Procédural 3 #1

a) La période de rotation, soit le temps pris pour faire un tour est donné par

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

La fréquence est

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{v}{r}$$

b) Le courant étant la quantité de charge passant par un point en une seconde, on a qu'il faut T secondes à la charge pour faire un tour donc, en 1 seconde elle fait $\frac{1}{T}$ tours, donc elle passe $f = \frac{1}{T}$ fois par seconde par un point sur le cercle. Ainsi

$$I = \frac{q}{T} = qf = \frac{q\omega}{2\pi} = \frac{qv}{2\pi r},$$

ce sont toutes des expressions équivalentes

c) $\vec{m} = I\vec{a}$, où $\vec{a} = a\hat{n}$ est l'aire orientée de la boucle de courant.

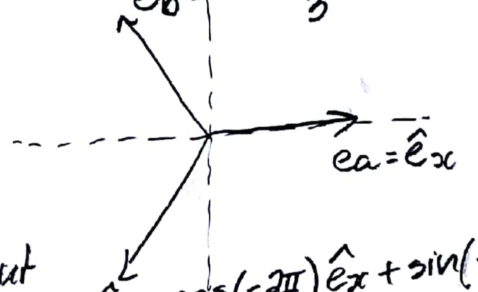
Or l'aire ici est πr^2 et $\hat{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire au cercle

$$\vec{m} = qf \cdot \pi r^2 \hat{n}$$

$$= q\frac{\omega}{2\cancel{\pi}} \cdot \cancel{\pi} r^2 \hat{n} = \frac{q\omega r^2}{2}\hat{n}$$

Procédural 3, #2

#14.b dans Corson-Lorrain



$\hat{e}_b = \cos\frac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x + \sin\frac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y$

$e_a = \hat{e}_x$

$\hat{e}_c = \cos(-\frac{2\pi}{3})\,\hat{e}_x + \sin(-\frac{2\pi}{3})\,\hat{e}_y$
$= \cos\frac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x - \sin\frac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y$

Il faut additionner vectoriellement les champs suivants :

$$\vec{B}_a = B_m \cos\omega t\ \hat{e}_a = B_m \cos\omega t\ \hat{e}_x$$

$$\vec{B}_b = B_m \cos(\omega t + \tfrac{2\pi}{3})\,\hat{e}_b = B_m \cos(\omega t + \tfrac{2\pi}{3})\left[\cos\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x + \sin\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right]$$

$$\vec{B}_c = B_m \cos(\omega t - \tfrac{2\pi}{3})\,\hat{e}_c = B_m \cos(\omega t - \tfrac{2\pi}{3})\left[\cos\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x - \sin\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right]$$

$c \equiv \cos \quad s \equiv \sin$

$$\vec{B}_{res} = \vec{B}_a + \vec{B}_b + \vec{B}_c$$

champs résultant

$$= B_m c\omega t\,\hat{e}_x + B_m\left[c\omega t\, c\tfrac{2\pi}{3} - s\omega t\, s\tfrac{2\pi}{3}\right]\left[c\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x + s\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right]$$
$$+ B_m\left[c\omega t\, c\tfrac{2\pi}{3} + s\omega t\, s\tfrac{2\pi}{3}\right]\left[c\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x - s\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right]$$

$$= B_m\left\{c\omega t\,\hat{e}_x + 2c\omega t\, c^2\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_x - 2s\omega t\, s^2\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right\}$$

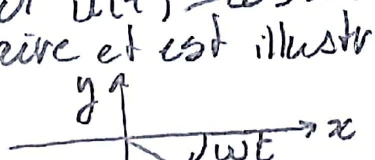
$$= B_m\left\{c\omega t\left(1 + 2c^2\tfrac{2\pi}{3}\right)\hat{e}_x - s\omega t\ 2s^2\tfrac{2\pi}{3}\,\hat{e}_y\right\}$$

