APP2 — Principes de dynamique et méthodes numériques

Évaluation formative
Solution

GEN441, GEL450 et GIF590

14 septembre 2023

Exercice nº 1

1. On considère que toutes les forces de frottement sont négligeables et que $y_C = 20$ m :

   a) déterminez la constante de rappel du ressort ;
   On applique le théorème de la conservation d'énergie entre le point ① pour lequel le ressort est totalement comprimé ($y = -0.12$ m) et le point ② pour le quel la fusée est à son apogée.

$$Ec_{①} + Ep_{①} + W_{\mathrm{F}\,:\,①\rightarrow②} = Ec_{②} + Ep_{②} \tag{1}$$

avec :
- $Ec_{①} = 0$ car la fusée est au repos ;
- $Ep_{①}$ pour la gravité $= 0$ car on choisit la référence h à cet endroit ;
- W : le travail de la force du ressort peut être remplacée par son énergie potentiel : $Ep_{①}$ du ressort $= 1/2k|y_a|^2$
- W : les forces de frottement sont négligées ; il n'y a pas d'autre force donc pas d'autre travail.
- $Ec_{②} = 0$ car la fusée est à son point le plus haut, donc sa vitesse est nulle ;
- $Ep_{②}$ pour la gravité $= mg(|y_A| + y_c)$ par rapport à la référence choisie plus tôt ;
- $Ep_{②}$ du ressort $= 0$ car le ressort est à l'équilibre.

Ce qui conduit à :

$$0 + 0 + \frac{1}{2}k|y_a|^2 = 0 + mg(|y_A| + y_c) + 0 \tag{2}$$

On cherche la constante de raideur du ressort k que l'on isole de l'équation précédente.

$$k = 2\frac{mg(|y_A| + y_c)}{|y_a|^2} \tag{3}$$

A.N.

$$k = 2\frac{0.035 \times 9.81 \times (0.12 + 20)}{0.12^2} = 958\mathrm{N\,m^{-1}} \tag{4}$$

b) déterminez la vitesse du projectile au point B .

On connait la constante de rappel du ressort k. On applique à nouveau la conservation d'énergie aux points A ① et B ②.

- $Ec_{①} = 0$ car la fusée est au repos ;
- $Ep_{①}$ pour la gravité = 0 car on choisit la référence h à cet endroit ;
- W : le travail de la force du ressort peut être remplacée par son énergie potentiel : $Ep_{①}$ du ressort $= 1/2k(0 - y_a)^2$ avec $(0 - y_A)$ l'élongation du ressort. Soit $Ep_{①}$ du ressort $= 1/2ky_a^2$
- W : les forces de frottement sont négligées ; il n'y a pas d'autre force donc pas d'autre travail ;
- $Ec_{②} = 1/2mv_B^2$ avec v_B la valeur recherchée ;
- $Ep_{②}$ pour la gravité $= mgh$ par rapport à la référence choisie plus tôt, soit $h = 0.12\text{m}$; ;
- $Ep_{②}$ du ressort = 0 car l'élongation du ressort est nulle..

On obtient alors l'équation :

$$0 + 0 + \frac{1}{2}ky_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgh + 0 \tag{5}$$

et v_b est donnée par :

$$v_B = \sqrt{\frac{k}{m}y_A^2 - 2gh} \tag{6}$$

A.N.

$$v_B = \sqrt{\frac{958}{0.035}(-0.12)^2 - 2g \times 9.81 \times 0.12} = 19.8\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \tag{7}$$

2. On considère que la somme de toutes les forces de frottement tout le long du parcours du projectile vaut 2 N (les forces de frottements tiennent comptes du frottement dans le tube et dans l'air) :

c) déterminez la nouvelle position maximale y_C atteinte par le projectile .

On continue d'appliquer la conservation de l'énergie. Dans cette question il y a un travail de frottement : on nous donne la force de frottement, constante sur tout le trajet. On cherche la hauteur de la fusée ainsi atteinte.

