H2023

SOLUTIONNAIRE FORMATIF

GEL521

1

$$V_{in} = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{C_1}$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

où q_1 est la charge du condensateur C_1
q_2 " " " " " C_2
i_1 et i_2 sont les courants des boucles gauche et droite respectivement
M est l'inductance entre les 2 bobines L_1 et L_2

Infos sup : $i = \frac{dq}{dt}$; $V_c = \frac{q}{C}$

Donc : $$V_{in} = L_1\frac{d^2q_1}{dt^2} - M\frac{d^2q_2}{dt^2} + R_1\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C_1} \quad (1)$$

$$L_2\frac{d^2q_2}{dt^2} - M\frac{d^2q_1}{dt^2} + R_2\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C_2} = 0 \quad (2)$$

(a) Laplace : $$V_{in} = L_1 s^2 Q_1 - Ms^2Q_2 + R_1 sQ_1 + \tfrac{1}{C_1}Q_1 \quad (3)$$

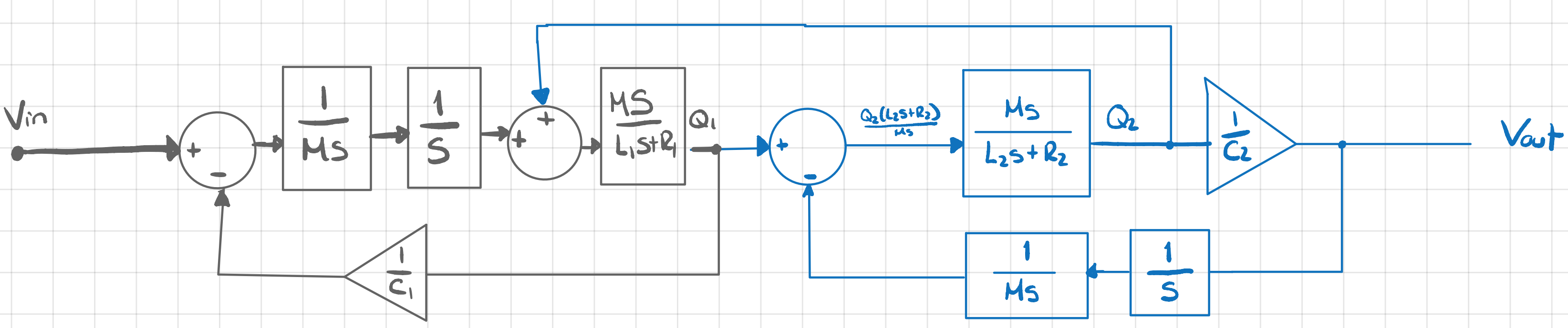
$$L_2 s^2 Q_2 - Ms^2 Q_1 + R_2 sQ_2 + \tfrac{1}{C_2}Q_2 = 0 \quad (4)$$

À partir de (3) : $V_{in} = sQ_1(L_1 s + R_1) + \frac{1}{C_1}Q_1 - Ms^2Q_2$

$V_{in} - \frac{1}{C_1}Q_1 + Ms^2Q_2 = sQ_1(L_1s+R_1) \rightarrow \frac{V_{in}}{Ms^2} - \frac{Q_1}{C_1Ms^2} + Q_2 = \frac{\cancel{s}Q_1(L_1s+R_1)}{Ms^{\cancel{2}}}$

$$\frac{1}{Ms^2}\left(V_{in} - \frac{Q_1}{C_1}\right) + Q_2 = \frac{Q_1(L_1s+R_1)}{Ms}$$

De (4) : $\frac{\cancel{s}Q_2(L_2s+R_2)}{Ms^{\cancel{2}}} = \frac{Ms^2Q_1}{Ms^2} - \frac{\frac{1}{C_2}Q_2}{Ms^2} \Rightarrow \frac{Q_2(L_2s+R_2)}{Ms} = Q_1 - \frac{Q_2}{C_2Ms^2}$



(b) Fonction de transfert V_{out}/V_{in}

$$V_{in} = Q_1\left(L_1s^2 + R_1s + \tfrac{1}{C_1}\right) - Ms^2Q_2 \quad (5) \quad \text{(ré-écriture de (3))}$$

$$Ms^2Q_1 = Q_2\left(L_2s^2 + R_2s + \tfrac{1}{C_2}\right) \quad (6) \quad \text{(ré-écriture de (4))}$$