Or $c\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $s\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \vec{B}_{res} = B_m\left\{\cos\omega t\,\overbrace{\left(1 + 2\cdot\tfrac{1}{4}\right)}^{=3/2}\hat{e}_x - \sin\omega t\cdot\overbrace{2\cdot\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}^{=3/2}\right\}$$

$$= \frac{3}{2} B_m\left\{\cos\omega t\,\hat{e}_x - \sin\omega t\,\hat{e}_y\right\}$$

b) $\vec{B}_{res}$ est un champ tournant dans le sens horaire. Le vecteur $\hat{u}(t) = \cos\omega t\,\hat{e}_x - \sin\omega t\,\hat{e}_y$ est un vecteur unitaire et est illustré à la figure ci-contre



Procédural 3 #3

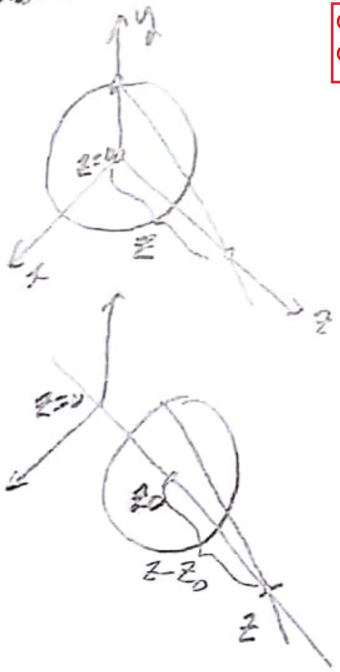
L'expression du champ sur l'axe z obtenue à l'exemple de la p.249 du livre de C-L est

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

lorsque la spire est en $z=0$.

Si la spire est en $z=z_0$, alors on aura (il suffit de remplacer z par $z-z_0$ dans l'expression précédente)

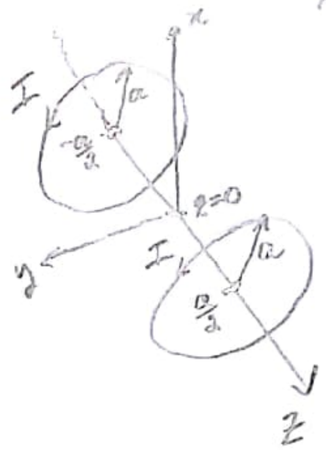
$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+(z-z_0)^2)^{3/2}}$$



Procédural 3, #4 Solution avec série McLaurin

1

#14.9 dans Lorrain-Corson.



a) Le champ total est donné par la superposition des champs des deux spires. Donc sur l'axe (on utilise ce qu'on a fait au # précédent avec $z_0 = -\frac{a}{2}$ et $z_0 = a/2$) :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+(z+a/2)^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+(z-a/2)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left\{ \frac{1}{[a^2+(z+a/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2+(z-a/2)^2]^{3/2}} \right\}$$

On va développer la fonction

$$f(z) = \frac{1}{[a^2+(z-b)^2]^{3/2}}$$ (les termes qui composent $B_z(z)$ sont pour $b = -\frac{a}{2}$ et $b = +a/2$)

en série de Taylor autour de zéro.
= série McLaurin

$$f(0) = \frac{1}{[a^2+b^2]^{3/2}}$$

$$f'(z) = -\frac{3}{\cancel{2}}[\quad]^{-5/2}\cdot \cancel{2}(z-b) \qquad f'(0) = \frac{3b}{[a^2+b^2]^{5/2}}$$

$$f''(z) = (+3)\left\{\left(+\frac{5}{\cancel{2}}\right)[\quad]^{-7/2}\cdot \cancel{2}(z-b)\cdot(z-b) - [\quad]^{-5/2}\right\}$$

$$= 3[\quad]^{-5/2}\left\{\frac{5(z-b)^2}{[a^2+(z-b)^2]} - 1\right\}$$

→ p. suiv.

