S5

UNIVERSITÉ DE
SHERBROOKE

Evaluation FORMATIVE Session S5 Unité 1

GEN 441- Mécanique pour ingénieurs

SOLUTION

Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke

Problème 1. On considère la scie à métaux représentée sur la figure 1 (étudiée aussi dans l'exercice 3 du procédural 1). La lame de la scie est montée dans un cadre qui glisse le long du guide horizontal. Celui-ci est relié à l'aide de la barre AB à une roue tournant à la vitesse angulaire constante de 60 tr / min dans le sens antihoraire. Déterminer la vitesse linéaire de A et la vitesse angulaire de la barre AB lorsque $\theta = 90$ degrés. Pour cette même position, déterminer aussi l'accélération linéaire de A et l'accélération angulaire de la barre AB. Il faudra procéder géométriquement en traçant les vecteurs vitesses et accélérations, et en utilisant les relations entre les vecteurs et les règles de trigonométrie.

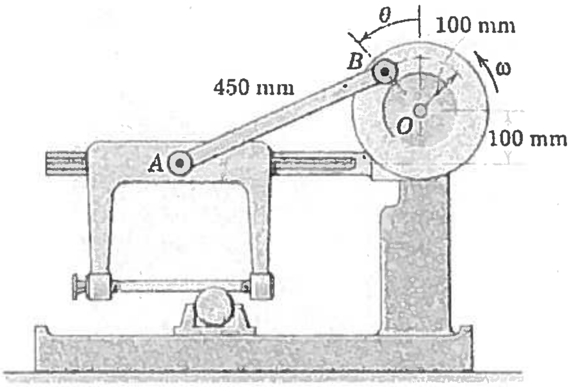
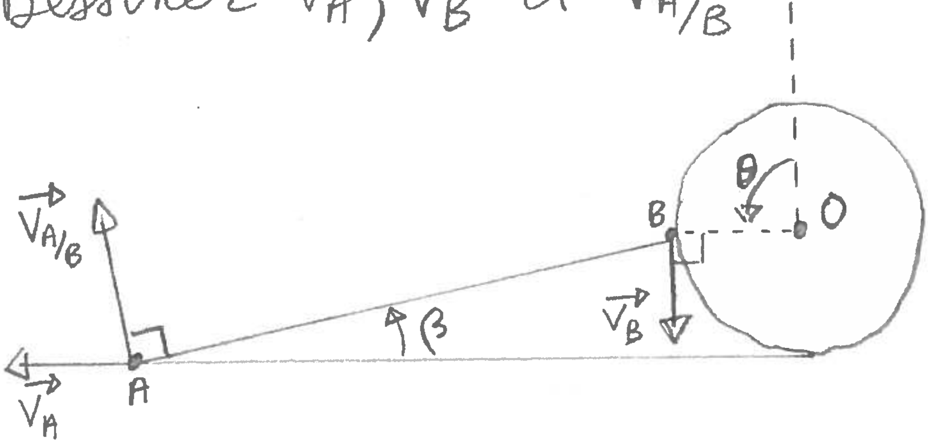


Figure 1

Réponse :

Calcul des Vitesses V_A et ω_{AB}

1) Dessiner $\vec{V_A}$, $\vec{V_B}$ et $\vec{V_{A/B}}$

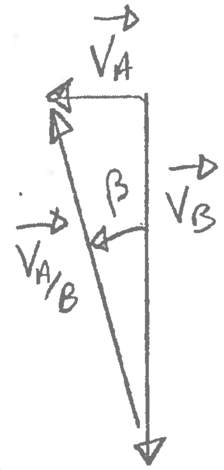


2) Relation entre $\vec{V_A}$, $\vec{V_B}$ et $\vec{V_{A/B}}$

$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{V_{A/B}}$$

3) Angle entre $\vec{V_B}$ et $V_{A/B}$: β

4) Représentation graphique de la relation



5) Trigonométrie pour trouver V_A et ω_{AB}

- $\sin\beta = \frac{OB}{AB} = \frac{100}{450} = 0{,}222$
- $\beta = \arcsin\left(\frac{100}{450}\right) \simeq 12{,}84°$
- $\tan\beta = 0{,}228$
- $V_A = V_B \times \tan\beta = \omega_{OB} \times OB \times \tan\beta$

