

Session S5

Unité APP 5e

Conception d'asservissements

Examen formatif – Solution

**Département de génie électrique et de génie informatique
Faculté de génie
Université de Sherbrooke**

Automne 2024

**Tous droits réservés © 1933-2024
Département de génie électrique et de génie informatique
Université de Sherbrooke**

Problème 1

	Vrai	Faux
1. Un système d'ordre 2 dont tous les pôles ont une partie réelle négative et auquel on ajoute un compensateur de type PD peut devenir instable. Lieu des racines – stabiliser le système.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
2. Pour un système d'ordre 2, l'ajout d'un compensateur de type proportionnel-intégral (PI) peut rendre le système instable.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Il est possible d'augmenter la marge de phase d'un système avec l'ajout d'un compensateur sans changer l'amortissement de sa réponse temporelle. PM est fct de zeta	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
4. L'utilisation principale d'un compensateur à avance de phase est d'améliorer de régime permanent de la réponse temporelle d'un système sans changer son régime transitoire.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
5. Il est possible d'améliorer significativement le dépassement maximal et le temps de stabilisation d'un système avec un compensateur à retard de phase.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
6. Le principe de design d'un compensateur à retard de phase est de placer les zéros et pôles du compensateur très près les uns des autres de façon à ne pas détériorer les performances en régime transitoire de la réponse temporelle.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. Un compensateur qui augmente la fréquence de traverse en gain de la réponse fréquentielle contribue aussi à augmenter la bande passante. (BW est fonction de wg)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. Un système qui a un amortissement de sa réponse temporelle de 0.6 a une marge de phase près de 60 deg. (formule PM (zeta))	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. Un système asservi ayant une marge de gain de 3dB et une marge de phase de 50 deg est stable.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. Un système asservi ayant une phase de -60 deg à la fréquence de traverse en gain est stable. (limite est de -180)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

11. Un compensateur de type PD est un cas particulier du compensateur avance de phase lorsque le pôle est positionné à 0. (pôle à infini)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
12. Un compensateur de type PD amplifie généralement le bruit dans un système. (haut fréquence AvPh)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13. Un compensateur de type PI est aussi un filtre passe haut. (passe-bas)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
14. Un simple compensateur proportionnel peut être utilisé pour augmenter la marge de phase d'un système.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
15. Un des avantages de la conception avec le diagramme de Bode est qu'un modèle analytique du système à asservir n'est pas nécessaire.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

FTBO = GM, PM

FTBF = BW

Problème 2

Le système en boucle ouverte ci-dessous est asservi avec un retour de gain unitaire et un compensateur en cascade.

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+3)}$$

- (a) Calculer la position des pôles dominants pour avoir temps de stabilisation à 2% de 1.6 seconde et un dépassement maximum de 25%.

La fonction de transfert est :

$$FT = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

$$\zeta = 0.40371$$

$$\omega_n = 6.1925 \text{ rad/s}$$

Les pôles désirés sont à $s^* = -2.5 \pm 5.6655i$

- (b) Si un compensateur AvPh avec un zéro à -1 est utilisé pour satisfaire les conditions (a), quelle devrait être la contribution angulaire du pôle du compensateur.

Avance de phase requise selon les spécifications = 95.0435 deg

Avance de phase requise avec marge = 95.0435 deg

La contribution angulaire du zéro à -1 est 104.8295 deg

La contribution angulaire du pôle est donc 9.786 deg

- (c) Calculer la position du pôle du compensateur.

La position du zéro de l'AvPh est -1

La position du pôle de l'AvPh est -35.3473

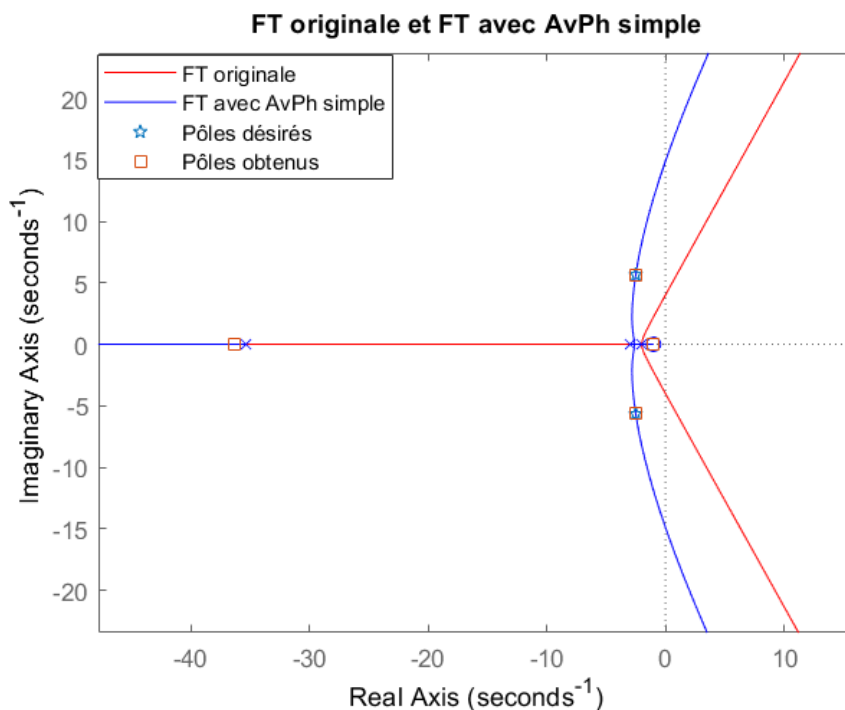
- (d) Calculer la valeur du gain du compensateur et donner la FT du compensateur.

Le gain de l'AvPh est 1046.3495.

Compensateur Avance de phase:

$$FT_a = \frac{1046s + 1046}{s + 35.35}$$

(e) Avec rlocus, vérifier la position obtenue des pôles en boucle fermée du système compensé.



(f) Avec une simulation en boucle fermée, vérifier si les spécifications sont rencontrées. Est-ce que l'approximation de second ordre est valide?



$$t_s = 1.84 \text{ s (vs } 1.6 \text{ s)}$$

$$M_p = (0.923 - 0.7118) / 0.7118 = 29.7\% \text{ (vs } 25\%)$$

Les spécifications ne sont pas rencontrées (mais pas trop loin).

- (g) *** L'avance de phase requise est plutôt élevée. Refaire le problème avec un double AvPh avec les deux zéros à -1 .

Avance de phase requise selon les spécifications = 95.0435

Avance de phase avec marge = 95.0435

La contribution angulaire de chaque zéro à -1 est 104.8295 deg

La contribution angulaire de chaque pôle est donc 57.3078 deg

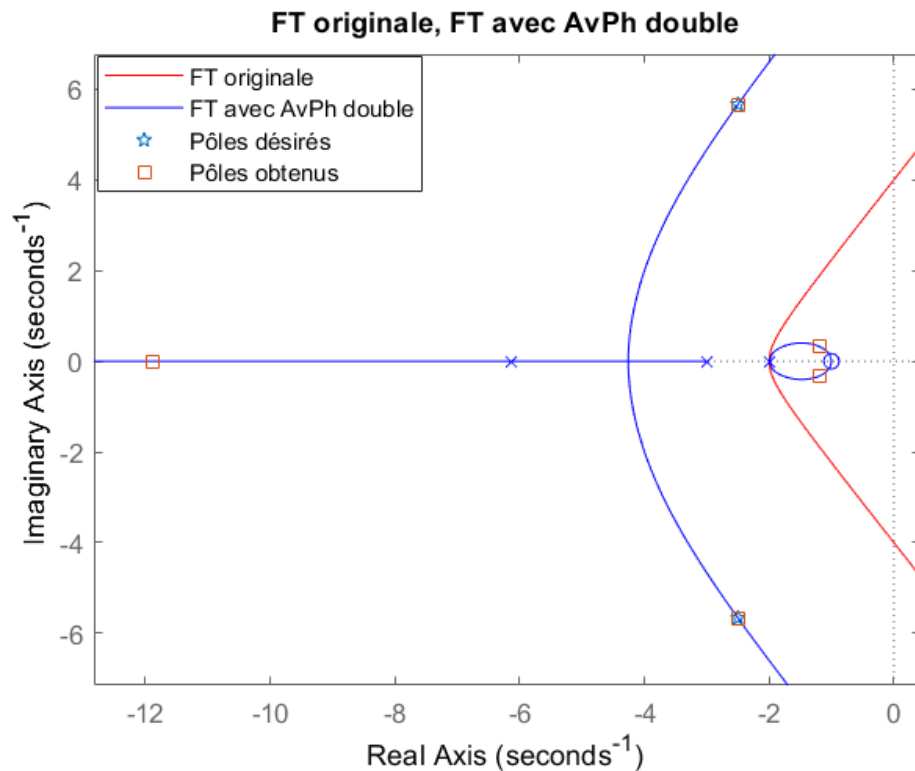
La position du zéro de chaque AvPh est -1

