça ne soit pas difficile).

L'éq. (6.93) est analogue à l'éq. (6.62) pour le potentiel électrostatique. En fait, de par sa nature vectorielle, l'éq. (6.93) correspond à trois équations du type de l'éq. (6.62). Comme l'expression du potentiel électrostatique donnée à l'éq. (6.62) est solution de l'équation de Poisson, chacune des composantes du potentiel vecteur satisfait une équation de Poisson; on a en fait

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (6.95)$$

Cette équation peut aussi être obtenue plus directement à partir de l'équation $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ (eq. (6.89)) en y remplaçant \vec{B} par $\nabla \times \vec{A}$. On a alors $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}$. On utilise ensuite l'identité pour le rotationnel du rotationnel et on arrive alors à

$$-\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = \mu_0 \vec{J}. \quad (6.96)$$

Si on exploite la liberté de jauge en choisissant une jauge telle que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$,¹² on retrouve alors l'éq. (6.95).

Pour fins de référence, dans le cas d'un circuit \mathcal{C} fait d'un fil mince parcouru par un courant I , l'éq. (6.93) prend la forme

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.97)$$

Cette forme sera utilisée au chapitre (12) et mènera au moment magnétique.

Noter que le potentiel vecteur est généralement plus facile à calculer que le champ magnétique, car l'intégrale dans l'éq. (6.93) est manifestement plus simple que celle dans l'éq. (6.78). Une fois qu'on a obtenu le potentiel vecteur, il suffit de calculer son rotationnel pour obtenir le champ magnétique, ce qui est un simple exercice de dérivation. La situation est en quelque sorte analogue au champ électrique pour lequel il est plus simple d'obtenir le potentiel électrique et ensuite de calculer le gradient du potentiel pour obtenir le champ.

Force magnétique

Si on revient à l'éq. (6.71) et qu'on suppose qu'on a fait l'intégration sur le fil 2, on a alors que la force exercée sur un élément de fil 1 est donnée par

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}, \quad (6.98)$$

¹²Cette jauge est appelée jauge de Coulomb.

où on a laissé tomber les indices, comprenant que \vec{B} est le champ auquel est assujéti l'élément de fil 1. De façon analogue à ce qui a été fait précédemment, dans le fil 1, on a $I d\vec{l} = \vec{J} dv$ et comme $\vec{J} = \rho_q \vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse de la distribution de charge, il vient

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \rho_q \vec{v} dv \times \vec{B} \\ &= (\rho_q dv) \vec{v} \times \vec{B}. \end{aligned} \quad (6.99)$$

Ainsi, on voit qu'un élément de charge $dq = \rho_q dv$ subit une force

$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B}. \quad (6.100)$$

De là, on déduit qu'une charge ponctuelle q se déplaçant à une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique \vec{B} subit une force magnétique donnée par

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (6.101)$$

Cette expression pour la force magnétique¹³ peut être considérée comme étant plus fondamentale que l'expression de la force sur un élément de fil, car plus générale. De l'équation pour la force magnétique, on peut retrouver l'expression pour la force sur un élément de fil, mais on peut aussi l'appliquer à d'autres situations, alors que l'expression pour la force sur un élément de fil ne s'applique qu'à un élément de fil! Ceci dit, c'est quand même cette dernière qui a permis d'arriver à l'expression pour la force magnétique, les deux peuvent donc d'une certaine façon être considérées équivalentes.

Exercice de lecture 6.4. Charge ponctuelle dans un champ magnétique.

- (a) Montrer que la vitesse d'une charge ponctuelle q assujéti à un champ magnétique \vec{B} obéit l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{v} \times \vec{B}. \quad (6.102)$$

- (b) On considère le cas d'un champ magnétique constant qu'on prendra orienté selon z et donné par $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$, avec B_0 une constante. Montrer que dans ce cas la charge suit une trajectoire en spirale autour de l'axe z et que la fréquence angulaire de rotation autour de l'axe z est donnée par $\omega_0 = qB_0/m$. Indice : La résolution de l'équation pour la composante z de la vitesse est très facile. Pour les composantes v_x et v_y de la vitesse, former la variable complexe $\tilde{v}_{xy} = v_x + i v_y$ pour laquelle l'équation différentielle est simple à résoudre.

Force de Lorentz

Une particule plongée dans une région de l'espace où il y a à la fois un champ électrique et un champ magnétique subira les forces de ces deux champs données aux éqs. (6.40) et (6.101) qui s'additionnent pour donner lieu à une force totale donnée par

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (6.103)$$

appelée *force de Lorentz*. Cette force établit le lien entre champs électromagnétiques et charges en langage mécanique. Noter que la force de Lorentz est invariante sous transformations de Lorentz et qu'elle peut être déduite d'une description lagrangienne de l'électromagnétisme.

¹³La force magnétique est parfois appelée force de Laplace, mais plus précisément la *force de Laplace* est la force macroscopique résultant de l'addition de forces magnétiques qui s'exercent sur un fil conducteur parcouru par un courant électrique dans un champ magnétique.