$$= 60 \times \frac{2\pi}{60} \times 0{,}1 \times 0{,}228 \simeq 0{,}14$$

Donc $\boxed{V_A \simeq 0.14 \text{ m/s}}$

- $\dfrac{V_A}{V_{A/B}} = \sin\beta$

- $V_{A/B} = \dfrac{V_A}{\sin\beta} \simeq \dfrac{0.14}{0.222} = 0.63$

Donc $V_{A/B} \simeq 0,63$ m/s

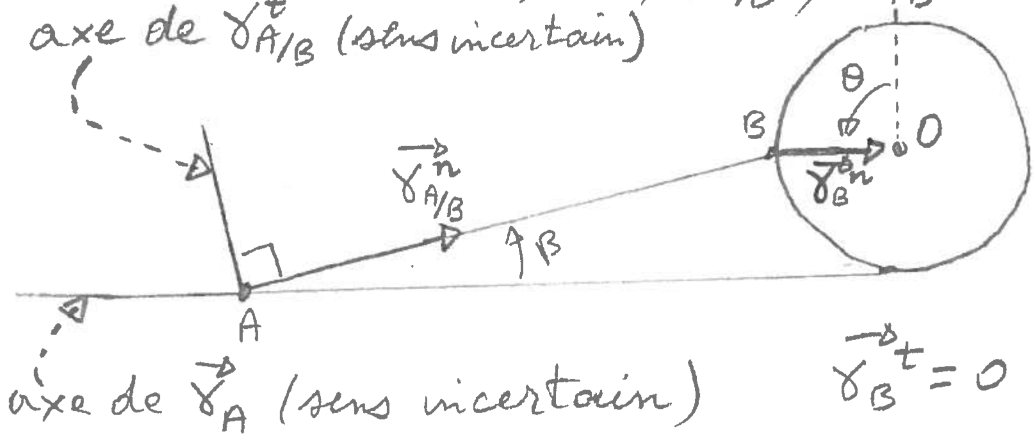
- $\omega_{AB} = \dfrac{V_{A/B}}{AB} \simeq \dfrac{0,63}{0.45} = 1.4$

Donc $\boxed{\omega_{AB} = 1,4 \text{ rad/s}}$

Il s'agit en réalité de la valeur absolue de la vitesse angulaire. La vitesse angulaire est négative car la barre tourne dans le sens horaire.

Calcul des accélérations γ_A et α_{AB}

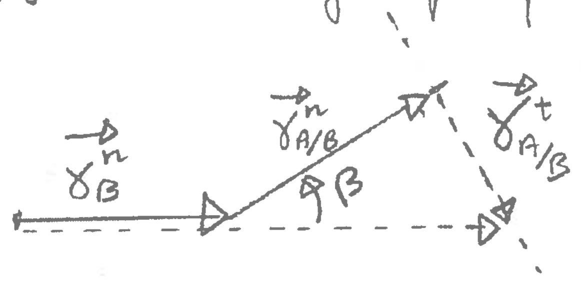
1) Dessiner $\vec{\gamma}_A$, $\vec{\gamma}_B^{\,n}$, $\vec{\gamma}_B^{\,t}$, $\vec{\gamma}_{A/B}^{\,n}$, $\vec{\gamma}_{A/B}^{\,t}$



2) Relation entre les vecteurs d'accélérations

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_B^{\,n} + \vec{\gamma}_{A/B}^{\,t} + \vec{\gamma}_{A/B}^{\,n}$$

3) Représentation graphique de la relation



4) Trigonométrie pour trouver γ_A et α_{AB}

$- \gamma_B^n = OB \times \omega_{OB}^2 = 0.1 \times \left(60 \times \frac{2\pi}{60}\right)^2 = 0.1 \times 4\pi^2 \simeq 3.95\, m/s^2$

$- \gamma_{A/B}^n = AB \times \omega_{AB}^2 \simeq 0.45 \times (1.4)^2 \simeq 0.882\, m/s^2$

$- \gamma_{A/B}^t = \gamma_{A/B}^n \times \tan\beta \simeq 0.882 \times 0.228 = 0.201\, m/s^2$

On peut calculer γ_A à partir de $\gamma_{A/B}^n$ ou $\gamma_{A/B}^t$

$$\sin\beta = \frac{\gamma_{A/B}^t}{\gamma_A - \gamma_B^n} \qquad \cos\beta = \frac{\gamma_{A/B}^n}{\gamma_A - \gamma_B^n}$$