- $Ec_{①} = 0$ car la fusée est au repos ;
- $Ep_{①}$ pour la gravité = 0 car on choisit la référence h à cet endroit ;
- W : le travail de la force du ressort peut être remplacée par son énergie potentiel : $Ep_{①}$ du ressort $= 1/2k(0 - y_a)^2$ avec $(0 - y_A)$ l'élongation du ressort. Soit $Ep_{①}$ du ressort $= 1/2ky_a^2$
- $W_{① \to ②}$: la force de frottement est constante sur tour le trajet : on obtient donc $F \times (y_c + |y_A|)$ ou $(y_c + |y_A|)$ est la distance totale parcourue par la fusée ;
- $Ec_{②} = 0$ car la fusée est à son point le plus haut, donc sa vitesse est nulle ;
- $Ep_{②}$ pour la gravité $= mgh$ par rapport à la référence choisie plus tôt, donc $h = (y_c + |y_A|)$; ;

– $Ep_{②}$ du ressort = 0 car l'élongation du ressort est nulle..
On obtient alors l'équation :

$$0 + 0 + \frac{1}{2}ky_A^2 - F \times (y_c + |y_A|) = 0 + mg(y_c + |y_A|) + 0 \qquad (8)$$

avec un signe − devant le travail car le travail de la force s'oppose au mouvement.
On cherche y_c donné par :

$$y_c = -|y_a| + \frac{1/2 \cdot ky_A^2}{mg + F} \qquad (9)$$

A.N.

$$\begin{aligned} y_c &= -0.12 + \frac{1/2 \cdot (958) \cdot (-0.12)^2}{0.035g \times 9.81 + 2} \\ &= 2.82\text{m} \end{aligned}$$

Exercice n° 2

La figure 1 représente deux rondelles de hockey identiques qui se déplacent sans frottement sur une surface lisse avec des vitesses initiales $v_A = 15\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ et $v_B = 10\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$. L'axe horizontale est l'axe des x. Le coefficient de restitution d'énergie vaut $e = 0,9$.

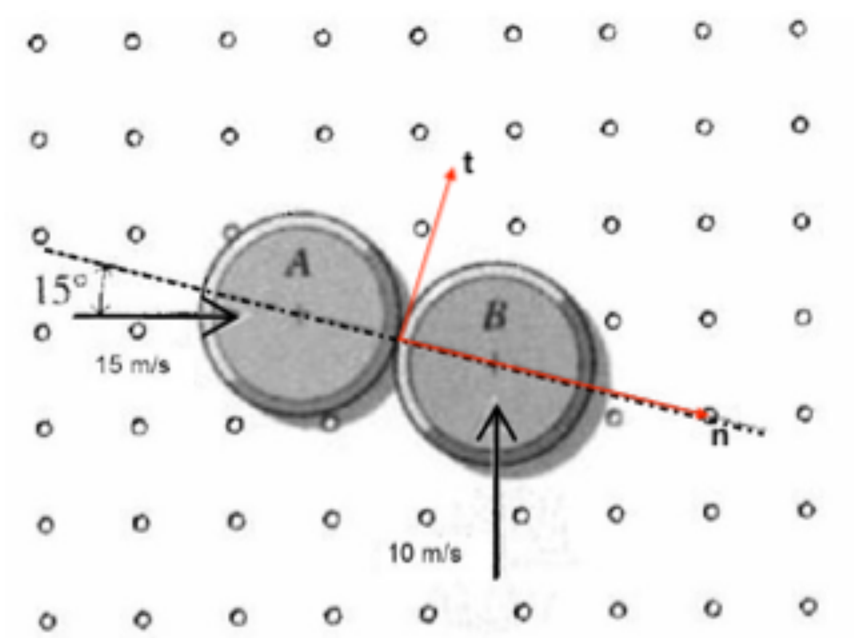

FIGURE 1: Représentation des rondelles au moment du choc.

Déterminez la vitesse (amplitude et direction par rapport à l'axe x) pour chacun des rondelles juste après l'impact.

Sur la figure, l'axe en pointillé est l'axe normal. L'axe tangentiel est également indiqué. On applique les trois équations :

1. conservation de la quantité de mouvement sur l'axe n :

$$mv_{An} + mv_{Bn} = mv'_{An} + mv'_{Bn}$$

soit :

$$v'_{An} + v'_{Bn} = v_{An} + v_{Bn} \tag{10}$$

2. le coefficient de restitution :

$$e = \frac{v'_{Bn} - v'_{An}}{v_{An} - v_{Bn}}$$

soit :

$$v'_{Bn} - v'_{An} = ev_{An} - ev_{Bn} \tag{11}$$

3. et enfin sur l'axe tangentiel :

$$\begin{aligned} mv_{At} &= mv'_{At} \\ mv_{Bt} &= mv'_{Bt} \end{aligned}$$

soit :

$$v'_{At} = v_{At} \tag{12}$$
$$v'_{Bt} = v_{Bt} \tag{13}$$

On obtient alors les résultats suivants :

$$v'_{At} = 15\sin(15) = 3.88\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{14}$$
$$v'_{Bt} = v_{Bt} = 10\cos(15) = 9.66\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{15}$$

