



Analyse de systèmes asservis analogiques

GUIDE DE L'ÉTUDIANT S5 – APP 4

Automne 2024 – Semaines 7 et 8

Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke

Auteurs: Mise à jour par Karina Lebel (4-oct-2024)

Mise à jour par Jean de Lafontaine (13-fév-2020, 19-fév-2021, 17-fév-2022, 11-fév-2023, 5-oct-2023)

Document Guide_Etudiant_S5_APP4e.doc

Révisé par Jean de Lafontaine (20-mai-2014, 07-fév-2016, 11-fév-2017, 4-oct-2019)

Révisé par Jean de Lafontaine et Yves Bérubé-Lauzière (03-juin-2013)

Document S4_APP4e.doc (2013)

Révisé par Jean de Lafontaine (30-juin-2008, 28-juin-2010, 09-juillet-2011)

Document S4_APP6e.doc (2008)

Modifié par David Neveu, G. Lachiver (30-juin-2005)

Document initial S4_APP5e.doc rédigé par Jean de Lafontaine (2003).

Version: 13 rev 2 (04-oct-2024)

Ce document est réalisé avec l'aide de Microsoft Word.

©2003-2024 Tous droits réservés. Département de génie électrique et de génie informatique,
Université de Sherbrooke.

TABLE DES MATIÈRES

1	ÉNONCÉ DE LA PROBLÉMATIQUE	1
1.1	ANNEXE A	4
2	GUIDE DE LECTURE	5
2.1	Références essentielles	5
2.2	Séquence des lectures	6
3	LOGICIELS ET MATÉRIEL	7
4	PRODUCTIONS À REMETTRE	7
4.1	Consignes spécifiques pour la défense de la solution	7
5	ÉVALUATIONS	9
5.1	Intégrité et plagiat	9
5.2	Évaluation sommative de l'unité	9
6	PRATIQUE PROCÉDURALE 1	10
6.1	Exercices	10
7	LABORATOIRE 1	13
7.1	Exercices	13
8	PRATIQUE PROCÉDURAL 2 (LABO)	16
8.1	Exercices	16
9	VALIDATION	17
	LISTE DES RÉFÉRENCES	17
10	ANNEXE B	1

LISTE DES FIGURES

Figure 1. Définition de la dynamique longitudinale d'un avion.....	4
--	---

LISTE DES TABLEAUX

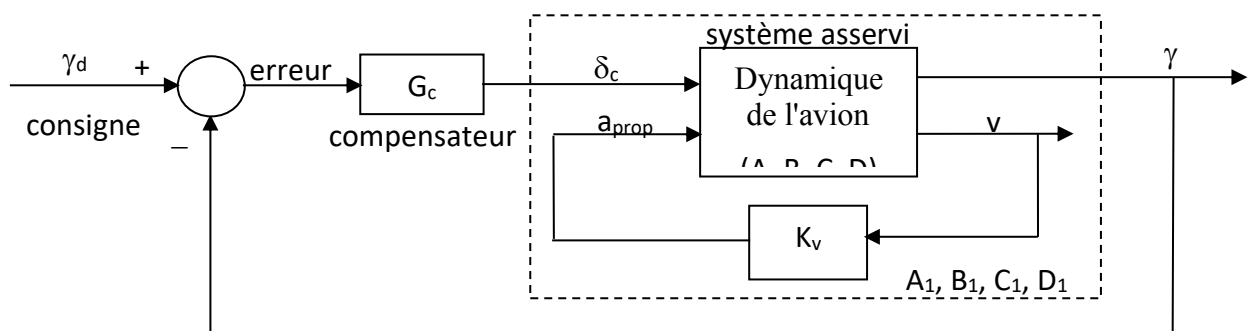
Tableau 2.1 Séquence des lectures.....	6
--	---

1 ÉNONCÉ DE LA PROBLÉMATIQUE

La société Dom Barbier Aérospatiale vient de vous engager dans la division responsable des technologies de commande fly-by-wire (FBW) pour aéronefs. Les techniques FBW, développées initialement pour les avions militaires, consistent à « retirer » le pilote de la boucle de commande d'un avion et à le remplacer par un ordinateur. Les consignes à haut niveau du pilote et les mesures des capteurs sont traitées par le système FBW qui exécute les commandes à bas niveau, permettant une meilleure stabilité, performance, économie et sécurité du vol de l'avion.

Un collègue senior de votre division, l'ingénieur Lindberg, vous délègue la tâche de concevoir un asservissement FBW du mouvement longitudinal de leur tout dernier avion. Le design aérodynamique de cet aéronef est à la limite de la stabilité. Dans la réponse temporelle de la vitesse v à un changement échelon de la propulsion a_{prop} , on observe un long temps de stabilisation et de fortes oscillations associées à un mode dynamique que le Dr. Lindberg appelle le mode *phugoïde*. Celui-ci vous demande d'ailleurs de calculer, à partir des valeurs propres du système (trouvées sur MATLAB), les caractéristiques temporelles de tous les modes dynamiques de l'avion (temps du premier pic, dépassement maximum, temps de stabilisation, facteur d'amortissement, période des oscillations amorties et naturelles) et de vérifier ces résultats numériques à partir de la réponse temporelle affichée avec MATLAB. Il porte aussi votre attention sur le fait que la fonction de transfert entre l'angle du gouvernail de profondeur δ_c et l'angle de vol γ est à phase non-minimale, ce qui suscite votre curiosité à comprendre et à vérifier cette notion. Dr. Lindberg donne le modèle linéaire de l'avion sous forme variables d'état (Annexe A) et quelques directives.

Dr. Lindberg explique que les structures d'asservissement peuvent prendre plusieurs formes: compensateur dans une boucle interne, compensateur en cascade dans une boucle externe, compensateur *feedforward*, etc. Il recommande une boucle interne à rétroaction négative de gain K_v entre la vitesse mesurée v et la propulsion a_{prop} . Selon lui, cette boucle devrait améliorer le régime transitoire en réduisant le temps de stabilisation du mode phugoïde. Ensuite, une boucle externe permettra d'asservir l'avion aux consignes du pilote (l'angle de vol désiré γ_d) à l'aide d'un compensateur G_c en cascade de type PID.

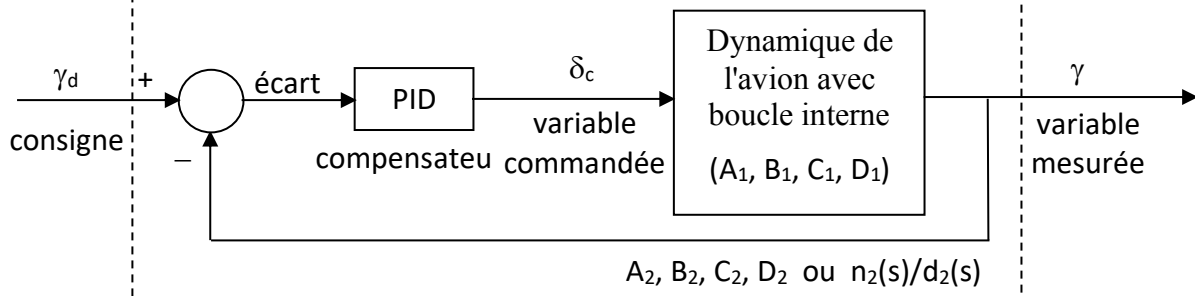


Il vous propose d'utiliser le lieu des racines pour mieux observer l'effet de la rétroaction K_v sur la nature de la réponse temporelle. Dr. Lindberg vous raconte qu'avant l'arrivée des outils de CAO, il devait tracer les lieux des racines à la main, à partir de 9 règles de construction. Aujourd'hui, avec le logiciel MATLAB et ses fonctions roots, eig, rlocus et rlocfind, le travail est beaucoup simplifié. Cependant, Dr. Lindberg insiste qu'il faut bien connaître ces 9 règles: elles seront utiles dans la conception d'asservissement où l'effet de l'ajout de pôles, de zéros ou de retards sera évident. Il vous demande de tracer, à la main et selon ces règles, le lieu des racines pour la fonction de transfert entre la propulsion a_{prop} et la vitesse v et de le

valider avec MATLAB. À l'aide du lieu des racines, vous lui expliquez l'effet de la rétroaction K_v sur la stabilité, le temps de stabilisation et le dépassement maximum. Dr. Lindberg vous demande de faire la conception de la boucle interne : (1) en calculant le gain K_p qui permettra de réduire au minimum le temps de stabilisation du mode phugoïde et (2) en calculant les matrices d'état du nouveau système dynamique A_1, B_1, C_1, D_1 et la fonction de transfert correspondante $n_1(s)/d_1(s)$ qui incluent cette boucle de gain K_v .