Mais $V_{out} = V_{C_2} = Q_2/C_2 \quad (7)$

$\therefore Ms^2Q_1 = C_2V_{out}\left(L_2s^2 + R_2s + \tfrac{1}{C_2}\right)$

$$Q_1 = \frac{C_2}{Ms^2}\cdot\left(L_2s^2 + R_2s + \tfrac{1}{C_2}\right)V_{out} \quad (8)$$

Remplace (7) et (8) dans (5)

$$V_{in} = \frac{C_2\left(L_2s^2 + R_2s + \frac{1}{C_2}\right)\left(L_1s^2 + R_1s + \frac{1}{C_1}\right)V_{out}}{Ms^2} - Ms^2C_2V_{out}$$

$$= \left[\frac{\left(L_2s^2 + R_2s + \frac{1}{C_2}\right)\left(L_1s^2 + R_1s + \frac{1}{C_1}\right) - M^2s^4}{Ms^2}\right]C_2V_{out}$$

$$\boxed{\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{Ms^2}{C_2\left[\left(L_2s^2 + R_2s + \frac{1}{C_2}\right)\left(L_1s^2 + R_1s + \frac{1}{C_1}\right) - M^2s^4\right]}}$$

(c) Représentation état

(i) Var. état : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ i_1 \\ q_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$

(ii) Éq. des dérivées des var état, exprimées en variables d'état et entrée :

$\dot{x}_1 = \dot{q}_1 = i_1$

$\dot{x}_2 = \dot{i}_1$: Je sais que

$$V_{in} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{C_1} \quad \text{et} \quad L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

J'isole di_2/dt dans chaque éq. :

$$M\, di_2/dt = L_1\frac{di_1}{dt} - V_{in} + R_1 i_1 + q_1/C_1 \qquad L_2\, di_2/dt = M\frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 - q_2/C_2$$

$$di_2/dt = \frac{L_1}{M}\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{M}V_{in} + \frac{R_1}{M}i_1 + \frac{1}{C_1M}q_1 \quad ⑨ \qquad di_2/dt = \frac{M}{L_2}\,di_1/dt - \frac{R_2}{L_2}i_2 - \frac{1}{C_2L_2}q_2 \quad ⑩$$

⑨ = ⑩

$$\frac{L_1}{M}\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{M}V_{in} + \frac{R_1}{M}i_1 + \frac{1}{C_1M}q_1 = \frac{M}{L_2}\,di_1/dt - \frac{R_2}{L_2}i_2 - \frac{1}{C_2L_2}q_2$$

$$\underbrace{\left(\frac{L_1}{M} - \frac{M}{L_2}\right)}_{\frac{L_1L_2 - M^2}{ML_2}}\dot{i}_1 = \frac{1}{M}V_{in} - \frac{R_1}{M}i_1 - \frac{1}{C_1M}q_1 - \frac{R_2}{L_2}i_2 - \frac{1}{C_2L_2}q_2$$

$$\therefore \dot{i}_1 = \frac{\cancel{M}L_2}{L_1L_2-M^2}\left[\frac{-1}{C_1\cancel{M}}\right]q_1 + \frac{\cancel{M}L_2}{L_1L_2-M^2}\left[\frac{-R_1}{\cancel{M}}\right]i_1 + \frac{M\cancel{L_2}}{L_1L_2-M^2}\left[\frac{-1}{C_2\cancel{L_2}}\right]q_2 + \frac{M\cancel{L_2}}{L_1L_2-M^2}\left[\frac{-R_2}{\cancel{L_2}}\right]i_2 + \frac{L_2}{L_1L_2-M^2}V_{in}$$