La position du pôle de chaque AvPh est -6.1361

Le gain de l'AvPh est 242.7385

FT pour double AvPh

$$\frac{242.74(s+1)^2}{(s+6.136)^2} = \frac{242.7 s^2 + 485.5 s + 242.7}{s^2 + 12.27 s + 37.65}$$



Problème 3

Un système asservi à retour unitaire a pour fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+11)}$$

- (a) Un asservissement de type proportionnel de gain $K_p = 218.7$ a initialement été conçu. Calculer les performances de cet asservissement : pôles en boucle fermée, dépassement maximum M_p , temps de stabilisation à 2% t_s (mode dominant) et erreur en régime permanent pour une entrée rampe unitaire.

$$s^* = -1.4638 \pm 3.8193i$$

$$M_p = 30\%$$

$$t_s = 2.73 \text{ s}$$

$$t_p = 0.82255 \text{ s}$$

$$K_{vel} = 3.9764$$

$$e_{RP} = 0.25149$$

- (b) Cette performance n'est pas acceptable. Concevoir un compensateur AvPh et un compensateur RePh en cascade pour réduire le temps de stabilisation et le dépassement maximum d'un facteur 2 et réduire l'erreur en régime permanent d'un facteur 10.

$$t_s^* = 2.73/2 = 1.366 \text{ s}$$

$$M_p^* = 30/2 = 15 \%$$

$$e_{RP}^* = 0.25149/10 = 0.025149$$

$$\phi^* = 58.873 \text{ deg}$$

$$\zeta^* = 0.51694$$

$$\omega_n^* = 5.6632$$

Les pôles désirés sont à $s^* = -2.9275 \pm 4.8478i$

Compensateur Avance de phase

Avance de phase requise selon les spécifications = 38.9668

Avance de phase avec marge = 38.9668

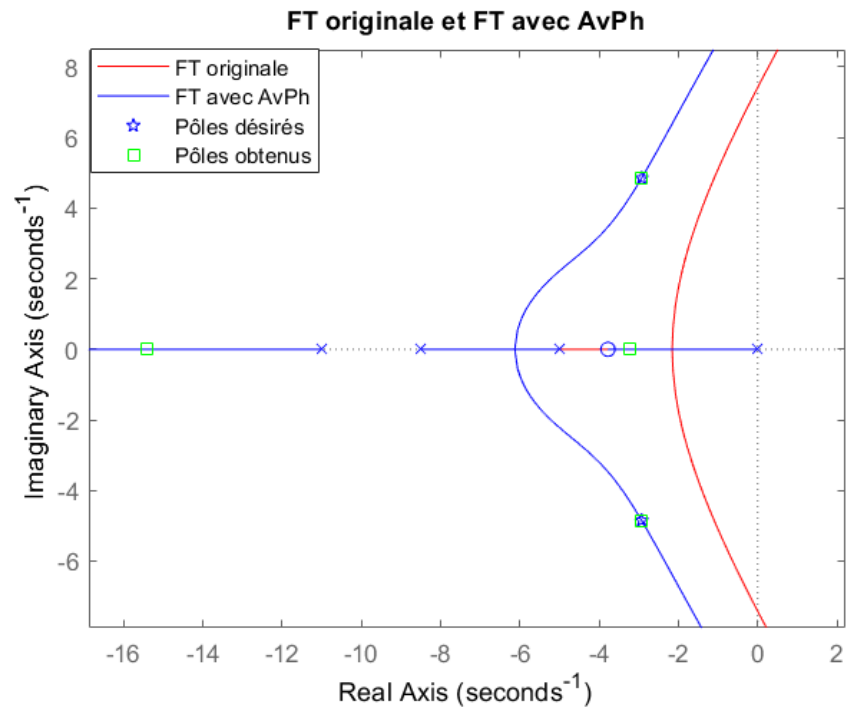
Compensateur Avance de phase:

$K_a = 421.4104$ zéro à -3.7782 pôle à -8.4886

FTa =

$$421.4 s + 1592$$

$$s + 8.489$$



Compensateur Retard de phase

$$eRP_{des} = 0.025149$$

$$Kvel_{des} = 39.764$$

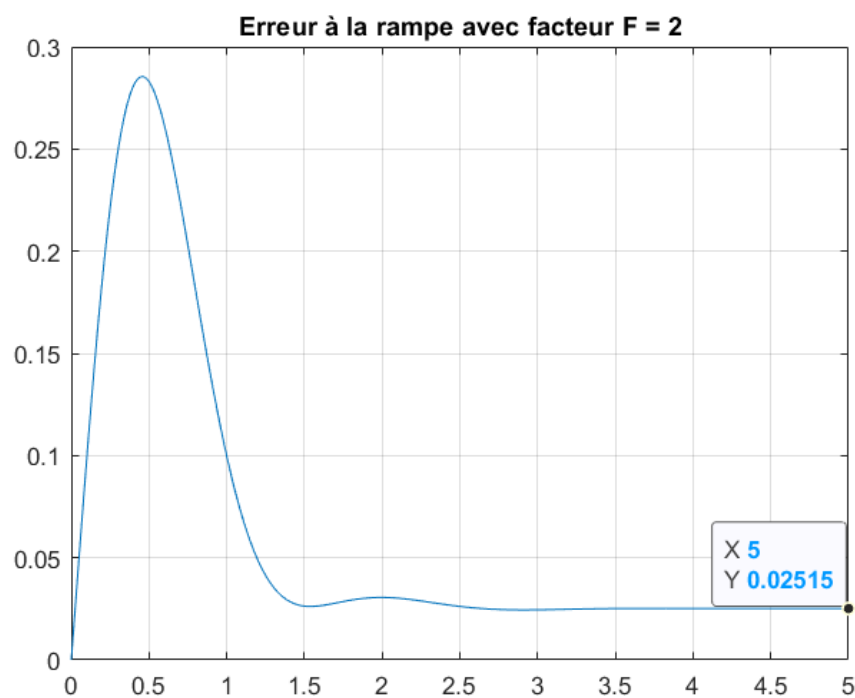
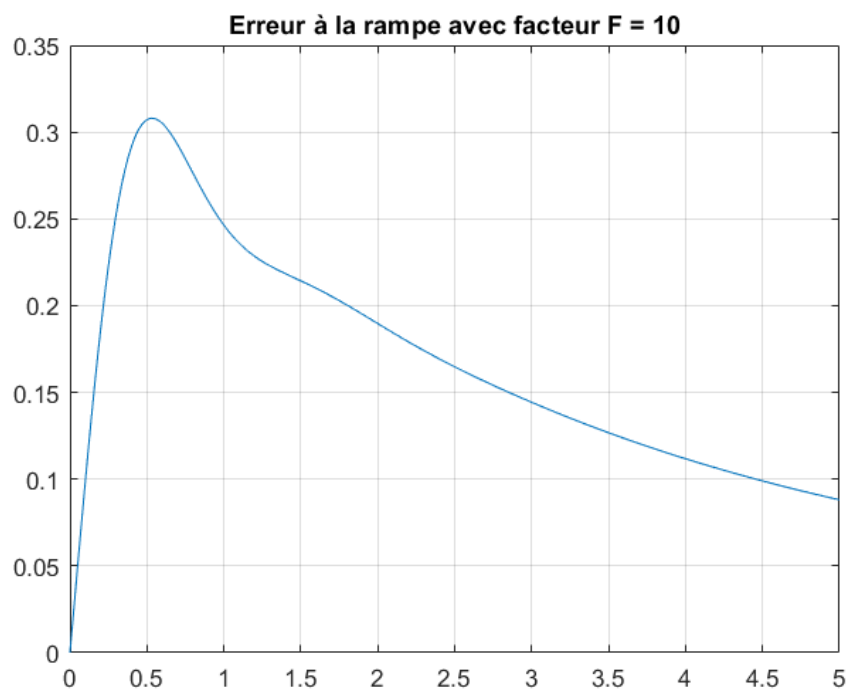
$$Kvel_{now} = 3.4103$$

