

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
Faculté de génie  
Département de génie électrique

# RAPPORT

Identification de système dynamiques  
APP3

Présenté à  
Karina Lebel



Présenté par  
Felix Boivin – BOIF1302  
Mathieu Desautels – DESM1210

Sherbrooke – 2 octobre 2024

## Table des matières

<b>Équation de l'ampli :</b>	<b>4</b>
<b>Équation du moteur :</b>	<b>5</b>
Dynamique :	5
Statique :	6
<b>Équation du réducteur :</b>	<b>6</b>
Statique :	6
<b>Équation de la charge (antenne) :</b>	<b>6</b>
Dynamique :	6
Statique :	7
<b>ÉQUATIONS D'ÉTAT DE CHAQUE SOUS-SYSTÈME :</b>	<b>7</b>
<b>Détermination des variables d'états :</b>	<b>7</b>
<b>REPRÉSENTATION COMPLÈTE DU SYSTÈME :</b>	<b>8</b>
<b>Matrice du système complet :</b>	<b>8</b>
<b>Schéma bloc :</b>	<b>9</b>
Sous-système moteur électrique :	9
Sous-système moteur mécanique :	9
Sous-système charge :	9
Système complet :	10
<b>Diagramme de fluence :</b>	<b>10</b>
<b>DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DE TRANSFERTS :</b>	<b>11</b>
<b>Fonction de transfert en boucle ouverte :</b>	<b>11</b>
<b>Fonction de transfert en boucle fermée :</b>	<b>12</b>
<b>Avantages et inconvénients :</b>	<b>13</b>
<b>REDUCTION DE LA COMPLEXITÉ :</b>	<b>13</b>
<b>Réponse impulsionnelle du système à ordre 6 :</b>	<b>13</b>
<b>Réduction physique :</b>	<b>14</b>
<b>Réduction numérique :</b>	<b>15</b>
Comparaison des réponses impulsionnelles :	16

<b>FTBO AVEC UN ARBRE RIGIDE :</b>	<b>17</b>
<b>ERREURS EN RÉGIME PERMANENT :</b>	<b>17</b>
<b>CARACTÉRISTIQUES DE LA RÉPONSE TRANSITOIRE EN BOUCLE FERMÉE :</b>	<b>18</b>
<b>IDENTIFICATION DU MOTEUR :</b>	<b>19</b>
Première expérience :	19
Deuxième expérience :	20
<b>LINÉARISATION :</b>	<b>21</b>
<b>ANNEXE A</b>	<b>23</b>

## Table des figures

Figure 1 : Système complet avec variables .....	4
Figure 2 : Circuit du moteur CC.....	5
Figure 3 : Schéma bloc du moteur volet électrique .....	9
Figure 4 : Schéma bloc du moteur volet mécanique .....	9
Figure 5 : Schéma bloc de la charge .....	10
Figure 6 : Schéma bloc complet.....	10
Figure 7 : Diagramme de fluence.....	10
Figure 8 : Schéma bloc pour fonction de transfert .....	11
Figure 9 : Schéma bloc explicatif d'une fonction à boucle fermer.....	12
Figure 10 : Réponse à l'impulsion de la FTBO d'ordre 6 .....	14
Figure 11 : Schéma bloc réduction physique ordre 4 .....	14
Figure 12 : Schéma bloc réduction physique ordre 3 .....	15
Figure 13 : Schéma bloc réduction physique ordre 2 .....	15
Figure 14 : Réponse à l'impulsion de la FTBO d'ordre 2 .....	16
Figure 15 : Réponse à l'impulsion de l'ordre 2 vs l'ordre 6 .....	16
Figure 16 : Réponses aux différentes entrées .....	17
Figure 17 : Erreurs en régime permanent.....	18

## Table des tableaux

Tableau 1 : Tableau des poids des pôles dominant du système d'ordre 6.....	15
Tableau 2 : Caractéristiques de la réponse transitoire en boucle fermée .....	18
Tableau 3 : Valeur du moteur trouver par l'expérience 2 .....	21

## Équations statiques et dynamiques :

Pour trouver les équations statiques et dynamiques, les équations suivantes seront utilisées. L'équation (1) est la formule du torque qui est l'inertie  $J$  multipliée par l'accélération angulaire ( $\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$ ).

$$\Sigma T = J\ddot{\theta} \quad (1)$$

Les valeurs qui seront utilisées dans les formules suivantes sont présentées dans la Figure 1. Dans cette figure il est possible de voir que le torque a la sortie du moteur est noté  $T_{L_1}$ , l'angle de sortie du moteur est noté  $\theta_m$  puisque cet arbre est rigide elle est pareil toute le long de l'arbre. Par la suite, le torque de l'arbre de transmission flexible est noté  $T_a$ , celle-ci puisqu'elle est flexible l'angle d'entrée  $\theta_{a_1}$  n'est pas le même que l'angle de sortie  $\theta_{a_2}$  qui lui est l'angle de la charge.

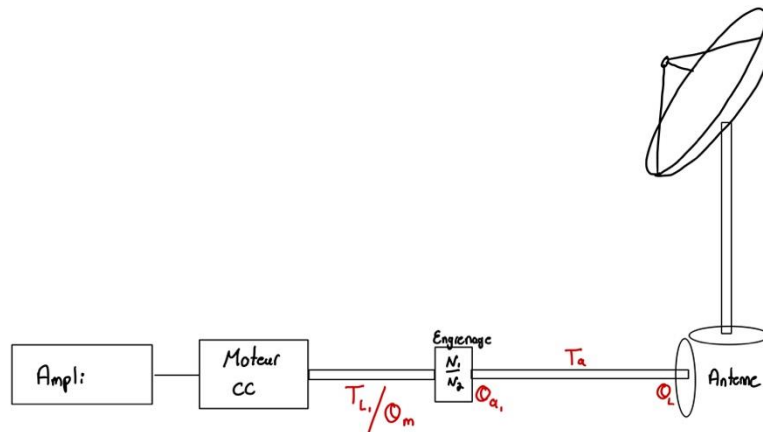


Figure 1 : Système complet avec variables

### Équation de l'ampli :

La fonction de transfert d'un amplificateur d'ordre 1 est donné par l'équation suivante.

$$G(x) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

On sait que l'équation de transfert est la relation entre la sortie sur l'entrée.

$$\frac{E_a}{E_{in}} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

En développant cette équation,

$$E_a + E_a \tau s = E_{in} K$$

Puisqu'il y a un  $s$ , il est possible de faire un Laplace inverse pour arriver à une expression de  $\dot{E}_a$ .

$$E_a + \dot{E}_a \tau = E_{in} K$$

$$\dot{E}_a = \frac{E_{in} K - E_a}{\tau} \left( \frac{\text{Volts}}{\text{secondes}} \right)$$

Équation du moteur :

Dynamique :

En partant de l'équation (1) pour trouver le dynamique physique du moteur, nous sommes capables de déterminer l'équation suivante.

$$T_m - T_{B_m} - T_{L_1} = J \ddot{\theta}$$

Dans cette formule, on prend en compte le couple du moteur soit  $T_m$  le frottement du moteur  $T_{B_m}$  ainsi que le couple de la charge  $T_{L_1}$ . En développant la formule trouvée il est possible de déterminer la formule suivante.