$\dot{x}_3 = \dot{q}_2 = i_2$

$\dot{x}_4 = \dot{i}_2$: Suivant la même logique que pour $\dot{i}_1$:

$$V_{in} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + \frac{q_1}{C_1} \quad \text{et} \quad L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

$$\dot{i}_1 = \frac{V_{in}}{L_1} + \frac{M}{L_1}\dot{i}_2 - \frac{R_1}{L_1}i_1 - \frac{1}{L_1C_1}q_1 \qquad \dot{i}_1 = \frac{L_2}{M}\dot{i}_2 + \frac{R_2}{M}i_2 + \frac{1}{C_2M}q_2$$

$$\frac{V_{in}}{L_1} + \frac{M}{L_1}\dot{i}_2 - \frac{R_1}{L_1}i_1 - \frac{1}{L_1C_1}q_1 = \frac{L_2}{M}\dot{i}_2 + \frac{R_2}{M}i_2 + \frac{1}{C_2M}q_2$$

$$\left[\frac{M}{L_1} - \frac{L_2}{M}\right]\dot{i}_2 = \frac{R_2}{M}i_2 + \frac{1}{C_2M}q_2 + \frac{1}{L_1C_1}q_1 + \frac{R_1}{L_1}i_1 - \frac{1}{L_1}V_{in}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{L_1M}{M^2 - L_1L_2}\left[\frac{1}{L_1C_1}q_1 + \frac{R_1}{L_1}i_1 + \frac{1}{C_2M}q_2 + \frac{R_2}{M}i_2 - \frac{1}{L_1}V_{in}\right]$$

$$\therefore \dot{i}_2 = \frac{M}{C_1(M^2-L_1L_2)}q_1 + \frac{MR_1}{M^2-L_1L_2}i_1 + \frac{L_1}{C_2(M^2-L_1L_2)}q_2 + \frac{L_1R_2}{M^2-L_1L_2}i_2 - \frac{M}{M^2-L_1L_2}V_{in}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{i}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ L_2/(M^2-L_1L_2) & \frac{R_1L_2}{(M^2-L_1L_2)} & \frac{M}{C_2(M^2-L_1L_2)} & \frac{R_2M}{(M^2-L_1L_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M}{C_1(M^2-L_1L_2)} & \frac{MR_1}{(M^2-L_1L_2)} & \frac{L_1}{C_2(M^2-L_1L_2)} & \frac{L_1R_2}{(M^2-L_1L_2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ i_1 \\ q_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-L_2}{M^2-L_1L_2} \\ 0 \\ \frac{-M}{M^2-L_1L_2} \end{bmatrix} V_{in}$$

$$\begin{bmatrix} V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ i_1 \\ q_2 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_{in}$$

Pas un lien «direct» !

$\boxed{2}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$

(a) Fonction transfert $Y(s)/U(s)$

Rappelons équations modèle état : $\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned}$

Laplace : $\begin{aligned} sX &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned}$

J'isole X : $(sI - A)X = BU \rightarrow X = (sI-A)^{-1}BU$

Donc : $Y = C\left[(sI-A)^{-1}BU\right] + DU \rightarrow Y = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U$

$\therefore \dfrac{Y}{U} = C(sI-A)^{-1}B + D$

Ici : $(sI - A) = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}$

Rappel de l'inverse (résultat 2x2 sur feuille éq.)

Mineurs : $M_{11} = (s+5) \qquad M_{12} = 6 \qquad$ car $M_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{bmatrix}$

$M_{21} = -1 \qquad M_{22} = s$

Co-facteurs : $C_{mn} = (-1)^{m+n} M_{mn} \qquad$ Donc : $C_{11} = s+5 \quad C_{12} = -6$

$C_{21} = +1 \quad C_{22} = s$

Matrice co-facteurs $= \begin{bmatrix} (s+5) & -6 \\ 1 & s \end{bmatrix}$

Adjointe = Matrice co-facteurs^T $= \begin{bmatrix} (s+5) & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$

Inverse $= \dfrac{1}{\underbrace{\Delta}_{\text{déterminant}}}$ Adjointe $\qquad$ où $\Delta = s(s+5) - (-1)(6) = s^2 + 5s + 6$

$\therefore (sI-A)^{-1} = \dfrac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix} (s+5) & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+5)}{\Delta} & 1/\Delta \\ -6/\Delta & s/\Delta \end{bmatrix}$

Donc $\dfrac{Y}{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(s+5)}{\Delta} & 1/\Delta \\ -6/\Delta & s/\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{(s+5)}{\Delta} - \frac{6}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} + \frac{s}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{s+1}{\Delta}$

$$\boxed{\therefore \frac{Y}{U} = \frac{s+1}{s^2+5s+6}}$$

(b) Equation caractéristique

$\boxed{s^2 + 5s + 6 = 0} \rightarrow$ pôles : $s = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P_1 &= -2 \\ P_2 &= -3 \end{aligned}}$ $\}$ stable !

