FORMULAIRE D'EQUATIONS

SYSTEME D'ORDRE 1 STANDARD

$$\frac{K}{1+\tau s} \qquad t_s(2\%) = 4\tau$$

SYSTEME D'ORDRE 2 STANDARD (Note : Dans Ogata, l'angle ϕ est dénoté par β et ω_a est dénoté par ω_d.)

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$M_p = 100e^{-\pi/tan\phi}$ $\qquad t_p = \frac{\pi}{\omega_a}$ $\qquad t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

$\zeta = cos\phi$ $\qquad \omega_a = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$t_r(10-90\%) \approx \frac{1+1.1\zeta+1.4\zeta^2}{\omega_n}$ $\qquad t_r(0-100\%) \approx \frac{\pi - cos^{-1}\zeta}{\omega_a}$

INVERSE D'UNE MATRICE

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} adjointe(A)$ $\qquad$ où $\Delta = \text{déterminant}(A)$

$adjointe(A) = Cof(A)^T$
$Cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j}M_{ij}$

, où M_{ij} est le mineur, c'est-à-dire le déterminant de la matrice A réduite en éliminant la rangée i et la colonne c.

LOI DE MASON

$$G = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N} T_k\Delta_k$$

Où Δ = 1
– (somme des gains des boucles individuelles)
+ (somme des produits des gains de toutes les combinaisons possibles de 2 boucles individuelles ne se touchant pas)
– (somme des produits des gains de toutes les combinaisons possibles de 3 boucles individuelles ne se touchant pas)
+ …

Δ_k = partie de Δ qui ne touche pas au k[e] chemin direct

EDO → MODELE ETAT

Un système dynamique représenté par l'EDO

$$\dddot{x} + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = b_3\dddot{u} + b_2\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_0 u, \tag{34}$$

dont la sortie est

$$y = x \tag{35}$$

peut être représenté par les équations d'état suivantes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u, \end{aligned} \tag{36}$$

avec

$$\begin{gathered} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = [\beta_0], \end{gathered} \tag{37}$$

où les variables d'état sont définies par

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \beta_0 u, \\ x_2 &= \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x} - \beta_0\dot{u} - \beta_1 u, \\ x_3 &= \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{x} - \beta_0\ddot{u} - \beta_1\dot{u} - \beta_2 u \end{aligned} \tag{38}$$

Les constantes β_0, β_1 et β_2 satisfont au système d'équations

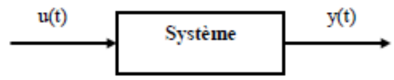
$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_3, \\ \beta_1 &= b_2 - a_2\beta_0, \\ \beta_2 &= b_1 - a_2\beta_1 - a_1\beta_0. \end{aligned} \tag{39}$$

et β_3 est définie par

$$\beta_3 = b_0 - a_2\beta_2 - a_1\beta_1 - a_0\beta_0. \tag{40}$$

IDENTIFICATION PAR MOINDRES CARRES

Un système linéaire peut être modélisé par une équation différentielle entre l'entré *u(t)* et la sortie *y(t)*



$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du}{dt} + b_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \ldots + b_m \frac{d^m u}{dt^m} \qquad (1)$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert associée au modèle linéaire continu du système sous forme canonique est définie par :

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n} U(s) \qquad (2)$$

L'**identification** de systèmes dynamiques consiste à trouver les coefficients a_i et b_i de chacune des i dérivées des entrées et des sorties de façon à ce que la réponse de la fonction de transfert corresponde à la réponse temporelle échantillonnée sur le système réel.

En observant l'équation (1), nous voyons que la relation entre la sortie *y(t)*, l'entrée *u(t)* et les dérivées constitue une relation linéaire. En isolant *y(t)*, l'équation (1) se traduit par :

$$y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t) + \frac{b_1}{a_0}\frac{du}{dt} + \frac{b_2}{a_0}\frac{d^2u}{dt^2} + \ldots + \frac{b_m}{a_0}\frac{d^m u}{dt^m} - \frac{1}{a_0}\left[a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \ldots + a_n \frac{d^n y}{dt^n} \right] \qquad (3)$$

Pour simplifier la nomenclature, on introduit les vecteurs X_i et Y tels que :

$$Y = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_p) \end{bmatrix},\ X_1 = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ \vdots \\ u(t_p) \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} (du/dt)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (du/dt)_{t=t_p} \end{bmatrix},\ \ldots,\ X_{m+1} = \begin{bmatrix} (d^m u/dt^m)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (d^m u/dt^m)_{t=t_p} \end{bmatrix}$$

$$X_{m+2} = \begin{bmatrix} (dy/dt)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (dy/dt)_{t=t_p} \end{bmatrix},\ \ldots,\ X_{m+n+1} = \begin{bmatrix} (d^n y/dt^n)_{t=t_1} \\ \vdots \\ (d^n y/dt^n)_{t=t_p} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Les valeurs de $Y(k)$ et $X_1(k)$ correspondent aux mesures des entrées et des sorties y et u et les valeurs de $X_i(k)$ aux dérivées discrètes des entrées et des sorties.
De plus, la substitution des coefficients a_i et b_i par α_i permet d'obtenir la forme suivante :

$$\underbrace{y(t)}_{Y} = \underbrace{\frac{b_0}{a_0}}_{\alpha_1}\underbrace{u(t)}_{X_1} + \underbrace{\frac{b_1}{a_0}}_{\alpha_2}\underbrace{\frac{du}{dt}}_{X_2} + \underbrace{\frac{b_2}{a_0}}_{\alpha_3}\underbrace{\frac{d^2u}{dt^2}}_{X_3} + \ldots + \underbrace{\frac{b_m}{a_0}}_{\alpha_{m+1}}\underbrace{\frac{d^m u}{dt^m}}_{X_{m+1}} + \underbrace{-\frac{a_1}{a_0}}_{\alpha_{m+2}}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{X_{m+2}} + \underbrace{-\frac{a_2}{a_0}}_{\alpha_{m+3}}\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{X_{m+3}} - \ldots + \underbrace{-\frac{a_n}{a_0}}_{\alpha_{m+n+1}}\underbrace{\frac{d^n y}{dt^n}}_{X_{m+n+1}} \qquad (5)$$

La technique d'**identification par moindres carrés** est analogue à la régression linéaire (trouver la droite passant le plus près possible d'une série de points répartis dans le plan) et consiste à trouver la courbe définie par l'équation (5) qui passe le plus près possible de tous les points k de l'échantillon de mesure.
La concaténation des vecteurs X_i tels que :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{m+n+1} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

permet d'écrire l'équation (5) sous la forme matricielle suivante :

$$Y = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{m+n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix} \qquad (7)$$

La multiplication à droite de cette équation par la matrice transposée de X (les lignes deviennent les colonnes) fait apparaitre les matrices de corrélations R et P :

$$\underbrace{X^T X}_{R} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m+n+1} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{X^T Y}_{P}$$

où A est le vecteur colonne des coefficients α_i, $R = X^T X$ et $P = X^T Y$.
Cette équation se résout par :

$$RA = P \Rightarrow A = R^{-1} P \qquad (8)$$

où R^{-1} est la matrice inverse de R.
L'obtention de la matrice A permet d'obtenir les coefficients a_i et b_i recherchés grâce à la correspondance établie par l'équation (5).