$$T_m - B_m \dot{\theta}_m - T_{L_1} = J_m \ddot{\theta}_m \text{ (Nm)}$$

T\_out ici! et T\_out != T\_L1

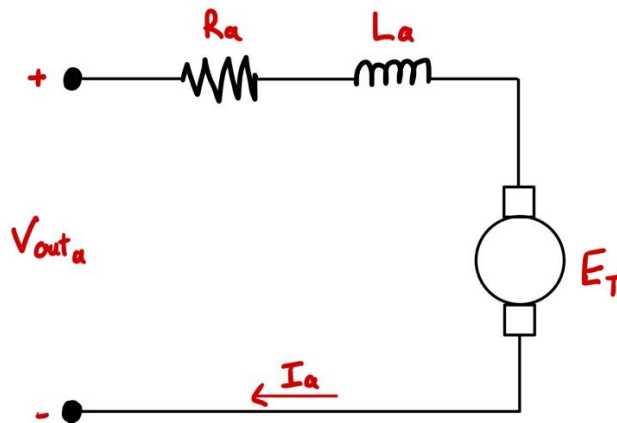


Figure 2 : Circuit du moteur CC

Cependant le moteur n'est pas terminé puisque dans le moteur il y a aussi la partie électrique qu'il faut prendre en considérations. Le dessin d'un moteur électrique en CC utilisé dans le système est présenté à la Figure 2. Pour les équations dynamiques électriques il est possible de faire une équation avec la loi des boucles.

$$E_a - V_{Ra} - V_{La} - E_t = 0$$

$$E_a = V_{Ra} + V_{La} + E_t$$

$$E_a = L_a \frac{dI_a}{dT} + R_a I_a + E_T \text{ (Volts)}$$

Statique :

En statique, il est possible de savoir que c'est la même formule que la formule de dynamique, cependant l'accélération sera égale à 0. L'équation de statique du moteur est la suivante.

$$T_m - B_m \dot{\theta}_m - T_{L_1} = 0 \text{ (Nm)}$$

Équation du réducteur :

Dans le système un réducteur est présent, celui-ci comporte une réduction de  $\frac{N_1}{N_2}$ . Ce ratio sera marqué comme  $N$  dans les formules suivantes. Le réducteur peut être vu comme étant un élément seulement statique, puisqu'il ne fait que convertir une vitesse et un torque en une autre vitesse et un autre torque. Il n'y a donc aucune différence d'énergie entre l'entrée et la sortie du réducteur puisque nous ne prenons pas en compte la force de friction entre les engrenages.

Statique :

Sachant que le torque de sortie du réducteur est simplement donné par le ratio entre les engrenages ainsi que le couple d'entrée, il est possible d'arriver à cette équation.

$$T_{L_1} = N \cdot T_a$$

Où  $T_a$  est le torque de l'arbre et qui peut être remplacé, tel que vu dans l'équation suivante.

$$T_{L_1} = N \cdot (K_L \cdot (\theta_{a_1} - \theta_L))$$

Puisque ces engrenages offrent un ratio réducteur, on sait que le torque de sortie sera plus grand que celui d'entrée. Inversement, la vitesse de sortie sera plus petite que celle d'entrée. L'équation de  $\omega_m$  ou  $\dot{\theta}_m$  est donc facilement trouvable.

$$\dot{\theta}_m = \frac{\dot{\theta}_{a_1}}{N} \left( \frac{\text{Rad}}{\text{Secondes}} \right)$$

Équation de la charge (antenne) :

De nouveau pour le calcul de la charge, on repart de l'équation (1). Dans ces équations nous avons pris  $B_L$  qui est le coefficient de frottement de la charge.

Dynamique :

$$T_a - T_{B_L} = J_L \ddot{\theta}$$

On sait que le couple de l'arbre sera l'entrée dans l'engrenage de l'antenne. Dans celle-ci l'unique perte sera celle de la force de frottement de l'antenne.

$$K_L (\theta_{a_1} - \theta_L) - B_L \dot{\theta}_L = J_L \ddot{\theta}_L \text{ (Nm)}$$

Statique :

La formule trouvée plus haut sera utile pour le statique puisque c'est la même sauf que la somme des couples est nulle.

$$K_L(\theta_{a_1} - \theta_L) - B_L \dot{\theta}_L = 0 \text{ (Nm)}$$

## Équations d'état de chaque sous-système :

Détermination des variables d'états :

L'équation la plus importante pour le calcul des variables d'état est l'équation (2). Celle-ci prend en considération les variables d'états qui sont dénoté  $x$  plus bas et les valeurs d'entrées dénotées  $u$ . Dans les calculs suivant la tension utilisée par le moteur est dénotée  $E_T$ , la constante de flexibilité de l'arbre flexible est dénotée  $K_L$ .

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2)$$

Grâce aux informations données par le client pour la création du système, il est possible de déterminer les 6 variables d'états.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 = \theta_L \\ x_2 = \omega_L \\ x_3 = \theta_m \\ x_4 = \omega_m \\ x_5 = I_a \\ x_6 = V_{out_a} \end{bmatrix}$$

Il faut maintenant déterminer la dérivée de chacune des variables d'état pour construire le vecteur  $\dot{x}$ .

Si on développe chaque variable une par une pour déterminer leurs équations par rapport aux autres variables d'états il a été possible de trouver toutes les équations suivantes,  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4$  ont été très simples à trouver puisque ceux-ci portaient des équations de charge et du moteur.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_L = \omega_L$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\omega}_L = \frac{-B_L \omega_L + K_L(\theta_m N - \theta_L)}{J_L}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_m = \omega_m$$

$$\dot{x}_4 = \dot{\omega}_m = \frac{K_i I_a - B_m \omega_m - K_L N(\theta_m N - \theta_L)}{J_m}$$

Pour trouver le  $\dot{I}_a$ , les équations de charge et du moteur n'étaient pas le point de départ. Il s'agissait plutôt du circuit électrique du moteur dessiné à la Figure 2, cette formule est celle de la dynamique électrique du moteur.

$$E_R + E_L + E_T = E_a$$

$$L_a \frac{dI_a}{dT} + R_a I_a = E_a - E_T$$

En sachant que  $E_T = K_b \omega_m = K_b \dot{\theta}_m$ , il est possible de réorganiser toute la formule pour en isoler  $\dot{I}_a$  qui dans l'équation est dénoter par  $\frac{dI_a}{dT}$ . Une fois cette expression réorganisée, le  $\dot{x}_5$  est trouvé.

$$\dot{x}_5 = \dot{I}_a = \frac{E_a - K_b \omega_m - R_a I_a}{L_a}$$

Par la suite, pour trouver la valeur de  $\dot{E}_a$  on doit partir de la fonction de transfert de l'amplificateur d'ordre 1 et isoler le  $E_a$ . Étant donné que nous savons que la formule de transfert contient des  $s$ , il est possible d'isoler le  $E_a s$  qui peut également prendre la forme de  $\dot{E}_a$ , exactement la variable rechercher en  $x_6$ .

$$\frac{E_a}{E_{in}} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

$$E_a + \dot{E}_a \tau = E_{in} K$$

$$\dot{x}_6 = \dot{E}_a = \frac{E_{in} K - E_a}{\tau}$$

## Représentation complète du système :

### Matrice du système complet :

Dans la section précédente des variables d'états il a été possible de trouver toutes les formules qui prennent en considération les variables. Pour crée la matrice il faut utiliser la formule suivante soit :

$$\dot{x} = \underline{a}x + \underline{b}u$$

Avec cette formule, il est possible de voir que  $\dot{x}$  et  $x$  sont les même avec uniquement l'accentuation de moins. Il est donc possible de décomposer chaque des équations pour en trouver leur dépendance face aux autres variables d'états. Ceci crée donc la matrice dénoter  $a$ , pour la matrice dénoter  $b$  c'est uniquement à la variable  $x_6$  qu'elle est utilisée.



