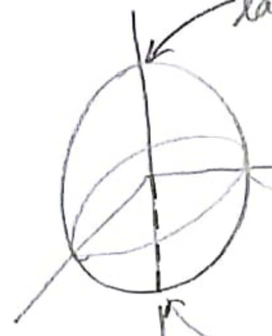
Procedural 2, #1

$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$

a) La densité surfacique est en coordonnées sphérique



On voit donc qu'il y aura de la charge positive au pôle nord et négative au pôle sud, et ici la charge est distribuée sur la surface de la sphère. Ça ressemble à un dipôle.

b) Moment dipolaire : On a une intégrale sur une surface

$$\vec{p} = \int_{\text{Sphère}} \sigma \vec{r}\, dS$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos\theta \cdot a(\underbrace{\sin\theta\cos\phi}_{\text{composante } x}, \underbrace{\sin\theta\sin\phi}_{y}, \underbrace{\cos\theta}_{z})\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

Les composantes x et y seront nulles après intégration car $\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = 0$ (on pourrait aussi le voir par symétrie.

On a donc $\vec{p} = a^3\sigma_0 \cdot 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, \hat{e}_z = 2\pi a^3 \sigma_0 \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \hat{e}_z$

$$\vec{p} = \frac{4}{3}\pi a^3 \sigma_0\, \hat{e}_z$$

c) Oui ça a du sens car on a de la charge positive en haut de la sphère et négative en bas, ce qui donne un moment dipolaire.

Procedural 2 # 2

a) Pour ρ, on a la relation $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Pour V, on a la relation $\vec{E} = -\nabla V$

b) On utilise l'identité

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = \nabla f \cdot \vec{A} + f \nabla \cdot \vec{A}$$

avec ici $f = V$ et $\vec{A} = \nabla V$

Donc $\nabla \cdot (V \nabla V) = \nabla V \cdot \nabla V + V \nabla \cdot \nabla V$

$$= \nabla V \cdot \nabla V + V \nabla^2 V$$

c) De a) $\nabla V = -\vec{E} \Rightarrow \nabla V \cdot \nabla V = (-\vec{E}) \cdot (-\vec{E})$

$$= \vec{E} \cdot \vec{E}$$

$$= \|\vec{E}\|^2 = E^2$$

et $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\Leftrightarrow \nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (V \nabla V) = E^2 - \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \rho V = \varepsilon_0 E^2 - \varepsilon_0 \nabla \cdot (V \nabla V)$$

d) $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho V \, d\tau = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \varepsilon_0 E^2 \, d\tau - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \nabla V) \, d\tau$

On peut prendre un volume d'intégration infini et la dernière intégrale, on la transforme en intégrale de surface par le théorème de la divergence

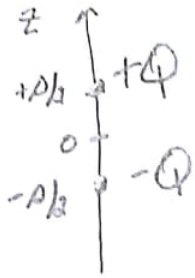
$$\Rightarrow \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (V \nabla V) \, d\tau = \int_{\mathcal{S}} V \nabla V \cdot d\vec{A}$$

→ p. suivante

Si le volume va jusqu'à l'infini, ce qui englobera toute la charge alors la surface S bornant le volume sera à l'infini et à l'infini, $V \rightarrow 0$. Donc l'intégrale de surface est nulle et on a donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \rho V \, dv = \int_{\substack{\text{tout} \\ \text{l'espace}}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dv$$

Procedural 2, #3 - Energie potentielle d'un dipôle électrique



Il faut utiliser l'éq. (6.7) du livre

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

Ici $Q_1 = Q$ et V_1 est le potentiel de la charge $Q_2 = -Q$ à la position de la charge Q_1 et inversement.

$$V_1 = V_{Q_2}(Q_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-Q)}{d}$$

$$V_2 = V_{Q_1}(Q_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{d}$$

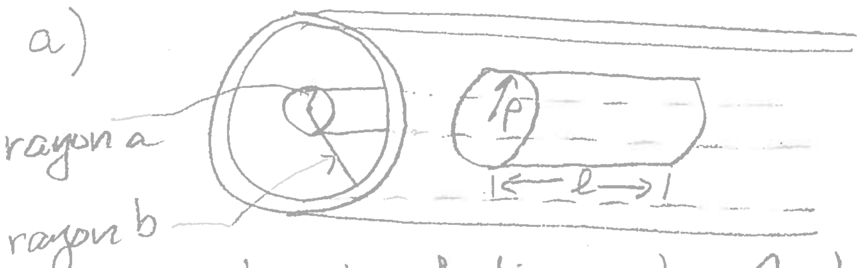
$$\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 + Q_2 V_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q \cdot \frac{(-Q)}{4\pi\varepsilon_0 d} + (-Q) \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}}$$ l'énergie est négative