$$f''(z) = 3[\ ]^{-5/2}\left\{\frac{5(z-b)^2 - a^2 - (z-b)^2}{[\ ]}\right\}$$

$$= 3[\ ]^{-7/2}\{4(z-b)^2 - a^2\}$$

$$f''(0) = \frac{3(4b^2-a^2)}{[a^2+b^2]^{7/2}}$$

$$f'''(z) = 3\left\{-\frac{7}{\cancel{2}}[\ ]^{-9/2}\cancel{2}(z-b)\{\ \} + [\ ]^{-7/2}8(z-b)\right\}$$

$$= 3[\ ]^{-7/2}\left\{\frac{-7(z-b)\{4(z-b)^2-a^2\} + 8(z-b)[a^2+(z-b)^2]}{[\ ]}\right\}$$

$$= 3[\ ]^{-9/2}\{-28(z-b)^3 + 7a^2(z-b) + 8a^2(z-b) + 8(z-b)^3\}$$

$$= 3[\ ]^{-9/2}\{-20(z-b)^3 + 15a^2(z-b)\}$$

$$f'''(0) = \frac{15(4b^3 - 3a^2b)}{[a^2+b^2]^{9/2}}$$

On en calcule une dernière

$$f^{(4)}(z) = 3\left\{-\frac{9}{\cancel{2}}[\ ]^{-11/2}\cancel{2}(z-b)\{\ \} + [\ ]^{-9/2}\{-60(z-b)^2+15a^2\}\right\}$$

$$= 3[\ ]^{-9/2}\left\{\frac{-9(z-b)\{-20(z-b)^3+15a^2(z-b)\}}{[\ ]} + \{-60(z-b)^2+15a^2\}\right\}$$

$$= 3[\ ]^{-11/2}\{180(z-b)^4 - 135a^2(z-b)^2 + \{-60(z-b)^2+15a^2\}[a^2+(z-b)^2]\}$$

$$= 3[\ ]^{-11/2}\{180(z-b)^4 - 135a^2(z-b)^2 - 60a^2(z-b)^2 - 60(z-b)^4 + 15a^4 + 15a^2(z-b)^2\}$$

$$= 3[\ ]^{-11/2}\{120(z-b)^4 - 180a^2(z-b)^2 + 15a^4\}$$

$$f^{(4)}(0) = \frac{45\{8b^4 - 12a^2b^2 + a^4\}}{[a^2+b^2]^{11/2}}$$

Pour $b = \frac{a}{2}$, on a : $[a^2+b^2] = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$

$$f(0) = \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2} a^3} = \frac{8}{5^{3/2} a^3}$$

$$f'(0) = \frac{3 \cdot a}{2\left(\frac{5}{4}\right)^{5/2} a^5} = \frac{48}{5^{5/2} a^4}$$

$$f''(0) = \frac{3\left(4\frac{a^2}{4} - a^2\right)}{\left(\frac{5}{4}a^2\right)^{7/2}} = 0$$

$$f'''(0) = \frac{15\left(4\frac{a^3}{8} - 3\frac{a^3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{4}a^2\right)^{9/2}} = \frac{-15a^3 \cdot 2^9}{5^{9/2} a^9} = \frac{-3 \cdot 2^9 \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 5^{7/2} a^6}$$

$$f'''(0) = \frac{-1536}{5^{7/2} a^6}$$

$\frac{1}{2} - 3 + 1 = \frac{1}{2} - 2$
$= -\frac{3}{2}$

$$f^{(4)}(0) = \frac{45\left\{8\frac{a^4}{16} - 12a^2 \cdot \frac{a^2}{4} + a^4\right\}}{\left(\frac{5}{4}a^2\right)^{11/2}}$$

$$= \frac{45a^4 \cdot (-3) \cdot 2048}{2 \cdot 5^{11/2} a^{11}} = \frac{-3 \cdot \cancel{5} \cdot 9 \cdot \cancel{2} \cdot 1024}{\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot 5^{9/2} a^7}$$

$$= \frac{-27 \cdot 1024}{5^{9/2} a^7}$$

p. suiv. →

Pour $b = -\frac{a}{2}$, on a : $[a^2+b^2] = \frac{5}{4}a^2$

$$f(0) = \frac{8}{5^{3/2}a^3}, \quad f'(0) = \frac{-48}{5^{5/2}a^4}, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = +\frac{1536}{5^{7/2}a^6}, \quad f^{(4)}(0) = -\frac{27\cdot 1024}{5^{9/2}a^7}$$

