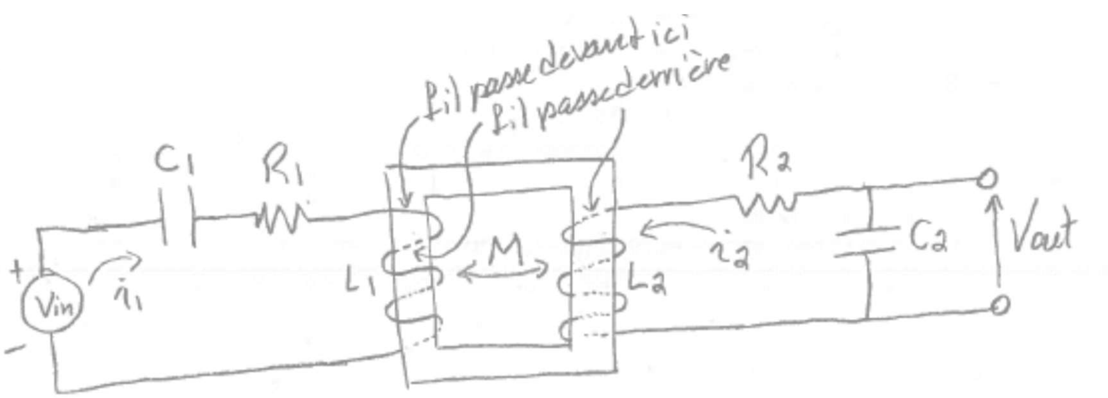
S5e – GEL521
Examen formatif

Partie théorique

Question 1

Soit le circuit électrique illustré à la figure ci-bas qui consiste en deux circuits couplés par un transformateur :



Ce circuit mène aux équations différentielles suivantes (équations dynamiques) :

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + R_1\, i_1 + \frac{q_1}{C_1} = V_{in}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + R_2\, i_2 + \frac{q_2}{C_2} = 0$$

Rappel:

$i_1 = dq_1/dt$ $\quad$ $i_{condensateur} = C\, dV_c/dt$

$i_2 = dq_2/dt$ $\quad$ $V_{inductance} = L\, di/dt$

où q_1 est la charge du condensateur C_1, i_1 est le courant dans la boucle de gauche dans le sens indiqué, q_2 est la charge du condensateur C_2, i_2 est le courant dans la boucle de droite dans le sens indiqué, M est l'inductance mutuelle entre les deux bobines d'inductances L_1 et L_2 enroulées autour du noyau de fer qui couple les circuits de droite et de gauche.

a) À partir des équations dynamiques dessinez le schéma bloc du système. Chaque bloc du schéma ne doit pas être plus que d'ordre 1.
b) Trouvez la fonction du transfert entre la sortie V_{out} et l'entrée V_{in} de façon algébrique.
c) Obtenez la représentation d'état ABCD. Utilisez $x_1 = q_1, x_2 = i_1, x_3 = q_2$ et $x_4 = i_2$ comme variables d'état.

Question 2

Un système est décrit par le modèle variable d'état suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = 0$$

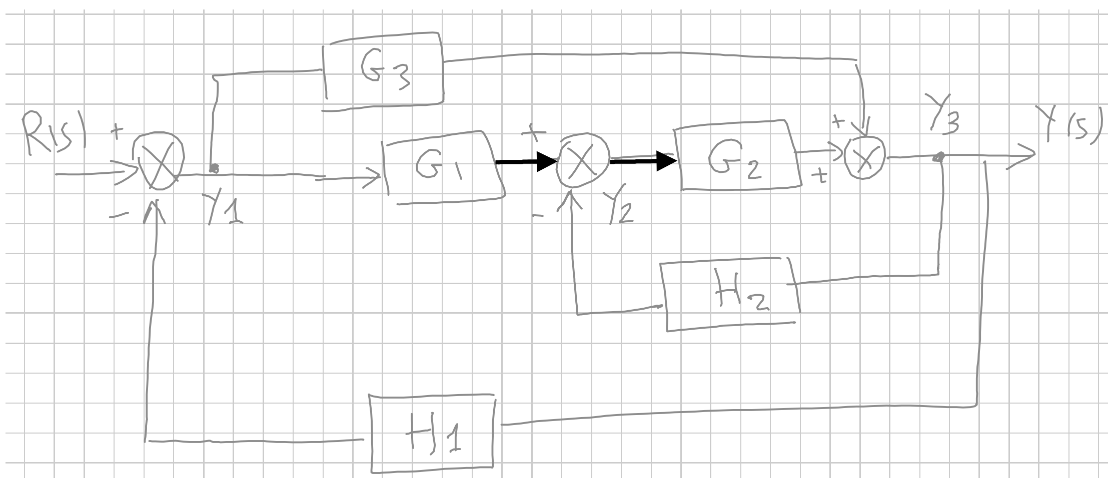
(a) Trouver la fonction de transfert $\dfrac{Y(s)}{U(s)}$.

