Analyse de systèmes asservis analogiques

EXAMEN FORMATIF

APP4e

Problème 1 (sans MATLAB)

(a) Appliquer à la main les 9 règles de construction du lieu des racines pour le système :

$$KG(s) = \frac{K}{s(s^2 + 5s + 5)}$$

1. Symétrie : la moitié du travail est faite… Les angles de départ/arrivée dans la partie Nord seront l'image miroir de la partie Sud.
2. Ordre 3 => 3 pôles => 3 branches
3. Départ aux pôles à $s = 0$, $s = -3.618, s = -1.382$
   Arrivée aux zéros : aucuns zéros, $n - m = 3$, donc les 3 branches vont à l'∞
4. Trois asymptotes : angles de $+60\text{ deg}, +180\text{ deg et} - 60\text{ deg}$.
5. Intersection des asymptotes avec l'axe des réels :

$$\sigma = \frac{\sum pôles - \sum zéros}{n - m} = \frac{(0 - 3.618 - 1.382) - (0)}{3 - 0} = -\frac{5}{3} = -1.67$$

6. Lieu sur l'axe des réels (« peinture ») :
   entre le pôle à $s = 0$ et le pôle à $s = -1.382$ et à partir du pôle à $s = -3.618$ vers $-\infty$.

7. Point de séparation et points de jonction sur l'axes des réels : point de séparation entre les deux pôles avec de la « peinture » entre les deux.

$$\frac{dK}{ds} = 0 => \ ND' - DN' = 0$$

$$N = 1, \quad D = s(s^2 + 5s + 5) = s^3 + 5s^2 + 5s$$

$$(1)(3s^2 + 10s + 5) - s(s^2 + 5s + 5)(0) = 3s^2 + 10s + 5 = 0$$

   Solutions : $s = -2.721,\ s = -0.613$. Seulement $\boldsymbol{s = -0.613}$ est sur un lieu des racines valide (avec peinture) donc séparation à ce point.

8. Angle de départ des pôles conjugués complexes : aucun
   Angle d'arrivée à des zéros conjugués complexes : aucun

9. Intersection avec l'axe imaginaire :

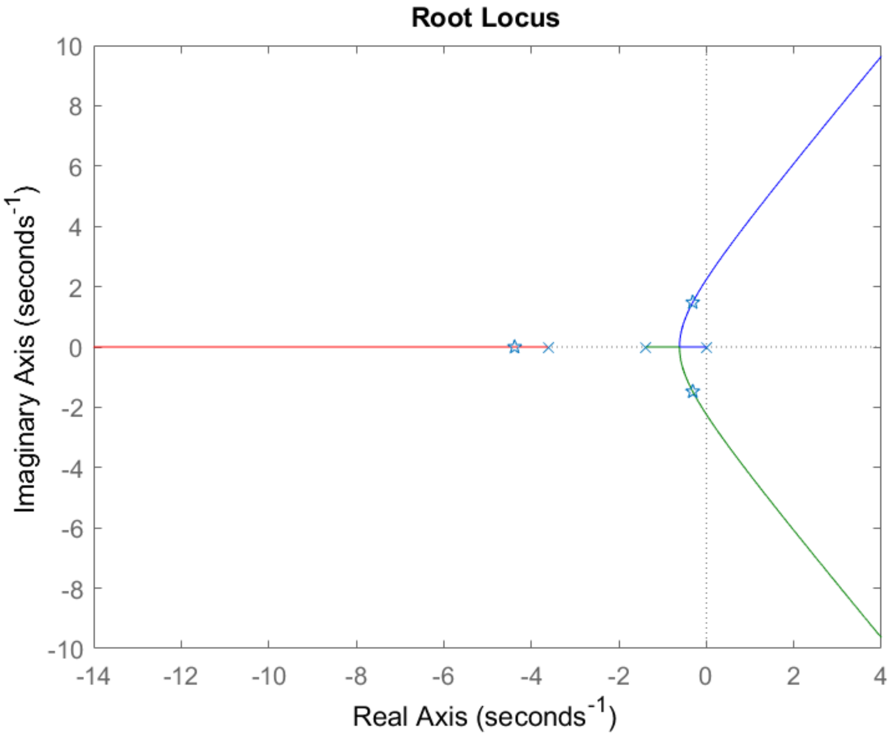
$$DEN_{BF} = D(s) + K\,N(s) = (s^3 + 5s^2 + 5\,s + K) = 0$$

$$-j\omega^3 - 5\omega^2 + 5\,j\omega + K = 0$$

$$-\omega^3 + 5\,\omega = 0 \qquad \omega = 0 \text{ et } \omega = \pm\sqrt{5}$$

$$-5\omega^2 + K = 0 \quad => K = 5\omega^2 = 25$$

   Le système devient instable avec un gain $K = 25$ et traverse l'axe imaginaire à $\pm j\sqrt{5} = \pm j2.236$.



(b) Si on ajoute un compensateur de type $K_P(s + 2)$ en cascade, indiquer quelles sont les modifications du tracé sur le lieu des racines : nombre et direction des asymptotes, intersection des asymptotes avec l'axe réel, point de séparation, déplacement général du lieu ?

nombre et direction des asymptotes :
Avec le PD, on ajoute un zéro donc on perd une asymptote vers l'infini : on passe de 3 asymptotes (± 60 deg et -180 deg) à 2 asymptotes (± 90 deg).

intersection des asymptotes avec l'axe réel :

$$\sigma = \frac{\sum p\hat{o}les - \sum z\acute{e}ros}{n-m} = \frac{(0 - 3.618 - 1.382) - (\mathbf{-2})}{3-1} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

point de séparation

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \quad ND' - DN' = 0$$

$$N = (\boldsymbol{s + 2}), \quad D = s(s^2 + 5s + 5) = s^3 + 5s^2 + 5s$$

$$(s+2)(3s^2 + 10s + 5) - (s^3 + 5s^2 + 5s)(1) = 3s^3 + 16s^2 + 25s + 10 - (s^3 + 5s^2 + 5s) = 0$$

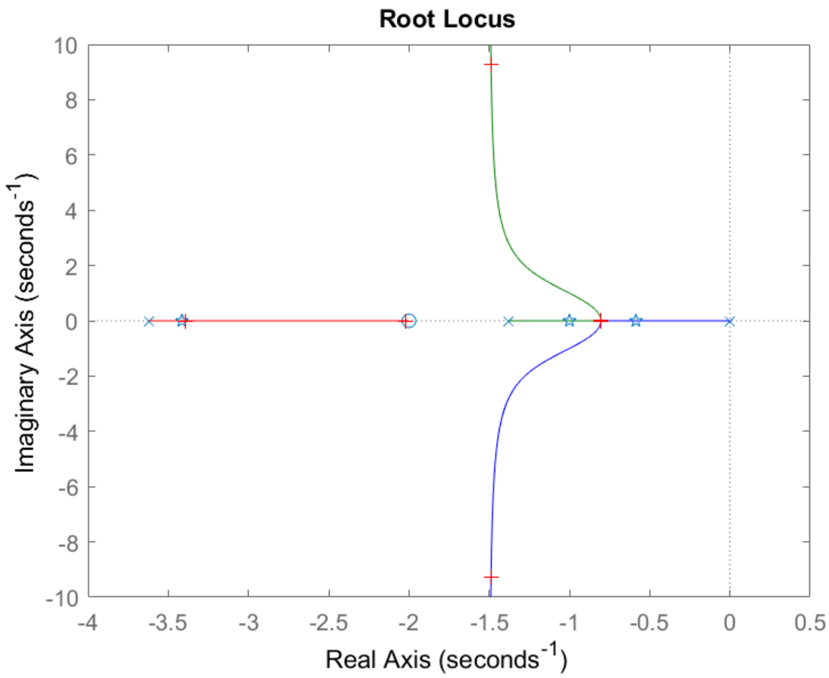
$$2s^3 + 11s^2 + 20s + 10 = 0$$

solutions (on ne demandera pas de trouver les racines d'une cubique sans MATLAB):

-2.34871466846652 + 0.844701384204889i rejetée
-2.34871466846652 - 0.844701384204889i rejetée
-0.802570663066967 **bonne (sur la peinture)**

Le point de séparation s'est déplacé vers la gauche.

déplacement général du lieu
Le lieu des racines est attiré vers la gauche.



(c) Prédire les impacts de ce compensateur sur la réponse en régime transitoire du système en boucle fermée soumis à une entrée échelon (stabilité, oscillations, temps de stabilisation) ?

Le système non compensé pouvait devenir instable pour un gain $K_P > 25$. Le système compensé est toujours stable pour toute valeur du gain K_P. Le lieu des racines se déplace vers la gauche, il y a moins d'oscillation et le temps de stabilisation sera plus court.

(d) Comment varie le tracé du lieu des racines si on change le gain K_P du compensateur par un facteur 10?

Les commandes rlocus(FT) et rlocus(10*FT) donnent le même tracé : le lieu des racines ne change pas de forme avec la multiplication d'un gain positif. Cependant la valeur du gain à un endroit donné sur le lieu a changé par un facteur 10. Autre façon de voir : un gain positif (phase = 0 deg) ne change pas la phase de la FTBO et donc, ne change pas le « trajet d'autobus ». Il ne change que le « nom des stations d'autobus » (l'ancienne station 1 est retrouvée à la station 0.1).