En utilisant, on a :

$$\gamma_A = \gamma_B^n + \frac{\gamma_{A/B}^t}{\sin\beta} \simeq 3.95 + \frac{0.201}{0.222} \simeq 4.855\, m/s^2$$

Donc $\boxed{\gamma_A \simeq 4.855\, m/s^2}$

On peut calculer α_{AB} à partir de $\gamma_{A/B}^t$

$$\alpha_{AB} = \frac{\gamma_{A/B}^t}{AB} \simeq \frac{0.201}{0.45} \simeq 0.447$$

Donc $\boxed{\alpha_{AB} \simeq 0.447\, rad/s^2}$

Problème 2. Sur le mécanisme de la figure 2, le vérin hydraulique engendre un mouvement du point B qui entraine des mouvements des barres AB et OA. Soit θ l'angle entre la verticale et OA, et φ l'angle entre l'horizontale et AB. La position de la figure correspond à $\theta = \varphi = 0$. Soit v_B la vitesse de B pour une position donnée. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de A en fonction de θ et de sa dérivée temporelle. Déterminer aussi l'expression du vecteur vitesse de A en fonction de v_B, de φ et de sa dérivée temporelle. Déterminer enfin la ou les relations entre v_B, θ, φ et leurs dérivées temporelles.

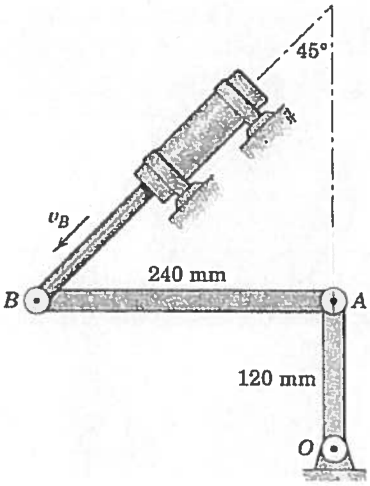
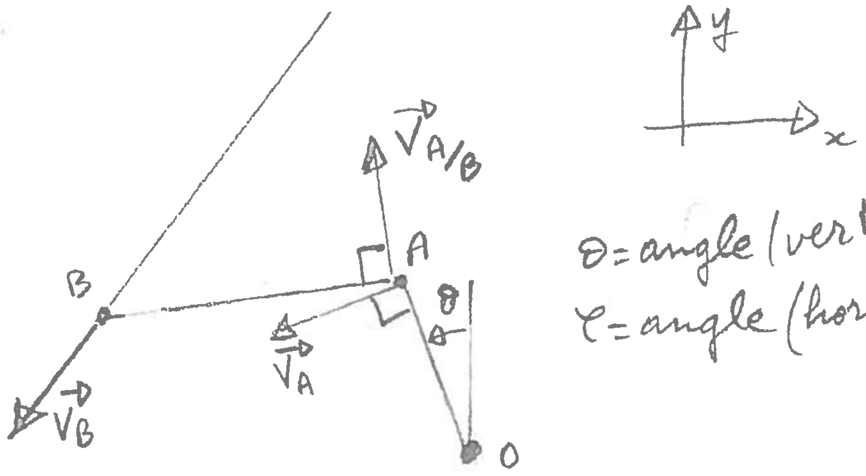


Figure 2

Réponse :



θ = angle (verticale, OA)
φ = angle (horizontale, AB)

$\vec{V_A}$ en fonction θ et $\dot{\theta}$

$$\vec{OA} = \begin{bmatrix} -OA\sin\theta \\ OA\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{V_A} = \frac{d(\vec{OA})}{dt} = \begin{bmatrix} -OA\,\dot{\theta}\cos\theta \\ -OA\,\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

V_A en fonction de V_B, φ et $\dot{\varphi}$

$$\vec{V_B} = -V_B \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BA} = \begin{bmatrix} AB\cos\varphi \\ AB\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{V_{A/B}} = \frac{d(\vec{BA})}{dt} = \begin{bmatrix} -AB\dot{\varphi}\sin\varphi \\ AB\dot{\varphi}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V_A} = \vec{V_B} + \vec{V_{A/B}}$$

Relation entre V_B, θ, $\dot{\theta}$, φ, $\dot{\varphi}$

$$\begin{bmatrix} -OA\,\dot{\theta}\cos\theta \\ -OA\,\dot{\theta}\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -AB\dot{\varphi}\sin\varphi \\ AB\dot{\varphi}\cancel{\cos}\varphi \end{bmatrix}$$

Soit $\begin{cases} OA\,\dot{\theta}\cos\theta - AB\dot{\varphi}\sin\varphi = V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \\ OA\,\dot{\theta}\sin\theta + AB\dot{\varphi}\cos\varphi = V_B\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Problème 3. On considère une particule qui se déplace en un mouvement rectiligne et dont la vitesse v(t) en fonction du temps est représentée sur la figure 3. Représenter sa position x(t) et son accélération a(t) en fonction du temps t, entre t = 0 et t = 60, sachant que x(0) = 0.