Dr. Lindberg mentionne que l'analyse de la rétroaction K_v peut aussi se faire dans le domaine des fréquences, avec le diagramme de Bode, en insistant que celui-ci est utile pour apprécier les marges de stabilité (marge de phase, marge de retard, marge de gain) du système pour un gain de rétroaction donné. Les fonctions MATLAB `bode`, `margin` (appliquées à la fonction de transfert en boucle ouverte) et `logspace`, permettent de générer ces réponses en fréquence. Pour la valeur de K_v trouvée plus haut, Dr. Lindberg vous demande de vérifier que les marges de gain et de phase entre la propulsion a_{prop} et la vitesse v sont d'au moins 6 dB et 30 degrés, des valeurs typiques, et il vous demande d'expliquer le sens de ces marges et l'utilité de les prévoir.

Finalement, Dr. Lindberg vous propose une troisième façon d'analyser l'effet de la rétroaction K_v : la méthode analytique. Elle consiste à réduire l'ordre du système en boucle ouverte à un ordre 2 ou 1 (avec MATLAB), construit à partir de ses pôles dominants, et à développer à la main (analytiquement) la fonction de transfert en boucle fermée. On peut ainsi observer de façon analytique l'effet du gain de rétroaction sur les paramètres standards (K, ζ, ω_n, τ) de la fonction d'ordre 2 ou 1. Vous réduisez la fonction de transfert entre a_{prop} et v à ses pôles dominants et expliquez analytiquement comment le gain K_v affecte les caractéristiques de la réponse temporelle en boucle fermée. Dr. Lindberg est même curieux de voir si le lieu des racines du système réduit ressemble au lieu original et si la valeur de K_v trouvée plus haut avec le système original donne les mêmes pôles. Le gain K_v sera calculé avec le système réduit et comparé avec celui obtenu avec le système original. Les deux systèmes (original et



réduit) seront comparés sur un même graphique du lieu des racines.

La conception de la boucle interne ainsi complétée, vous êtes intéressés à voir son effet sur la réponse de l'angle de vol γ aux consignes γ_d du pilote. Vous obtenez avec MATLAB le lieu des racines de la fonction de transfert entre δ_c et l'angle de vol γ incluant l'effet de la boucle interne et en déduisez l'effet du gain proportionnel K_p du compensateur PID (sans les termes dérivé et intégral pour l'instant) sur la réponse du système. À partir du diagramme de Bode, Dr. Lindberg vous demande de (1) calculer le gain K_{lim} à la limite de l'instabilité, (2) calculer et utiliser le gain K_p qui donne des marges de stabilité d'au moins 6 dB et 30 degrés et, (3) avec ce dernier gain, obtenir par simulation l'erreur en régime permanent pour une consigne-échelon de 1 degré sur γ_d . Dr. Lindberg vous demande aussi de lire cette erreur en régime permanent directement sur le diagramme de Bode et de la comparer avec la simulation ci-dessus. Il prédit d'ailleurs que cette erreur ne sera pas nulle à moins d'augmenter la classe du système avec un PI. Avec

ce K_p , le système en boucle fermée devient A2, B2, C2, D2 ou $n_2(s)/d_2(s)$, système que vous aurez à calculer.

Finalement, Dr. Lindberg vous demande d'analyser et de commenter l'effet d'ajouter tour à tour un compensateur PD, PI et PID sur la réponse en boucle fermée du système soumis à un échelon γ_d de 1 degré:

- (a) commande PD: $K_p(1 + T_D s) = K_p(1 + s)$ en cascade avec le système A_1, B_1, C_1, D_1 pour donner le système en boucle fermée : $n_{2PD}(s)/d_{2PD}(s)$
- (b) commande PI: $K_p(1 + 1/(T_I s)) = K_p(1 + 1/s)$ en cascade avec le système A_1, B_1, C_1, D_1 pour donner le système en boucle fermée : $n_{2PI}(s)/d_{2PI}(s)$
- (c) commande PID : $K_p(1 + T_D s + 1/(T_I s)) = K_p(1 + s + 1/s)$ en cascade avec le système A_1, B_1, C_1, D_1 pour donner le système en boucle fermée : $n_{2PID}(s)/d_{2PID}(s)$

Dr. Lindberg vous propose d'utiliser les fonctions **MATLAB *feedback, series, conv, step* et *lsim*** au besoin pour obtenir, comparer et commenter la réponse en boucle fermée des 4 systèmes: $n_2(s)/d_2(s)$, $n_{2PD}(s)/d_{2PD}(s)$, $n_{2PI}(s)/d_{2PI}(s)$ et $n_{2PID}(s)/d_{2PID}(s)$. Vous présenterez votre travail lors d'un court séminaire que vous donnerez aux directeurs de votre division selon les consignes données à la Section 15.

* Notes importantes

- La description de la problématique inclut plusieurs calculs et opérations qui peuvent ressembler à une « recette » à suivre. Cependant, chaque étape a une utilité, avec des connaissances associées. Il est important de voir, au-delà de la « recette », les compétences qui sont visées à chacune de ces étapes.
- Cet APP vise à développer et à évaluer les connaissances et compétences à utiliser des techniques analytiques et numériques d'analyse et de conception d'asservissements. Par conséquent, l'utilisation des fonctions symboliques de MATLAB en remplacement aux techniques présentées dans cet APP est interdite. **Tous les résultats obtenus avec des fonctions symboliques de MATLAB seront ignorés.**
- Des résultats numériques obtenus avec les techniques présentées dans cet APP peuvent être validés séparément avec des fonctions symboliques si désiré (c'est toujours une bonne pratique de valider des résultats avec au moins 2 approches indépendantes) mais ne doivent pas faire partie des travaux livrés dans cet APP.

1.1 ANNEXE A

MODÈLE LINÉAIRE DE LA DYNAMIQUE LONGITUDINALE D'UN AVION

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -0.018223 & -0.088571 & -9.78 & 0 \\ -0.003038 & -1.2563 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.0617 & -28.075 & 0 & -4.5937 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1.1962 \\ 0 & -0.00120 \\ 0 & 0 \\ 7.84 & -4.05 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 57.296 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57.296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.296 \\ 0 & -57.296 & 57.296 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variables d'entrée : $\underline{\mathbf{u}} = [\delta_c \quad a_{prop}]^T$ en degrés et en fraction de la poussée maximale

Variables d'état : $\underline{\mathbf{x}} = [v \quad \alpha \quad \theta \quad q]^T$ en m/s et en radians

Variables de sortie : $\underline{\mathbf{y}} = [v \quad \alpha \quad \theta \quad q \quad \gamma]^T$ en m/s et en degrés

δ_c : angle du gouvernail de profondeur

a_{prop} : fraction de la poussée maximale des moteurs ($0 < a_{prop} < 1$)

v : vitesse de l'avion

α : angle d'attaque (entre l'axe longitudinal de l'avion et la vitesse)

θ : angle de tangage (entre l'axe longitudinal de l'avion et le plan horizontal)

q : vitesse angulaire en tangage de l'avion ($q = d\theta/dt$)

γ : angle de vol de l'avion ($\gamma = \theta - \alpha$): $\gamma > 0$: l'avion monte, $\gamma < 0$: l'avion descend.