Procédural 2 #4 (a), b) et c) sont basés sur l'exercice 6.4 de Corson-Lorrain et d) a été ajouté car utile pour l'APP sur le transport d'énergie électrique.

a)



On cherche le lien entre λ et V. Pour commencer, on trouvera d'abord le champ électrique pour ensuite déterminer la tension.
On trouve le champ électrique entre les deux conducteurs à l'aide du théorème de Gauss (on a fait cet exercice au procédural 1 (#4a), on le refait rapidement ici).
Pour ce faire, on utilise un petit cylindre de longueur l et de rayon $\rho \in [a, b]$ et on suppose qu'il y a une densité linéaire de charge λ sur le conducteur interne, alors

$$E \cdot 2\pi\rho \cdot l = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

Le potentiel entre la surface extérieure du conducteur intérieur et la surface intérieure du conducteur extérieur est donnée par (on a fait cet exercice au #4b) du procédural 1):

$$V = -\int_{\rho=a}^{b} E(\rho)\, d\rho = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Donc la charge par unité de longueur en fonction de la tension est donnée par $\lambda = -\frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln(b/a)}$.

2

b) On utilise $C = Q/V$

Pour un élément de longueur l de câble, on a une charge $Q = \lambda l$

On a trouvé $V = V_b - V_a$ en a), ici on veut $V_a - V_b = -V$ car sur une capa on définit la tension comme le potentiel de l'électrode avec $+\lambda$ par rapport à l'autre

$$C = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(b/a)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}$$

Donc, la capacité par unité de longueur est

$$c = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(b/a)}$$

c) L'énergie dans une portion de longueur l du câble coax. est

$$\mathcal{E}_e = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} dv = \int_{\rho=a}^{b} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{l} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 \rho^2} \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$= \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^{l} dz$$

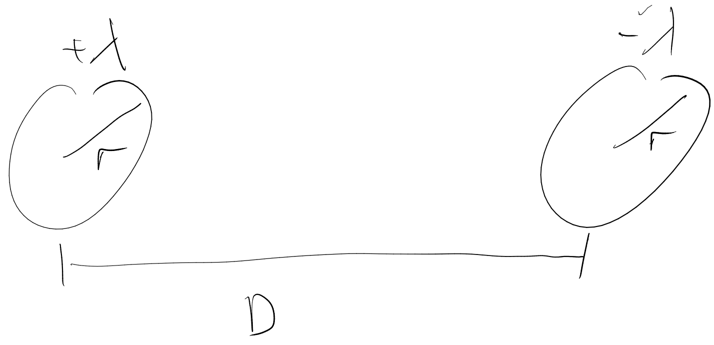
$$= \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0} \ln(b/a) \cdot 2\pi \cdot l = \frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Or selon a) $\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 V}{\ln(b/a)}$, d'où

$$\mathcal{E}_e = \frac{4\pi^2\varepsilon_0^2 V^2}{(\ln(b/a))^2} \cdot \frac{l}{4\pi\varepsilon_0} \ln(b/a) = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln(b/a)} \cdot l$$

$\Rightarrow$ énergie par unité de longueur $\frac{\mathcal{E}_e}{l} = \frac{\pi\varepsilon_0 V^2}{\ln(b/a)}$

d)



Nous avons vu en a que la différence de potentiel entre la surface d'un conducteur cylindrique de rayon r et un point de distance a est

$$V(a) - V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{a}{r}$$

Le conducteur avec charge $+\lambda$ crée une différence de potentiel

$$V^- - V^+ = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{r}$$

Le conducteur de charge $-\lambda$ crée une différence

$$V^+ - V^- = \frac{-(-\lambda)}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{r}$$

Les deux potentiels s'additionnent (principe de superposition et nous obtenons

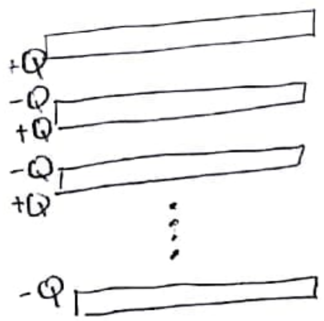
$$V^+ - V^- = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{r}$$

La capacité par unité de longueur est

$$C' = \frac{\lambda}{V^+ - V^-} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 \ln\frac{D}{r}}$$

Procédural 2 #5

#6.8 dans Corson-Lorrain



Il y a N plaques donc $N-1$ condensateurs. Ces condensateurs sont <u>en série</u>.