$$eRP_{now} = 0.29323$$

$$K_{des} = 11.66$$

$$FTr(F = 10) = \quad FTr(F = 2)$$

$$\frac{s + 0.2928}{s + 0.02511} \quad \frac{s + 1.464}{s + 0.1255}$$



La réponse et l'atteinte du régime permanent sont beaucoup plus rapides avec le facteur $F = 2$.

```

% Problème no 3
% JdeL mars 2022

clear all
close all
clc

num = [1];
den = [conv([1 5],[1 11]),0]

disp('La fonction de transfert est')
FT = tf(num,den)

figure(1)
rlocus(FT)
hold on

Kp = 218.7;
pol = rlocus(FT,Kp) % Pôles en boucle fermée à Kp
pol_chk = rlocus(Kp*FT,1) % Ça donne les mêmes pôles
plot(real(pol), imag(pol), 'p')

wn_clc = abs(pol);
zet_clc = -real(pol)./wn_clc;
phi_clc = acosd(zet_clc);
Mp_clc = 100*exp(-pi./tand(phi_clc))
ts_clc = 4.0./(zet_clc.*wn_clc)
tp_clc = pi./imag(pol)
Kvel = Kp*num(end)/den(end-1)
eRP = 1.0/Kvel

%% Conception AvPh

fac_tra = 2.0; % Facteur désiré pour améliorer le transitoire
ts_des = ts_clc(2)/fac_tra
Mp_des = Mp_clc(2)/fac_tra
phi_des = atand(-pi/log(Mp_des/100))
zet_des = cosd(phi_des)
% phi_chk = acosd(zet_des)
% Mp_chk = 100*exp(-pi./tand(phi_chk))

wn_des = 4.0/(ts_des*zet_des); % fréquence des oscillations

disp(' ')
disp(['zeta désiré = ',num2str(zet_des)])
disp(['wn désiré = ',num2str(wn_des)])

% Calcul des pôles désirés selon les spécifications

pole_des = [-zet_des*wn_des+1i*wn_des*sqrt(1-zet_des^2) -zet_des*wn_des-
1i*wn_des*sqrt(1-zet_des^2)];
disp(['Les poles désirés sont à ', num2str(pole_des)])

figure(2)
rlocus(FT,'r')
hold on
plot(pole_des,'pb')
axis([-6 1 -7 7])

```

```

% Compensateur avance de phase
% Placement pôle zéro

mrg = 0.0;
pha_FT = (angle(polyval(num,pole_des(1)))-
angle(polyval(den,pole_des(1))))*180/pi-360;
pha_av = -180-pha_FT;
disp(' ')
disp(['Avance de phase requise selon les spécifications = ', num2str(pha_av)])
pha_av = pha_av + mrg;
disp(['Avance de phase avec marge = ', num2str(pha_av)])

% Placement du zéro et calcul du pôle

alf = 180-phi_des;
phi_zero = (alf+pha_av)/2;
phi_pole = (alf-pha_av)/2;

za = real(pole_des(1))-imag(pole_des(1))/tand(phi_zero);
pa = real(pole_des(1))-imag(pole_des(1))/tand(phi_pole);

num_FTa = [1 -za]
den_FTa = [1 -pa]

Ka = abs( (polyval(den,pole_des(1))*polyval(den_FTa,pole_des(1))) /
(polyval(num_FTa,pole_des(1))*polyval(num,pole_des(1))) );

disp(' ')
disp(['Compensateur Avance de phase: Ka = ', num2str(Ka), ' zéro = ',
num2str(za), ' pôle = ', num2str(pa)]);
FTa = tf(Ka*num_FTa,den_FTa)
FTFTa = FT*FTa;
[numa, dena] = tfdata(FTFTa,'v');

% Validation avance de phase

figure(3)
rlocus(FT, 'r')
hold on
rlocus(FTFTa, 'b')
plot(pole_des,'pb')
pos = rlocus(FTFTa,1);
plot(pos,'sg')
title('FT originale et FT avec AvPh')
legend('FT originale', 'FT avec AvPh', 'Pôles désirés', 'Pôles obtenus')

FTFTa_bf = feedback(FTFTa,1);

t = [0:0.01:5.0]';
u0 = ones(size(t));
u1 = t;
y0 = lsim(FTFTa_bf, u0, t);
y1 = lsim(FTFTa_bf, u1, t);

figure(4)
plot(t,y0)
grid on
title('Réponse à l''échelon avec l''AvPh')

```

```

figure(5)
plot(t,u1-y1)
grid on
title('Erreur à la rampe avec l''AvPh')

%% Conception RePh

fac_eRP = 10.0; % Facteur d'amélioration du régime permanent
eRP_des = eRP/fac_eRP
Kvel_des = 1.0/eRP_des

Kvel_now = numa(end)/dena(end-1)
eRP_now = 1/Kvel_now

K_des = Kvel_des/Kvel_now

% F = 10.0; % Fudge factor pour placer le zéro
F = 2.0; % Fudge factor pour placer le zéro

zr = real(pole_des(1))/F;
pr = zr/K_des;

numr = [1 -zr];
denr = [1 -pr];
FTr = tf(numr,denr)

FTFTar = FTFTa*FTr;

figure(6)
rlocus(FT, 'r')
hold on
rlocus(FTFTa, 'b')
rlocus(FTFTar, 'g')
pos = rlocus(FTFTar,1);
plot(pole_des, 'pb')
plot(pos, 'sg')
title('FT originale, FT avec AvPh et FT avec AvPh + RePh')
legend('FT originale', 'FT avec AvPh', 'FT avec AvPh et RePh', 'Pôles désirés',
'Pôles obtenus')

FTFTar_bf = feedback(FTFTar,1);

t = [0:0.01:5.0]';
u0 = ones(size(t));
u1 = t;

y0 = lsim(FTFTar_bf, u0, t);
y1 = lsim(FTFTar_bf, u1, t);

figure(7)
plot(t,y0)
grid on
title('Réponse à l''échelon')

figure(8)
plot(t,u1-y1)
grid on
title(['Erreur à la rampe avec facteur F = ', num2str(F)])

```

Problème no 4

Un système asservi à retour unitaire a pour fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)(s+30)}$$

Les spécifications du Client sont les suivantes :

- Temps du premier pic = 0.4s
- Dépassement maximum à l'échelon inférieur à 10%
- Erreur à une rampe unitaire de 0.05.

Traduire ces spécifications en termes de marge de phase désirée et fréquence de traverse en gain désirée. Déterminer la fonction de transfert des compensateurs AvPh et RePh en cascade qui rencontrent ces exigences à l'aide d'une conception dans le domaine fréquentiel. Vérifier si les spécifications originales sont rencontrées.

La fonction de transfert en position est

$$FT = \frac{1}{s^3 + 38s^2 + 240s}$$

$$M_p \Rightarrow \phi \Rightarrow \zeta \Rightarrow PM$$

$$t_p, \zeta \Rightarrow \omega_n \Rightarrow \omega_g$$

$$\phi = 53.761 \text{ deg}$$

$$\zeta = 0.59116$$

$$PM_{des} = 58.593 \quad \text{Remarquer que } PM \approx 100 \zeta \text{ quand } \zeta \geq 0.60 \text{ (voir p. 472 dans Ogata)}$$

$$\omega_{g_{des}} = 7.0294 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.59116$$

$$\omega_n = 9.7377 \text{ rad/s}$$

$$K_{des} = 2306.6 \text{ (avec abs et polyval)}$$

$$K_{chk} = 2306.6 \text{ (avec bode)}$$

Compensateur AvPh avec Bode

Amplification pour atteindre ω_g^* désiré = 2306.6358

Augmentation de phase requise selon les spécifications = 23.0855

Augmentation de phase avec marge = 28.0855

On ajoute 5 deg de marge sur l'augmentation de phase en prévision du retard de phase.