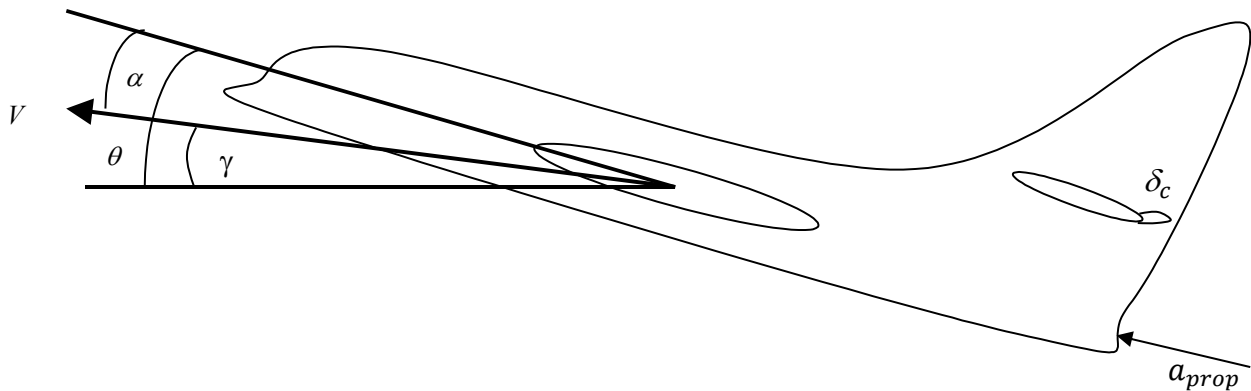


Figure 1. Définition de la dynamique longitudinale d'un avion

2 GUIDE DE LECTURE

2.1 Références essentielles

- Modern Control Engineering, 5th Edition, K. Ogata, Prentice-Hall (Pearson), 2009, 912 pages, ISBN 978-0-13-615673-4 (on référera à ce livre comme étant le “Ogata”)

- Notes de cours de JdeL.

Les chapitres 1,2,3 sont pour information, les chapitres 4,5,6 sont le sujet de cet APP.

- o Chapitre 1 : Introduction aux asservissements
- o Chapitre 2 : Modélisation rappel de l'APP3
- o Chapitre 3 : Lois de commande Sections 3.1 à 3.6
- o Chapitre 4 : Analyse dans le domaine temporel Sections 4.1 à 4.7
- o Chapitre 5 : Lieu des racines Sections 5.1 à 5.8
- o Chapitre 6 : Analyse fréquentielle, diagrammes de Bode Sections 6.1 à 6.4, 6.8, 6.9

- Guide MATLAB version 8, février 2023

2.2 Séquence des lectures

Tableau 2.1 Séquence des lectures

ACTIVITÉ	LECTURES OBLIGATOIRES	LECTURES COMPLÉMENTAIRES
RÉVISION		
Introduction aux asservissement	Notes JdeL Ch.1	
Modélisation	Notes JdeL Ch.2	
PROCÉDURAL 1		
Lois de commande (introduction générale)	Notes JdeL Ch.3, sections 3.1 à 3.6	
Critères de performance – régime transitoire	Notes JdeL Ch. 4, sections 4.1 à 4.3	
Analyse par le lieu des racines	Notes JdeL Ch.5	Ogata 6.1 à 6.3 (ignorer les parties sur le critère de Routh)
Analyse par la méthode analytique	Notes JdeL Ch.3 sections 3.1 à 3.6 Notes JdeL Ch.4, sections 4.4 à 4.6	
LABORATOIRE 1		
Effet de la commande intégrale et dérivée sur les performances d'un système avec retour unitaire	Notes JdeL Ch.4	Ogata section 5.7
Fonctions Matlab N.B. Chapitres 1 à 9 du guide : rappel. Les chapitres 10 à 18 sont spécifiques à cet APP.	JdeL Guide Matlab	
PROCÉDURAL 2 (LABO)		
Critères de performance : régime permanent	Notes JdeL Ch.4, section 4.7	Ogata, section 5.8
Analyse par la réponse en fréquence	Notes JdeL Ch. 6, Sections 6.1 à 6.9 * section 6.8 : seulement ce qui concerne Bode.	Ogata, sections 7.1, 7.2, 7.7 (seulement Bode, c.à.d. pas Nyquist ni tracés log-magnitude) Ogata Annexe A

3 LOGICIELS ET MATÉRIEL

Le laboratoire, le procédural 2 ainsi que la problématique requerront l'utilisation du logiciel MATLAB.

4 PRODUCTIONS À REMETTRE

10.1 Solution à la problématique

La solution à la problématique proposée dans cet APP fera l'objet d'une production composée d'une présentation (défense) et des scripts MATLAB associés, réalisés en **équipe de deux étudiants**. **Les documents (présentation et scripts) doivent être remis au plus tard le mercredi de la deuxième semaine à 8h30.** Les retards dans la livraison des documents seront pénalisés de 10%.

Procédure de dépôt

La présentation et les scripts MATLAB doivent être regroupés dans un fichier zip, lequel sera nommé des CIP des deux co-équipiers, séparés d'un trait d'union (p.ex., abcd1234-efgh5678.zip). Ce fichier sera déposé, selon la procédure en vigueur (voir section dépôt sur le site de session).

Contenu des scripts MATLAB

Les scripts MATLAB seront également remis. Les noms et CIP des auteurs doivent également figurer dans chaque script. Afin d'en faciliter la lecture, il est fortement conseillé de diviser le script en sections bien identifiées (conseil : utilisation de %% pour diviser les sections) et d'ajouter des commentaires. Chaque section devrait débiter par un entête expliquant brièvement le but visé par cette section.

Modalités d'évaluation de la production

L'évaluation de la solution à la problématique contribue à l'appréciation des éléments de compétence de l'unité. On évalue l'exactitude, la précision, la complétude, la valeur de chaque élément de solution. Il est de la responsabilité de chaque signataire de s'assurer de la qualité de l'ensemble de la production remise, incluant la compréhension de chaque élément de solution. Ces mêmes compétences seront évaluées de façon individuelle lors de l'évaluation sommative.