6.3.4 Loi d'induction de Faraday

Comme il a été vu, Ørsted a fait la découverte importante que tout courant électrique engendre un champ magnétique. Faraday s'est posé la question inverse, à savoir si tout champ magnétique pouvait induire un courant. Pour élucider cette question, Faraday a utilisé un circuit fermé, sur lequel il avait installé un galvanomètre, et à travers duquel il faisait passer un champ magnétique issu d'un autre circuit voisin dans lequel il faisait passer un courant à l'aide d'une pile de Volta, figure 6.6. Après maintes tentatives vaines pour déceler une déviation de l'aiguille du galvanomètre, ce qui aurait signifié la présence d'un courant, il finit par découvrir que c'était lorsqu'il fermait et ouvrait l'interrupteur du circuit générateur de champ magnétique que l'aiguille du galvanomètre déviait. Il apparaissait donc alors un courant transitoire induit dans le circuit du galvanomètre. Après les efforts de Faraday pour quantifier cet effet, on peut formuler sa loi d'induction de la façon suivante :¹⁴

La force électromotrice (f.é.m.) autour d'un circuit fermé est égale à l'inverse du taux de variation dans le temps du flux magnétique englobé par le circuit.

Par force électromotrice, on entend ici un potentiel qui fait déplacer les charges dans le circuit. Les expériences de Faraday effectuées en 1831 pour découvrir la loi d'induction ont été les premières observations reliant des champs électriques et magnétiques dépendant du temps. Jusqu'alors, les expériences étaient du domaine de l'électrostatique ou de la magnétostatique. L'effet découvert par Faraday est dynamique.

En termes mathématiques, la loi de Faraday peut être formulée comme :

$$V_{f.é.m.} = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (6.104)$$

Ici, $V_{f.é.m.}$ est la tension électromotrice autour du circuit, tension qui a les unités d'un potentiel électrique, et qui est donnée par

$$V_{f.é.m.} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (6.105)$$

et Φ_m est le flux magnétique donné par

$$\Phi_m = \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{a}. \quad (6.106)$$

On peut ainsi écrire l'éq. (6.104) sous une forme mathématique plus quantitative comme

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{a}, \quad (6.107)$$

qui est la *loi d'induction de Faraday sous forme intégrale*. À l'aide du théorème de Stokes, on peut transformer l'intégrale curviligne du membre de gauche en une intégrale de surface et pour le membre de droite, on peut entrer la dérivée temporelle sous le signe d'intégration, la dérivée devenant alors une dérivée partielle. On arrive ainsi à l'équation suivante :

$$\oint_{\mathcal{C}} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{S}} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}. \quad (6.108)$$

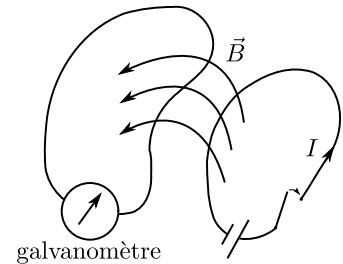


FIGURE 6.6

¹⁴Il ne s'agit pas de la formulation de Faraday, mais elle en traduit l'esprit.

Cette relation devant être valide pour toute surface \mathcal{S} , on doit donc avoir

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.109)$$

qui est la *loi d'induction de Faraday sous forme différentielle*. Cette loi a des applications pratiques forts importantes ayant une grande incidence sur la vie moderne. Elle est au coeur de la production d'électricité à l'aide de turbines ou la réalisation de moteurs électriques.

Sous sa forme différentielle, on voit que la loi d'induction de Faraday modifie l'équation pour le rotationnel de \vec{E} de l'électrostatique (ce rotationnel étant nul en électrostatique, éq. (6.64)), car la dérivée temporelle du champ magnétique vient s'ajouter. Évidemment, en magnétostatique, il n'y avait pas de dérivée temporelle du champ magnétique, car il est constant dans le temps dans ce contexte.

6.3.5 Synthèse des équations obtenues

À ce stade, on a obtenu les 4 équations suivantes :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \quad (\text{Théorème de Gauss}) \quad (6.110)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Lignes de champ magnétique se referment sur elles-mêmes}) \quad (6.111)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (\text{Loi d'induction de Faraday}) \quad (6.112)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (\text{Théorème de circulation d'Ampère}) \quad (6.113)$$

On peut ajouter à ces équations, l'équation de continuité de la charge

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.114)$$

et la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.115)$$

On constate que les éqs. (6.110) et (6.113) ne sont pas compatibles avec l'équation de continuité de la charge. C'est Maxwell qui a le premier fait cette constatation cruciale. La raison en est simple : les éqs. (6.110) et (6.113) ont été obtenues pour des situations statiques. On peut donc se douter qu'il manque quelque chose à ces équations. Maxwell a le premier trouvé le terme manquant à ces équations. En fait, si on ajoute au membre de droite de l'éq. (6.113) le terme $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, on aura alors

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (6.116)$$

Si on prend maintenant la divergence de cette équation, on arrive alors à (div rot = 0)

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E}) = 0. \quad (6.117)$$

En insérant le théorème de Gauss dans cette équation, on arrive à l'équation de continuité de la charge. L'éq. (6.116) qu'on écrira plutôt sous la forme suivante, afin de mettre les champs à gauche de l'égalité :

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}. \quad (6.118)$$

est le *théorème d'Ampère sous forme différentielle avec correction de Maxwell*.

Une autre façon d'arriver à l'éq. (6.118) est de revenir à l'éq. (6.88). Pour passer à l'étape qui suivait cette équation, on a fait l'hypothèse de la magnétostatique, à savoir $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Or, si on n'avait pas fait cette hypothèse et qu'on avait plutôt utilisé l'équation de continuité (eq. (6.33)), on aurait alors pu remplacer $\nabla' \cdot \vec{J}(\vec{r}', t)$ par $-\partial \rho_q(\vec{r}', t) / \partial t$ dans l'éq. (6.88). On aurait alors obtenu directement l'éq. (6.118).

Exercice de lecture 6.5. Faire les développements mathématiques détaillés de ce qui est décrit dans le paragraphe précédent.