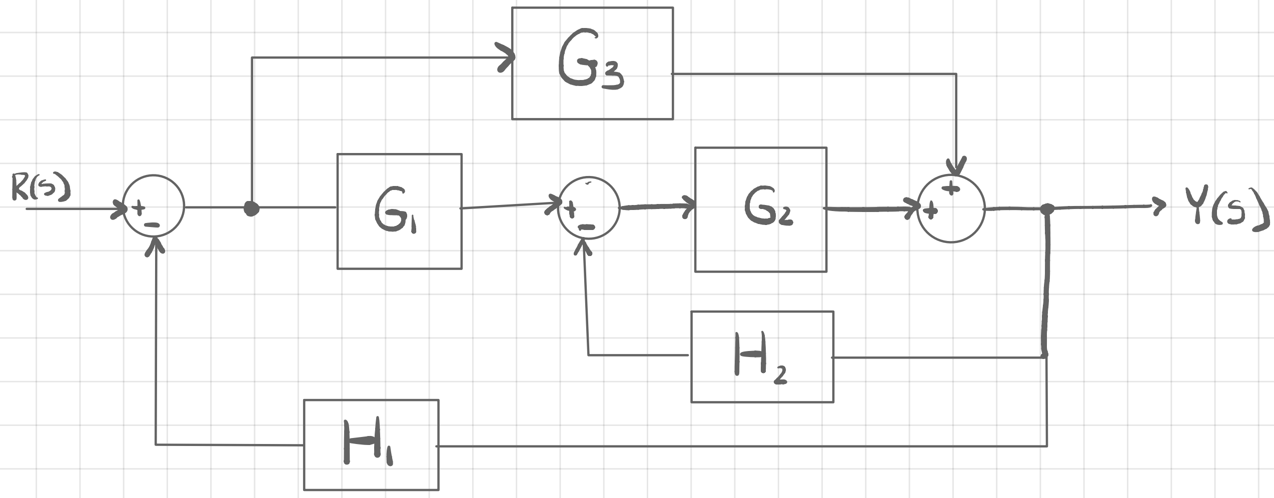
(c) Etat → EDO

Le plus simple : Etat → FT → EDO

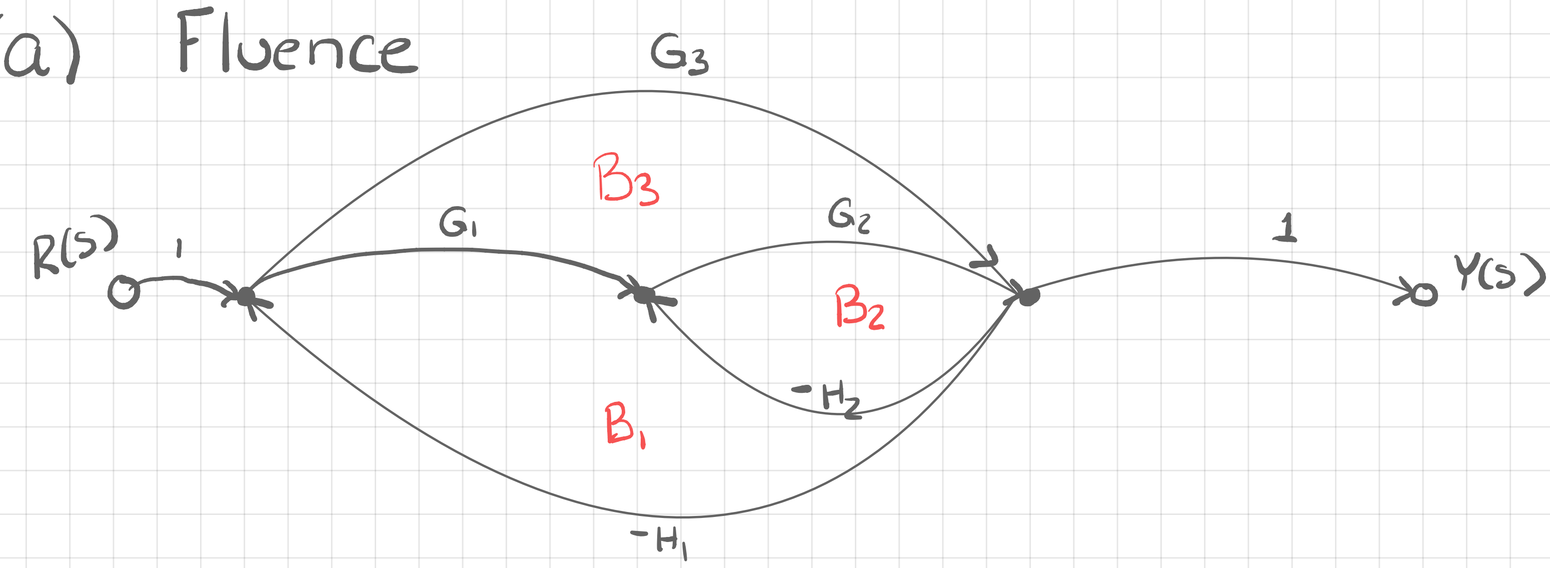
$\dfrac{Y}{U} = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6} \rightarrow s^2Y + 5sY + 6Y = sU + U$