(e) Quels sont les impacts de ce changement de gain K_P d'un facteur 10 sur l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée soumis à une entrée rampe ?

Le gain de la FTBO de classe 1 vient d'être augmenté d'un facteur 10 donc le K_{vel} va aussi être amplifié d'un facteur 10 et l'erreur en régime permanent à une entrée rampe sera réduite d'un facteur 10.

Problème 2 (sans MATLAB)

Le déplacement *x(t)* d'une masse de 1 kg est effectué par une entrée *u(t)* qui actionne un moteur qui amplifie l'entrée $u(t)$ par un gain de 10 (la force appliquée en Newton est $F(t) = 10\,u(t)$). Une friction visqueuse de coefficient *b* = 25 N/(m/s) est aussi appliquée à cette masse.

(a) Développer la fonction de transfert en boucle ouverte de ce système.

FT entre $x(t)$ et $F(t)$

Équation originale : $m\ddot{x} = F(t) - b\dot{x}$ avec $F(t) = 10u(t)$.
Laplace : $(ms^2 + bs)X(s) = F(s) = 10U(s)$

FT avec sortie sur entrée :

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{10}{(ms^2 + bs)} = \frac{10}{s(s+25)}$$

(b) Calculer (à la main) les marges de phase et de gain de ce système quand on ferme la boucle entre la position *x(t)* et l'entrée *u(t)* avec une rétroaction unitaire et une commande P en cascade de gain $K = 1$. Quelles sont les fréquences de traverse en phase ω_p et en gain ω_g?

Marge de phase

On trouve la fréquence de traverse en gain ω_g, la fréquence à laquelle la marge de phase est calculée. La fréquence de traverse en gain $\omega_g$est le point où l'amplitude est 1 (0 dB) : $|G(j\omega_g)| = 1$.

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{10}{-\omega^2 + 25j\omega}\right| = \frac{10}{\sqrt{\omega^4 + 625\omega^2}} = 1$$

$$\omega^4 + 625\omega^2 - 100 = 0 \quad => \quad \omega^2 = \quad \mathbf{-625.16} \text{ ou } \mathbf{0.16} \quad => \boldsymbol{\omega_g} = \mathbf{0.4\ rad\ /s}$$

On calcule la phase de $G(s)$ à ω_g (le symbole $\langle G(j\omega_g)\rangle$ est utilisé pour la phase de $G(j\omega_g)$).

$$\langle G(j\omega_g)\rangle = \langle\frac{10}{-\omega_g^2 + 25j\omega_g}\rangle = \langle 10\rangle - \langle -\omega_g^2 + 25j\omega_g\rangle = 0 - \tan^{-1}\frac{imag}{real} = -\tan^{-1}\left(\frac{25\omega_g}{-\omega_g^2}\right) =$$
$$= -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_g}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-0.4}\right) = -90.92 \text{ deg}$$

Marge de phase :

$$PM = \langle G(j\omega_g\rangle - (-180) = -90.92 + 180 = \mathbf{89.08\ deg}$$

(Au besoin, voir le document « Clarifications_sur_le_calcul_de_phase ».)

Marge de gain

On trouve la fréquence de traverse en phase ω_p, la fréquence à laquelle la marge de gain est calculée. La fréquence de traverse en phase $\omega_p$est le point on la phase est -180 deg: $\langle G(j\omega_p\rangle = -180$.

$$\langle G(j\omega_p\rangle = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_p}\right) = -180 \quad => \; \tan(180) = \frac{25}{-\omega_p} \; => 0 = \frac{25}{-\omega_p} \; => \; \omega_p = \infty$$

La marge de gain est infinie (on ne traverse pas la phase à -180 deg).

(c) De quel facteur (ou de quelle fraction) doit-on changer le gain unitaire K pour obtenir une marge de phase de 30 deg ? Que deviendrait la nouvelle fréquence de traverse en gain ω_g?

La marge de phase de 30 deg sera obtenue à une nouvelle fréquence ω_g donnée par :

$$\langle G(j\omega_g\rangle = -180 + PM = \; -180 + 30 = \; -150 \text{ deg}$$

Donc

$$\langle G(j\omega_g\rangle = -\tan^{-1}\left(\frac{25}{-\omega_g}\right) = \; -150 \quad => \quad \omega_g = -\frac{25}{\tan(150)} = 43.30 \text{ rad/s}$$

On veut que l'amplitude à ce ω_g soit 1 (0 dB).

$$\left|KG(j\omega_g)\right| = 1 \; => \quad K = \frac{1}{G(j\omega_g)} = \frac{\sqrt{\omega_g^4 + 625\omega_g^2}}{10} = 216.51$$

NOTE : La marge de phase est passée de $PM = 89.08$ deg à $PM = 30$ deg avec l'augmentation de gain de 216.51. Normalement, on ne désire pas réduire une marge de phase sauf dans le cas où on veut augmenter le gain pour réduire une erreur en régime permanent. C'est le cas ici. Voir la prochaine question.

(d) Avec le changement de gain K en (c), par quel facteur le gain statique K_{vel} et l'erreur en régime permanent (à une réponse à une rampe unitaire) ont-ils été augmentés/diminués ?

Le gain statique K_{vel} a été augmenté d'un facteur 216.51 et l'erreur en RP a été diminuée du même facteur :

$$K_{vel}(original) = \frac{10}{25} = 0.4 \quad => \quad e_{RP}(rampe) = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$K_{vel}(nouveau) = K_{vel}(original)(216.51) = \; 86.6 \quad => \quad e_{RP}(rampe) = \frac{1}{86.6} = 0.0115$$

(e) Toujours avec le gain K calculé en (c), quel est le retard pur T_R maximum que le système pourrait subir avant de devenir instable ?

$$T_R = \frac{PM}{\omega_g}\frac{\pi}{180} = 0.0121 \; s$$

(f) Démontrer analytiquement l'impact du gain K de la rétroaction sur les caractéristiques de la réponse temporelle en boucle fermée (impact sur l'amortissement et sur la fréquence naturelle).

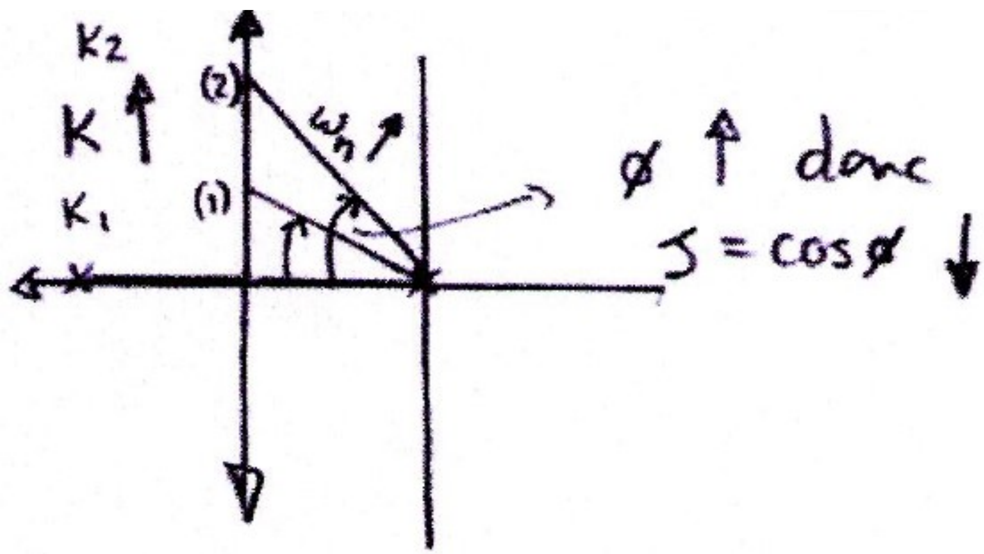
$$FTBF = \frac{\dfrac{K10}{s(s+25)}}{1 + \dfrac{K10}{s(s+25)}} = \frac{10K}{s^2 + 25s + 10K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

On fait le mapping du dénominateur

$$\omega_n^2 = 10K, \quad 2\,\zeta\omega_n = 25 \quad => \quad \omega_n = \sqrt{10\,K} \quad \zeta = \frac{25}{2\sqrt{10\,K}}$$

Quand K augmente, la fréquence naturelle ω_n augmente et tend vers ∞.
Le facteur d'amortissement diminue avec une augmentation de K.

(g) Démontrer le résultat en (e) en faisant un croquis du lieu des racines et en y indiquant les pôles en boucle fermée pour deux gains K_1 et K_2 avec $K_2 > K_1$.



Problème 3 (sans MATLAB)

À partir du diagramme de Bode illustré en annexe :

(a) Déterminer la classe du système.

(b) Déterminer les marges de phase et de gain.

(c) Calculer les coefficients K_P, T_D du compensateur PD de la forme $K_P(1+T_D s)$ qui donne une marge de phase de 10 deg à la même fréquence de traverse en gain.