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_L \\ \dot{\omega}_L \\ \dot{\theta}_m \\ \dot{\omega}_m \\ \dot{I}_a \\ \dot{E}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_L/J_L & -B_L/J_L & K_L N/J_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_L N/J_m & 0 & -K_L N^2/J_m & -B_m/J_m & K_L/J_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_B/L_a & -R_a/L_a & 1/L_a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_L \\ \omega_L \\ \theta_m \\ \omega_m \\ I_a \\ E_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K/\tau \end{bmatrix} E_{in}$$

Schéma bloc : 

Sous-système moteur électrique :

Pour le bloc du moteur électrique, nous rentrons  $E_a$  ceci est la tension à la sortie de l'ampli. La formule pour ce sous système est :  $E_a = I(L_a s + R_a) + K_b \omega_m$ . Dans cette équation, il est nécessaire d'utiliser  $\omega_m$  qui est une variable arriver de plus loin du système. Ce schéma peut être vu à la Figure 3.

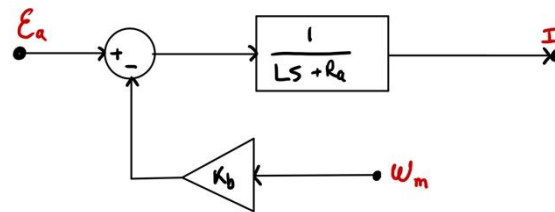


Figure 3 : Schéma bloc du moteur volet électrique

Sous-système moteur mécanique :

Pour le sous-système du moteur volet mécanique, l'entrée sera le couple du moteur soit  $T_m$ . La formule complète pour ce système est :  $T_m = J_m \theta_m s^2 + B_m \theta_m s + N^2 K_L \theta_m - N K_L \theta_L$ . Dans ce système, le but est d'avoir  $\theta_m$  comme sorti, pour s'y faire il est nécessaire d'utiliser une variable du système disponible plus loin soit  $\theta_L$ . Ce schéma peut être visionner à la Figure 4.

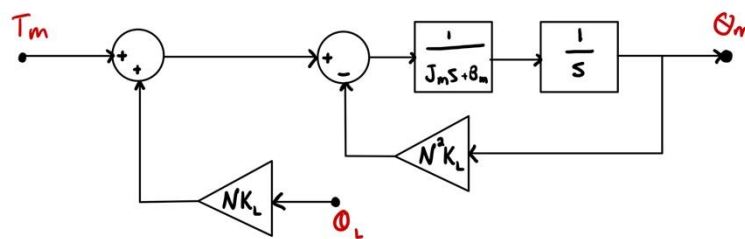


Figure 4 : Schéma bloc du moteur volet mécanique

Sous-système charge :

Pour le système de la charge, l'entrée est  $\theta_{a1}$  soit la sortie de l'engrenage (entrée de l'arbre flexible). L'équation de ce système est le suivant :  $\frac{\theta_L}{\theta_{a1}} = \frac{K_L}{J_L s^2 + B_L s + K_L}$ . Dans cette formule il est possible de voir qu'il n'y a aucune variable externe qui est utilisé, donc le schéma du bloc de charge peut être défini comme celui présenté à la Figure 5.

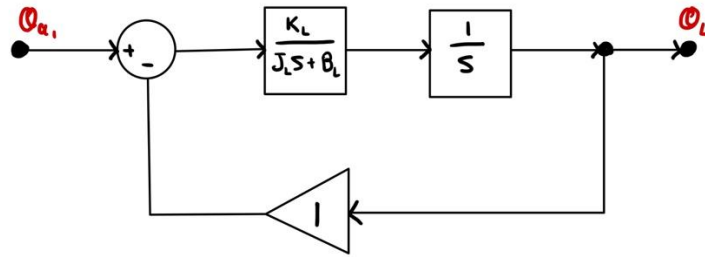


Figure 5 : Schéma bloc de la charge

### Système complet :

Il est possible de mettre toutes ces blocs ensemble pour créer un grand système présenté à la Figure 6. Au départ, il y a  $E_{in}$ , une fois qu'il passe dans l'amplificateur, celui-ci change de nom pour  $E_a$ . Ensuite, cette variable entre dans le bloc moteur électrique pour y ressortir la variable  $I$ . Suivant cette opération, un transfert électrique  $\rightarrow$  mécanique est fait pour transférer vers  $T_m$ . Une fois cette variable trouvée, il est possible de passer dans le bloc moteur mécanique qui transfère  $T_m$  en  $\theta_m$ . Par la suite, la sortie du moteur passe par l'engrenage, donc la variable se transfère de  $\theta_m$  à  $\theta_{a1}$ . Finalement, à la sortie de l'engrenage, le mouvement passe par l'arbre flexible pour se rendre à la charge, ce calcul transfère le mouvement de  $\theta_{a1}$  vers  $\theta_L$ , la valeur de l'angle à la charge.

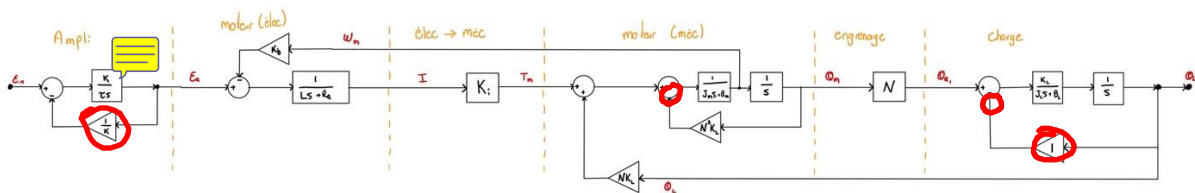


Figure 6 : Schéma bloc complet

### Diagramme de fluence :

Grâce au schéma bloc présenté à la Figure 6, il est possible de créer le diagramme de fluence présenté à la Figure 7. Dans ce diagramme, chaque flèche est une multiplication, chaque intersection de point est une addition. Dans le cas de ce diagramme, il est possible de voir que nous avons une entrée de  $E_{in}$  et sa sortie est  $\theta_L$ .

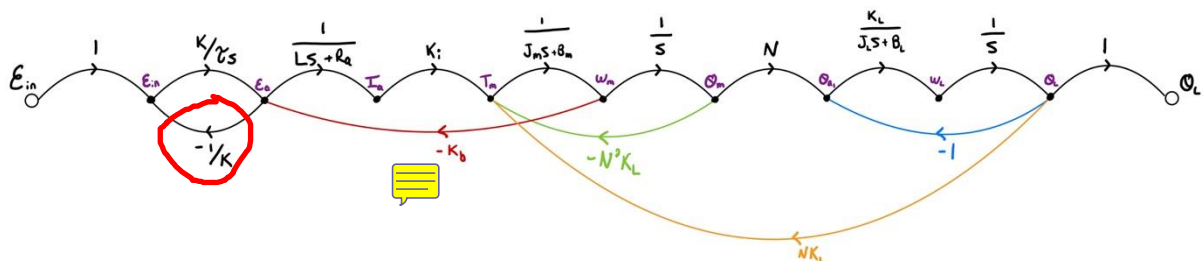


Figure 7 : Diagramme de fluence

## Développement des fonctions de transferts :

### Fonction de transfert en boucle ouverte :

Pour trouver la fonction de transfert en boucle ouverte, le schéma bloc trouvé à la Figure 6 est utilisé. Pour ce faire, chaque fonction de transfert est transférée en  $G_x$ , les gains sont transférés en  $H_x$  et dernièrement un point est créé à chaque sorti de sommation. Le schéma est retrouvé à la Figure 8. Avec les nouveaux points intermédiaires, il est possible de remplacer tous les points intermédiaires dans leurs équations pour qu'il reste uniquement la fonction finale soit la fonction  $Y$ .