Chaque condensateur a une capacité

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{t}$$

La capacité résultante est

$$\frac{1}{C_{eq}} = \underbrace{\frac{1}{C} + \dots + \frac{1}{C}}_{N-1 \text{ fois}} = \frac{N-1}{C} = \frac{(N-1)t}{\varepsilon_0 A}$$

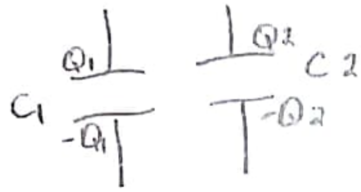
$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A}{(N-1)t}$$

Il y a une erreur dans l'énoncé, car ils disent que $C = \frac{\varepsilon_0 (N-1) A}{t}$

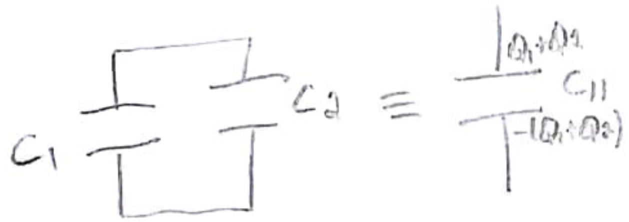
Procédural 2 #6

a) Avant on a des condensateurs séparés
C_1 porte une charge Q_1 et C_2 une charge Q_2
L'énergie totale sur les 2 condensateurs est

$$E_{tot\,avant} = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2}$$



b) On les connecte en //.



La charge totale reste la même soit
$Q_{tot} = Q_1 + Q_2$. La capacité équivalente est $C_{11} = C_1 + C_2$

Alors on a $Q_{tot} = C_{11} V$

$$= Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) V$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

L'énergie totale est

$$E_{tot\,après} = \frac{Q_{tot}^2}{2C_{11}} = \frac{(Q_1+Q_2)^2}{2(C_1+C_2)}$$

$$= \frac{Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2}{2(C_1+C_2)}$$

$$= \frac{Q_1^2}{2(C_1+C_2)} + \frac{Q_2^2}{2(C_1+C_2)} + \frac{Q_1Q_2}{C_1+C_2}$$

c) $\Delta E = E_{tot,après} - E_{tot,avant} = \frac{Q_1^2}{2(C_1+C_2)} - \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2(C_1+C_2)} - \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_1Q_2}{C_1+C_2}$

$$= \frac{Q_1^2}{2}\frac{(\cancel{C_1 - C_1} - C_2)}{C_1(C_1+C_2)} + \frac{Q_2^2}{2}\frac{(-C_1)}{C_2(C_2+C_1)} + \frac{Q_1Q_2}{C_1+C_2}$$

$\rightarrow$

$$\Delta E = -\frac{C_2 Q_1^2}{2C_1(C_1+C_2)} - \frac{C_1 Q_2^2}{2C_2(C_1+C_2)} + \frac{Q_1 Q_2}{C_1+C_2}$$

$$= \frac{1}{C_1+C_2}\left[-\frac{C_2}{2C_1}Q_1^2 - \frac{C_1}{2C_2}Q_2^2 + Q_1Q_2\right]$$

$$= \frac{1}{C_1+C_2}\left[\frac{-C_2^2Q_1^2 - C_1^2Q_2^2 + 2C_1C_2Q_1Q_2}{2C_1C_2}\right]$$

$$= \frac{-1}{2C_1C_2(C_1+C_2)}\left[(C_2Q_1)^2 - 2C_2Q_1C_1Q_2 + (C_1Q_2)^2\right]$$

$$= \frac{-1}{2C_1C_2(C_1+C_2)} \cdot (C_2Q_1 - C_1Q_2)^2$$

Donc ΔE est bien négatif.

d) Les charges doivent circuler un certain laps de temps après qu'on ait branchés ensemble les condensateurs et donc il y a un travail fait sur les charges. On ne peut pas dire ici que l'énergie est perdue par effet Joule dans les conducteurs qui servent à connecter les condensateurs, car ces conducteurs pourraient être supraconducteurs et il n'y aurait pas d'effet Joule et on aurait le même résultat.