Paramètre du compensateur AvPh

$$T = 0.23716$$

$$\alpha = 0.35982$$

$$K_a = 3845.38$$

$$\text{Pôle à } -11.7187$$

$$\text{Zéro à } -4.2166$$

Compensateur Avance de phase:

$$F_{Ta} =$$

$$\frac{3845 s + 1.621e04}{s + 11.72}$$

$$\text{Marge de phase} = 63.5932 \text{ deg}$$

$$\text{Marge de retard} = 0.1579 \text{ s}$$

Compensateur RePh avec Bode

$$K_{vel} \text{ actuel} = 5.7651$$

$$\text{Erreur actuelle en régime permanent à une rampe} = 0.17346$$

$$K_{vel} \text{ désiré} = 20$$

$$\text{Facteur d'amplification requis} = 3.4691$$

Paramètre du compensateur RePh

$$K_r = 1$$

$$\beta = 3.4691$$

$$T = -1.4226$$

$$\text{Pôle du RePh à } -0.20263$$

$$\text{Zéro du RePh à } -0.70294$$

Compensateur Retard de phase

$$T_{Fr} =$$

$$\frac{s + 0.7029}{s + 0.2026}$$

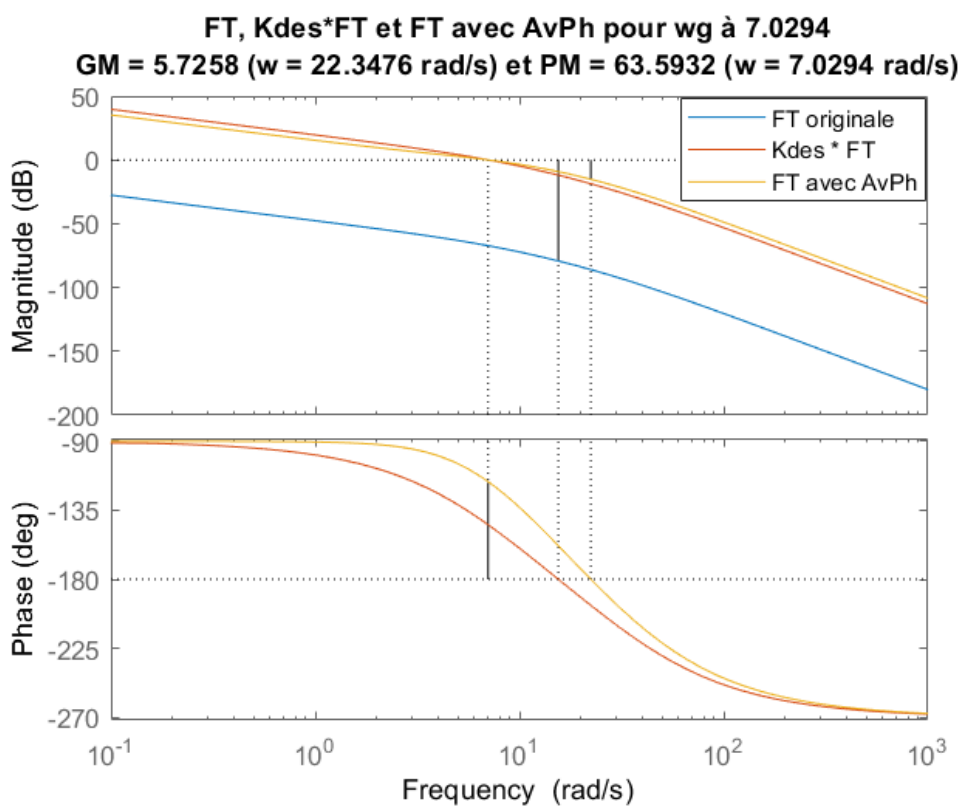
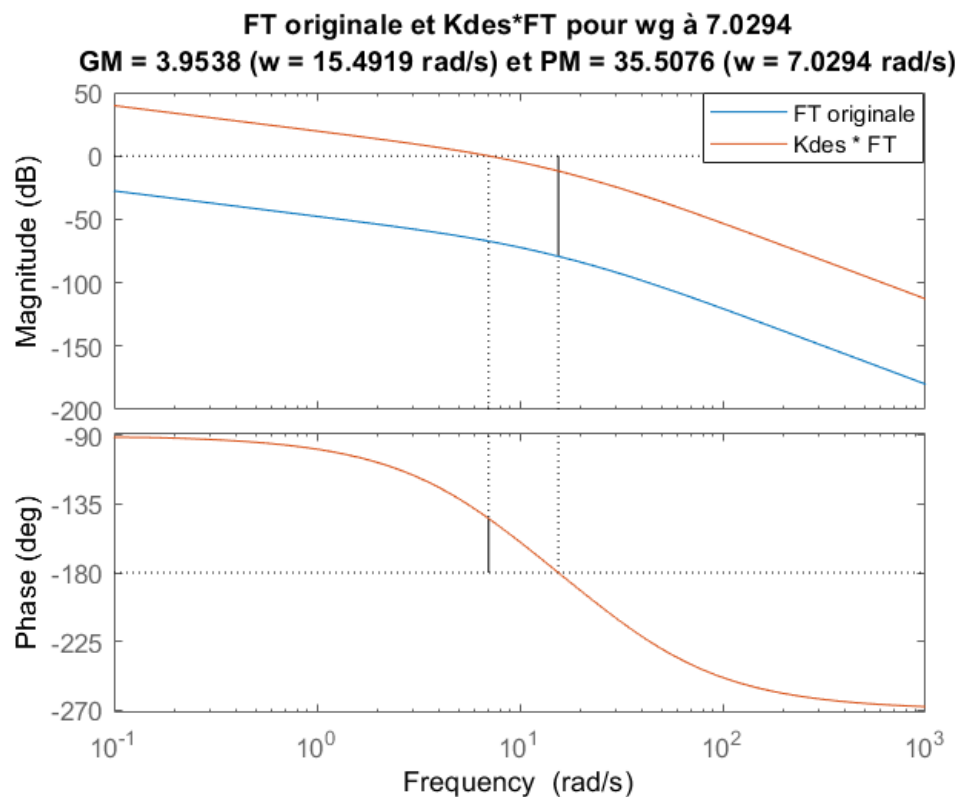
$$\text{Marge de retard} = 0.14675 \text{ s}$$

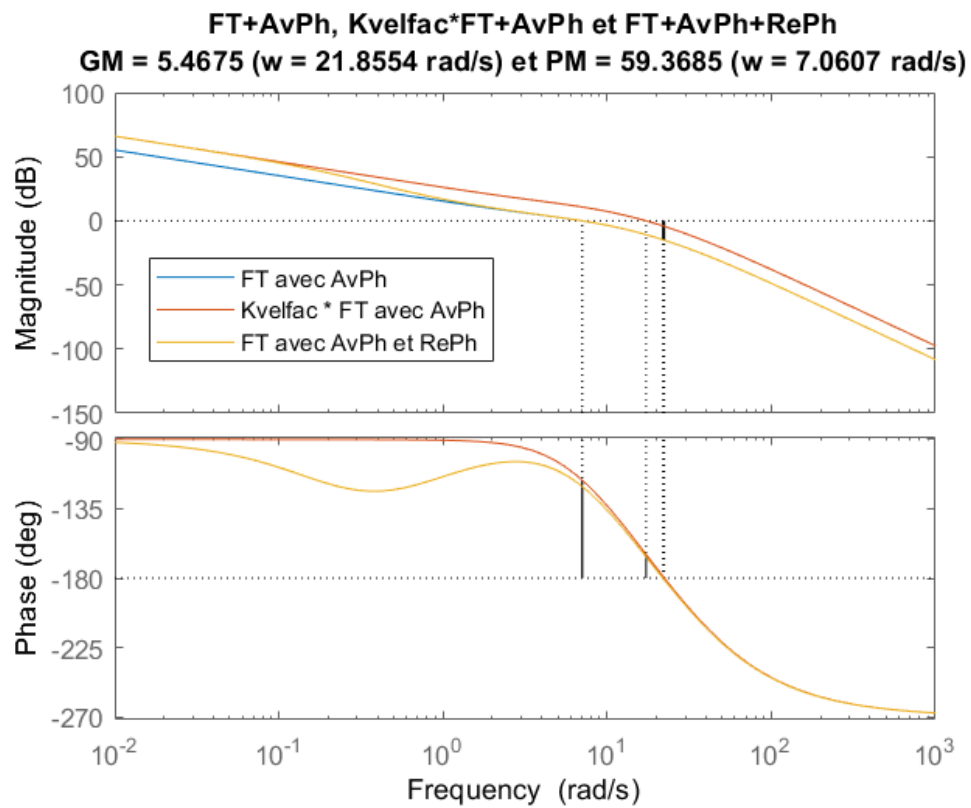
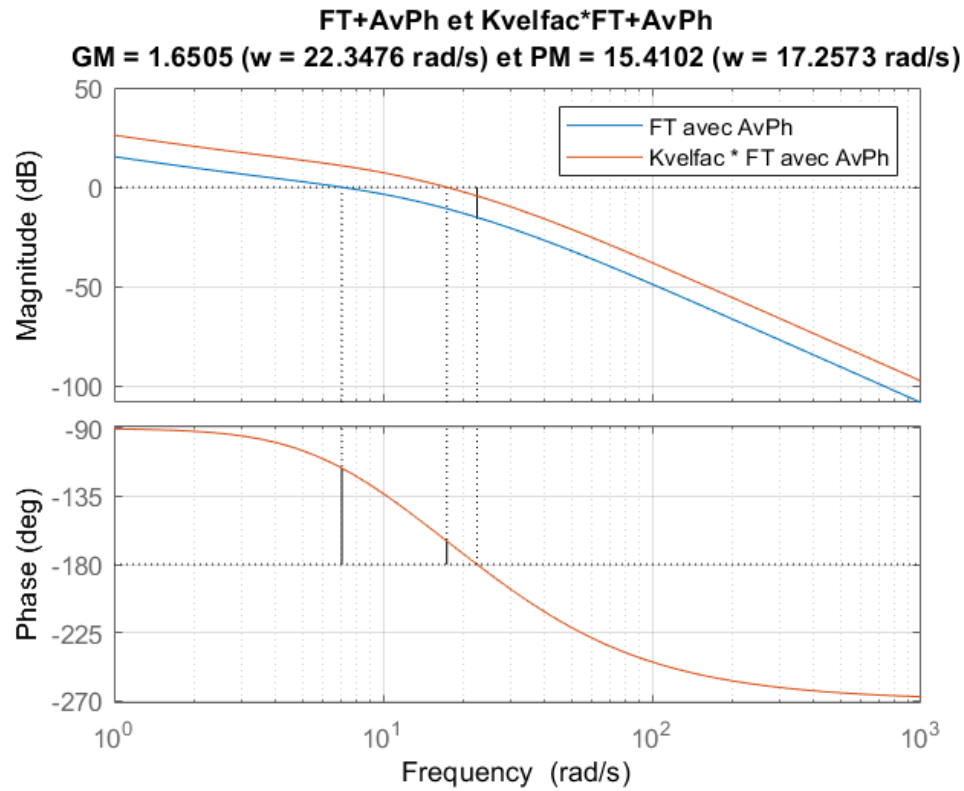
$$\text{Marge de gain} = 14.7557 \text{ dB}$$