4.1 Consignes spécifiques pour la défense de la solution

- Présentation orale de la solution

La solution aux problèmes posés par Dr. Lindberg doit au minimum présenter les sujets suivants :

- (a) analyse des caractéristiques dynamiques de l'avion à partir des valeurs propres du système et de la réponse temporelle de la vitesse v du système soumis à un échelon sur a_{prop} : pour chaque mode, donner le temps du premier pic, le dépassement maximum, le temps de stabilisation, le facteur d'amortissement, **la période des oscillations amorties et naturelles** et vérifier ces résultats à partir de la réponse temporelle
- (b) identification de la fonction de transfert à phase non-minimale à partir des pôles et zéros
- (c) présentation du lieu des racines fait à la main entre a_{prop} et v (avec étapes) et validation sur MATLAB
- (d) à partir du lieu des racines, **explication de l'effet de la rétroaction K_v sur la stabilité, le temps de stabilisation et le dépassement maximum à partir du lieu des racines**
- (e) conception de la boucle interne à partir du lieu des racines: (1) choix de K_v et (2) calcul du nouveau modèle $n_1(s)/d_1(s)$ et du modèle A_1, B_1, C_1, D_1 incluant la boucle interne

- (f) vérification des marges avec diagrammes de Bode et K_v ; commentaire sur le sens des marges, utilité
- (g) réduction de la FT entre a_{prop} et v , présentation de la nouvelle FT réduite, fermeture de la boucle à la main sur cette FT, explication de l'effet de K_v sur les paramètres standards (K, ζ, ω_n, τ) et la réponse
- (h) calcul du K_v avec le système réduit et comparaison avec la valeur trouvée ci-dessus en (e)
- (i) comparaison des lieux des racines original et réduit de la FT entre a_{prop} et v sur le même graphique
- (j) lieu des racines entre γ_d et γ incluant la boucle interne (i.e. n_1/d_1), effet de K_p sur la réponse
- (k) design de la boucle externe: avec Bode, (1) calculer $K_{p,lim}$ pour instabilité, (2) calculer K_p pour marges de 6 dB et 30 degrés, (3) mesurer l'erreur en régime permanent par simulation sur MATLAB
- (l) calcul de l'erreur en régime permanent à partir du gain statique tel que lu sur le diagramme de Bode, comparaison avec (3) de l'item ci-dessus
- (m) calcul du nouveau modèle $n_2(s) / d_2(s)$ et le modèle A_2, B_2, C_2, D_2
- (n) comparaison et discussion des réponses temporelles avec compensateurs P, PD, PI et PID

- Deux media seront utilisés pour soumettre la solution :

- o un fichier électronique de présentation POWERPOINT ou sa version PDF
- o le script MATLAB

Pour éviter les pertes de temps à transférer de MATLAB à PDF/POWERPOINT pendant la présentation, seule la présentation PDF/POWERPOINT sera affichée sur l'écran avec les figures et les résultats numériques requis. Le fichier MATLAB sera consulté après la présentation orale selon les clarifications que le correcteur ou la correctrice aurait besoin d'y obtenir.

- Fichier PDF/ POWERPOINT
 - o Ce fichier doit contenir toutes les informations demandées dans « Présentation de la solution ».
- Script MATLAB
 - o Utiliser la fonction ***disp*** pour afficher les résultats numériques sur MATLAB
 - o Utiliser des commentaires pour faciliter la compréhension.
- Modalités d'évaluation de la défense de la solution

L'évaluation de la défense de la solution contribue à l'évaluation des éléments de compétence de l'unité. On évalue l'exactitude, la précision, la complétude, la valeur de chaque élément de solution. La qualité de la communication ne sera pas évaluée de façon sommative mais si la présentation est fautive sur le plan de la qualité de l'écrit et de la présentation, la défense sera remise à plus tard.

5 ÉVALUATIONS

5.1 Intégrité et plagiat

Dans le cadre de la présente activité, vous êtes réputés avoir pris connaissance de la page intégrité intellectuelle des Services à la vie étudiante.

Utilisation de l'intelligence artificielle générative

L'intelligence artificielle générative (IAG) réfère à l'ensemble d'outils capable de générer de nouveaux contenus (texte, images, code informatique, musique, etc.) à partir de requêtes texte, incluant, mais pas limité à :

- ChatGPT (fin de l'apprentissage en 2021)
- CoPilot
- Dall-E
- Synthesia
- Scribe
- Duet
- Bard

L'écosystème des IAG est extrêmement énergivore et a un impact environnemental significatif. Avant d'avoir recours à ces outils, vérifier si la réponse à votre requête pourrait se trouver dans votre documentation, vos collègues, votre équipe professorale ou par l'utilisation d'un moteur de recherche (Ecosia, Google, etc.) afin de limiter votre empreinte énergétique.

Attention : il peut y avoir des erreurs de l'IAG ! *** **La responsabilité finale du contenu des productions appartient à la personne étudiante.** ***

Dans le cadre de cette unité d'APP, afin d'assurer un apprentissage réussi des compétences visées, ***l'utilisation des IAG pour la résolution de la problématique n'est pas permise.*** Toutefois, l'usage des IAG est permis pour votre apprentissage (recherche, explication, exemples) et l'aide à la rédaction, conditionnellement à ce que tout élément produit par une IAG directement utilisé dans les productions remises à l'équipe professorale soit cité et documenté dans les règles de l'art.

L'utilisation des IAG lors des évaluations sommatives et finales n'est pas permise.

5.2 Évaluation sommative de l'unité

La note attribuée aux activités pédagogiques de l'unité est une note individuelle. L'évaluation portera sur les compétences figurant dans la description des activités pédagogiques. Il y aura une partie théorique et une partie pratique.

6 PRATIQUE PROCÉDURALE 1

Buts de l'activité

Le but de cette activité est de mettre en pratique les procédures requises pour :

- résoudre des problèmes de construction et d'interprétation de lieu des racines;
- résoudre des problèmes d'analyse de la réponse en boucle fermée.

6.1 Exercices

E.1 Lieu des racines (construction)

Appliquer les règles de construction du lieu des racines aux systèmes dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée ci-dessous :

$$(a) \quad KG(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

$$(c) \quad KG(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2+6s+12)}$$

$$(b) \quad KG(s) = \frac{K}{(s+5)(s^2+4s+7)}$$

$$(d) \quad KG(s) = \frac{K(s^2+4s+5)}{s^2(s+1)(s+3)}$$

E.2 Lieu des racines (utilisation pour stabiliser)

Un asservissement à retour unitaire a une FTBO donnée par $KG(s) = \frac{K}{s^2(s+1)}$. Démontrer avec les règles du lieu des racines qu'il est instable pour tout K positif. Démontrer avec les règles du lieu des racines que l'on peut le stabiliser par l'ajout d'un zéro sur l'axe réel tel que : $KG_c(s)G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+1)}$ (équivalent à une commande PD). Démontrer analytiquement que le zéro doit être placé à droite du pôle à -1 pour stabiliser.

E.3 Méthode analytique (ordre 2)

La dynamique d'un satellite en rotation (θ) autour d'un axe d'inertie J est modélisée par :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_c + T_p$$

où T_c est le couple de commande et T_p est le couple de perturbation. La position angulaire du satellite est mesurée avec un détecteur d'étoile et cette information est utilisée par un compensateur à action PD (utiliser la forme $K_D s + K_P$).

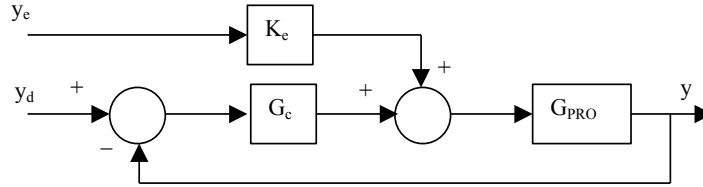
- Faire le schéma-bloc du système en boucle fermée, incluant les deux entrées : la position angulaire désirée (la consigne θ_d) et la perturbation T_p .
- En supposant un capteur parfait, trouver la fonction de transfert entre θ_d et θ , et entre T_p et θ .
- Exprimer analytiquement la fréquence naturelle ω_n et le facteur d'amortissement ζ en boucle fermée en fonction des paramètres du système. Conclure sur l'effet de K_P et K_D sur la dynamique du système.
- Les critères de performance de l'asservissement en boucle fermée sont : dépassement maximum $M_p = 4.6\%$ et temps du premier pic $t_p = 44s$. Calculer les paramètres standards ω_n et ζ correspondants.
- Si $J = 400 \text{ kgm}^2$, calculer K_P et K_D pour atteindre les critères de performance. Donner les unités.
- Avec les données en (d), prédire le temps de stabilisation (à 2%) t_s pour le système en boucle fermée.