(b) Donner l'équation qui permettra de trouver les pôles de ce système et trouver ces pôles.

(c) Trouver l'équation différentielle associée à ce modèle variable d'état.

Question 3

Le schéma bloc d'un système est le suivant :



(a) Tracer le graphe de fluence de ce système.

(b) Trouver la fonction de transfert $\dfrac{Y(s)}{R(s)}$ en utilisant la loi de Mason.

Question 4

Un système est décrit par l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

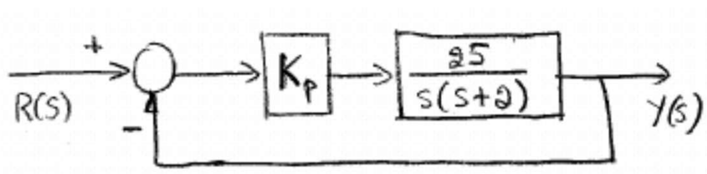
$$\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + kx = 3u + 5\dot{u},$$

où u est l'entrée et la sortie est $y = x$.

a) Trouver les matrices ABCD d'un modèle à variables d'état.
b) Quelle est l'équation caractéristique de ce système?

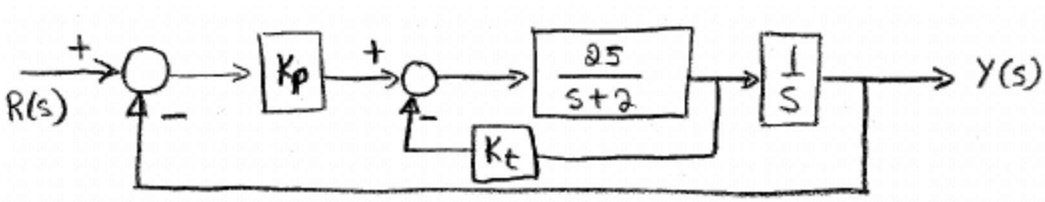
Question 5

Un système est représenté par le schéma bloc suivant :



(a) Calculer la valeur de K_p pour que le système en boucle fermée ait un facteur d'amortissement $\zeta = 0.5$.
(b) Avec cette valeur de K_p, calculer :
    i. Le temps du premier maximum
    ii. Le pourcentage de dépassement maximum

Un retour tachymétrique est ajouté au système, ce qui donne lieu au schéma bloc suivant :



(c) Calculer K_p et K_t pour obtenir un facteur d'amortissement $\zeta = 0.5$ et une fréquence naturelle $\omega_n = 4\ rad/s$ en boucle fermée.

Question 6

Un système dynamique (un ressort duh) est régi par l'équation différentielle suivante où m est la masse, x la position, F une force externe positive dans le sens de x et k_1, k_2 des constantes strictement positives :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x^2 + \sqrt{F}$$

Solutionnez l'équation d'équilibre pour une force arbitraire F_e positive et développez la version linéaire de cette équation.

Partie pratique

Question 7

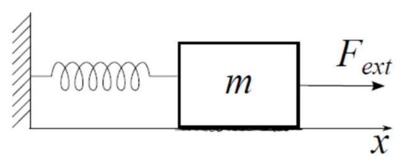
Un système possède la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1.5s^4 + 28.5s^3 + 202.8s^2 + 652.2s + 740.4}{s^5 + 23s^4 + 210s^3 + 950s^2 + 2044s + 1632}$$

(a) Réduire la fonction de transfert à son (ou ses) pôle(s) dominant(s).
(b) Comparer la réponse à un échelon unitaire du système réduit avec celle du système original.
(c) Quelle est la valeur du facteur d’amortissement ?

Questions 8

Soit un système masse-ressort amorti avec masse *m*, coefficient de friction *b* et constante de rappel de ressort *k*. Une force extérieure F_{ext} peut être appliquée sur la masse. Le système est illustré à la figure ici-bas.



L’équation dynamique décrivant ce système, qui est d’ordre 2, est donnée par

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}$$

On ne connait pas *m*, *b* et *k* et on désire identifier ces paramètres à l’aide de la méthode des moindres carrés. À cette fin, on fait une expérience dans laquelle on applique un échelon de force de 50 N et on mesure la position de la masse en fonction du temps. On a sauvegardé les données de ces mesures dans le fichier DonneesIdentifMasseRessortAmorti.mat. À l’aide de ces données, trouvez les valeurs de *m*, *b* et *k*.

Question 9

Note : Faire de préférence cet exercice avec la fonction Matlab *lsim*

a) Calculer et tracer les réponses à l'impulsion et à un échelon de 50 du système décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [0]$$

b) Simuler la réponse des états $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$, lorsque l'entrée est :

$$u(t) = \begin{cases} 100 & 0 \le t < 2 \\ 20 & t > 2 \end{cases}$$

et que les conditions initiales sont :

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Note : Ceci est le système masse-ressort amorti du problème précédent.