Session S4-GE

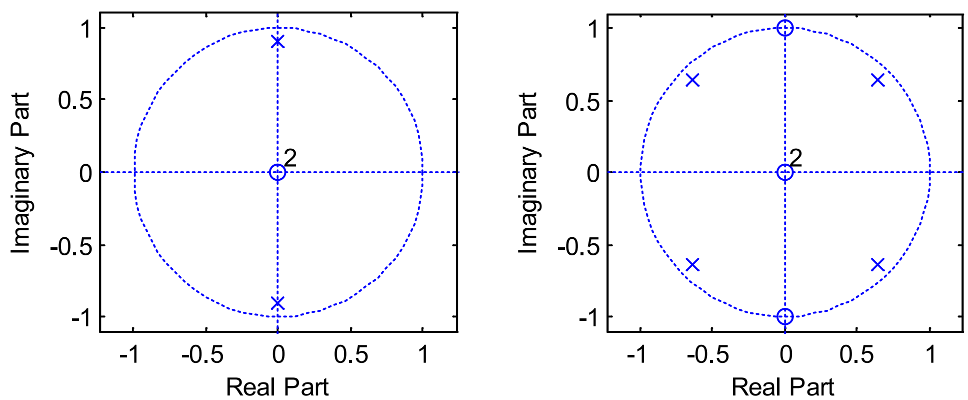
APP6
Traitement du signal sur µC

Examen formatif - Théorique

Hiver 2023

Question 1 (GEL412-1, GEL412-2)

Les figures suivantes montrent les pôles et les zéros de deux filtres numériques. Dessinez le plus fidèlement possible le module de la réponse en fréquence de ces deux filtres, pour ϖ entre $-\pi$ et π, où $\varpi = 2\pi f/f_e$. (Pour vous aider, notez que le module de tous les pôles est 0.9.) Graduez bien tous les axes.



Question 2 (GEL452-1)

Répondez aux sous-questions suivantes par VRAI ou FAUX ou en complétant l'énoncé, selon le cas. Chaque réponse vaut 3 points. Seule la réponse dans la boite sera corrigée.

(a) VRAI ou FAUX : La programmation d'un filtre FIR dont tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité sera instable.

(b) VRAI ou FAUX : multiplier deux nombres en format Q2.13 donnera un résultat en format Q2.13.

(c) Partant d'un nombre en format *QX.Y*, il faut ________________ par 2^Y. (diviser/multiplier) pour retrouver la valeur de départ.

(d) En l'absence d'une fonction de transformation de Fourier inverse, on peut simplement prendre le conjugué complexe de ___________ suivi d'une opération de transformation de Fourier normale ($x[n]$ / $X[k]$).

(e) VRAI ou FAUX : Programmer une équation à différences pour un filtre FIR équivaut à multiplier les échantillons présents et passés par la réponse impulsionnelle du filtre.

Question 3 (GEL412-1, GEL412-2)

Le signal

$$x(t) \quad = \quad 20 \sin(2\pi 1000 t)$$

est échantillonné à la cadence Fe = 8000 échantillons/seconde, après avoir été préalablement filtré par un filtre analogique anti-repliement dont le déphasage à 1000 Hz est −0.5 radians. Le signal numérisé obtenu est $x[n]$.

$2000\pi\, n / 8000$ $\quad \pi/4$

On filtre ensuite $x[n]$ avec un filtre numérique dont l'équation aux différences est

$\frac{Y}{X}$

$$y[n] \quad = \quad x[n] + 1.2728\, y[n\text{-}1] - 0.81 y[n\text{-}2]$$

$$\frac{1}{1 - 1,27287 z^{-1} + 0,81 z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

Donnez la forme du signal $y[n]$ obtenu à la sortie de ce filtre, en régime permanent.

$$\frac{z^2}{z^2 - 1,27287 + 0,81}$$

Question 4 (GEL412-1, GEL412-2, GEL452-1)

$$\frac{e^{j\pi/2}}{e^{j\pi/2} - 1,27287\, e^{j\pi/4} + 0,81}$$

Considérez le filtre suivant :

$$\frac{j}{j - 1,27287(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) + 0,81}$$

$$H(z) = \frac{1 + 0.7z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.2z^{-1} + 0.8z^{-2})}$$

$$\frac{-1}{-1 - 1,27287j\,(0,707 + 0.707j) + 0,81j}$$

Représentez schématiquement cette dernière équation avec :

a) La structure DIRECT II
b) Une cascade de deux filtres de type DIRECT II, dont les fonctions de transfert sont A(z) et B(z), donc H(z) = A(z) × B(z)