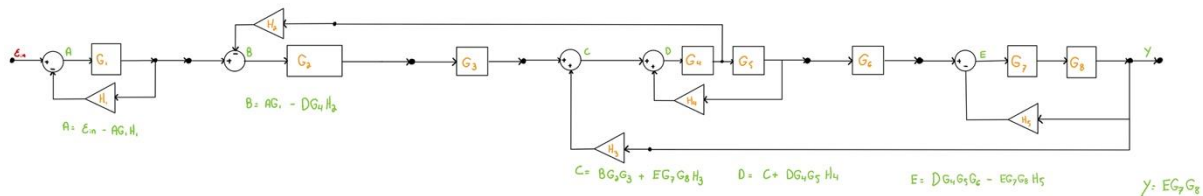


Figure 8 : Schéma bloc pour fonction de transfert

Les équations des points intermédiaires sont les suivantes :

$$\begin{aligned} A &= E_{in} - AG_1H_1 & B &= AG_1 - DG_4H_2 \\ C &= BG_2G_3 + EG_7G_8H_3 & D &= C + DG_4G_5H_4 \\ E &= DG_4G_5G_6 - EG_7G_8H_5 & Y &= EG_7G_8 \end{aligned}$$

Dans les équations présenter plus haut, il est possible de voir qu'en isolant A, il est possible de la placer dans la formule B ainsi de suite. Une fois toute ces formules substituer ensemble il est possible de trouver la formule suivante :

$$\frac{Y}{E_{in}} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5G_6G_7G_8}{(-G_7G_8H_3G_4G_5G_6 + (G_4H_2G_2G_3 - G_4G_5H_4 + 1)(G_7G_8H_5 + 1))(G_1H_1 + 1)}$$

Ensuite il reste uniquement à transférer toute les  $G_x$  et les  $H_x$  par les valeurs dans les formes du schéma à la Figure 8. Dans la formule Y a été remplacer par  $\theta_L$  et le tout a été diviser par  $E_{in}$  ce qui donnera la fonction de transfert directement :

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{K}{\tau s} & H_1 &= \frac{1}{K} \\ G_2 &= \frac{1}{L_a s + R_a} & H_2 &= K_b \\ G_3 &= K_i & H_3 &= NK_L \\ G_4 &= \frac{1}{J_m s + B_m} & H_4 &= -N^2 K_L \\ G_5 &= \frac{1}{s} & H_5 &= 1 \end{aligned}$$

$$G_6 = N$$

$$G_7 = \frac{K_L}{J_L s + B_L}$$

$$G_8 = \frac{1}{s}$$

$$\frac{\theta_L}{E_{in}} = \frac{\frac{K}{\tau s} \cdot \frac{1}{Ls + R_a} \cdot K_i \cdot \frac{1}{J_m s + B_m} \cdot \frac{1}{s} \cdot N \cdot \frac{K_L}{J_L s + B_L} \cdot \frac{1}{s}}{-\left(\frac{K_L}{J_L s + B_L} \cdot \frac{1}{s} \cdot N K_L \cdot \frac{1}{J_m s + B_m} \cdot \frac{1}{s} \cdot N\right) + \left(\left(\frac{1}{J_m s + B_m} \cdot K_b \cdot \frac{1}{Ls + R_a} \cdot K_i\right) + \left(\frac{1}{J_m s + B_m} \cdot \frac{1}{s} \cdot N^2 K_L\right) + 1\right)\left(\frac{K_L}{J_L s + B_L} \cdot \frac{1}{s} + 1\right)\left(\frac{K}{\tau s} \cdot \frac{1}{K} + 1\right)}$$

La dernière étape après cette isolation complète est de mettre sur un dénominateur commun pour avoir la possibilité de faire disparaître le plus de termes possibles. Grâce à cette isolation, on arrive à la formule suivante qui est beaucoup plus

$$\frac{\theta_L}{E_{in}} = \frac{K K_i N K_L}{(s)(1 + \tau s) \left( (K_b K_i K_L) + (K_L (J_m s + B_m)(Ls + R_a)) + (K_b K_i (J_L s + B_L)(s)) + (N^2 K_L (Ls + R_a)(J_L s + B_L)) + ((J_m s + B_m)(Ls + R_a)(J_L s + B_L)(s)) \right)}$$

Avec cette équation de FTBO il est possible de trouver l'équation caractéristique de FTBO, soit :

$$0 = (s)(1 + \tau s) \left( (K_b K_i K_L) + (K_L (J_m s + B_m)(Ls + R_a)) + (K_b K_i (J_L s + B_L)(s)) + (N^2 K_L (Ls + R_a)(J_L s + B_L)) + ((J_m s + B_m)(Ls + R_a)(J_L s + B_L)(s)) \right)$$

### Fonction de transfert en boucle fermée :

Afin de réaliser une boucle fermée, il faut que la différence entre l'angle demandé et l'angle réel de la charge soit ramené à l'entrée afin qu'il soit corrigé automatiquement. Pour ce faire, il faut additionner la sortie multipliée par une deuxième fonction de transfert  $H(s)$  à l'entrée du système. Une représentation par schéma-bloc est donnée à la Figure 9.

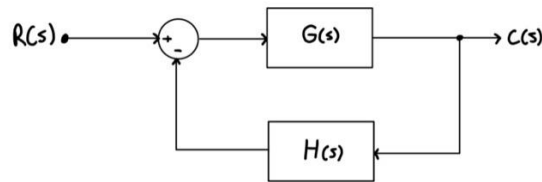


Figure 9 : Schéma bloc explicatif d'une fonction à boucle fermer

Avec la formule plus haut en boucle ouverte, soit la fonction de transfert  $\frac{\theta_L}{E_{in}}$ , il est possible de créer la fonction de transfert en boucle fermée. Par souci de clarté, une forme abrégée de la fonction de transfert complète du système en FTBO sera dénotée  $\left(\frac{\theta_L}{E_{in}}\right)_{FTBO}$ . Dans le cas présent, la fonction de transfert  $H(s)$  est un simple facteur multiplicatif qui représente le gain des potentiomètres  $K_p$ . La fonction de transfert en boucle ouverte sera donc la suivante :

$$G(x)_{FTBF} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{E_{in}}\right)_{FTBO}}{1 + K_p \cdot \left(\frac{\theta_L}{E_{in}}\right)_{FTBO}}$$

Avec cette équation de FTBF il est possible de trouver l'équation caractéristique de FTBF, soit :

$$0 = 1 + K_p \cdot \left(\frac{\theta_L}{E_{in}}\right)_{FTBO}$$

#### Avantages et inconvénients :

Le système FTBF propose un avantage clé par rapport au système FTBO, celui de la correction automatique de l'angle. En effet, puisque la différence entre l'angle demandé et l'angle réel est converti en tension et renvoyé à l'entrée, le système s'ajuste automatiquement jusqu'à temps que la différence entre les angles soit nulle. Cependant, cela fait en sorte qu'en FTBF le système prend plus de temps à se stabiliser qu'en FTBO à cause du temps d'ajustement. De plus, la fonction de transfert du système fermé devient beaucoup plus complexe qu'en boucle ouverte.