$$\boxed{\therefore \ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{u} + u}$$

3



(a) Fluence



(b) FT : Mason

(i) Parcours directs : 2 $\quad T_1 = G_1 G_2$

$T_2 = G_3$

(ii) 3 boucles : $G_{B1} = -G_1 G_2 H_1$

$G_{B2} = -G_2 H_2$

$G_{B3} = -G_3 H_1$

(iii) Boucles ø contact : aucune

(iv) $\Delta = 1 - (G_{B1} + G_{B2} + G_{B3})$

$\Delta = 1 - (-G_1 G_2 H_1 - G_2 H_2 - G_3 H_1)$

$\Delta = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_1$

(v) $\Delta_k = 1 -$ somme gains boucles touchent ø parcours k

$\Delta_1 = 1 - 0$

$\Delta_2 = 1 - 0$

$$\boxed{\therefore \; G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{2} T_k \Delta_k = \frac{G_1 G_2 + G_3}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_1}}$$

$\boxed{4}$ $\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + kx = 3u + \underbrace{5\dot{u}}_{\text{on a une dérivée de l'entrée !}}$

(a) Modèle état

(i) Ordre dérivée gauche : 3
Ordre dérivée droite : 1 } On ré-écrit l'équation avec ordre 3 à gauche et à droite

$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + kx = 3u + 5\dot{u} + b_2\ddot{u} + b_3\dddot{u} \qquad (b_2 = b_3 = 0)$$

(ii) On pose de nouvelles variables d'état, y_1, y_2, y_3 (on utilise ici y car nos variables originales étaient x)

$y_1 = x + \beta_0 u$
$y_2 = \dot{y}_1 + \beta_1 u = \dot{x} + \beta_0\dot{u} + \beta_1 u$
$y_3 = \dot{y}_2 + \beta_2 u = \ddot{x} + \beta_0\ddot{u} + \beta_1\dot{u} + \beta_2 u$

OPTION FEUILLE ÉQUATION
$y_1 = x - \beta_0 u$
$y_2 = \dot{y}_1 - \beta_1 u = \dot{x} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u$
$y_3 = \dot{y}_2 - \beta_2 u = \ddot{x} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u$

(iii) On ré-écrit les équations de (ii) pour isoler nos variables originales x, $\dot{x}$ et $\ddot{x}$

$x = y_1 - \beta_0 u$
$\dot{x} = y_2 - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u$
$\ddot{x} = y_3 - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u$

$x = y_1 + \beta_0 u$
$\dot{x} = y_2 + \beta_0\dot{u} + \beta_1 u$
$\ddot{x} = y_3 + \beta_0\ddot{u} + \beta_1\dot{u} + \beta_2 u$

Et on dérive la dernière équation pour avoir une expression pour $\dddot{x}$:

$\dddot{x} = \dot{y}_3 - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u}$

$\dddot{x} = \dot{y}_3 + \beta_0\dddot{u} + \beta_1\ddot{u} + \beta_2\dot{u}$

(iv) On remplace les expressions pour $x, \dot{x}, \ddot{x}$ et $\dddot{x}$ trouvées en (iii) dans l'équation d'origine balancée ordre 3 (i.e. l'équation en (i)) :

$$[\dot{y}_3 - \beta_0\dddot{u} - \beta_1\ddot{u} - \beta_2\dot{u}] + 4[y_3 - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u] + 8[y_2 - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u] + k[y_1 - \beta_0 u] = 3u + 5\dot{u} + b_2\ddot{u} + b_3\dddot{u}$$

$$[\dot{y}_3 + \beta_0\dddot{u} + \beta_1\ddot{u} + \beta_2\dot{u}] + 4[y_3 + \beta_0\ddot{u} + \beta_1\dot{u} + \beta_2 u] + 8[y_2 + \beta_0\dot{u} + \beta_1 u] + k[y_1 + \beta_0 u] = 3u + 5\dot{u} + b_2\ddot{u} + b_3\dddot{u}$$

Et on ré-arrange pour avoir l'équation de $\dot{y}_3$:

$$\dot{y}_3 = -4y_3 - 8y_2 - ky_1 + (3 + 4\beta_2 + 8\beta_1 + k\beta_0)u + (5 + \beta_2 + 4\beta_1 + 8\beta_0)\dot{u} + (b_2 + \beta_1 + 4\beta_0)\ddot{u} + (b_3 + \beta_0)\dddot{u}$$

$$\dot{y}_3 = -4y_3 - 8y_2 - ky_1 + (3 - 4\beta_2 - 8\beta_1 - k\beta_0)u + (5 - \beta_2 - 4\beta_1 - 8\beta_0)\dot{u} + (b_2 - \beta_1 - 4\beta_0)\ddot{u} + (b_3 - \beta_0)\dddot{u}$$

(v) Mais le but de la technique est d'éliminer les dérivées de u... Donc quelles valeurs prendront $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pour que les coefficients de $\dot{u}$, $\ddot{u}$ et $\dddot{u}$ dans l'équation précédente soient nuls:

$\dddot{u}$: $\cancel{b_3}^{\,0\ (\text{voir (i)})} + \beta_0 = 0 \rightarrow \beta_0 = 0$
$\ddot{u}$: $\cancel{b_2}^{\,0} + \beta_1 + 4\cancel{\beta_0}^{\,0} = 0 \rightarrow \beta_1 = 0$
$\dot{u}$: $5 + \beta_2 + 4\cancel{\beta_1}^{\,0} + 8\cancel{\beta_0}^{\,0} = 0 \rightarrow \beta_2 = -5$

$\cancel{b_3}^{\,0} - \beta_0 = 0 \rightarrow \beta_0 = 0$
$\cancel{b_2} - \beta_1 - 4\beta_0 = 0 \rightarrow \beta_1 = 0$
$5 - \beta_2 - 4\beta_1 - 8\beta_0 = 0 \rightarrow \beta_2 = 5$

(vi) Équation de $\dot{y}_3$ devient :

$\dot{y}_3 = -4y_3 - 8y_2 - ky_1 - 17u$
$\dot{y}_3 = -4y_3 - 8y_2 - ky_1 - 17u$ } pareil! et

$\dot{y}_1 = y_2 - \beta_1 u = y_2$
$\dot{y}_2 = y_3 - \beta_2 u = y_3 - (-5)u$
$x = y_1 - \beta_0 u = y_1$

$\dot{y}_1 = y_2 + \beta_1 u = y_2$
$\dot{y}_2 = y_3 + \beta_2 u = y_3 + 5u$
$x = y_1 + \beta_0 u = y_1$

(vii) Modèle d'état :

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -17 \end{bmatrix} u \\ [x] &= [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + [0]u \end{aligned}}$$

(b) Équation caractéristique

$$|\lambda I - A| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -8 & -4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 8 & \lambda+4 \end{bmatrix} \right| = 0$$