P3

(a) Classe : -20 dB/dec pour $\omega \to 0$: Classe 1

(b) GM = -14 dB à 2.24 rad/s (ω_p)
PM = -39.2 deg à 4.4 rad/s (ω_g)

(c) On veut $K_p(1+T_d s)$ pour que PM = 10 deg à ω_g

$\Rightarrow$ On conserve la même ω_g donc $|K_p(1+T_d j\omega_g)| = 1$ ①

$\Rightarrow$ On veut $PM_{désiré} = +10$ deg et on part avec $PM_{départ} = -39.2$ deg. On veut donc augmenter ("avancer") la phase de $\phi = 10-(-39.2) = 49.2$ deg

$\Rightarrow$ On veut donc $\angle K_p(1+T_d\omega_g j) = 49.2$ deg ②

$\Rightarrow$ 2 éqns. à 2 inconnues $\Rightarrow$ commence par ②

$$\tan^{-1}\left(\frac{T_d\omega_g}{1}\right) = 49.2 \Rightarrow T_d = \frac{\tan(49.2)}{\omega_g} = 0.263$$

$\Rightarrow$ Eq. ① : $K_p\sqrt{1+T_d^2\omega_g^2} = 1 \Rightarrow K_p = 0.653$

$\Rightarrow$ Compensateur : $0.653(1+0.263s)$ augmente la marge de phase de -39.2 deg à $+10$ deg.

Problème 4 (sans MATLAB)

Pour la FTBO suivante : $KG(s) = \frac{K(s-z)}{s(s^2+4s+8)}$, utiliser les règles du lieu des racines pour calculer la condition sur le zéro à $z < 0$ qui assure la stabilité en boucle fermée du système pour toute valeur du gain K.

$$G(s) = \frac{K(s-z)}{s(s^2+4s+8)} = \frac{K(s-z)}{s(s^2+2-2j)(s+2+2j)}$$

- Un zéro à $z < 0$ et trois pôles à 0, $-2 \pm 2j$
- $n - m = 3 - 1 = 2$ => 2 branches à l'infini
- On veut les asymptotes du côté négatif.

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(0-2-2j-2+2j)-(z)}{n-m} = \frac{-4-z}{2} < 0$$

- Donc $-4 - z < 0$ => $z > -4$. Il faut mettre le zéro à droite de -4 (et à gauche de 0).

Analyse de systèmes asservis analogiques

EXAMEN FORMATIF

APP4e

Problème 5 (sans MATLAB)

Pour un système masse-ressort-amortisseur de masse m, constante de ressort k et facteur amortisseur b soumis à une force de commande F_c, la loi de Newton donne l'équation dynamique:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_c(t)$$

(a) Trouver la fonction de transfert entre la position $x(t)$ et la commande $F_c(t)$.
(b) Si la commande F_c est calculée à partir d'un compensateur PD de gain K_P et K_D sur le retour de la position $x(t)$, démontrer que l'effet du compensateur est de changer électriquement les caractéristiques physiques du système en agissant sur la constante du ressort et de l'amortisseur.

(a) FT entre $x(t)$ et $F_c(t)$

Équation originale : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_c(t)$
Laplace : $(ms^2 + bs + k)X(s) = F_c(s)$

FT avec sortie sur entrée :

$$\frac{X(s)}{F_c(s)} = \frac{1}{(ms^2 + bs + k)}$$

Forme standard ordre 2 :

$$\frac{X(s)}{F_c(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)}$$

(b) Effet du compensateur PD en cascade

FTBO donnée par :

$$FTBO(s) = (K_P + K_D s)\frac{\frac{1}{m}}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)}$$

FTBF donnée par :

$$FTBF(s) = \frac{(K_P + K_D s)/m}{s^2 + \left(\frac{b + K_D}{m}\right)s + \left(\frac{k+K_P}{m}\right)}$$

Selon le dénominateur, le gain dérivé K_D augmente le coefficient d'amortissement et donc réduit les oscillations.
Le gain proportionnel K_P augmente la constante du ressort et donc augmente la rapidité du retour à la consigne (atteinte de la consigne plus rapide).
C'est le principe de base d'une suspension asservie pour automobile. En ajustant les coefficients K_P, K_D, on peut choisir la qualité de la suspension (rigide ou 'molle').
On voit que, si la masse m diminue, cela a l'impact d'augmenter la valeur relative des gains K_D/m et K_P/m d'où l'importance de prendre une marge de gain pour éviter l'instabilité (si la masse diminue par exemple avec l'utilisation du carburant dans un avion).

Problème 6 (avec MATLAB)

NOTE : Ce problème est très *pédagogique*. Il fait le tour de plusieurs concepts reliant le lieu des racines et le diagramme de Bode.

Un système dynamique a la fonction de transfert suivante : $G(s) = \frac{s^2+3s+23}{s^4+5s^3+22s^2+7s+9}$

(a) Combien de modes possède ce système ?

Avec ***roots(den)***, on obtient deux paires de pôles conjugués complexes, donc deux modes dynamiques.

(b) À partir des pôles de ce système en boucle ouverte, calculer les caractéristiques temporelles de chaque mode : M_p, t_p, t_s.

```
pol = roots(den);
wn = abs(pol)
zet = -real(pol)./wn

phi = acosd(zet)
Mp = 100*exp(-pi./tand(phi))
ts = 4./(zet.*wn)
tp = pi./imag(pol)
```

Les résultats pour chaque mode sont :

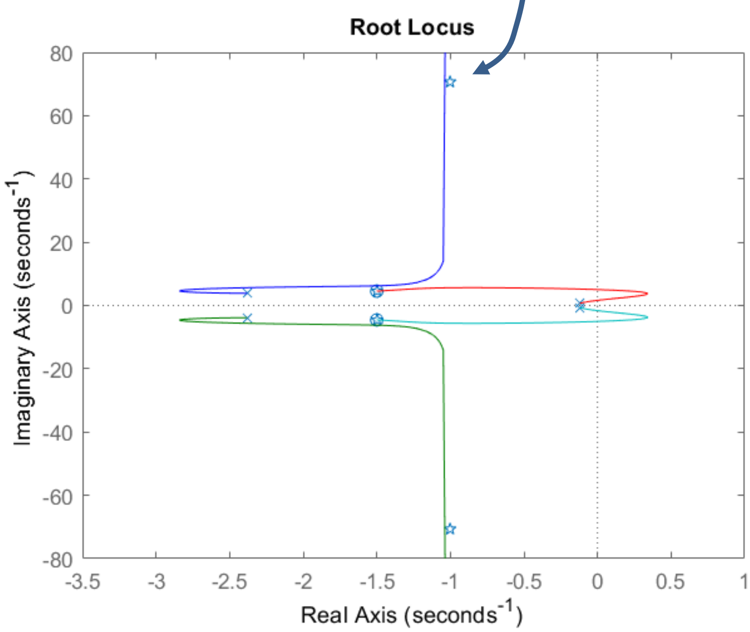
```
wn =
    4.5184
   0.66394

zet =
   0.52672
    0.1808

phi =
    58.216
    79.583

Mp =
    14.275
    56.128

ts =
    1.6807
    33.321

tp =
   0.81794
     4.811
```

(c) À partir du lieu des racines sur MATLAB, déterminer le plus long temps de stabilisation qui serait obtenu avec une rétroaction de type proportionnel quand le gain tend vers de grandes valeurs. Confirmer ce résultat avec la règle no 5 du lieu des racines.

Le plus long temps de stabilisation (pôles le plus à droite) pour grandes valeurs de gain est sur le lieu des racines qui tend vers les asymptotes à ± 90 deg.

```
% Lieu des racines

  figure
  pol = rlocus(FT,5000);     % Grande valeur du gain
  plot(real(pol), imag(pol), 'p')
  hold on
  rlocus(FT)

  ts1 = 4./abs(real(pol))
```

ts1 = 3.9928 (sur l'asymptote) et 2.6699 (plus rapide)



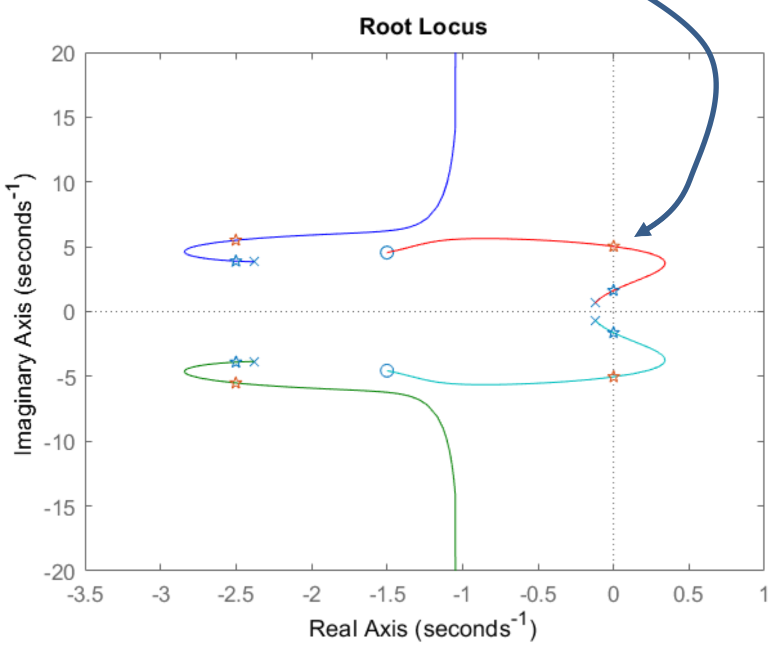

```
% Règle no 5

  zer = roots(num);
  sig = (sum(pol)-sum(zer))/2;       % Intersection avec axe réel (sigma)
  ts2 = 4/abs(sig)
```

ts2 = 4 (avec règle no 5)

(d) À partir du lieu des racines sur MATLAB et la fonction ***rlocfind*** (ou le curseur), trouver approximativement entre quelles valeurs de gain le système en boucle fermée est instable.