En fait, les charges lorsque les 2 condensateurs sont connectés, il y a du travail fait sur les charges pour les déplacer. Il y aura donc accélération de charges jusqu'à ce qu'un nouvel équilibre soit établi et que les charges atteignent une nouvelle distribution; l'énergie "perdue" calculée en c) sera convertie en rayonnement dans le cas où on a des circuits parfaits (supraconducteurs).

23 avril 2020 22:53

e) On débranche les condensateurs, quelles seront les charges Q_1' et Q_2' sur les condensateurs C_1 et C_2 et comment se comparent ses charges aux charges initiales Q_1 et Q_2? Aussi, quelle sera l'énergie totale dans les deux condensateurs?

La tension avant qu'on débranche les condensateurs est donnée par $Q_{tot} = C_{11} V$

$$\Leftrightarrow V = \frac{Q_{tot}}{C_{11}} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

Il est difficile de dire si Q_1' sera > ou < que Q_1, car ça dépend de Q_1, C_1, Q_2 & V_2. Il en sera de même pour Q_2' et Q_2.

Quand on débranche les condensateurs, chacun aura cette tension V, et alors les charges seront données par

$$Q_1' = C_1 V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (Q_1 + Q_2)$$

et

$$Q_2' = C_2 V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (Q_1 + Q_2)$$

comparaison de Q_1' à Q_1

$$Q_1' - Q_1 = \frac{\cancel{C_1 Q_1} + C_1 Q_2}{C_1 + C_2} - \frac{(\cancel{C_1 Q_1} + C_2 Q_1)}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 Q_2 - C_2 Q_1}{C_1 + C_2}$$

Note: On voit que la charge totale après est la même que la charge totale avant, car $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$, comme il se doit.

Les énergies dans les condensateurs sont alors :

$$\mathcal{E}_1' = \frac{Q_1'^2}{2C_1} = \frac{C_1 (Q_1 + Q_2)^2}{2 (C_1 + C_2)^2}$$

$$\mathcal{E}_2' = \frac{C_2 (Q_1 + Q_2)^2}{2 (C_1 + C_2)^2}$$

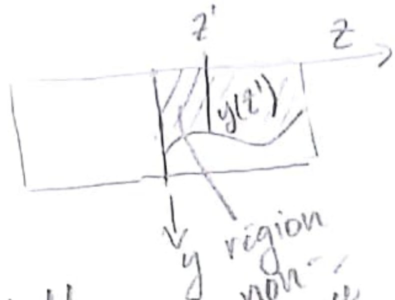
L'énergie totale est alors

$$\mathcal{E}_{tot}' = \mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_2' = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2 (C_1 + C_2)}$$

(elle n'est pas changée, ce qui est normal, car en débranchant les condensateurs il n'y a pas de déplacement de charges.

Procédural 2 #7

#7.10 dans Corson-Lorrain



On a $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{1}{t} \int_0^z y(z')\,dz'$

a) On veut $C(z) = 10^{-9} z$

On cherche une fonction $y(z)$ telle que son intégrale donne une fonction linéaire de z. On voit que si $y(z)$ est constante, alors son intégrale aura la forme désirée.

Donc $y(z') = K$

$$\Rightarrow C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{1}{t} \int_0^z K\,dz' = 10^{-9} z$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{1}{t} K z' \Big|_0^z = 10^{-9} z$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{t} K z = 10^{-9} z$$

$$\Rightarrow K = \frac{10^{-9} t}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{y(z) = \frac{10^{-9} t}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}$$

b) On va prendre $y(z) = Rz \Rightarrow \int_0^z R z'\,dz' = \frac{R z^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{t} \frac{R z^2}{2} = 10^{-8} z^2 \Rightarrow R = \frac{2t \cdot 10^{-8}}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(z) = \frac{2t \cdot 10^{-8}}{\varepsilon_r \varepsilon_0} z}$$

Cet exercice est essentiellement un exercice d'intégration