Il est nécessaire d'avoir un asservissement, car, dans le cas contraire, le système ne saurait jamais dans quel angle l'antenne se trouve. S'il y a des petites erreurs qui s'accumulent à chaque déplacement et au fil du temps à cause de sources d'erreurs externes, il est possible que l'antenne ne pointe plus du tout dans la bonne direction et qu'un recalibrage soit nécessaire.

#### Reduction de la complexité :

##### Réponse impulsionnelle du système à ordre 6 :

Dans la Figure 10, il est possible de visionner la réponse impulsionnelle complète du système. Celle-ci est la réponse impulsionnelle du système présenter à la Figure 6. Cette réponse sera comparée aux réponses réduites par méthode physique et numériques.

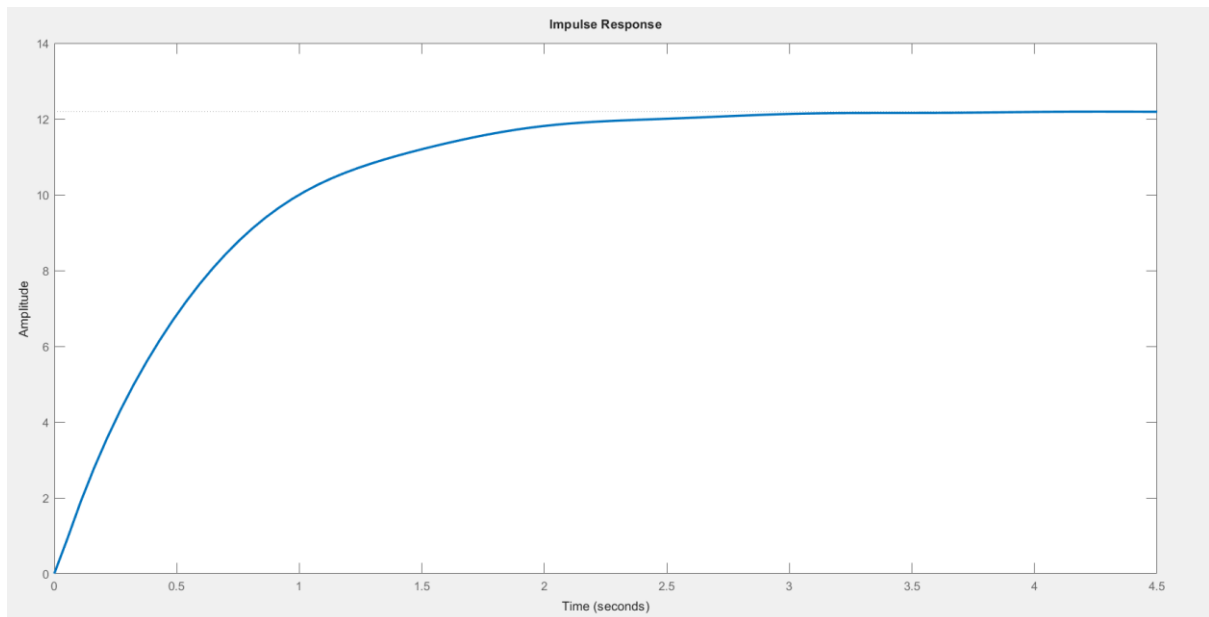


Figure 10 : Réponse à l'impulsion de la FTBO d'ordre 6

### Réduction physique :

Dans le but de simplifier le système il y a quelques possibilités à faire. Tous d'abord le système comporte un ordre 6, donc pour le diminuer à un ordre 4, il est possible de négliger la flexibilité de l'arbre, car la différence entre l'angle d'entrée et de sortie de l'arbre sera très petite de toute façon. Cela entraîne une équivalence dans les angles puisque l'arbre n'a plus de flexion  $\theta_{a_1} = \theta_L$ . Avec cette équivalence il est possible de réduire tout le calcul de la charge comportant deux manipulations de  $s$ , il y a donc une diminution de deux ordres. Le schéma bloc réduit devient donc celui présenté à la Figure 11.

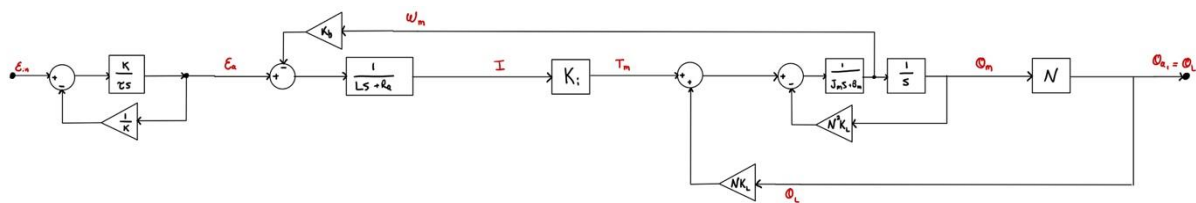


Figure 11 : Schéma bloc réduction physique ordre 4

Par la suite, avec cet ordre 4 la prochaine manipulation à faire est de se rendre à un ordre 3. Pour s'y faire on prend en considération que la résistance de l'armature du moteur est beaucoup plus grande que l'inductance ( $L_a \ll R_a$ ). L'inductance devient donc négligeable ce qui fait en sorte qu'un terme en  $s$  est réduit. Le schéma bloc d'ordre 3 devient donc celui présenté à la Figure 12.

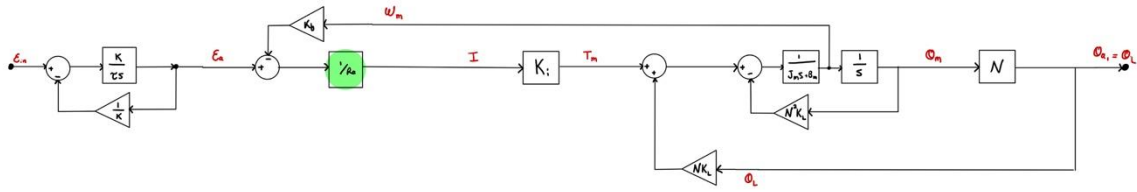


Figure 12 : Schéma bloc réduction physique ordre 3

Par la suite, avec cet ordre 3 la prochaine manipulation à faire est de se rendre à un ordre 2. Pour ce faire, on prend en considération que l'ampli à son entrée est parfait donc celle-ci ne prends pas en compte le temps, son équation devient uniquement  $E_a = KE_{in}$ . Le schéma bloc réduit devient donc celui présenter à la Figure 13.

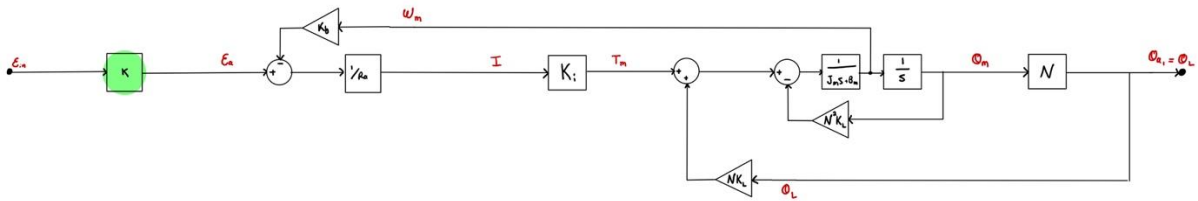


Figure 13 : Schéma bloc réduction physique ordre 2

Grace au schéma à la Figure 13, il est possible de compter uniquement deux manipulations de Laplace avec  $s$ . Le reste du système est considéré comme parfait avec aucune flexion dans l'arbre de sortie, une résistance de l'armature beaucoup plus grande que l'inductance ainsi qu'un amplificateur d'entrée considéré parfait.