Le système est instable pour des valeurs de gain entre 2.07 et 39.9 approximativement (à remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir des asymptotes vers la droite pour avoir des plages d'instabilité…). L'angle de départ des pôles conjugués complexes est vers la droite donc il y avait possibilité de traverser l'axe imaginaire (ce qui ne fut pas le cas du mode phugoïde de la problématique où l'angle de départ des pôles de ce mode était vers la gauche).

```
% Lieu des racines

  figure
  rlocus(FT)
  hold on
  pol = rlocus(FT,2.07)
  plot(real(pol), imag(pol), 'p')
  pol = rlocus(FT,39.9)
  plot(real(pol), imag(pol), 'p')
```



Il est possible de calculer à la main ces intersections avec la règle no 9 (un exercice utile…) . En appliquant cette règle, on trouve que le gain K et la fréquence ω où le lieu des racines traverse l'axe imaginaire sont donnés par :

$$-6K^2 + 252K - 496 = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{3K+7}{5}}$$

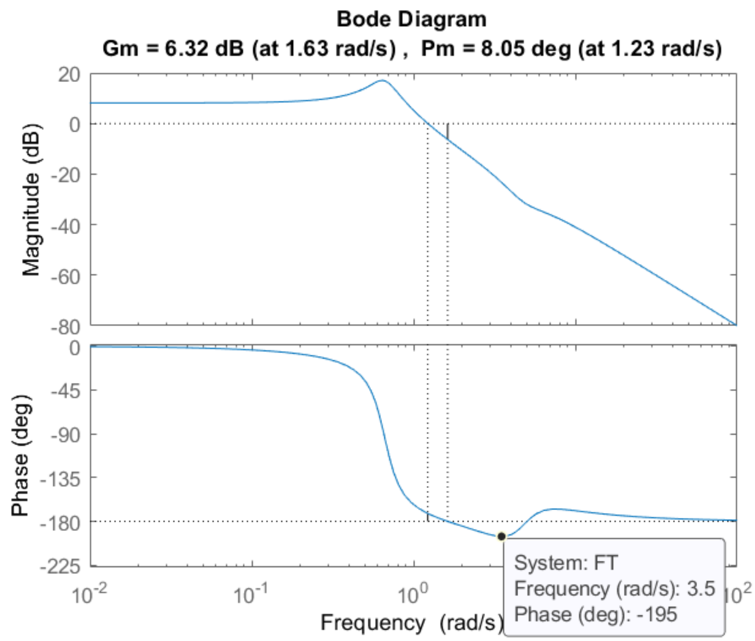
ce qui donne $K = 39.93$ et 2.0703 avec $\omega = 5.0357$ rad/s et 1.6255 rad/s.

(e) À partir du diagramme de Bode, calculer l'augmentation de phase qui permettrait au système en boucle fermée d'être stable pour toute valeur du gain proportionnel. Indiquer à quelle fréquence cette augmentation de phase doit être faite.

On cherche à éviter que la réponse en phase passe sous la ligne de -180 deg, ce qui est le cas actuellement. On trouve la fréquence où la phase est la plus inférieure à -180 deg et on calcule la phase qui manque pour élever la réponse en phase au moins à la ligne de -180 deg.

On trouve sur le diagramme de Bode que la fréquence où il y a un minimum de phase est à environ 3.51 rad/sec.

NOTE : À remarquer dans le diagramme de Bode ci-dessous que la partie de la réponse en phase qui est sous -180 deg correspond à la partie sur le lieu des racines qui est du côté droit de l'axe imaginaire (partie instable). Le système revient stable pour un gain $K > 39.93$.



La phase à cet endroit est donnée par :

```
[mag, pha] = bode(FT, 3.51)
```

mag = 0.067834
pha = −195.49

ce qui donnerait une marge de phase négative de −15.49 deg si ω_g était à 3.51 rad/s. Si on ajoute 15.49 deg à toute la réponse en phase, le tracé ne couperait plus la ligne de −180 deg et le système serait stable pour toute valeur du gain. Réponse : augmentation de phase de 15.5 deg à 3.51 rad/s.

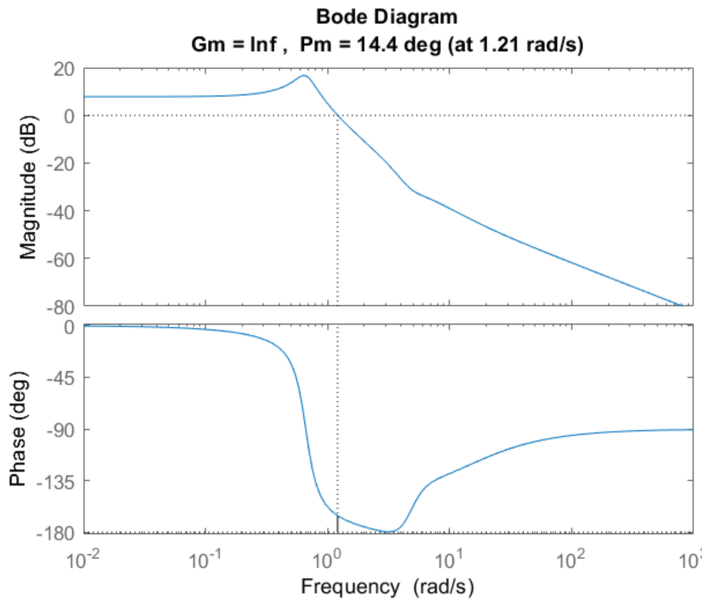
(f) Calculer le compensateur PD qui réaliserait l'augmentation de phase requise en (e) ci-dessus. Vérifier avec le diagramme de Bode et le lieu des racines que le résultat est bien obtenu.

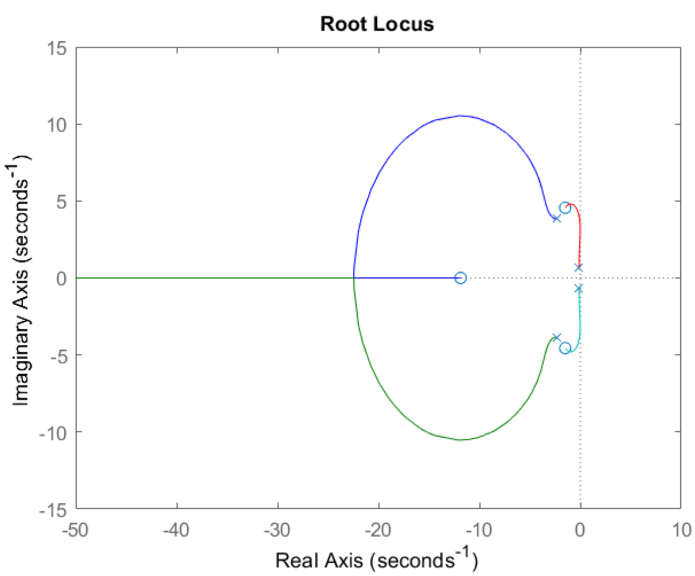
```
% Diagramme de Bode

% On ajoute 15.5 deg à 3.51 rad/s avec un PD

  wg = 3.51; % à partir du diagramme : c'est la future fréquence de traverse en gain

  [mag, pha] = bode(FT, 3.51)    % On calcule la PM à w = 3.51 deg
  PM = pha-(-180)

% On doit ajouter le négatif de la PM pour arriver à la limite de stabilité (+ marge)
```

```
deltaPM = -PM + 1.0;

% Calcul du PD
Td = tand(deltaPM)/wg;
Kp = 1/sqrt(1+Td^2*wg^2);

numPD = [Kp*Td Kp];
denPD = [0 1];
FTPD = tf(numPD, denPD)

FTBO = FT*FTPD;
figure
margin(FTBO)

figure
rlocus(FTBO)
```

On voit ci-dessous que la phase ne descend plus au-dessous de -180 deg et que le lieu des racines ne passe plus vers la droite.

La marge de 1 deg ajoutée au calcul de l'augmentation de phase (voir **`deltaPM = -PM+1.0;`** ci-dessus) est nécessaire pour la raison suivante. On doit ajouter 15.49 deg à <u>toutes les fréquences</u> pour éviter de passer sous -180 deg. Le PD ajoute moins de 15.49 deg de phase en bas de ω_g et plus de 15.49 deg en haut de ω_g. Donc, si on ajoute exactement 15.49 deg, il y aura une légère partie sous -180 deg juste un peu avant 3.51 rad/s. L'ajout de 1 deg évite cela.





NOTE : On voit que la phase du diagramme de Bode ne descend plus sous -180 deg et que le lieu des racines 'frôle' l'axe imaginaire sans le traverser. On voit bien ici le lien entre le diagramme de Bode et le lieu des racines de même que l'effet d'un compensateur PD sur l'augmentation de phase et sur la stabilisation. (N'est-ce pas merveilleux…?!)