(g) Calculer l'erreur en régime permanent en degrés si $\theta_d = 0$ et T_p est une perturbation échelon de 10^{-4} Nm (qui est une valeur typique pour un satellite).

Rép.: (d) $\omega_n = 0.1$ rad/s, $\zeta = 0.7$ (e) $K_P = 4$ Nm/rad, $K_D = 56$ Nms/rad (f) $t_s = 57.1$ s (g) $e(\infty) = -1.43$ mdeg.

E.4 Méthode analytique (ordre 1)

On veut asservir un processus d'ordre 1 qui, en boucle ouverte, a une constante de temps de 0.5 s et une réponse $y(t)$ en régime permanent de 60 quand soumis à une entrée échelon $x(t) = 4 u_0(t)$.



On utilise un correcteur à action proportionnelle $G_c = K_P$. Une perturbation extérieure y_e agit aussi sur le processus.

- Calculer une première valeur de K_P pour avoir, en boucle fermée, un temps de stabilisation d'au plus 0.25 s (à 2 %).
- Calculer une deuxième valeur de K_P pour obtenir une erreur en régime permanent inférieure à 0.1 avec une consigne échelon unitaire.
- Avec la valeur de K_P qui satisfait les deux exigences (a) et (b), déterminer l'erreur en régime permanent pour une perturbation échelon avec un gain de perturbation $K_e = 1/30$.

Rép. : (a) $K_P = 7/15$ (b) $K_P = 9/15 = 0.6$ (c) $K_P = 0.6$ (d) $e(\infty) = -0.05$.

E.5 Rétroaction avec un modèle variables d'état

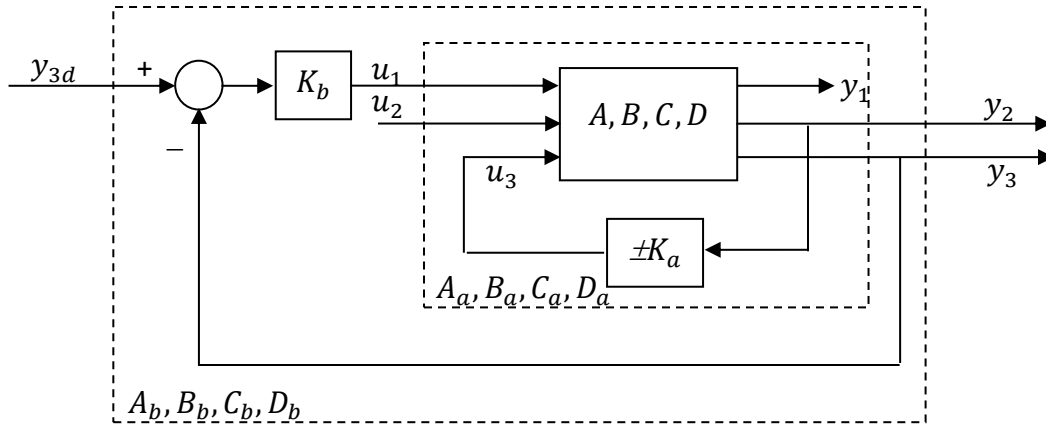
Pour le modèle variable-d'état A, B, C, D suivant, à 3 entrées (u_1, u_2, u_3), n variables d'état et 3 sorties (y_1, y_2, y_3), on introduit une boucle interne de gain $\pm K_a$ entre y_2 et u_3 et une boucle externe de gain K_b pour asservir la sortie y_3 avec l'entrée u_1 . Trouver analytiquement les modèles A_a, B_a, C_a, D_a et A_b, B_b, C_b, D_b avec les entrées et sorties indiquées sur le schéma-bloc. Voir les étapes ci-dessous.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1b)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$A : n \times n \quad B = [B_1 \quad B_2 \quad B_3] \quad B_j : n \times 1 \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad C_j : 1 \times n \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) Boucle interne

Démontrer que la rétroaction de la boucle interne est $u_3 = \pm K_a C_2 x$. En remplaçant u_3 dans (1a), démontrer que l'on obtient :

$$A_a = (A \pm B_3 K_a C_2) \quad B_a = [B_1 \quad B_2] \quad C_a = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad D_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[Sur MATLAB : $\mathbf{Aa} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}(:, 3) * \mathbf{Ka} * \mathbf{C}(2, :) ; \quad \mathbf{Ba} = \mathbf{B}(:, 1:2) ; \quad \mathbf{Ca} = \mathbf{C}(2:3, :) ,$ etc.]

Selon le schéma-bloc, la sortie y_1 n'est plus nécessaire. Elle est donc éliminée de l'équation de sortie.

(b) Boucle externe

Démontrer que la rétroaction de la boucle externe est $u_1 = K_b y_{3d} - K_b C_3 x$. On remplace dans le système précédent. Démontrer que l'on obtient :

$$A_b = (A_a - B_1 K_b C_3) \quad B_b = [B_1 K_b] \quad C_b = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad D_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selon le schéma-bloc, l'entrée u_2 n'est plus nécessaire. Elle est donc éliminée de l'équation de sortie.

Le système final, à 1 entrée et 2 sorties, est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_b x + B_b y_{3d} \\ y_{2,3} &= C_b x + D_b y_{3d} \quad (2) \end{aligned}$$

Remarquer comment la matrice A originale est transformée pour devenir $A_b = (A_a - B_1 K_b C_3) = (A \pm B_3 K_a C_2 - B_1 K_b C_3)$. Ses valeurs propres (donc les pôles du système) sont modifiées. Le but d'un asservissement est de choisir K_a et K_b pour placer ces pôles aux endroits désirés.

7 LABORATOIRE 1

Buts de l'activité

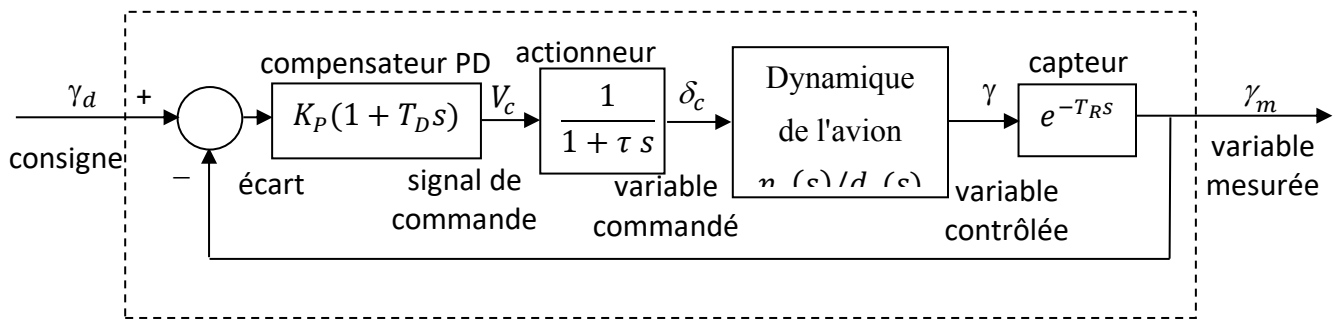
Le but de cette activité est d'utiliser le logiciel MATLAB pour analyser l'effet de l'ajout de pôles, de zéros et de retard à la fonction de transfert d'un système et d'analyser l'impact sur le lieu des racines et sur la réponse temporelle. Un exemple de compensation par ajout de zéros est aussi illustré.

