

Formulaire d'équations

Identités trigonométriques élémentaires

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2} \quad \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2} \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

Produits entre vecteurs

Soient $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$ et $\vec{b} = b_x \hat{e}_x + b_y \hat{e}_y + b_z \hat{e}_z$ des vecteurs, alors

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Opérateurs vectoriels

$$\text{grad} f = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{Dérivée directionnelle : } D_{\hat{u}} f = \vec{\nabla} f \cdot \hat{u}$$

Soit $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \hat{e}_x + F_2(x, y, z) \hat{e}_y + F_3(x, y, z) \hat{e}_z$ un champ de vecteurs, alors

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Laplacien : } \nabla^2 f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0, \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Formules utiles pour l'intégration - Jacobien

Si $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ et $z = z(u, v, w)$, alors

$$dV \equiv d^3 \vec{r} = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Intégrale de surface (ou de flux)

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_S \vec{F} \cdot \vec{N} du dv$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad (\text{Théorème de la divergence})$$

Intégrale de chemin

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dA \quad (\text{Théorème de Stokes})$$

De polaires à cartésiennes $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $\hat{e}_x = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$ $\hat{e}_y = \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta$ Élément différentiel de surface : $dx dy = r dr d\theta$ Élément différentiel de ligne : $d\vec{r} = [dx, dy]$	De cartésiennes à polaires $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y$ $\hat{e}_\theta = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y$
De cylindriques à cartésiennes $x = \rho \cos \phi$ $y = \rho \sin \phi$ $z = z$ $\hat{e}_x = \cos \phi \hat{e}_\rho - \sin \phi \hat{e}_\phi$ $\hat{e}_y = \sin \phi \hat{e}_\rho + \cos \phi \hat{e}_\phi$ $\hat{e}_z = \hat{e}_z$ $dx dy dz = \rho d\rho d\phi dz$ Élément différentiel de surface du cylindre : $dA = \rho d\phi dz$ Élément différentiel de surface sur un plan xy : $dA = \rho d\rho d\phi$	De cartésiennes à cylindriques $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ $z = z$ $\hat{e}_\rho = \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y$ $\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y$ $\hat{e}_z = \hat{e}_z$
De sphériques à cartésiennes $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$ $\hat{e}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi$ $\hat{e}_y = \sin \theta \sin \phi \hat{e}_r + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_\theta + \cos \phi \hat{e}_\phi$ $\hat{e}_z = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$ $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ Élément différentiel de surface : $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$	De cartésiennes à sphériques $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ $\hat{e}_r = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z$ $\hat{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z$ $\hat{e}_\phi = -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y$