Formulaire S5 APP2

3 septembre 2024

1 Définitions

Dans la suite du document :

- T est utilisé pour l'énergie cinétique et est généralement notée E_c ou E_k

$$E_c = T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

- V est utilisé pour l'énergie potentielle et est généralement notée E_p. En particulier, pour la gravitation :

$$E_p = V = mgh \tag{2}$$

- U' est utilisé pour le travail d'une force et est généralement noté W

$$W = U'_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{ds} \tag{3}$$

  avec s l'abscisse curviligne et $\vec{ds}$ un vecteur infinitésimal le long du parcours.
  Cas particulier : si $\vec{F}$ et $\vec{ds}$ sont dans la même direction et si $\vec{F}$ est constant sur tout le parcours, alors $U'_{1,2} = F\ell$ avec ℓ la longueur du parcours.

2 Conservation de l'énergie et travail

1. Conservation de l'énergie

$$T_i + V_i + U'_{1,2} = T_f + V_f \tag{4}$$

ou bien :

$$\Delta T + \Delta V = U'_{1,2} \tag{5}$$

2. Conservation de l'énergie avec seulement des forces conservatrices : dans ce cas le travail des forces conservatrices peut être remplacé par les énergies potentiels et on obtient :

$$T_i + V_i = T_f + V_f \tag{6}$$

ou bien :

$$\Delta T + \Delta V = 0 \tag{7}$$

3 Collision, conservation de la quantité de mouvement

Les équations d'une collision sont données par :

1. sur le plan normal
$$m_A v_{An} + m_B v_{Bn} = m_A v'_{An} + m_B v'_{Bn} \tag{8}$$
2. sur le plan tangentiel
$$m_A v_{At} = m_A v'_{At} \tag{9}$$
$$m_B v_{Bt} = m_B v'_{Bt} \tag{10}$$
3. et le coefficient de restitution est donné par :
$$e = \frac{v'_{Bn} - v'_{An}}{v_{An} - v_{Bn}} \tag{11}$$

4 Polynôme d'approximation ($M < N$)

$$g(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \ldots + a_M\phi_M(x) = \sum_{m=1}^{M} a_m\phi_m(x) \tag{12}$$

4.1 Approximation avec la méthode des équations normales

$$\Phi A = \Psi \tag{13}$$

avec

$$\overbrace{\begin{bmatrix} <\phi_1,\phi_1> & <\phi_1,\phi_2> & \ldots & <\phi_1,\phi_M> \\ <\phi_2,\phi_1> & <\phi_2,\phi_2> & \ldots & <\phi_2,\phi_M> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <\phi_M,\phi_1> & <\phi_M,\phi_2> & \ldots & <\phi_M,\phi_M> \end{bmatrix}}^{\Phi} \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} <\phi_1,y> \\ <\phi_2,y> \\ \vdots \\ <\phi_M,y> \end{bmatrix}}^{\Psi} \tag{14}$$

et la solution est :

$$A = \Phi^{-1}\Psi \tag{15}$$

avec :

$$< \phi_i, \phi_j > = \sum_{n=1}^{N} \phi_i(x_n)\phi_j(x_n) \tag{16}$$

$$< \phi_i, y > = \sum_{n=1}^{N} \phi_i(x_n)y_n \tag{17}$$

4.2 Approximation par projection orthogonale

$$PA = Y \tag{18}$$

avec

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_M(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \dots & \phi_M(x_N) \end{bmatrix}}^{P} \overbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}^{Y} \tag{19}$$

et la solution est :

$$A = (P^T P)^{-1} Y \tag{20}$$

5 Polynôme d'interpolation ($M = N$)

$$g(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \dots + a_N\phi_N(x) = \sum_{m=1}^{M} a_m\phi_m(x) \tag{21}$$

5.1 solution pour les coeeficients

$$PA = Y \tag{22}$$

avec

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \dots & \phi_M(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \phi_2(x_N) & \dots & \phi_M(x_N) \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}}_{Y} \tag{23}$$

et la solution est :

$$A = P^{-1}Y \tag{24}$$

6 Erreur et corrélation

L'erreur quadratique est définie par :

$$\text{Erreur}_{\text{quadratique}} = \sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 = \sum_{n=1}^{N} [g(x_n) - y_n]^2 \tag{25}$$

L'erreur RMS ou tout simplement RMSE est définie par :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N}\text{Erreur}_{\text{quadratique}}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} [g(x_n) - y_n]^2} \tag{26}$$

On définit le coefficient de corrélation R par :

$$R^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} [g(x_n) - \bar{y}]^2}{\sum_{n=1}^{N} [y_n - \bar{y}]^2} \tag{27}$$

avec

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n \tag{28}$$

7 Linéarisation

La série de Taylor est donnée par :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \left.\frac{df(x)}{d(x)}\right|_{x=x_0} \tag{29}$$