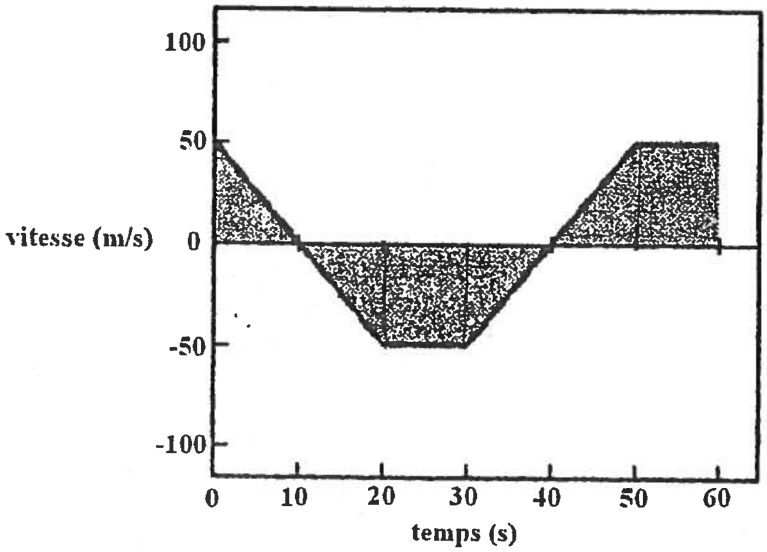


Figure 3

Réponse :