On voit que quand on va additionner les deux termes qui composent $B_z(z)$, on va avoir que les termes avec puissances impaires de z vont s'annuler et on va avoir

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left\{\frac{16}{5^{3/2}a^3} - \frac{1}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{27}^{\,9}\cdot\cancel{1024}^{\,256}}{5^{9/2}a^7}z^4\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a}\left\{\frac{16}{5^{3/2}} - \frac{9\cdot 256}{5^{9/2}}\frac{z^4}{a^4}\right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{\cancel{2}a}\cdot\frac{\cancel{16}^{\,8}}{5^{3/2}}\left\{1 - \frac{9\cdot 16}{125}\frac{z^4}{a^4}\right\}$$

$$= \frac{8\mu_0 I}{5^{3/2}a}\left\{1 - \frac{144}{125}\frac{z^4}{a^4}\right\}$$

$$= B_0\left\{1 - \frac{144}{125}\frac{z^4}{a^4}\right\}$$

avec $B_0 = \frac{8\mu_0 I}{5^{3/2}a}$

b) Pour le tracé de $B_z(z)$, on fera ça dans Matlab avec l'expression exacte écrite au début de a), mais on va quand même réécrire cette expression sous une →

forme un peu différente On a

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \left\{ \frac{1}{\left[1+\left(\frac{z}{a}+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1+\left(\frac{z}{a}-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right\}$$

Procédural 3 #4 (14.9 dans Carson Lorrain)
Solution avec Serie de Taylor

a) Le champ B d'une spire est

$$B_z'(z') = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot \frac{1}{(a^2+z'^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \cdot f(z')$$

avec $f(z') = \frac{1}{(a^2+z'^2)^{3/2}}$

z' est la distance entre le centre de la spire et le point où B est mesuré (voir #3)

Le champ des deux bobines de Helmholtz est donc

$$B_z(z) = \underbrace{B_z'(z - \tfrac{a}{2})}_{\text{champ de la bobine à } +\frac{a}{2}} + \underbrace{B_z'(z + \tfrac{a}{2})}_{\text{champ de la bobine à } -\frac{a}{2}}$$

Nous voulons montrer que la serie McLaurin de $B_z(z)$ comporte un terme constant et que le premier terme suivant est d'ordre z^4.

Pour developper B autour de 0 nous devons developper f autour de $+\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$.

Nous calculons les dérivées:

$$f(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^{5/2}}(-3z)$$

$$f''(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^{7/2}}(12z^2 - 3a^2)$$

$$f'''(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^{9/2}} \cdot 15 \cdot (-4z^3 + 3a^2 z)$$

$$f''''(z) = \frac{1}{(a^2+z^2)^{11/2}} \cdot 45 \cdot (8z^4 - 12a^2z^2 + a^4)$$

Nous pouvons maintenant développer $B'(z')$ en serie de Taylor au point $z' = \pm\frac{a}{2}$.

$$B_\pm'(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_0 I a^2}{2} f^{(n)}\left(\pm\frac{a}{2}\right) \frac{(z' \mp \frac{a}{2})^n}{n!}$$

$$B(z) = B_+'(z + \tfrac{a}{2}) + B_-'(z - \tfrac{a}{2}) = \frac{\mu_0 I a^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(f^{(n)}\left(+\frac{a}{2}\right) + f^{(n)}\left(-\frac{a}{2}\right)\right) \frac{z^n}{n!}$$