7.1 Exercices

Schéma-bloc et fonction de transfert pour les problèmes 1 et 2

Dr. Lindberg vous donne le schéma-bloc complet du système asservi de l'avion, incluant non seulement la boucle externe et le PID mais aussi l'actionneur (le gouvernail de profondeur dont l'angle est δ_c) et le capteur d'horizon (qui donne l'angle de vol γ). Un système réduit à l'ordre 2 est utilisé dans les analyses :

$$\frac{n_r}{d_r} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



E.1 Effet de l'ajout de zéros et de pôles

Pour un gain proportionnel fixe de $K_p = 1$, Dr Lindberg est intéressé à voir tour à tour les effets individuels des modifications suivantes sur (1) le lieu des racines et (2) la réponse en boucle fermée du système soumis à un échelon unitaire :

- (a) on ignore l'actionneur et le capteur et on ajoute à la dynamique de l'avion seulement le zéro du compensateur PD : $K_p(1 + T_D s)$ pour les valeurs $T_D = [0.0, 0.2, 0.5, 1.0, 2.5, 5.0]$. Superposer les lieux des racines pour chaque valeur de T_D et indiquer la position des pôles obtenus avec un gain de 1 (voir Guide MATLAB, E47, page 65). Superposer les réponses à l'échelon sur un 2^{ème} graphique. **Conseil** : utiliser une boucle **for** pour cycler à travers toutes les valeurs de T_D avec **hold on** pour les figures.

On enlève le compensateur PD pour la partie (b).

- (b) on ajoute le pôle de l'actionneur : $\frac{1}{1 + \tau s}$ pour les valeurs $\tau = [0.0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2]$. Superposer les lieux des racines pour chaque valeur de τ et indiquer la position des pôles obtenus avec un gain de 1 (voir Guide MATLAB, E47, page 65). Superposer les réponses à l'échelon sur un 2^{ème} graphique.

Utiliser les fonctions MATLAB *series*, *feedback* et *lsim* pour obtenir la FT en boucle fermée et faire le graphique de la réponse en boucle fermée.

Conclure sur l'effet de l'ajout d'un pôle ou d'un zéro sur le lieu des racines et sur la réponse à un échelon. **Attention** à la relation entre T_D et τ sur la position respective du zéro et du pôle. N'oubliez pas qu'on s'intéresse non seulement au lieu des racines, mais aussi à la position des pôles en boucle fermée pour un gain K_P égal à 1 (**rlocus(num,den,1)**).

E.2 Effet du retard

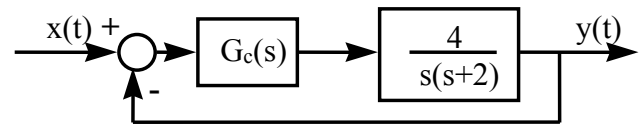
Pour un gain proportionnel fixe de $K_P = 1$, Dr Lindberg est aussi intéressé à voir l'effet du retard sur (1) le lieu des racines et (2) la réponse en boucle fermée du système avec l'ajout du retard T_R dans le capteur : $\exp(-T_R s)$. On ignore le compensateur et l'actionneur et utilise les valeurs de retard $T_R = [0.05, 0.10, 0.20, 0.25]$. Dr. Lindberg recommande la fonction de Padé (d'ordre 5 ou 6) pour obtenir une approximation de $\exp(-T_R s)$ sous forme de fonction de transfert (sur MATLAB: *pade*). Il est recommandé de faire un zoom sur le lieu des racines et de calculer la réponse à l'échelon sur une période de 50 s.

Conclure sur l'effet de l'ajout d'un retard sur le lieu des racines et sur la réponse à un échelon.

Conseil : Vérifier les pôles et zéros de la fonction de transfert de Padé (d'ordre 5 ou 6). Combien il y en a et où sont-ils placés? Déterminer l'effet de l'ordre de l'approximation et de la valeur du retard T_R sur le positionnement des pôles. Quelle est la limite de stabilité en gain pour chacune des valeurs de retard ?

E.3 Compensateurs P, PD et avance de phase

Pour le système ci-contre, on analyse trois types de compensateurs:

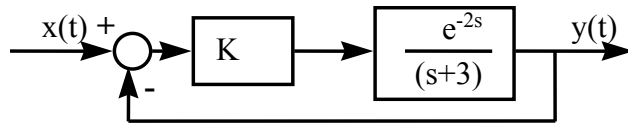


- un compensateur proportionnel de gain unitaire $G_c = 1$
- un compensateur à *avance de phase* (AvPh) donné par $G_c(s) = 4.68 \frac{(s+2.9)}{(s+5.4)}$,
- un compensateur PD de même gain statique que (b) donné par $G_c(s) = 4.68 \frac{(s+2.9)}{5.4}$.

- Démontrer analytiquement et par le lieu des racines (sur MATLAB) qu'en boucle fermée, le compensateur proportionnel (a) donne $\zeta_{BF} = 0.5$, $\omega_{nBF} = 2$ rad/s et un temps de stabilisation de 4s.
- Démontrer par le lieu des racines (sur MATLAB) que le compensateur avance-de-phase (b) a maintenu l'amortissement de (a) à $\zeta_{BF} = 0.5$ mais que le temps de stabilisation est passé de 4 s à 2s.
- Démontrer comment le PD amortit encore plus la réponse en calculant le ζ_{BF} obtenu. Faire les 3 lieux de racines sur le même graphique et y indiquer la position des pôles en BF avec un gain de 1 pour voir l'évolution des pôles (Guide MATLAB, E47, page 65). Faire une simulation de la réponse à une entrée échelon sur MATLAB pour comparer les 3 systèmes en boucle fermée et vérifier que le compensateur (b) a bien accéléré la réponse du système par un facteur 2 et que le compensateur (c) a bien augmenté l'amortissement.

E.4 Système avec retard

Pour le système avec retard ci-contre :



- (a) Calculer analytiquement le point de séparation du lieu des racines de l'axe réel.
- (b) En utilisant une approximation de Padé d'ordre 2 et les règles de construction du lieu des racines, déterminer analytiquement le gain K où le système en boucle fermée devient instable. Calculer la fréquence des oscillations non-amorties à cette valeur de K .
- (c) Faire le lieu des racines sur MATLAB avec une approximation de Padé d'ordre supérieur à 2.
- (d) Avec le tracé en (c), retrouver les points du tracé trouvés analytiquement en (a) et (b) i.e. le point de séparation du tracé de l'axe réel et le point d'intersection avec l'axe imaginaire. Comparer les résultats.

E.5 Validation de lieux des racines du procédural

Pour [le numéro 1 du procédural 1](#), valider les lieux de racines obtenus avec MATLAB (*rlocus*). Valider les points de séparation de l'axe réel et les intersections avec l'axe imaginaire.

8 PRATIQUE PROCÉDURAL 2 (LABO)

Buts de l'activité

Le but de cette activité est d'utiliser le logiciel MATLAB pour analyser l'effet de l'ajout de pôles, de zéros et de retard à la fonction de transfert d'un système et d'analyser l'impact sur le lieu des racines et sur la réponse temporelle.

Le but de cette activité est de développer les compétences et connaissances pour :

- interpréter des diagrammes de Bode, déterminer les marges de stabilité
- calculer l'erreur en régime permanent et effet de la classe du système
- analyser l'effet des compensateurs avance-de-phase et retard-de-phase sur les marges de stabilité et sur l'erreur en régime permanent.

Dans cet APP, on ne considère que l'effet des compensateurs. Dans le prochain APP, on verra comment en faire la conception pour atteindre des performances désirées.