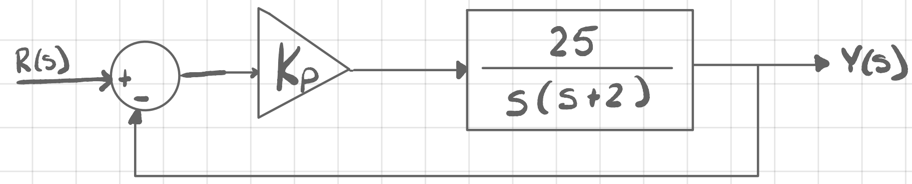
$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ k & 8 & \lambda+4 \end{bmatrix} \right| = \lambda(-1)^{1+1} \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 8 & \lambda+4 \end{bmatrix} \right| - 1(-1)^{1+2} \left| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & \lambda+4 \end{bmatrix} \right| + 0 = 0$$

$$= \lambda[\lambda(\lambda+4) - (-1)8] - (-1)[0 - (-1)k] = 0$$

$$= \lambda[\lambda^2 + 4\lambda + 8] + k$$

$$\boxed{\therefore \lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda + k = 0}$$

5



(a) Calculer K_p pour $\zeta = 0.5$

(i) FTBF :

$$FTBO = \frac{25 K_p}{s(s+2)}$$

$$FTBF = \frac{FTBO}{\underbrace{1 + FTBO}_{\text{Retour unitaire donc pas besoin d'ajuster FTBO}}} = \frac{\frac{25K_p}{s(s+2)}}{\frac{s(s+2)+25K_p}{s(s+2)}} = \frac{25K_p}{s^2+2s+25K_p}$$

Forme standard ordre 2 : $G(s) = \dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Donc : $\omega_n^2 = 25K_p \rightarrow \omega_n = 5\sqrt{K_p}$

et $2\zeta\omega_n = 2 \rightarrow 2\zeta \cdot (5\sqrt{K_p}) = 2 \rightarrow 10\zeta\sqrt{K_p} = 2$

Mais on veut $\zeta = 0.5 \rightarrow$
$$5\sqrt{K_p} = 2$$
$$\sqrt{K_p} = 0.4$$
$$K_p = 0.16$$

(b) Calculer :

(i) $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_a}$ où $\omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 5\sqrt{K_p}\sqrt{0.75} = 1.7320508$

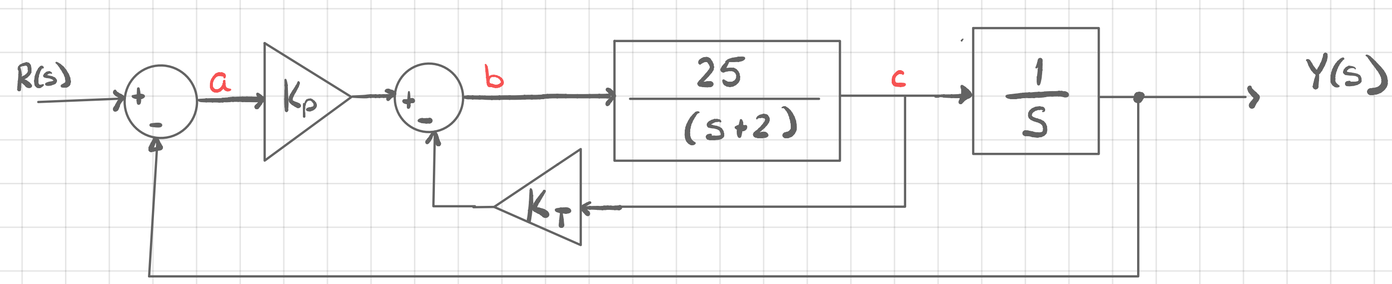
$$\boxed{t_p = 1.81\,s}$$

(ii) Dépassement max, $M_p = 100e^{-\pi/\tan\phi}$, où $\phi = acos(\zeta) = \pi/3$

$M_p = 100e^{-\pi/\tan(\pi/3)} = 100e^{-\pi/\sqrt{3}}$ $\quad \tan(\phi) = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

$$\boxed{M_p = 16.3\%}$$

(c)



Calculer K_p et K_t pour $\zeta = 0.5$ et $\omega_n = 4$ rad/s

$$\left.\begin{aligned} a &= R - Y \\ b &= K_p a - K_T c \\ c &= \left[\frac{25}{(s+2)}\right] b \end{aligned}\right\} \quad K_p a - K_T c = \left[\frac{(s+2)}{25}\right] c \qquad a = \left[\frac{(s+2)}{25K_p} + \frac{K_T}{K_p}\right] c$$

$$\rightarrow R - Y = \left[\frac{(s+2)}{25K_p} + \frac{K_T}{K_p}\right] c \qquad \frac{25K_p(R-Y)}{(s+2)+25K_T} = c$$