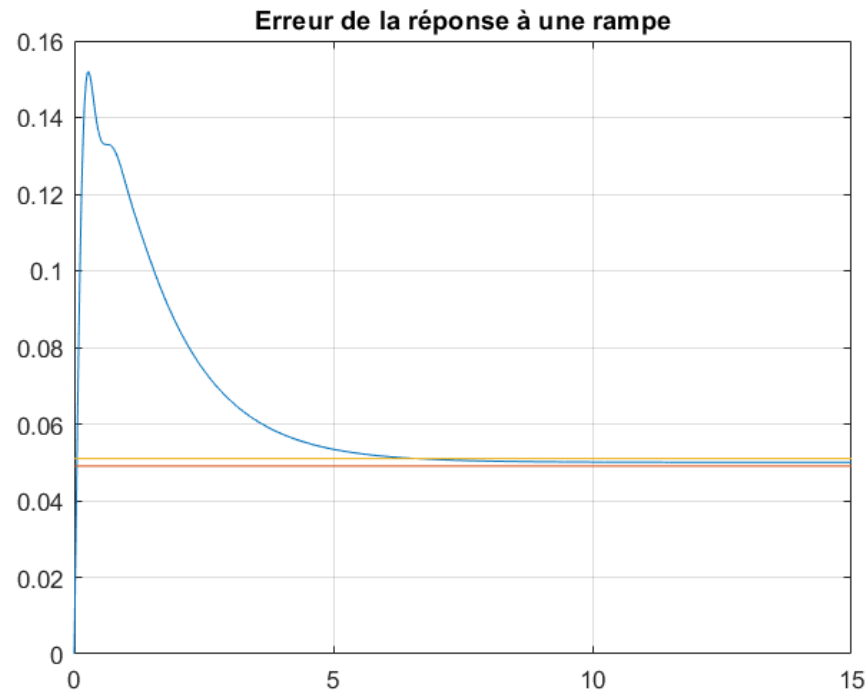
$$\text{Marge de phase} = \mathbf{59.3685 \text{ deg}}$$

La spécification sur la PM était de **58.593 deg**. On aurait pu ajouter un peu moins de 5 deg de marge.

$$\text{Bande passante (BW) exacte} = 13.1475 \text{ rad/s}$$







```
% Problème no 4
% JdeL mars 2022

clear all
close all
clc

num = [1];
den = [conv([1 8],[1 30]),0]
disp('La fonction de transfert en position est')
FT = tf(num,den)

% Performances requises

Mp_des = 10.0;
tanphi = -pi/(log(Mp_des/100));
phi = atand(tanphi)
zet = cosd(phi)

tp_des = 0.4;
wn = pi/(tp_des*sqrt(1-zet^2));

PM_des = atand(2*zet/sqrt(sqrt(1+4*zet^4)-2*zet^2))
wg_des = 2*zet*wn/tand(PM_des)
zet_chk = 0.5*sqrt(tand(PM_des)*sind(PM_des))

err_des = 0.05;
Kvel_des = 1.0/err_des;

disp(' ')
disp(['zet = ',num2str(zet)])
disp(['wn = ',num2str(wn)])
disp(['PM = ',num2str(PM_des)])
disp(['wg = ',num2str(wg_des)])
```

```

figure(1)
margin(FT)

%% *****
% Compensateur avance de phase avec Bode

% Calcul du gain Kdes pour obtenir la fréquence de traverse à wg_des

% Calcul de Kdes avec polyval (ne pas oublier le j, mieux de l'éviter...)
Kdes = abs( polyval(den,j*wg_des)/polyval(num,j*wg_des) )

% Calcul de Kdes avec bode (plus simple)
[mag, pha] = bode(FT,wg_des);
Kdes_chk = 1/mag % Les deux approches donnent le même Kdes

disp(' ')
disp(['Amplification pour atteindre wg désiré = ', num2str(Kdes)])

figure(2)
margin(num,den)
hold on
margin(Kdes*FT)
[GM, PM, wp, wg] = margin(Kdes*FT);
title(['FT originale et Kdes*FT pour wg à ',num2str(wg_des)];...
      ['GM = ', num2str(GM), ' (w = ', num2str(wp), ' rad/s) et ', ...
      'PM = ', num2str(PM), ' (w = ', num2str(wg), ' rad/s)'])
legend('FT originale', 'Kdes * FT')

delpha = PM_des - PM;
disp(' ')
disp(['Augmentation de phase requise selon les spécifications = ',
num2str(delpha)])
delpha = PM_des - PM + 5;
disp(['Augmentation de phase avec marge = ', num2str(delpha)])

% Calcul de alpha (alf)

alf = (1-sin(delpha*pi/180))/(1+sin(delpha*pi/180));

% On met donc le max de l'avance de phase a wm = wg_des et on sait
% que wm = 1/(sqrt(alpha)*T). On calcule ainsi le paramètre T.

T = 1/(sqrt(alf)*wg_des);

% Trois façons pour calculer Ka (éviter polyval...)

Ka = Kdes/sqrt(alf) % C'est la version dans les notes de cours
Ka = Kdes*abs( polyval([1 1/(alf*T)],j*wg_des)/polyval([1 1/T],j*wg_des) )

[mag,pha] = bode([1 1/T], [1 1/(alf*T)], wg_des);
Ka = Kdes/mag

% Calcule le compensateur TFa_BD

numa = [1 1/T]*Ka;
dena = [1 1/(alf*T)];