8.1 Exercices

E.1 (À faire directement à partir des graphiques en Annexe)

À partir des diagrammes de Bode à ANNEXE B, calculer pour chacun : (i) la marge de gain, (ii) la marge de phase, (iii) le type (la classe) de la fonction de transfert, (iv) la différence $n-m$ (ordre du dénominateur n moins ordre du numérateur m) et (v) l'erreur en régime permanent pour des entrées échelon, rampe et parabole unitaires. Y a-t-il une fonction de transfert à phase non-minimale, laquelle et pourquoi?

E.2 (À faire directement à partir des graphiques en Annexe)

- Pour la Figure (a), quelle marge de phase maximale est-il possible d'atteindre? Quelles est la marge de retard correspondante ? Quelle variation de gain permettrait de l'atteindre?
- Pour la Figure (b), quel est le retard T (dans e^{-Ts}) maximum permis dans la boucle (venant des capteurs, calculs, actionneurs) avant que le système ne devienne instable ?

E.3 (À faire avec MATLAB; utiliser logspace de -3 à +1)

- Pour le système du problème précédant : $G(s) = \frac{17.8885}{s(s+2)}$, retracer les diagrammes de Bode et calculer à partir du diagramme le coefficient d'erreur statique K_{vel} .
- Ajouter en cascade le compensateur $G_r(s) = 0.9997 \frac{(s+0.10)}{(s+0.02)}$. Superposer sur les mêmes diagrammes de Bode les systèmes original $G(s)$ et compensé $G(s)G_r(s)$. Discuter de l'effet du compensateur sur le gain et la phase à ω_g . Quel est l'impact sur le coefficient K_{vel} .
- Tracer les diagrammes de Bode séparé du compensateur $G_r(s)$ pour arriver aux mêmes conclusions.
- Superposer le lieu des racines de $G(s)$ et de $G(s)G_r(s)$ pour y observer l'effet de $G_r(s)$.
- Calculer le compensateur PI de forme $G_{PI}(s) = K_P + K_I/s$ avec $K_P = 0.9997$ et $K_I = 0.10$ (comme si le pôle de $G_r(s)$ était déplacé de 0.02 à 0.00). Comparer sur les diagrammes de Bode cette compensation avec celle obtenue avec $G_r(s)$ ci-dessus.

E.4 (À faire à la main et à valider sur MATLAB)

Le déplacement $x(t)$ d'une masse de 1 kg est effectué par une entrée $u(t)$ de type PWM (± 1) qui actionne un moteur capable de fournir une force maximum de 20.4 N. Une friction dynamique de coefficient $b = 10$ N/(m/s) est aussi appliquée à cette masse.

- (a) Calculer (à la main) la marge de phase de ce système si on ferme la boucle entre la position $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ avec une rétroaction de gain unitaire.
- (b) Que devient cette marge de phase si le capteur de position introduit un retard pur de 0.69 s ?
- (c) Valider sur MATLAB en utilisant *margin* avant et après l'introduction du retard.

9 VALIDATION

Le but de cette activité est de valider la solution au problème de l'APP que vous avez développée et de renforcer les concepts fondamentaux des systèmes asservis à l'aide de MATLAB.

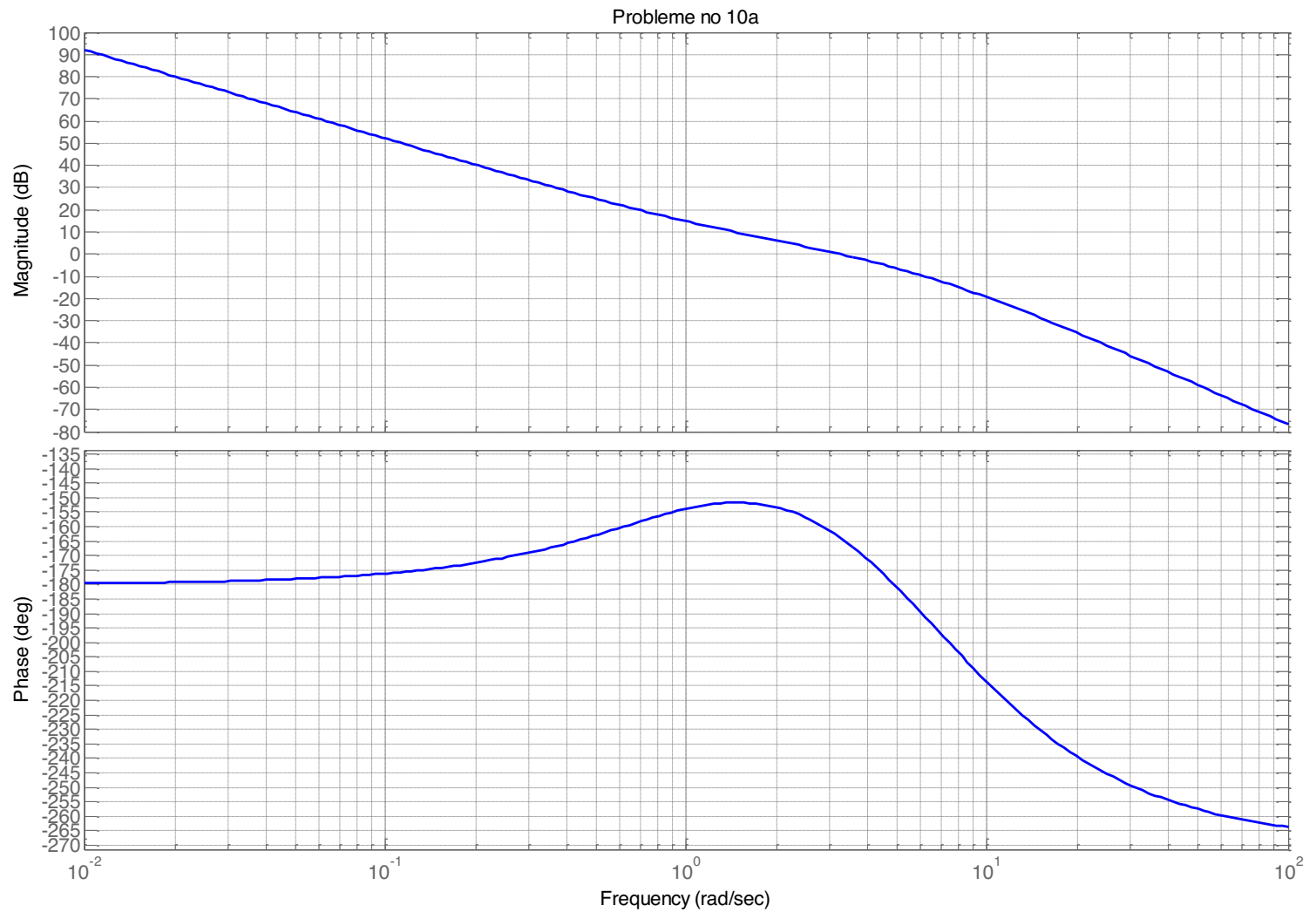
Vous devrez préparer la solution à ces problèmes avant la séance.