$$Y = \frac{c}{s}$$

$$Y = \frac{1}{s}\left(\frac{25K_p(R-Y)}{(s+2)+25K_T}\right) = \frac{25K_p}{s[(s+2)+25K_T]} R - \frac{25K_p}{s[(s+2)+25K_T]} Y$$

$$Y\left[1 + \frac{25K_p}{s[(s+2)+25K_T]}\right] = \frac{25K_p}{s[(s+2)+25K_T]} R \Rightarrow \frac{Y}{R} = \frac{25K_p}{s^2 + (25K_T+2)s + 25K_p}$$

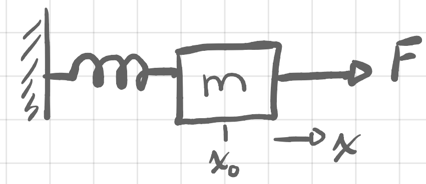
Forme standard ordre 2 : $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

On veut $\omega_n = 4\,rad/s \rightarrow 4^2 \cdot 16 = 25K_p \rightarrow \boxed{K_p = 0.64}$

$\zeta = 0.5 \rightarrow 2\zeta\omega_n = 4 = (25K_T + 2) \rightarrow \boxed{K_T = 0.08}$

6

$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x^2 + \sqrt{F}$$



(i) Equation d'équilibre

$$m\ddot{x}_e = -k_1 x_e - k_2 x_e^2 + \sqrt{F_e}$$

À l'équilibre, $\dot{x}_e = \ddot{x}_e = 0 \rightarrow x_e^2 + \frac{k_1}{k_2}x_e - \frac{\sqrt{F_e}}{k_2} = 0$

$$x_e = \frac{-\frac{k_1}{k_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{F_e}}{k_2}}}{2} = \frac{-k_1}{2k_2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_2^2} + \frac{\sqrt{F_e}}{k_2}}$$

Pour que $x_e \geq 0$, considérant que $F \geq 0$:

$$x_e = \frac{-k_1}{2k_2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_2^2} + \frac{\sqrt{F_e}}{k_2}}$$

(ii) Linéarisons les termes non-linéaire avec Taylor en considérant les variables d'état (et entrée)

Ici, les variables d'état : x et $\dot{x}$ (ordre des dérivées de l'équation d'origine : 2)

$$k_2x^2 \simeq k_2x_e^2 + \frac{\partial k_2x^2}{\partial x}\Big|_e \Delta x + \frac{\partial k_2x^2}{\partial \dot{x}}\Big|_e \Delta\dot{x} = k_2x_e^2 + 2k_2x_e\Delta x + 0$$

$$\sqrt{F} \simeq \sqrt{F_e} + \frac{\partial\sqrt{F}}{\partial F}\Big|_e \Delta F = \sqrt{F_e} + 0.5F_e^{-1/2}\Delta F = \sqrt{F_e} + \frac{1}{2\sqrt{F_e}}\Delta F$$

(iii) Remplaçons les termes linéarisés dans l'équation d'origine :

$$m\ddot{x} = -k_1x - [k_2x_e^2 + 2k_2x_e\Delta x] + \left[\sqrt{F_e} + \frac{1}{2\sqrt{F_e}}\right]\Delta F$$

(iv) Soustraire l'éq. d'équilibre :

$$m\ddot{x} - m\ddot{x}_e = -k_1x - k_1x_e - [\cancel{k_2x_e^2} + 2k_2x_e\Delta x] + \cancel{k_2x_e^2} + \left[\cancel{\sqrt{F_e}} + \frac{1}{2\sqrt{F_e}}\right]\Delta F - \cancel{\sqrt{F_e}}$$

(v) Convertir en Δ : $\Delta x = x - x_e$, $\Delta\dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_e$, $\Delta\ddot{x} = \ddot{x} - \ddot{x}_e$

$$m\Delta\ddot{x} = -k_1\Delta x - 2k_2x_e\Delta x + \frac{1}{2\sqrt{F_e}}\Delta F$$

$$\boxed{\text{Equation linéaire : } \Delta\ddot{x} = \frac{(-k_1 - 2k_2x_e)}{m}\Delta x + \frac{1}{2m\sqrt{F_e}}\Delta F}$$