Phase 1 : $0 \leq t \leq 20$

$\boxed{a_1(t) = -5}$, $\boxed{v_1(t) = -5t + 50}$

$\boxed{x_1(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 50t}$

Phase 2 : $20 \leq t \leq 30$

$\boxed{a_2(t) = 0}$, $\boxed{v_2(t) = -50}$

$x_2(t) = -50(t-20) + \underbrace{x_1(20)}_{0}$

$\boxed{x_2(t) = -50(t-20)}$

Phase 3 : $30 \le t \le 50$

$\boxed{a_3(t) = 5}$ $\boxed{V_3(t) = 5 \times (t-30) - 50}$

$V_3(t) = 5(t-30) + V_2(30) = 5(t-30) - 50$

$x_3(t) = \frac{5}{2}(t-30)^2 - 50(t-30) + x_2(30)$

$\boxed{x_3(t) = \frac{5}{2}(t-30)^2 - 50(t-30) - 500}$

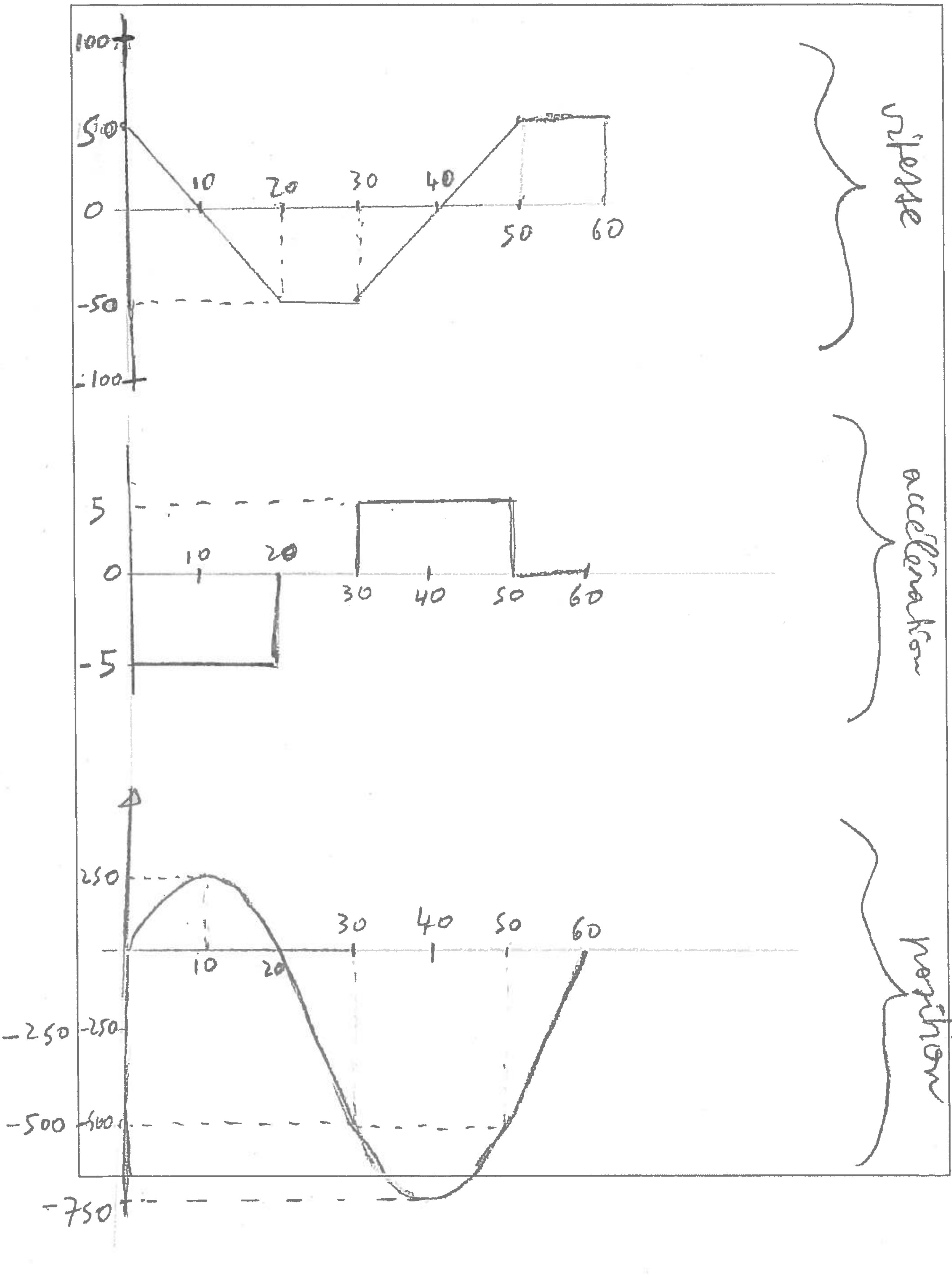
Phase 4 : $50 \le t \le 60$

$\boxed{a_4(t) = 0}$

$\boxed{V_4(t) = 50}$

$x_4(t) = 50 \times (t-50) + \underbrace{x_3(50)}_{-500}$

$\boxed{x_4(t) = 50 \times (t-50) - 500}$


100
50
0
-50
-100
10
20
30
40
50
60
vitesse
5
0
-5
10
20
30
40
50
60
accélération
250
-250
-500
-750
10
20
30
40
50
60
position

Problème 4. La figure 4 représente une barre mince uniforme de masse m et de longueur L, avec une petite roue libre sur chacune des ses extrémités. La barre est libérée alors qu'elle se trouvait immobilisée dans la position de la figure 4. Déterminer les grandeurs suivantes immédiatement après que la barre soit libérée :

- l'accélération angulaire de la barre en fonction de θ et L ;
- la force normale N sous la roue en contact avec le sol, en fonction de θ et m.