LISTE DES RÉFÉRENCES

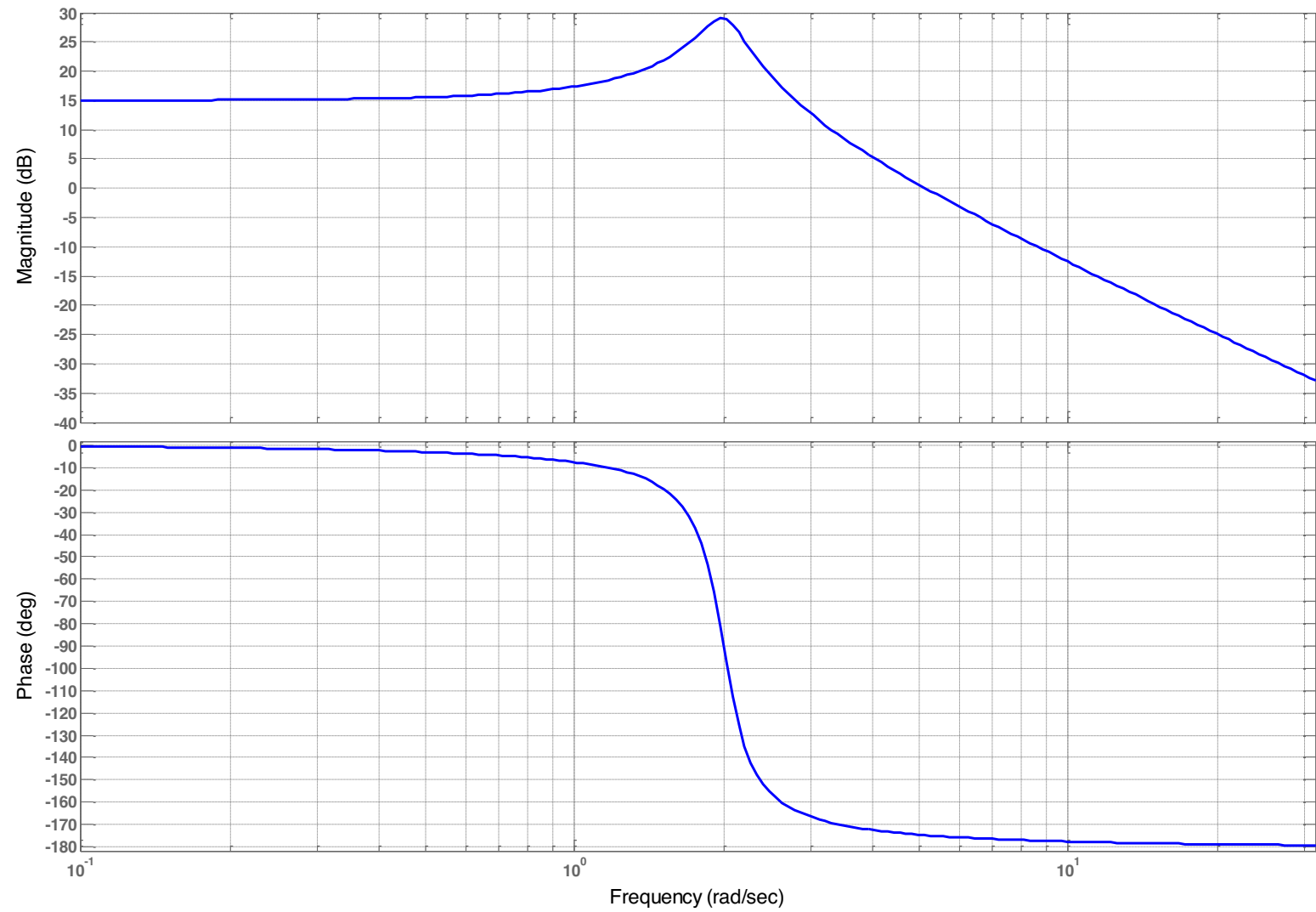
- [1] Ogata, K. Modern Control Engineering. 5^e ed. Prentice Hall, 2010. 894p.
- [2] Kuo, B.B *et al.* Automatic Control Systems, 9^e ed. Wiley, 2009. 800p.

10 ANNEXE B

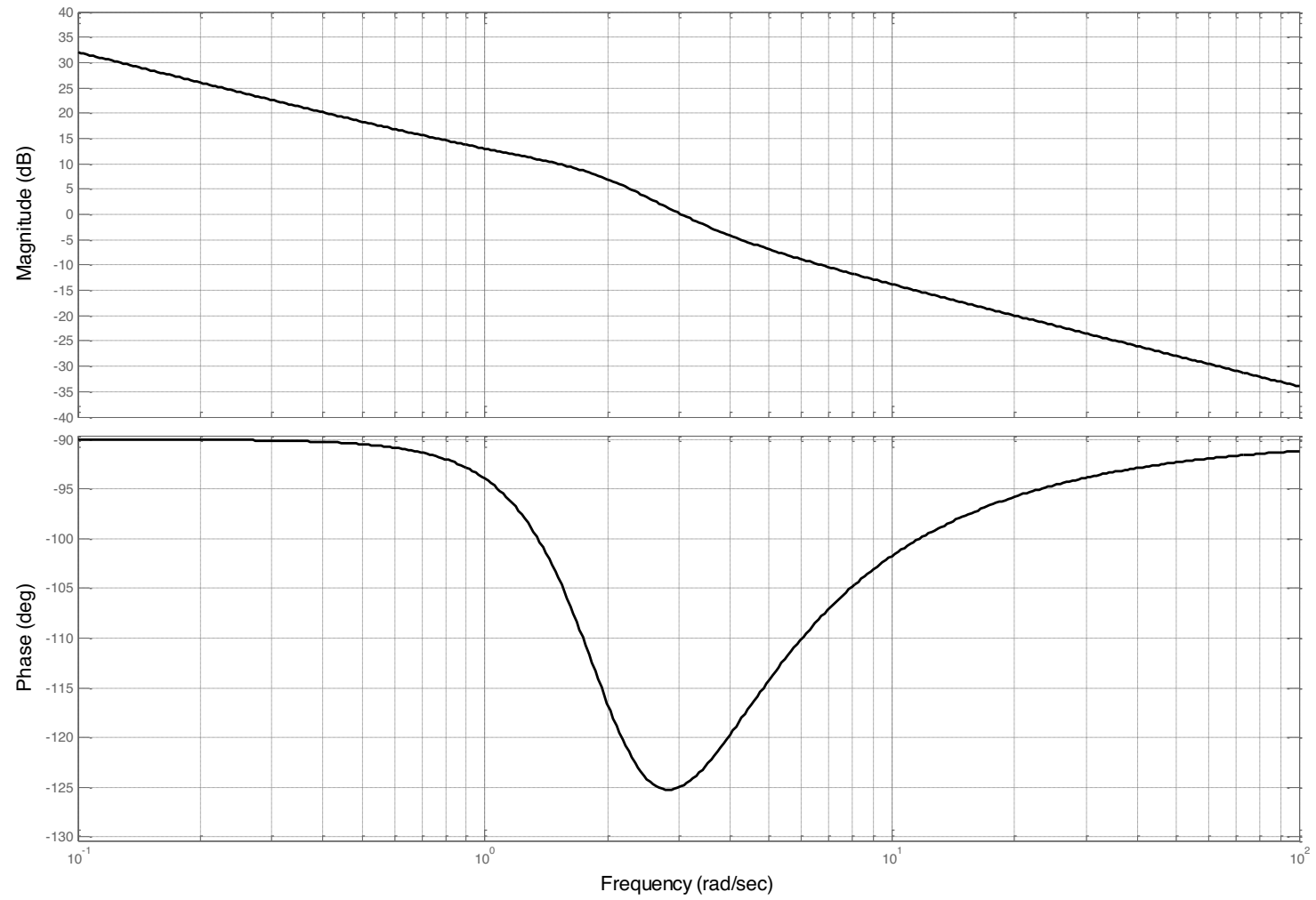
Figures pour les problèmes du procédural 2



Problème 11-12 : Figure (b)



Problème 11-12 : Figure (c)



Problème 11-12 : Figure (d)