### Réduction numérique :

Pour effectuer une réduction numérique, la technique des pôles dominant sera utilisée avec l'aide de MatLab. En premier lieu, la fonction **fdata** a été utilisée avec en entrée la FTBO complète d'ordre 6. Cette fonction retourne les coefficients du numérateur et du dénominateur. Ensuite, il est possible de mettre ces valeurs en entrée de la fonction **residue** qui sort les valeurs des racines, des pôles et des  $k$ . Après, en divisant les racines par les valeurs absolues des parties réelles des pôles on obtient le poids des différents pôles et il est possible de garder les deux dominants, soit celui de 7.267 et celui à l'infini afin de recréer une fonction de transfert simplifiée d'ordre 2. La réponse impulsionnelle est démontrée à la Figure 14.

Tableau 1 : Tableau des poids des pôles dominant du système d'ordre 6

Poids des pôles
$3.464 \cdot 10^{-8}$
$7.954 \cdot 10^{-2}$
$7.954 \cdot 10^{-2}$
$1.423 \cdot 10^{-3}$
7.267
$\infty$

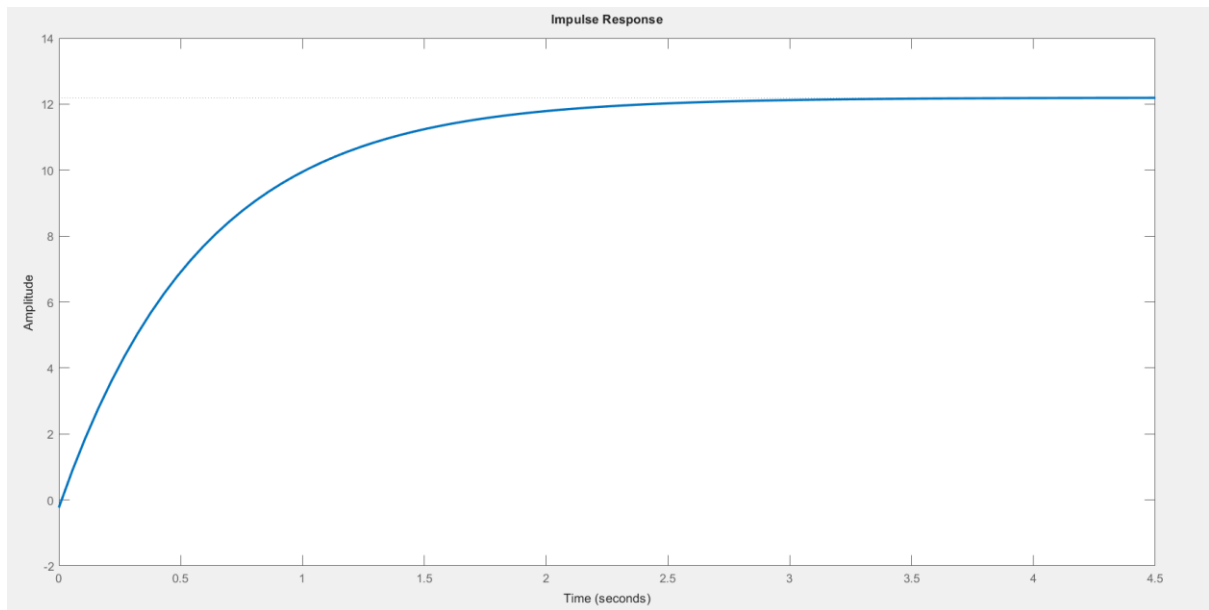


Figure 14 : Réponse à l'impulsion de la FTBO d'ordre 2

Comparaison des réponses impulsionnelles :

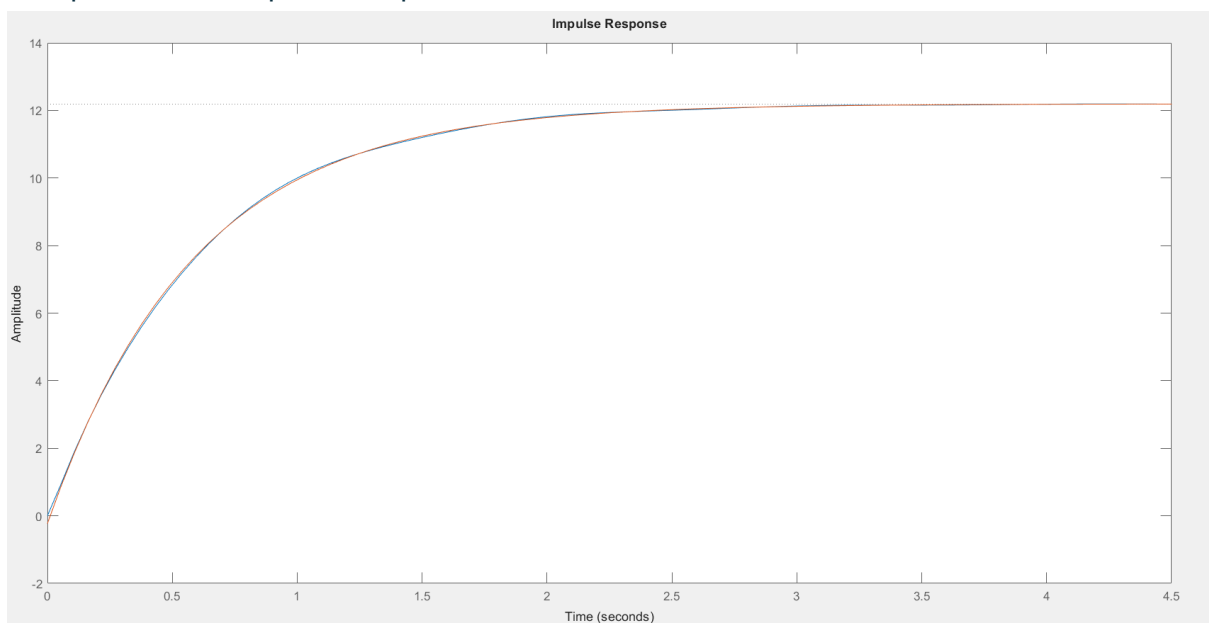


Figure 15 : Réponse à l'impulsion de l'ordre 2 vs l'ordre 6

La Figure 15 démontre les deux courbes de la FTBO d'ordre 2 ainsi que celle d'ordre 6. Il est possible de voir que les deux courbes sont presque identiques. Les deux se stabilisent à une amplitude de 12 à environ 4 secondes. C'est normal puisque ces courbes



## FTBO avec un arbre rigide :

Tel qu'avec la réduction physique, la FTBO devient d'un ordre 4 avec un arbre rigide. Avec un échelon à l'entrée de l'ampli, le moteur serait directement activé et puisqu'il n'y a pas de boucle de rétroaction, donc que le système ne sait pas quand s'arrêter par lui-même, ne se désactivera jamais. La forme de la réponse serait donc une droite linéaire avec une pente positive.

## Erreurs en régime permanent :

En premier lieu, les graphiques des réponses aux différentes entrées sont donnés à la Figure 16.