On constate que pour n impair :

$f^{(n)}$ est impair, c.a.d. $f^{(n)}(-z) = -f^{(n)}(z)$

$\Rightarrow$ les termes impairs dans la somme disparaissent

Pour n pair :

$f^{(n)}$ est pair $f^{(n)}(-z) = f^{(n)}(z)$

L'expression de B se simplifie donc à

$$B(z) = \mu_0 I a^2 \sum_{n=0}^{\infty} f^{(2n)}\left(\frac{a}{2}\right) \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\approx \mu_0 I a^2 \left(f\left(\frac{a}{2}\right) + f''\left(\frac{a}{2}\right)\frac{z^2}{1\cdot 2} + f''''\left(\frac{a}{2}\right)\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \right)$$

$$= \mu_0 I a^2 \left(\frac{8}{\sqrt{125}\,a^3} + 0 + \frac{2^{11}}{5^{11/2}\,a^{11}} 45\left(\frac{a^4}{2} - 3a^4 + a^4\right)\frac{z^4}{24} \right)$$

$$= \mu_0 I a^2 \frac{8}{\sqrt{125}\,a^3} \left(1 + \frac{2^{\cancel{8}\,\cancel{7}\,4}}{\cancel{5^4}\,5^3\;\cancel{a^8}\,a^4} \cancel{45}\,9 \left(- \frac{\cancel{3a^4}}{\cancel{2}} \right) \frac{z^4}{\cancel{24}} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{8\mu_0 I}{\sqrt{125}\,a}}_{B_0} \left(1 - \frac{144}{125}\,\frac{z^4}{24} \right)$$

Procedural 3 #5

On utilise le théorème d'Ampère.

a) Le long du chemin a, aucun courant n'entre dans la courbe. On a alors

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int B_\phi \rho' d\phi = \mu_0 I = 0$$

$$\Rightarrow B_\phi \rho' 2\pi = 0 \quad \rho' = \text{rayon du chemin}$$

$$\Rightarrow B_\phi = 0$$

Sur le chemin c, également $B_\phi = 0$ car le courant net traversant la surface bornée par la courbe est nul.

b) Pour le chemin b à l'intérieur du tore un courant NI entre dans la surface bornée par la courbe et donc

$$B_\phi \cdot 2\pi\rho = NI$$

$$\Rightarrow B_\phi = \frac{NI}{2\pi\rho}$$

c) On veut calculer $\oint_d \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$. Dans ce cas, le courant passe une fois. Donc

$$\oint_d \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Procédural 3, #6

15-4 dans Corson-Lorrain

a) On prend un petit circuit d'Ampère de largeur l.

vue en plongée

$\vec{B}$ est tangent à la surface et $\perp$ à la direction de la densité de courant.

Tout près de la plaque Au dessus de la plaque ou dedans la plaque le champ a le même comportement dans ce cas-ci, il n'y a pas de raison qu'il n'y ait pas de champ à l'intérieur.

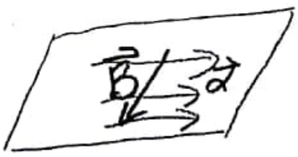
Au-dessus de la plaque sur la vue de derrière, $\vec{B}$ est tangent à la surface et pointe vers la droite et à l'intérieur, il est aussi tangent, mais pointe vers la gauche

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$Bl + Bl = \mu_0 \alpha l$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 \alpha}{2}$$

b)



B est orienté perpendiculaire à alpha (et est tangent à la plaque)

c)

selon moi, la réponse devrait plutôt être

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\alpha} \times \hat{n}}{2}$$ selon ce qui a été obtenu en a)

Le fait qu'il y ait un facteur 1/2 de différence avec ce qui est dit dans l'énoncé de c) dans le livre est cohérent avec ce qui est dit en p.275 du livre dans l'exemple sur la réfraction de lignes de champ magnétique.