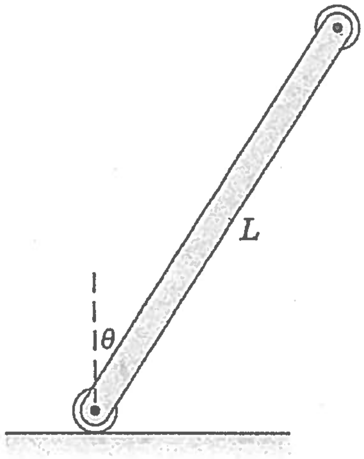
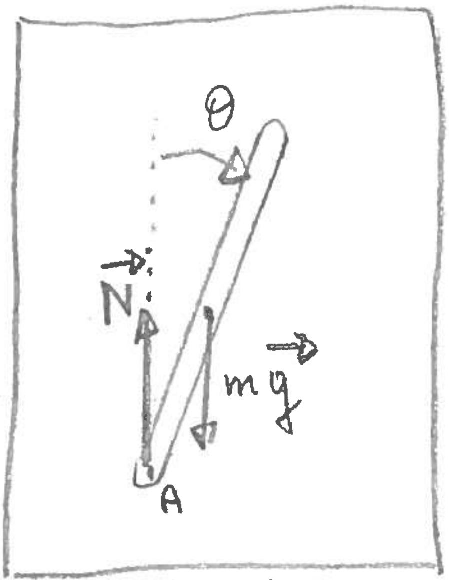
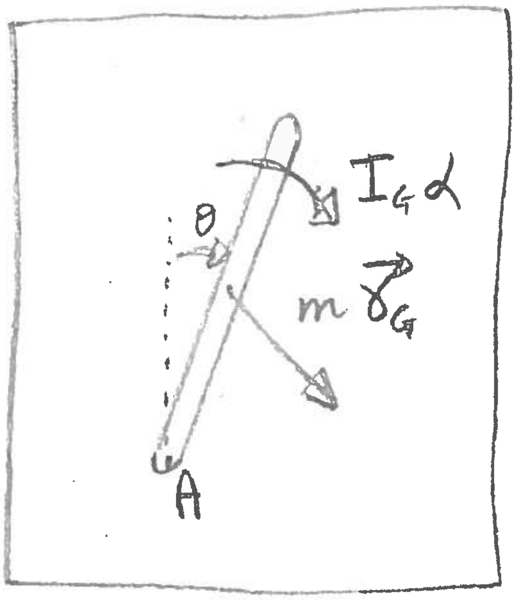


Figure 4

Réponse :

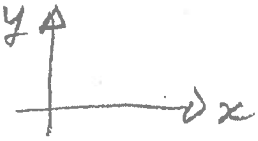


DCL



DC

Loi des forces



$$\sum \text{Forces} = m\,\vec{\gamma}_G$$

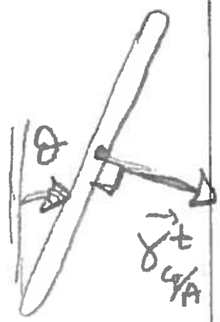
Forces

$$\sum \text{Forces} = \vec{N} + m\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

Accélération γ_G :

$$\vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_A + \vec{\gamma}^{\,n}_{G/A} + \vec{\gamma}^{\,t}_{G/A}$$

$$\vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} a_A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\gamma^n_{G/A} = 0 \\ \text{car } \omega = 0 \\ \text{au moment où} \\ \text{on libère la barre}}} + \underbrace{\frac{L}{2}\alpha \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}}_{\gamma^t_{G/A}}$$



$$\text{Soit } \vec{\gamma}_G = \begin{bmatrix} a_A - \frac{L}{2}\alpha\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\alpha\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'égalité $\sum \text{Forces} = m\vec{\gamma}_G$ donne alors :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N - mg \\ 0 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_A - \frac{L}{2}\alpha\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\alpha\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\boxed{a_A = \frac{L}{2}\alpha\cos\theta} \quad (1)$$

$$\boxed{N = m\left(g - \frac{L}{2}\alpha\sin\theta\right)} \quad (2)$$

Loi des moments

$$\sum \text{Moments}/_G = I_G \alpha$$

moments de forces /G

$$\sum \text{Moments}/_G = \frac{L}{2} \sin\theta \times N$$

$I_G \alpha$

$$I_G = \frac{mL^2}{12}$$

L'égalité $\sum \text{Moments}/_G = I_G \alpha$ donne alors :

$$\boxed{\frac{L}{2} \sin\theta \times N = \frac{mL^2}{12} \alpha} \quad (3)$$

En combinant (2) et (3) :

$$\frac{L}{2} \sin\theta \, m \left(g - \frac{L}{2} \alpha \sin\theta\right) = \frac{mL^2}{12} \alpha$$

on obtient $\alpha \left\{ \frac{L^2}{4} \sin^2\theta + \frac{L^2}{12} \right\} = g \frac{L}{2} \sin\theta$

soit $$\boxed{\alpha = \frac{2 g \sin\theta}{L\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)}} \quad (4)$$

En remplaçant dans (2) α par son expression (4), on obtient $N = m \left\{ g - \frac{L}{2} \sin\theta \frac{2 g \sin\theta}{L\left(\sin^2\theta + \frac{1}{3}\right)} \right\} = mg \left\{ 1 - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta + \frac{1}{3}} \right\}$

soit $$\boxed{N = \frac{mg}{1 + 3\sin^2\theta}}$$