Problème 7 (avec MATLAB)

Pour la fonction de transfert du problème précédent : $G(s)=\dfrac{s^2+3s+23}{s^4+5s^3+22s^2+7s+9}$

(a) Avec MATLAB, calculer la fonction de transfert du système réduit à ses pôles dominants.
(b) Comparer le lieu des racines des deux fonctions de transfert pour vérifier que l'approximation est valide i.e. que le lieu des racines est identique pour de petits gains.
(c) Remarquer que la réduction du système à ses pôles dominants cause un système à phase non-minimale. Pourquoi… ?
(d) Comparer le diagramme de Bode des deux fonctions de transfert. Expliquer les ressemblances et différences en amplitude et en phase. Remarquer ici aussi que le système réduit est à phase non-minimale.
(e) Comparer la réponse temporelle du système original et du système réduit. Remarquer que la réponse du système réduit « part dans le mauvais sens » comme cela est souvent le cas d'un système à phase non-minimale (comme faire un virage en vélo ou faire monter un avion).

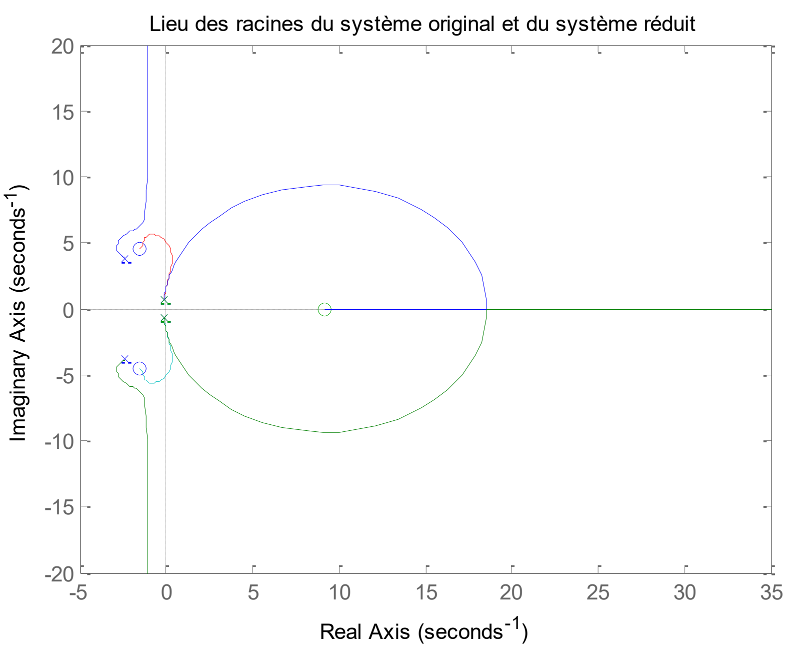
Voir le code MATLAB ci-dessous et les résultats sur l'espace de travail MATLAB.

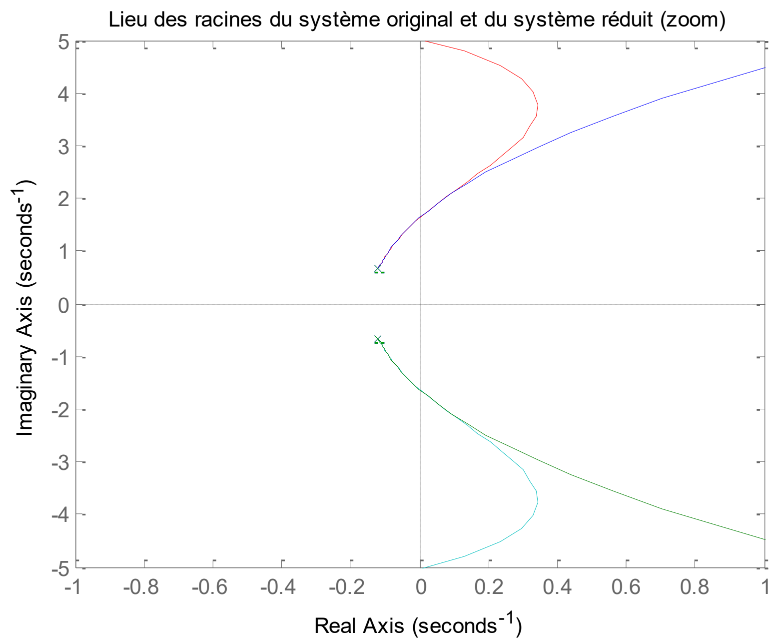
(a) Réduction

$$FT_{\text{réduite}} = \frac{-0.1222s + 1.127}{s^2 + 0.2401s + 0.4408}$$

(b) Lieu des racines

Le lieu des racines près de l'axe imaginaire est presqu'identique. Le zéro à droite de l'axe imaginaire, introduit par la réduction, attire le lieu des racines vers la droite en remplacement des pôles originaux à gauche (enlevés lors de la réduction) et qui poussaient le lieu des racines vers la droite.



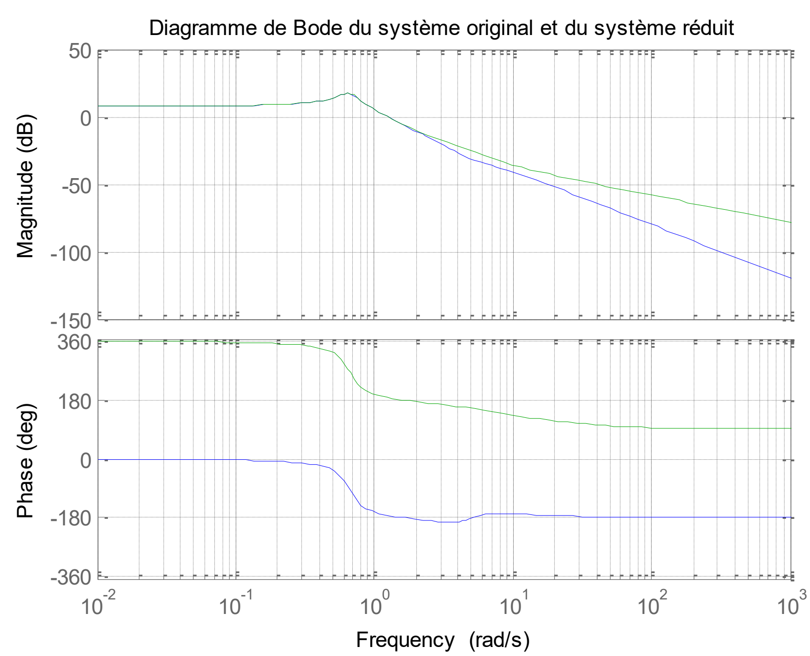


(c) Remarquer que la réduction du système à ses pôles dominants cause un système à phase non-minimale. Pourquoi… ?

Les pôles à gauche dans le système original « poussaient » le lieu des racines vers la droite. Maintenant qu'ils ont été éliminés par la réduction, ils sont remplacés par un zéro à droite qui attire le lieu des racines vers la droite (le lieu des racines doit se terminer à un zéro…), d'où le zéro à droite (pas visible dans le zoom ci-dessus), causant un système à phase non minimale. La réduction cause parfois un système à phase minimale.