```

```

disp(' ')
disp(['T = ', num2str(T)])
disp(['alpha = ', num2str(alf)])
disp(['Ka = ', num2str(Ka)])
disp(['Pôle à ', num2str(-1/(alf*T))])
disp(['Zéro à ', num2str(-1/T)])
disp(['Compensateur Avance de phase: ']);
FTa = tf(numa, dena)

% Calcule la FTBO avec le compensateur

FTa_bo = FTa*FT;

% Vérifie sur diagramme de Bode

figure(3)
hold on
margin(FT)
margin(Kdes*FT)
margin(FTa_bo)
[GM, PM, wp, wg] = margin(FTa_bo);

title(['FT, Kdes*FT et FT avec AvPh pour wg à ', num2str(wg_des)];...
      ['GM = ', num2str(GM), ' (w = ', num2str(wp), ' rad/s) et ', ...
      'PM = ', num2str(PM), ' (w = ', num2str(wg), ' rad/s)'])
legend('FT originale', 'Kdes * FT', 'FT avec AvPh')

disp(' ')
disp(['Marge de phase = ', num2str(PM), ' deg'])

delay_AvPh = (PM*pi)/(wg*180);
disp(['Marge de retard = ', num2str(delay_AvPh), ' s'])

% Erreur à une rampe

ts = [0:0.01:5]';
us = ts;

FTas_BD_bf = feedback(FTa_bo,1);

yas = lsim(FTas_BD_bf,us,ts);

figure(4)
plot(ts, us-yas, 'k')
grid on
title('Erreur à une rampe après avance de phase')

%% b) Compensateur retard de phase avec Bode

% Plus simple avec nump/denp(end-1)

[numa,dena] = tfdata(FTa_bo,'v');
Kvel_now = numa(end)/dena(end-1);

erreur_rp = 1/Kvel_now;
Kvel_fac = Kvel_des/Kvel_now;

disp(' ')
disp(['Kvel actuel = ', num2str(Kvel_now)])

```

```

disp(['Erreur actuelle en régime permanent à une rampe = ', num2str(erreur_rp)])
disp(['Kvel désiré = ', num2str(Kvel_des)])
disp(['Facteur d'amplification requis = ', num2str(Kvel_fac)])

% Bode
figure(6)
margin(FTa_bo)
hold on
margin(Kvel_fac*FTa_bo)
[GM, PM, wp, wg] = margin(Kvel_fac*FTa_bo);

grid on
title(['FT+AvPh et Kvel_fac*FT+AvPh'];...
      ['GM = ', num2str(GM), ' (w = ', num2str(wp), ' rad/s) et ', ...
       'PM = ', num2str(PM), ' (w = ', num2str(wg), ' rad/s)'])
legend('FT avec AvPh', 'Kvel_fac * FT avec AvPh')

%-----
% On trouve sur le graphique l'atténuation requise a cette wg_des pour que
% le diagramme de Bode passe à 0 dB à cette fréquence.

[mag, pha] = bode(Kvel_fac*FTa_bo, wg_des);
beta = mag;

% Calcul du compensateur:

% On place le zéro à une décade avant wg_des

s_zer = -wg_des/10.0;

% On place le pôle à un facteur beta plus à gauche

s_pol = s_zer/beta;

% L'amplification aux basses fréquences est K = Kr*beta = Kvel_fac
% Donc, Kr = Kvel_fac/beta

Kr = Kvel_fac/beta    % Ça donne Kr = 1.0.

% Calcul du Kr plus exact qui donne la même wg* mais qui change l'erreur en RP
% [mag, pha] = bode([1 -s_zer],[1 -s_pol], wg_des);
% Kr = Kvel_fac/(beta*mag)

% Calcule le compensateur TFr_BD dans le domaine s

numr = [1 -s_zer]*Kr;
denr = [1 -s_pol];

disp(' ')
disp(['beta = ', num2str(beta)])
disp(['T = ', num2str(1/s_zer)])
disp(['Pôle du RePh à ', num2str(s_pol)])
disp(['Zéro du RePh à ', num2str(s_zer)])
disp(['Gain du RePh à ', num2str(Kr)])
disp('Compensateur Retard de phase')
TFr = tf(numr, denr)

```

```
% Calcule la FTBO avec le compensateur
```

```
TFar_bo = TFr*FTa_bo;
[numar, denar] = tfdata(TFar_bo, 'v');
```

```
% Vérifie sur diagramme de Bode
```

```
figure(7)
margin(FTa_bo)
hold on
margin(Kvel_fac*FTa_bo)
margin(TFar_bo)
[GM, PM, wp, wg] = margin(TFar_bo);

title(['FT+AvPh, Kvelfac*FT+AvPh et FT+AvPh+RePh'];...
      ['GM = ', num2str(GM), ' (w = ', num2str(wp), ' rad/s) et ', ...
      'PM = ', num2str(PM), ' (w = ', num2str(wg), ' rad/s)'])
legend('FT avec AvPh', 'Kvelfac * FT avec AvPh', 'FT avec AvPh et RePh')
```

```
[GMar, PMar, Wgar, Wpar]=margin(TFar_bo);
delay_RePh = (PMar*pi)/(Wpar*180);
disp(['Marge de retard = ', num2str(delay_RePh), ' s'])
```

```
GMar_dB = 20*log10(GMar);
```

```
disp(' ')
disp(['Marge de gain = ', num2str(GMar_dB), ' dB'])
disp(['Marge de phase = ', num2str(PMar), ' deg'])
```

```
% Erreur réponse à une rampe
```

```
t = [0:0.01:15]';
u0 = ones(size(t));
u1 = t;
u2 = t.^2/2;
TFar_bf=feedback(TFar_bo,1);
```

```
y0 = lsim(TFar_bf,u0,t);
y1 = lsim(TFar_bf,u1,t);
y2 = lsim(TFar_bf,u2,t);
```

```
BWclc = bandwidth(TFar_bf);
disp(['Bande passante (BW) exacte = ', num2str(BWclc), ' rad/s'])
```

```
figure(8)
plot(t, y0)
grid on
title('Réponse à un échelon')
```

```
figure(9)
plot(t,u1-y1)
grid on
hold on
plot([t(1); t(end)], err_des*0.98*[1;1])
plot([t(1); t(end)], err_des*1.02*[1;1])
title('Erreur de la réponse à une rampe')
```

Problème 5

Pour le système en boucle ouverte ci-contre :

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

calculer un compensateur avance de phase et un retard de phase en cascade qui permet d'obtenir une erreur en régime permanent de 0.005 pour une entrée rampe unitaire, une marge de phase d'au moins **60 degrés** et une bande passante de 20 rad/s.

La fonction de transfert originale est:

FT =

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

Les spécifications du client sont:

PM désirée = 60 deg

BW désirée = 20 rad/s

eRP désirée = 0.005

Les spécifications dérivées (paramètres standards) sont:

zeta désiré = 0.61237

Kvel désiré = 200

Fréquence de traverse en gain désirée = 12.4962 rad/s

Compensateur avance-de-phase avec Bode (méthode 1: on vise PM et BW donc wg)

Kdes = 155.1617 pour atteindre ω_g^*

L'avance de phase requise est de 64.9706 rad/s (avec marge de 5 deg)

Caractéristiques du compensateur AvPh:

paramètre alpha = 0.049268

paramètre T = 0.36053

gain Ka = 699.0413

Compensateur avance-de-phase avec Bode (méthode 1)

FTa =

$$\frac{699s + 1939}{s + 56.3}$$

Marge de phase = 65 deg (avec marge)

Retard maximum = 0.090784 s

Bande passante avec AvPh = 18.4665 rad/s

Bande passante désirée = 20 rad/s

Erreur de 0.029036 à une rampe avec compensateur AvPh (méthode 1)

Compensateur retard-de-phase avec Bode (AvPh Méthode 1 + RePh Kvel)

Nouveau Kvel suite à l'ajout de l'AvPh = 34.4402

Erreur en régime permanent avec AvPh = 0.029036 (avant le RePh)

Kvel désiré = 200

Facteur d'amplification requis ($K_{fac} = K_{vel}^*/K_{vel}$) = 5.8072

Caractéristiques du compensateur RePh:

wg_des = 12.4962 rad/s (On veut la conserver)

beta = 5.8072

zéro à zr = -1.2496

pôle à pr = -0.21519

gain Kr = 1

Le compensateur RePh est

FTr =

$s + 1.25$

$s + 0.2152$

Marge de phase = 60.2957 deg

Retard maximum = 0.083849 s

Bande passante avec AvRePh = 19.3066 rad/s

Bande passante désirée = 20 rad/s

Erreur de 0.005 à une rampe avec compensateur AvRePh (méthode 1)

Problème 6

Pour le système en boucle ouverte ci-contre :

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s}$$

calculer un compensateur AvPh et un RePh en cascade qui permet d'obtenir une erreur en régime permanent de 0.005 pour une entrée rampe unitaire, un dépassement de 10% et un temps de stabilisation de 1 seconde.