$z = 1 \Rightarrow w = 0$

$$\frac{K}{N} = \frac{2f}{f_e} + \frac{1}{N}$$

$z = 0 \Rightarrow w = \infty$

$z = \text{pole} \Rightarrow w = fc$

$h = \frac{Y}{X}$ mais quand on fait toute c'est $\frac{X}{Y}$

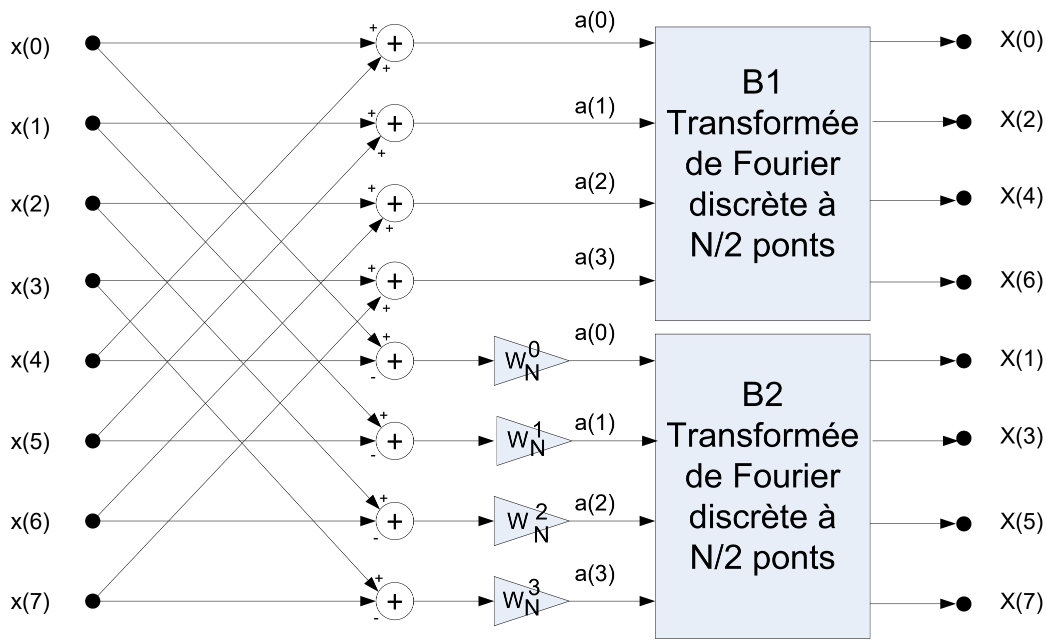
Question 5 (GEL412-1)

Sachant que la FFT peut être réalisée par l'algorithme de décimation en fréquences définit par les équations ci-dessous :

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_{N/2}^{nk} \quad \text{(équation 1)}$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_N^{n} W_{N/2}^{nk} \quad \text{(équation 2)}$$

Et que ces deux équations sont utilisées comme suit pour réaliser une FFT sur un vecteur de 8 échantillons complexes :



Et sachant que les blocs B1 et B2 représentent la transformée de Fourier discrète (TFD) définit par l'équation :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{(TFD)}$$

1) Que représente la variable x(n) de la TFD pour le bloc B1 et B2?
2) Calculez les puissances des *twiddles factors*, *W*, requises.

Question 6 (GEL412-2, GEL412-3)

Une application nécessite de concevoir un filtre numérique passe-bande de type *Butterworth*, d'ordre 1 (dénominateur d'ordre 2) dont la bande passante se situe entre 1000 et 2000 Hz. Appliquez la méthode de la transformation bilinéaire pour obtenir les coefficients de ce filtre. La fréquence d'échantillonnage du système est *fe* = 8000 Hz. Prouvez qu'il s'agit bien d'un passe-bande en calculant son gain à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (ces gains devraient être nuls ou très petits).

Note : la fonction de transfert d'un filtre *Butterworth* passe-bas normalisé d'ordre 1, et la transformation fréquentielle permettant de transformer ce passe-bas en un passe-bande sont respectivement :

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \qquad\qquad s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_a \omega_b}{s(\omega_b - \omega_a)}$$

Question 6 (GEL412-2, GEL412-3)

Une application nécessite de concevoir un filtre numérique passe-bande de type *Butterworth*, d'ordre 1 (dénominateur d'ordre 2) dont la bande passante se situe entre 1000 et 2000 Hz. Appliquez la méthode de la transformation bilinéaire pour obtenir les coefficients de ce filtre. La fréquence d'échantillonnage du système est fe = 8000 Hz. Prouvez qu'il s'agit bien d'un passe-bande en calculant son gain à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (ces gains devraient être nuls ou très petits).

Note : la fonction de transfert d'un filtre *Butterworth* passe-bas normalisé d'ordre 1, et la transformation fréquentielle permettant de transformer ce passe-bas en un passe-bande sont respectivement :

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \qquad\qquad s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_a \omega_b}{s(\omega_b - \omega_a)}$$