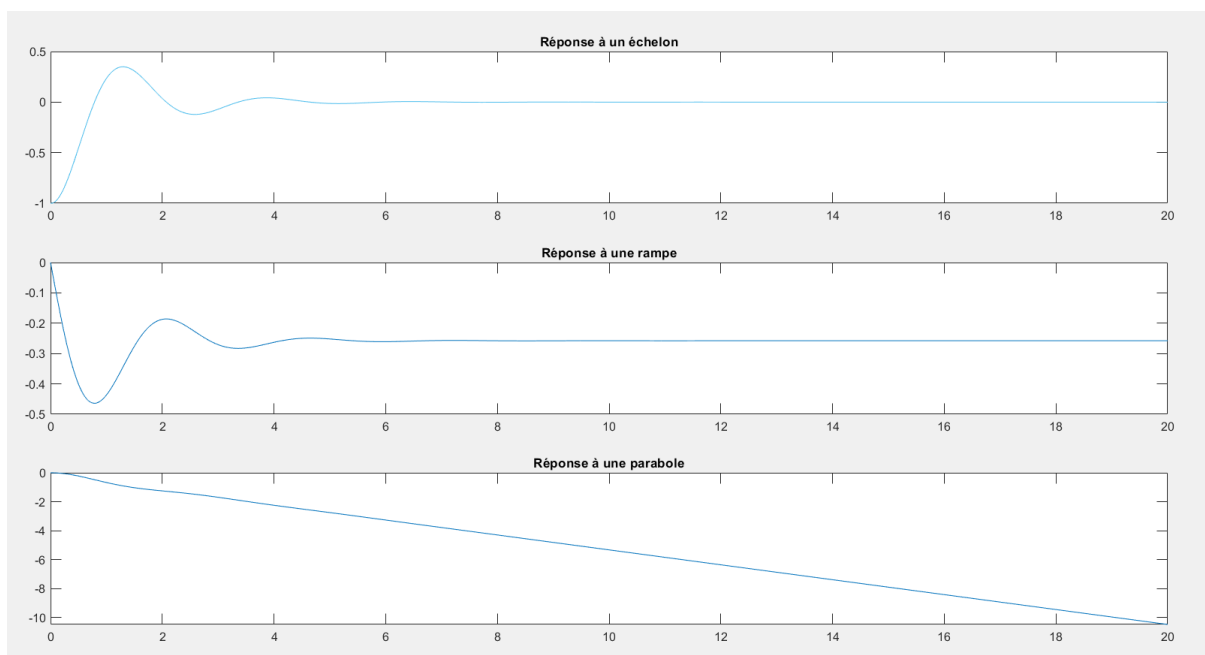


Figure 16 : Réponses aux différentes entrées

L'erreur est la différence entre la sortie et ce qui est demandé. Puisque la sortie avait été multipliée par le facteur  $K_p$ , il faut annuler ce facteur et ensuite tracer les courbes des consignes versus les réponses sur le même graphique. Ceci est visible à la Figure 17.

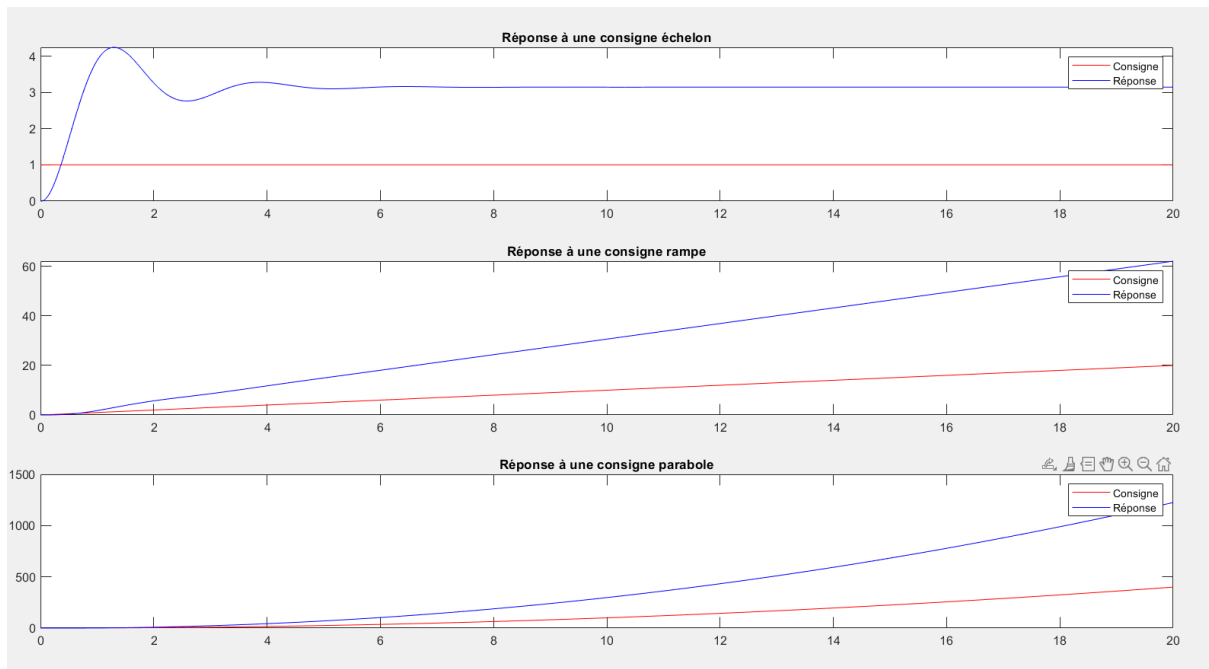


Figure 17 : Erreurs en régime permanent

Il est possible de voir que la seule réponse qui est constante non-nulle en régime permanent est celle avec l'échelon en entrée.

## Caractéristiques de la réponse transitoire en boucle fermée :

En premier lieu, le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée d'ordre 4 a été fait par MatLab en partant de la FTBO d'ordre 6. Les 4 pôles dominants ont été utilisés pour recréer un ordre 4 et ensuite la fonction a été transformée en boucle fermée en utilisant cette fonction trouvée plus tôt :

$$G_{FTBF} = \frac{G_{FTBO}}{1 + K_p G_{FTBO}}$$

Ensuite, en mettant la FTBF d'ordre 4 dans la fonction MatLab **stepinfo**, il est possible d'obtenir les caractéristiques de la forme de la réponse. Les résultats sont visibles au Tableau 2.

Tableau 2 : Caractéristiques de la réponse transitoire en boucle fermée

Variable	Valeur
Temps de montée $T_m$	0.524 s
Temps de stabilisation $T_s$	4.35 s
Peak	4.4
Temps de peak $T_p$	1.295 s

## Identification du moteur :

### Première expérience :



Le moteur est un système d'ordre 1 qui peut être représenté par la fonction de transfert suivante.

$$G(s) = \frac{\omega_m}{E_{in}} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3)$$

L'équation de départ pour ce système est l'équation dynamique du moteur électrique. Cependant, étant donné que la charge n'est pas branchée sur l'armature l'équation ne prends pas en considération le couple de la charge ( $T_{L_1}$ ). L'équation devient donc :

$$T_m - B_m \omega_m = J_m \dot{\omega}_m$$

De plus, nous savons que le couple du moteur peut prendre la formule  $T_m = K_i I$  où la formule du courant peut être trouvée grâce au circuit présenté à la Figure 2. Avec ce circuit il est possible de déterminer l'équation des boucles qui est :

$$E_a = K_b \omega_m + R_a I + L_a \dot{I}$$

Dans cette formule, il est possible de considérer l'inductance comme nulle puisque  $R_a \gg L_a$  et elle devient négligeable. L'équation se simplifie donc comme suit.