*** Refaire l'AvPh avec une surcompensation pour obtenir les pôles désirés suite à l'ajout du RePh.

(C'est un cas où ajouter le -360 deg n'est pas nécessaire mais ça fonctionne quand même si on le met.)

Paramètres standards à partir des spécifications

$$\omega_n^* = 6.7664$$

$$\zeta^* = 0.59116$$

Les pôles désirés sont: $s^* = -4 \pm 5.4575i$

La phase de la FTBO au pôle désiré est: -253.723 deg

L'angle alpha est 126.239 deg

Sans la surcompensation

L'avance de phase requise sans surcompensation pour atteindre -180 deg est de : 78.723 deg

L'angle du zéro est 99.981 deg et l'angle du pôle est 26.258 deg

Le zéro de l'AvPh est placé à -3.0396 et le pôle à -15.0628

On voit que le zéro est à droite du pôle désiré (angle de 99.981 deg). Il aurait été préférable en pratique de diviser l'avance de phase requise en deux et faire un double AvPh. Il sera simple ici.

Compensateur AvPh (bissectrice)

FTa =

$$\frac{100.9 s + 306.8}{s + 15.06}$$

L'augmentation de gain requise pour atteindre l'erreur en RP est de 9.8204

Le zéro est placé à $\text{real}(p^*)/10 = -0.4$

Le pôle est placé à $\text{zéro}/K_{des} = -0.040732$

Le gain du RePh est $K_r = 1.0313$ mais on le laisse à 1.0

FTr =

$$\frac{s + 0.4}{s + 0.04073}$$

Avec la surcompensation

L'avance de phase requise sans surcompensation pour atteindre -180 deg est de : 77.723 deg

L'angle du zéro est 101.981 deg et l'angle du pôle est 23.758 deg

Le zéro de l'AvPh est placé à 2.792 et le pôle à 24.258

On voit que le zéro est à droite du pôle désiré (angle de 101.981 deg). Il aurait été préférable en pratique de diviser l'avance de phase requise en deux et faire un double AvPh. Il sera simple ici.

Compensateur AvPh (bissectrice)

$$FTa = \frac{107.9 s + 306.8}{s + 16.11}$$

L'augmentation de gain requise pour atteindre l'erreur en RP est de 10.5036

Le zéro est placé à $\text{real}(p^*)/10 = -0.4$

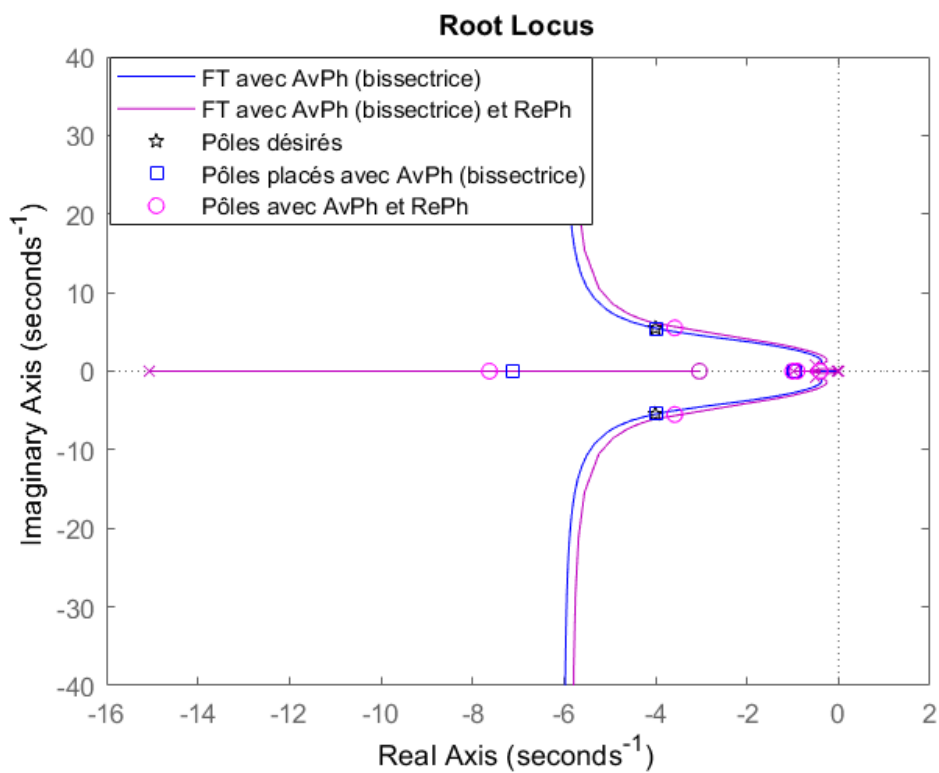
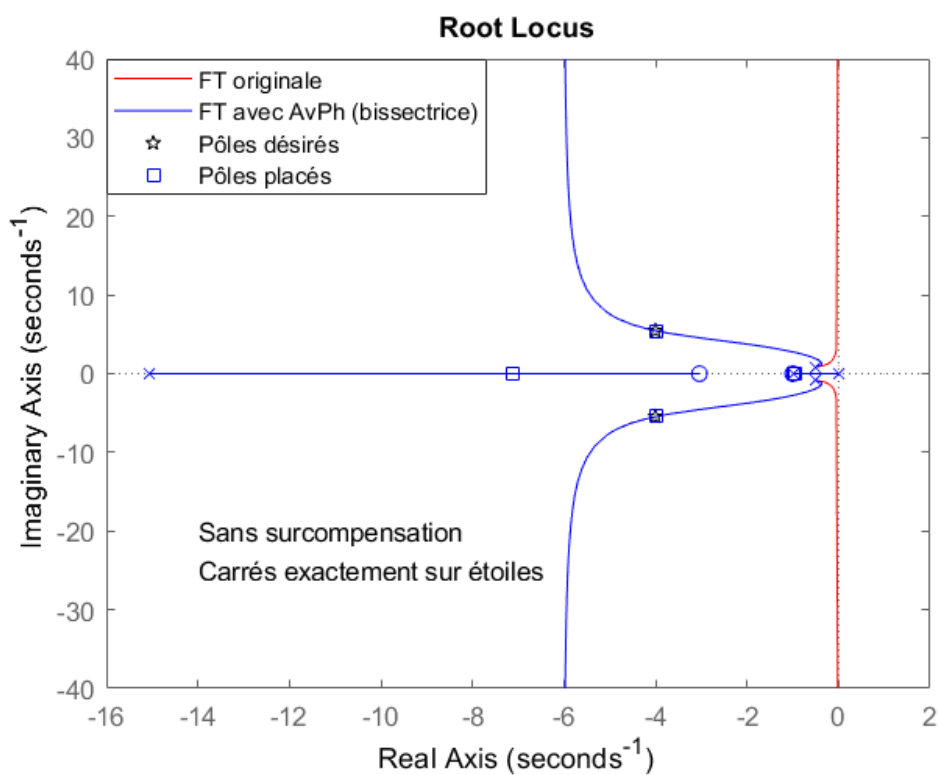
Le pôle est placé à $\text{zéro}/K_{des} = -0.038082$