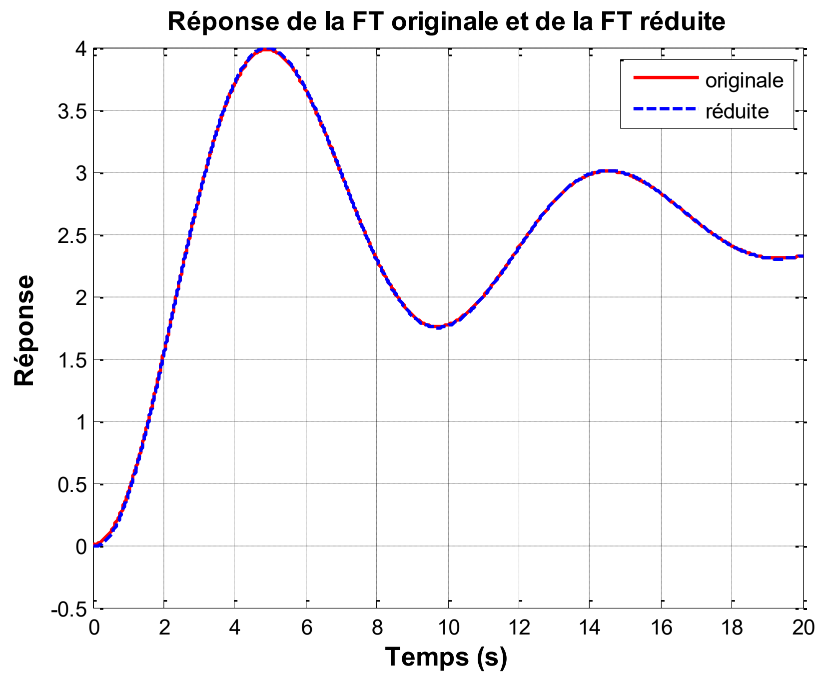
(d) Diagramme de Bode

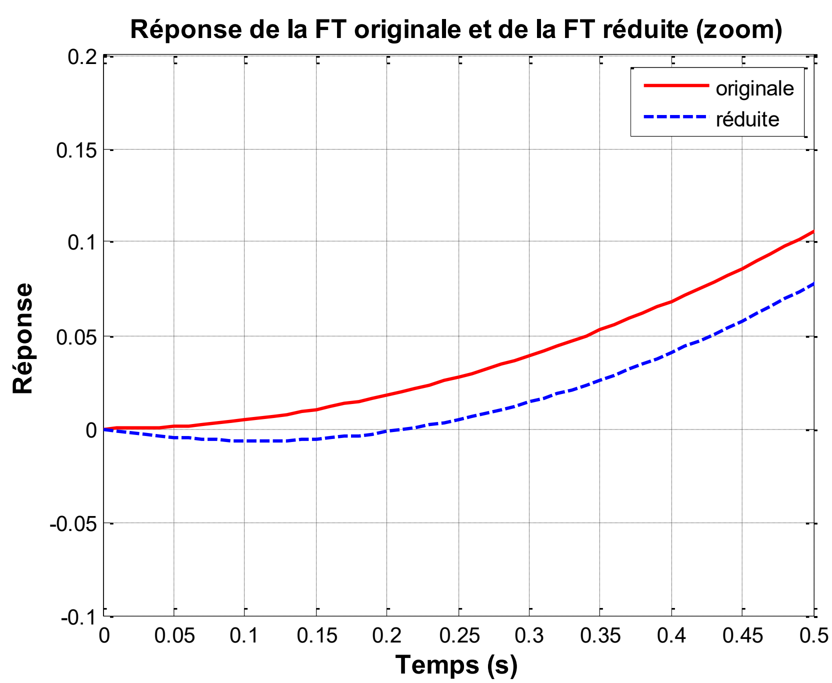
Le diagramme de Bode est presqu'identique pour les basses fréquences. Le système réduit est à phase non-minimale à cause du zéro à droite de l'axe imaginaire.



(e) Réponse temporelle

Les réponses du système original et réduit sont à peu près identiques. Remarquer sur le zoom que le système réduit part initialement dans la mauvaise direction. C'est une des façons avec lesquelles on peut reconnaitre un système à phase non-minimale.





Code MATLAB

```
% APP4e FORMATIF Problème no 7

  close all
  clear all
  clc
  format short g

% Fonction de transfert originale

  num = [1 3 23];
  den = [1 5 22 7 9];
  FT  = tf(num,den);

  disp(' ')
  disp('Fonction de transfert originale'), FT

% Pôle zéros

  pzmap(FT)

% Question (a): Réduction

  [R, P, K] = residue(num, den);
  test = abs( (R)./real(P));

  disp(' ')
  disp('Résidus, pôles et test de dominance:')
  [R, P, test]

% On conserve les deux pôles/résidus qui maximisent le test de dominance

  [numr, denr] = residue(R(3:4), P(3:4), K);

% Correction du gain DC (NE PAS l'oublier)

  g0 = dcgain(num ,den );
  gr = dcgain(numr,denr);
  numr = numr*g0/gr;

  disp(' ')
  disp('Fonction de transfert réduite')
  FTr = tf(numr,denr)

  disp(' ')
  disp(['Numérateur (réduit):    ', num2str(numr)])
  disp(['Dénominateur (réduit):  ', num2str(denr)])

% Question (b): Lieu des racines

  figure
  rlocus(num, den)
  hold on
```

```
  rlocus(numr, denr)
  title('Lieu des racines du système original et du système réduit')

  figure
  rlocus(num, den)
  hold on
  rlocus(numr, denr)
  axis([-1 1 -5 5])
  title('Lieu des racines du système original et du système réduit (zoom)')

% Question (d): Diagramme de Bode

  figure
  bode(num, den)
  grid on
  hold on
  bode(numr, denr)
  title('Diagramme de Bode du système original et du système réduit')

% Question (e): Réponse à l'échelon

  t = [0:0.01:20]';
  u = ones(size(t));
  y0 = lsim(num ,den ,u,t);
  yr = lsim(numr,denr,u,t);

  figure
  plot(t, y0, 'r', 'linewidth',2)
  xlabel('Temps (s)','fontsize',12, 'fontweight','bold')
  ylabel('Réponse','fontsize',12, 'fontweight','bold')
  hold on
  grid on
  plot(t, yr, 'b--', 'linewidth',2)
  legend('originale', 'réduite')
  title(['Réponse de la FT originale et de la FT réduite'],'fontsize',12,
'fontweight','bold')

  figure
  plot(t, y0, 'r', 'linewidth',2)
  xlabel('Temps (s)','fontsize',12, 'fontweight','bold')
  ylabel('Réponse','fontsize',12, 'fontweight','bold')
  hold on
  grid on
  plot(t, yr, 'b--', 'linewidth',2)
  axis([0 0.5 -0.1 0.2])
  legend('originale', 'réduite')
  title(['Réponse de la FT originale et de la FT réduite
(zoom)'],'fontsize',12, 'fontweight','bold')
```

Résultats sur MATLAB

Fonction de transfert originale

```
FT =
         s^2 + 3 s + 23
  ------------------------------
  s^4 + 5 s^3 + 22 s^2 + 7 s + 9
```

Continuous-time transfer function.

Residus, pôles et test de dominance:

0.060609 - 0.018504i	-2.38 + 3.8409i	0.026627
0.060609 + 0.018504i	-2.38 - 3.8409i	0.026627
-0.060609 - 0.86661i	-0.12004 + 0.653i	7.2368
-0.060609 + 0.86661i	-0.12004 - 0.653i	7.2368

Fonction de transfert réduite

```
FTr =
     -0.1222 s + 1.127
  -----------------------------
  s^2 + 0.2401 s + 0.4408
```

Continuous-time transfer function.

Numérateur (réduit): -0.12223 1.1265
Dénominateur (réduit): 1 0.24009 0.44082

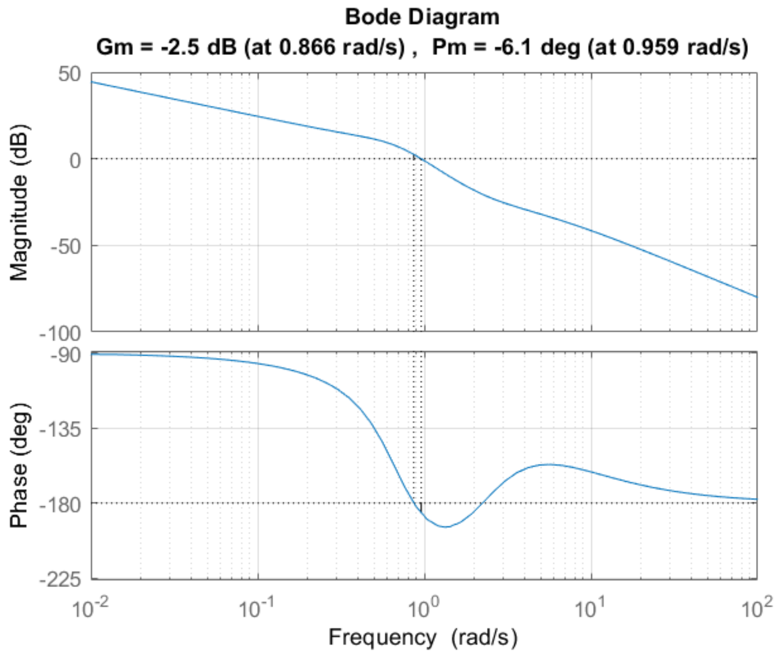
Problème 8

La FT en boucle ouverte d'un système est donnée par: $G(s) = \frac{s^2+3s+5}{s(s^3+7s^2+5s+3)}$

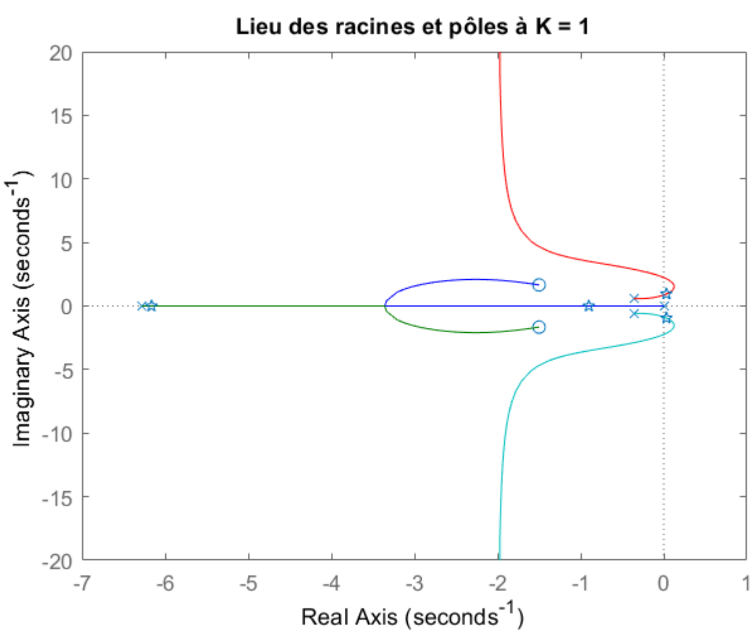
Un compensateur de type proportionnel est utilisé avec un gain K et rétroaction unitaire.

Voir le code MATLAB ci-dessous et les résultats sur l'espace de travail MATLAB.