Pour les parties normales, j'additionne les équations (1) et (2) puis je soustraits (1) et (2) pour obtenir :

$$2v'_{Bn} = (1+e)v_{An} + (1-e)v_{Bn} \tag{16}$$
$$2v'_{An} = (1-e)v_{An} + (1+e)v_{Bn}$$

ce qui conduit à

$$v'_{Bn} = (1.9)(15\cos(15)) + (0.1)(-10\sin(15)) = 13.63\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{17}$$
$$v'An = (0.1)(15\cos(15)) + (1.9)(-10\sin(15)) = -1.73\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{18}$$

On peut alors calculer facilement les angle par rapport à l'axe des n :

$$\theta'_A = \arctan(\frac{v'_{At}}{v'_{An}}) = 180 + \arctan(\frac{v'_{At}}{|v'_{An}|}) = 114.07^\circ$$
$$\theta'_B = \arctan(\frac{v'_{Bt}}{v'_{Bn}}) = 35.31^\circ$$

et en déduire les angles par rapport à l'axe des x

$$\theta'_{Ax} = 99.07^\circ$$
$$\theta'_{Bx} = 20.31^\circ$$

Pour les amplitude, on a :

$$v'_A = \sqrt{(v'_{At})^2 + (v'_{An})^2} = 4.25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{19}$$
$$v'_B = \sqrt{(v'_{Bt})^2 + (v'_{Bn})^2} = 16.71\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{20}$$

Exercice nº 3

a) Trouvez une fonction polynômiale $g(x)$ pour représenter les mesures du tableau **??**. L'ordre du polynôme est à déterminer. Écrivez la fonction $g(x)$ ci-dessous. Écrivez les coefficients du polynôme avec 2 chiffres significatifs après la virgule. Assurez-vous de bien arrondir.

Polynôme d'ordre 4, soit 5 coefficients à calculer (car N = 8 points : M = N - 3 = 5)

Les coefficients sont :

$a_4 = -0.9377$
$a_3 = 10.0553$
$a_2 = -32.9140$
$a_1 = 61.8851$
$a_0 = -0.0089$

b) Avec la fonction $g(x)$ trouvée en a), quel est le facteur de corrélation R^2 obtenu ? Quel est l'erreur RMSE obtenue ?

$R^2 = 0.9986$ et RMSE = 2.058

c) Justifiez le choix du degré du polynôme.

Degré 4 car N = 8 points : M = N - 3 = 5, ce qui respecte N-M $\geq$ 3. De plus, la précision de l'appareil de mesure est de 2 N. Il est donc attendu que l'erreur RMS soit près de l'erreur de l'appareil de mesure.

d) Sachant que le travail total de toutes les forces appliquées sur le coureur est de 636 J, calculez sa vitesse à la fin du sprint de 7 m.

Au départ, $E_c = 0$.
Conservation d'énergie : $W = E_{cf} = 1/2mv.^2$ ce qui va donner $v = \sqrt{2W/m}$.
A.N : $v = 4.2628\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Exercice 4 :

$$y(x) = x^3 - 12x - 1$$

linéarisation :

a) Taylor : $y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x = x_0} \Delta x$

$$= y(x_0) + \left(3x_0^2 - 12\right)\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \left(3x_0^2 - 12\right)\Delta x$$

pente de 36 $\Rightarrow \quad 36 = 3x_0^2 - 12 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{48}{3}}$

b) 5 étapes : partie non linéaire $= x^3$

① $x_0 \quad \Rightarrow \quad y(x_0) = x_0^3 - 12x_0 - 1$

② $g(x) = x^3$ non linéaire

$g(x + \Delta x) = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x$

③ $y(x) = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x - 12x - 1$

④ $x = x_0 + \Delta x$

donc $y(x_0 + \Delta x) = \boxed{x_0^3} + 3x_0^2 \Delta x \boxed{- 12x_0} - 12\Delta x \boxed{-1}$

$y(x_0)$

⑤ $y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = \left(3x_0^2 - 12\right)\Delta x$

si pente $= 36 \quad \Rightarrow \quad 36 = 3x_0^2 - 12 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{48}{3}}$