$$E_a = K_b \omega_m + R_a I$$

En isolant pour créer l'équation du courant on trouve que :

$$I = \frac{E_a - K_b \omega_m}{R_a}$$

En remplaçant la valeur du courant dans la formule du torque, on obtient :

$$T_m = K_i I = K_i \frac{E_a - K_b \omega_m}{R_a}$$

Sachant que  $K_b = K_i$ , il est possible de remplacer ces deux variables par  $K_j$  afin de simplifier l'équation.

$$T_m = K_i I = \frac{K_j E_a - K_j^2 \omega_m}{R_a}$$

Maintenant, il faut remplacer  $T_m$  dans l'équation dynamique du moteur par l'expression qui a été trouvée. On obtient :

$$\frac{K_j E_a - K_j^2 \omega_m}{R_a} - B_m \omega_m = J_m \dot{\omega}_m$$

On fait apparaître un  $s$  avec Laplace.

$$\frac{K_j E_a - K_j^2 \omega_m}{R_a} - B_m \omega_m = J_m \omega_m s$$

Afin d'arriver à la fonction de transfert il faut réorganiser l'équation afin d'obtenir le rapport entre l'entrée  $\omega_m$  et la sortie  $E_a$ .

$$G(s) = \frac{\omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_j}{J_m R_a s + K_j^2 + B_m R_a}$$

Il est préférable, dans une équation d'ordre 1, que le dernier terme du dénominateur soit un 1. Il faut donc diviser tous les termes par  $K_j^2 + B_m R_a$ .

$$G(s) = \frac{\frac{K_j}{K_j^2 + B_m R_a}}{\left(\frac{J_m R_a}{K_j^2 + B_m R_a}\right)s + 1}$$

Il est possible de voir que la dernière expression prend la même forme que l'équation (3), il faut donc trouver les valeurs de  $\tau$  et de  $K$  par la méthode des moindres carrés à l'aide de MatLab. Le code est donné à l'ANNEXE A.

$$K = 1,4121 \text{ et } \tau = 0,4974$$

### Deuxième expérience :

Lorsqu'on applique une tension fixe à l'armature et qu'on bloque son arbre de sortie on trouve les données suivantes.

$$T_m = 0.52 \quad I = 1.09 \quad V_m = 8 \quad \theta_m = 0$$

Avec ces données, il est possible de trouver les autres valeurs inconnues soit  $K_i, K_b, R_a, L_a, J_m, B_m$ . Grâce aux formules suivantes il est possible de trouver directement ces valeurs de  $K_i$  et  $R_a$ .

$$K_i = K_b = \frac{T_m}{I} = 0.48 \frac{Nm}{A}$$

$$R_a = \frac{K_j V_m}{T_m} = 7.34 \Omega$$

Pour trouver  $B_m$ , on doit isoler la variable dans la formule suivante.

$$\frac{K_j}{K_j^2 + B_m R_a} = K = 1.4121$$

$$B_m = \frac{K_j - 1.4121 K_j^2}{1.4121 R_a} = 0.0148 \frac{Nm}{rad/s}$$

Ensuite, il faut répéter pour  $J_m$

$$\frac{J_m R_a}{K_j^2 + B_m R_a} = \tau = 0.4974$$

$$J_m = \frac{0.4974 K_j^2 + 0.4974 B_m R_a}{R_a} = 0.023 \frac{Nms^2}{rad}$$

Tableau 3 : Valeur du moteur trouver par l'expérience 2

Variable	Valeur
$K_i$	0.48 Nm/A
$K_b$	0.48 Nm/A
$R_a$	7.34 $\Omega$
$L_a$	0 H
$J_m$	0.023 Nm
$B_m$	0.0148 Nm/(rad/s)

Linéarisation : 

$$T_{eq} = 150 Nm \quad K_1 = 10^3 \quad K_2 = 10 \quad K_5 = 1$$

$$T = J_L \ddot{\theta} + B_L \dot{\theta} + K_1 \theta + K_3 \theta^3 + K_5 \theta^5$$

Avec cette formule, on doit trouver le point d'équilibre et pour s'y faire on doit mettre les dérivés à 0. Cela crée donc la formule suivante :

$$T_{eq} = K_1 \theta + K_3 \theta^3 + K_5 \theta^5$$

$$0 = K_1 \theta + K_3 \theta^3 + K_5 \theta^5 - T_{eq}$$

Avec cette équation et la fonction **roots** de Matlab il est possible de trouver les zéros. Cela nous sortait 5 zéros possible, cependant un seul de ces points est composé que de réel, c'est celui-ci qui nous intéressera soit  $\theta_{eq} = 0,15$ .

Par la suite, on doit linéariser chaque terme non-linéaire soit  $T$ ,  $K_3 \theta^3$  et  $K_5 \theta^5$ . Les termes linéarisés sont les suivants :

$$K_3 \theta^3 = K_3 \theta_{eq}^3 + \underbrace{\frac{dK_3 \theta_{eq}^3}{d\theta}}_{=0} \Delta\theta + \frac{dK_3 \theta_{eq}^3}{d\theta} \Delta\theta$$

$$K_5\theta^5 = K_5\theta_{eq}^5 + \frac{dK_5\theta_{eq}^5}{d\theta}\Delta\theta + \underbrace{\frac{dK_5\theta_{eq}^5}{d\dot{\theta}}\Delta\dot{\theta}}_{=0}$$

$$T = T_{eq} + \Delta T$$

Ces formules peuvent ensuite être mit dans la formule complétée de départ soit :

$$J_L\ddot{\theta} = T_{eq} + \Delta T - B_L\dot{\theta} - K_1\theta - K_3\theta_{eq}^3 - 3K_3\theta_{eq}^2\Delta\theta - K_5\theta_{eq}^5 - 5K_5\theta_{eq}^4\Delta\theta$$

Une fois toute ces variables mis ensemble il est possible de soustraire l'équation d'équilibre trouvé plus haut. Ceci donnera l'équation présenter plus bas.

$$J_L\ddot{\theta} - J_L\ddot{\theta}_{eq} = T_{eq} + \Delta T - T_{eq} - B_L\dot{\theta} + B_L\dot{\theta}_{eq} - K_1\theta + K_1\theta_{eq} - K_3\theta_{eq}^3 + K_3\theta_{eq}^3 - 3K_3\theta_{eq}^2\Delta\theta - K_5\theta_{eq}^5 + K_5\theta_{eq}^5 - 5K_5\theta_{eq}^4\Delta\theta$$

$$\Delta\ddot{\theta} = \frac{\Delta T - B_L\Delta\dot{\theta} - \Delta\theta(K_1 + 3K_3\theta_{eq}^2 + 5K_5\theta_{eq}^4)}{J_L}$$

Donc pour terminer avec cette formule nous sommes capables de la transférer sur la variation du couple soit la formule suivante

$$\Delta T = J_L\Delta\ddot{\theta} + B_L\Delta\dot{\theta} + \Delta\theta(K_1 + 3K_3\theta_{eq}^2 + 5K_5\theta_{eq}^4)$$

## ANNEXE A

```
%% MOTEUR

clc
clear all
close all

load("donnees_moteur_2022.mat")

diff_v = diff(vitesse)./diff(t);
X = [tension(2:end,1), diff_v];
Y = vitesse(2:end,1);
A = pinv(X)*Y
```