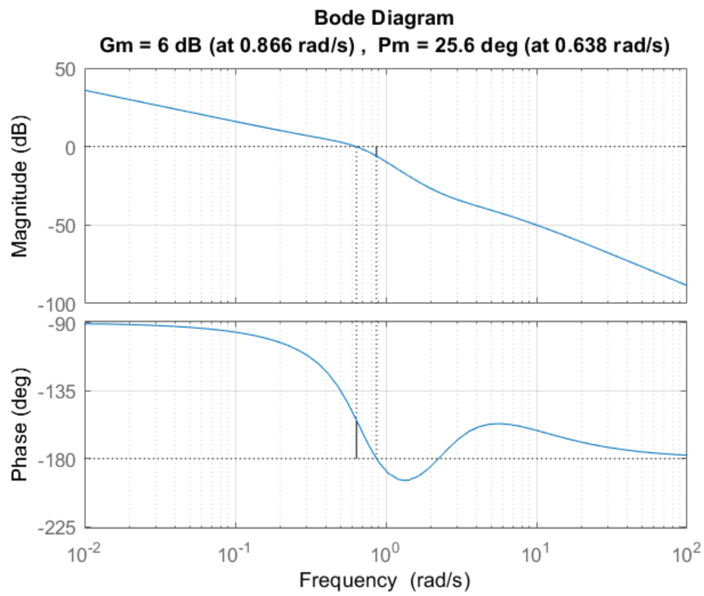
(a) Deux pôles conjugués complexes (mode d'ordre 2) et deux pôles réels (modes d'ordre 1) : 3 modes au total
(b) Avec Bode, on obtient une marge de gain initiale (avec K = 1) de -2.5 dB. Le système est originalement instable. On doit donc réduire le gain K pour obtenir une marge de gain de 6 dB. On doit donc réduire le gain de 6 dB–(–2.5 dB) donc de 8.5 dB : K = $1/10^{(8.5/20)}$= 0.376. On doit donc utiliser un gain $K = 0.376$.



Le lieu des racines indique aussi que le système est instable à K = 1.



(c) Avec *margin(K*num,den)*, on obtient PM = 25.6 deg. On voit que GM = 6 dB comme prévu en (a).



(d) À partir de la situation en (c) avec le gain K, que faudrait-il faire avec le gain K pour obtenir une marge de phase de 30 deg ? L'augmenter ou le diminuer ?

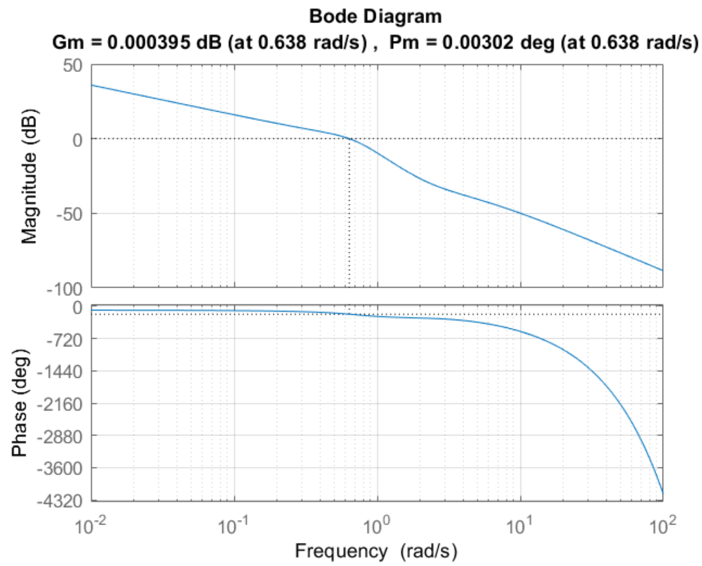
Selon le graphique ci-dessus, il faudrait encore diminuer le gain pour déplacer ω_g vers la gauche et bénéficier ainsi d'une plus grande marge de phase. Cela n'a pas été demandé mais pour trouver la réduction de gain requise pour avoir une PM de 30 deg, il faut premièrement trouver la nouvelle fréquence ω_g où la phase de la FTBO sera de $-180 + 30 = -150$ deg. À cette fréquence, on calcule le gain en dB qui sera positif. Ce gain donnera la réduction requise pour que ω_g se déplace vers la gauche à la fréquence où la PM sera de 30 deg.

(e) Avec la valeur de gain K calculée en (b), calculer le plus grand retard pur T (dans e^(-Ts)) que le système peut tolérer avant de devenir instable.

La perte de la marge phase (en deg) qui rendra instable est $PM = \omega_g T(180/\pi)$ où $\omega_g = 0.638$ rad/s (selon le graphique).

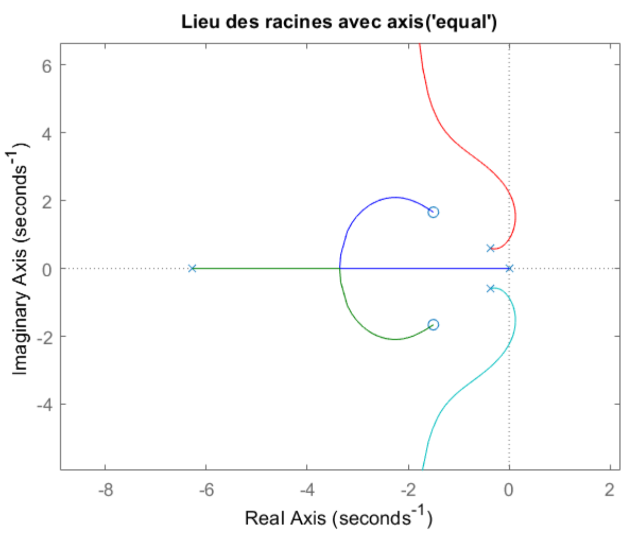
Donc retard pur max = $T = \frac{PM}{\omega_g}(\frac{\pi}{180}) = (\frac{25.6}{0.638})(\frac{\pi}{180}) = 0.7$ seconde (PM est en deg et ω_g en rad/s).

Vérification sur MATLAB (voir dans le code comment ajouter le retard sur le diagramme de Bode) : on voit ci-dessous que les marges de stabilité sont à peu près nulles avec l'ajout du retard, ce qui confirme le calcul.



(f) À mesure que le gain K est augmenté de la valeur en (a) vers l'infini, décrire sur le diagramme de Bode (sans le retard) quel serait l'historique de la stabilité du système en boucle fermée. Valider avec le lieu des racines.

Quand K augmente, ω_g se déplace vers la droite, la marge de phase diminue et devient négative, le système devient instable et redevient stable par la suite. Voir le zoom du lieu des racines correspondant ci-dessous.

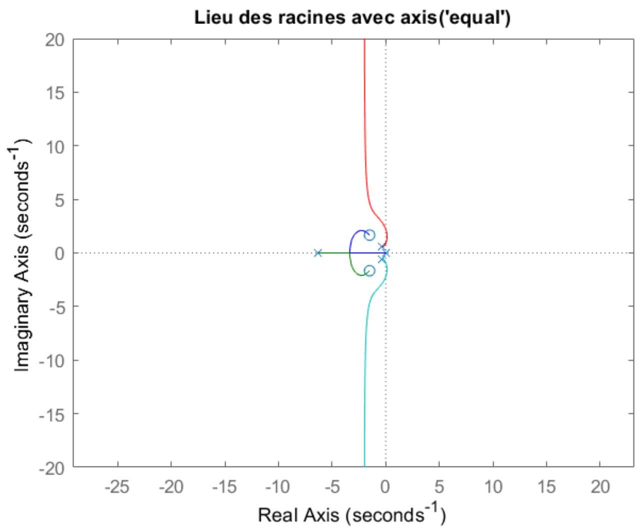


(g) Dans le lieu des racines, identifier le mode d'ordre 2 du système en boucle ouverte. Uniquement avec la rétroaction proportionnelle et pour ce mode :

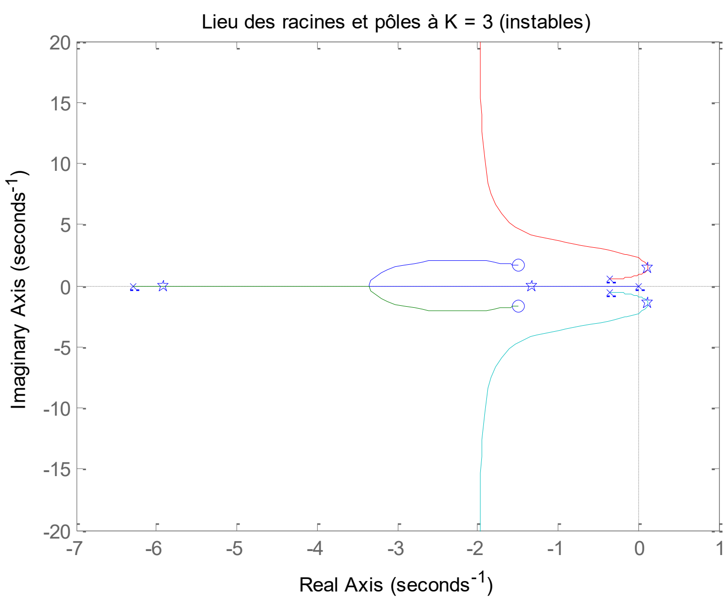
  (i) quelle est le meilleur temps de stabilisation (à 2%) que l'on peut obtenir pour ce mode

  (ii) peut-on trouver un gain K qui donne un meilleur (plus grand) facteur d'amortissement que celui en boucle ouverte ?

Les pôles de ce mode se déplacent vers les deux asymptotes Nord-Sud à :
>> [P,Z] = pzmap(num,den)
>> sigma = (sum(P)–sum(Z))/(2) = –2
Le meilleur t_s est donc 4/(max distance de l'axe imaginaire) = 4/2 = 2 secondes.
Sur le lieu des racines de ce mode, il est impossible de trouver un plus grand facteur d'amortissement (un plus petit ϕ) que celui en boucle ouverte. Donc, bien que la rétroaction augmente la vitesse de réponse (plus petit t_s), l'amortissement de ce mode décroit avec l'augmentation du gain de rétroaction.
Utiliser >> **axis('equal')** après **rlocus** pour avoir le lieu des racines à l'échelle.



(h) Quelle serait l'erreur en régime permanent du système en BF pour une entrée rampe unitaire avec $K = 3$.
L'erreur en RP est infinie même si le système est de classe 1 parce que le système est instable avec un gain $K = 3$. Voir ci-dessous la « station $K = 3$ » indiquée par les étoiles.



Code MATLAB

```
% APP4e FORMATIF Problème no 8

  close all
  clear all
  clc
  format short g

% Fonction de transfert originale

  num = [1 3 5];
  den = [1 7 5 3 0];
```

```
  figure(1)
  rlocus(num,den)
  hold on
  P = rlocus(num,den,1);
  plot(real(P), imag(P), 'p')
  title('Lieu des racines et pôles à K = 1')

  figure(2)
  margin(num,den)
  grid on

  [GM,PM,wp,wg] = margin(num,den);

% Question (b) Trouver K pour GM = 6 dB

  K6dB = 10^(6/20);
  K = GM/K6dB;

% Question (c) Trouver nouvelle PM

  figure(3)
  margin(K*num,den)
  grid on
  [GM,PM,wp,wg] = margin(K*num,den);
  disp(' ')
  disp(['La nouvelle marge de phase est de ', num2str(PM), ' deg'])
  disp(' ')

% Question (d) Comment changer K pour obtenir PM = 30 deg

% Il faut le diminuer

% Question (e) Retard T pour perdre PM

  [GM,PM,wp,wg] = margin(K*num,den);
  T = PM*(pi/180)/wg;
  disp(' ')
  disp(['Le retard maximum avant de devenir instable est de ', num2str(T), '
s'])
  disp(' ')

% Vérification

  w = logspace(-2,2,600)';
  [mag,pha] = bode(K*num,den,w);
  phar = -T*w*180/pi;        % Phase perdue par le retard
  figure
  margin(mag,pha+phar,w), grid % On ajoute la perte de phase.

  figure
  rlocus(num,den)
  axis('equal')
  title('Lieu des racines avec axis(''equal'')')

% (h) Vérification à K = 3
```

```
figure
rlocus(num,den)
hold on
P = rlocus(num,den,3);
plot(real(P), imag(P), 'p')
title('Lieu des racines et pôles à K = 3 (instables)')

disp(' ')
disp(['Les pôles à K = 3 sont ', num2str(P)])
disp(' ')
```

Résultats sur MATLAB

La nouvelle marge de phase est de 25.6129 deg
Le retard maximum avant de devenir instable est de 0.70104 s
Les pôles à K = 3 sont **-5.9185+0i** **0.12023+1.3794i** **0.12023-1.3794i** (**instable**s)

Problème 9 (sans MATLAB)

(a) Nommer le type de compensateur qui place un zéro à droite d'un pôle sur l'axe des réels négatifs du plan s. Décrire son utilité (avantage) et son principal inconvénient.

- un compensateur avance de phase
- avantage : augmenter la phase donc déplacer le lieu des racines vers la gauche, réduire les oscillations, réduire le temps de stabilisation, améliorer le régime transitoire
- inconvénient : amplifier les hautes fréquences donc amplifier le bruit dans le système

(b) Si le pôle se déplace vers $-\infty$, définir le type de compensateur obtenu.

- PD

(c) Nommer le type de compensateur qui place un zéro à gauche d'un pôle sur l'axe des réels négatifs du plan s. Décrire son utilité (avantage) et son principal inconvénient.

- un compensateur retard de phase
- avantage : amplifier les basses fréquences donc augmenter le gain statique (Kpos, Kvel, Kacc) et réduire l'erreur en régime permanent
- inconvénient : réduire la phase donc déplacer le lieu des racines vers la droite, détruire le régime transitoire

(d) Si le pôle se déplace à l'origine, définir le type de compensateur obtenu.

- PI (augmentation de la classe)

Problème 10 (sans MATLAB)

(a) Décrire les critères de performance qui sont facilement vérifiables ou observables sur le lieu des racines.

- stabilité (côté gauche ou droit), réponse en régime transitoire : t_s, M_p, t_p à travers les pôles et les paramètres standards (ω_n, ζ)

(b) Décrire les critères de performance qui sont facilement vérifiables ou observables sur le diagramme de Bode.

- erreur en régime permanent, classe, $n - m$, marges de stabilité : PM, GM, DM

Problème 11 (sans MATLAB)

(a) Décrire l'impact sur le diagramme de Bode (réponses en amplitude et en phase) de l'ajout d'un retard pur à la fonction de transfert en boucle ouverte.

- amplitude : pas de changement (le retard pur a un gain de 1)
- phase : réduction de la phase en fonction de la fréquence : $-\omega T$

(b) Le diagramme de Bode en amplitude d'un système à phase minimale se termine aux hautes fréquences par une pente de –60 db/décade. Décrire l'impact en boucle fermée sur ce système (réponses en amplitude et en phase) si le gain proportionnel d'un asservissement prend de grandes valeurs.

- La pente de –60 db/décade indique que la phase à haute fréquence sera de -270 deg. Cela veut dire que le tracé en phase va traverser la ligne de -180 deg et qu'une fréquence de traverse en phase ω_p existe et donnera une marge de gain GM finie. Si le gain augmente, la marge de phase deviendra négative et le système deviendrait instable. Autre façon de voir : la pente de –60 db/décade aux hautes fréquences indique que $n - m = 3$ et donc qu'il y 3 asymptotes dont 2 à ± 60 deg vers la droite. Pour de grandes valeurs de gain, les pôles se retrouvent du côté droit le long de ces asymptotes.

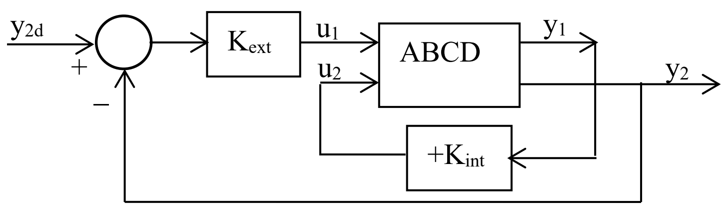
(c) Le diagramme de Bode en phase d'un système à phase minimale commence aux basses fréquences à –180 deg. Le système est rendu stable en boucle fermée avec un asservissement de type PD. Prédire quelle sera l'erreur en régime permanent du système en boucle fermée pour une entrée rampe unitaire.

- Le système est à phase minimale donc la phase de –180 deg aux basses fréquences indique un système de classe 2. Le PD n'ajoute pas d'intégrateur pur à l'origine et ne change pas la classe. L'erreur en réponse à une rampe sera donc nulle.

<u>Problème 12</u> (sans MATLAB)

Pour le système à 2 entrées et 2 sorties :

$$B = [B_1 \quad B_2], \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) Donner l'équation des matrices $A_{int}, B_{int}, C_{int}, D_{int}$ après avoir fermé la boucle interne avec le gain K_{int}.

Équations avec les partitions :

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B_1u_1 + B_2u_2$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = Cx = \begin{bmatrix} C_1x \\ C_2x \end{bmatrix}$$

Équation de rétroaction :

$$u_2 = K_{int}\, y_1 = K_{int}C_1x$$

On remplace :

$$\dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2K_{int}C_1x = (A + B_2K_{int}C_1)x + B_1u_1$$

$$y_2 = C_2x$$

$$\dot{x} = A_{int}x + B_{int}u_1$$

$$y_2 = C_{int}x$$

$$A_{int} = A + B_2K_{int}C_1 \quad B_{int} = B_1 \quad C_{int} = C_2$$

(b) Donner l'équation des matrices $A_{ext}, B_{ext}, C_{ext}, D_{ext}$ entre y_{2d} et y_2 après avoir fermé la boucle externe.

Équation de rétroaction :

$$u_1 = K_{ext}\,(y_{2d} - y_2) = K_{ext}y_{2d} - K_{ext}C_2x$$

On remplace :

$$\dot{x} = A_{int}x + B_1u_1 = A_{int}x + B_1K_{ext}y_{2d} - B_1K_{ext}C_2x = (A_{int} - B_1K_{ext}C_2)x + B_1K_{ext}y_{2d}$$

$$\dot{x} = A_{ext}x + B_{ext}y_{2d}$$
$$y_2 = C_{ext}x$$

$$A_{ext} = (A_{int} - B_1K_{ext}C_2) \quad B_{ext} = B_1K_{ext} \quad C_{ext} = C_2$$
$$A_{ext} = (A + B_2K_{int}C_1 - B_1K_{ext}C_2)$$