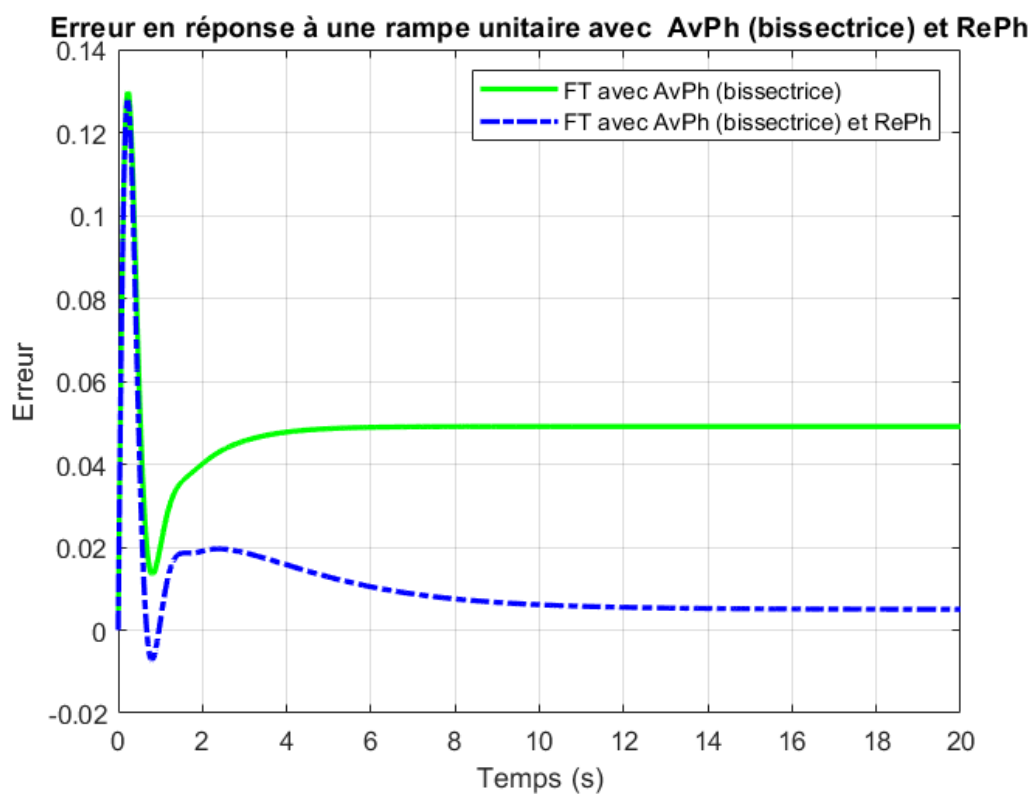
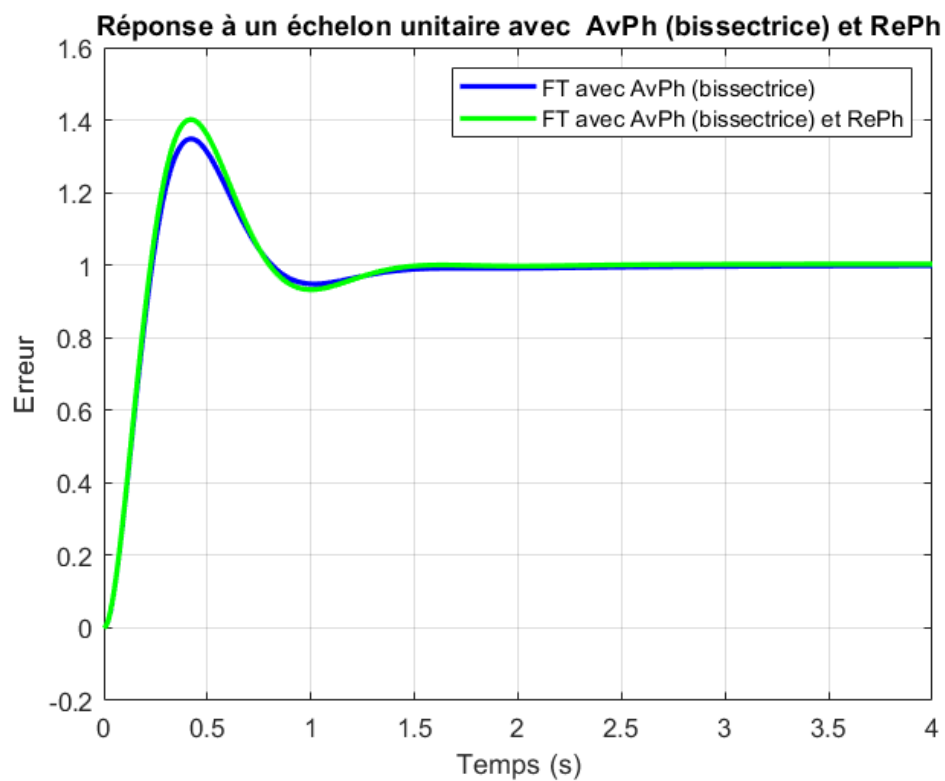
Le gain du RePh est $K_r = 1.0316$ mais on le laisse à 1.0

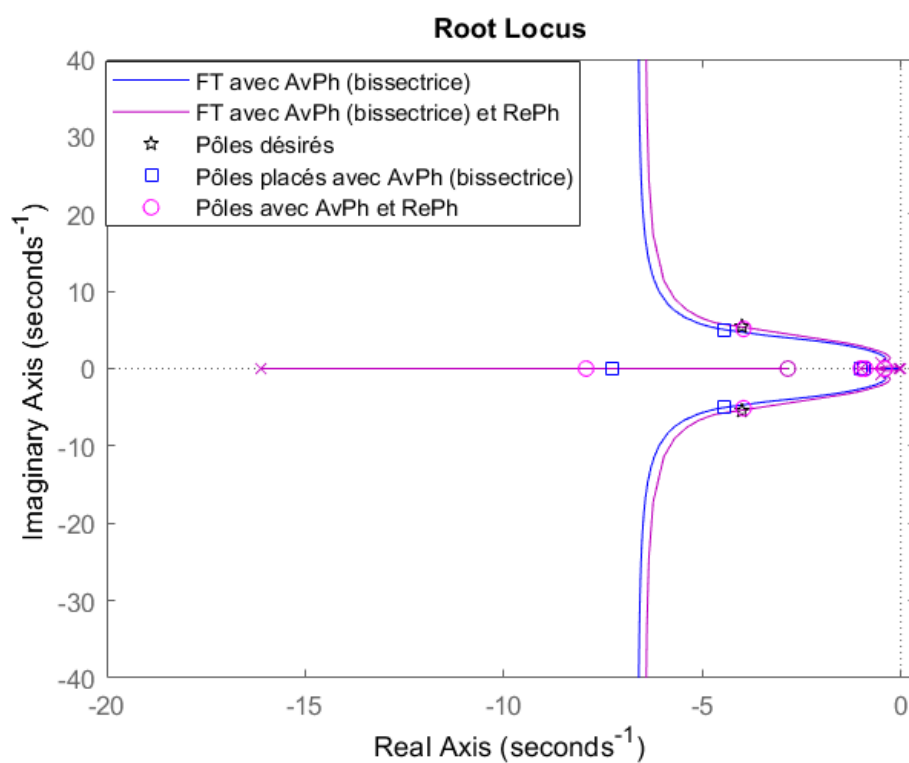
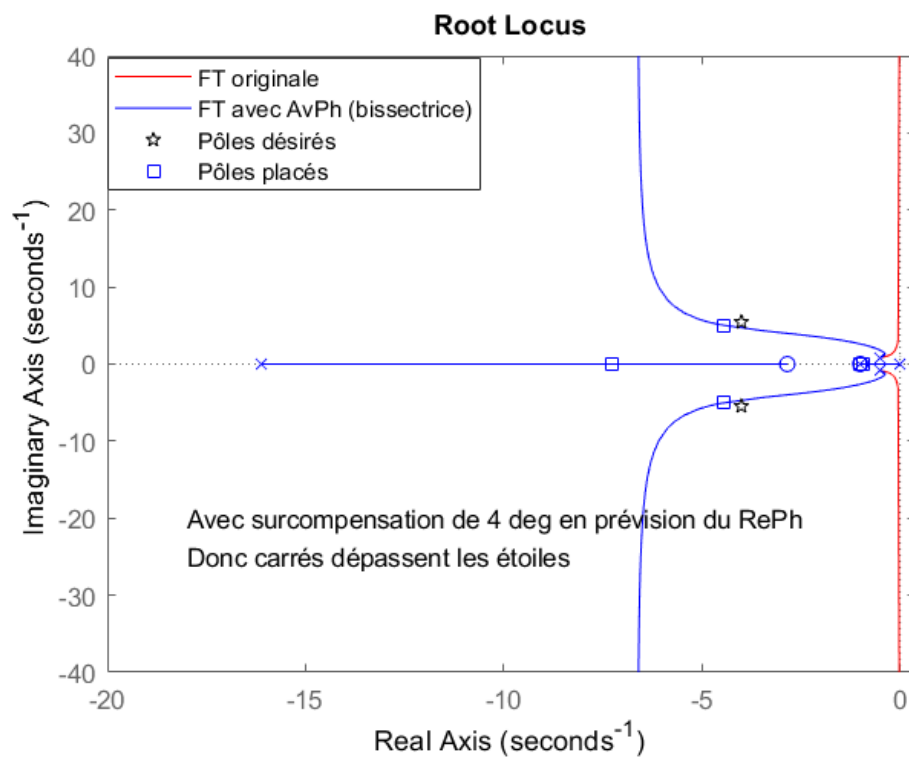
Compensateur RePh

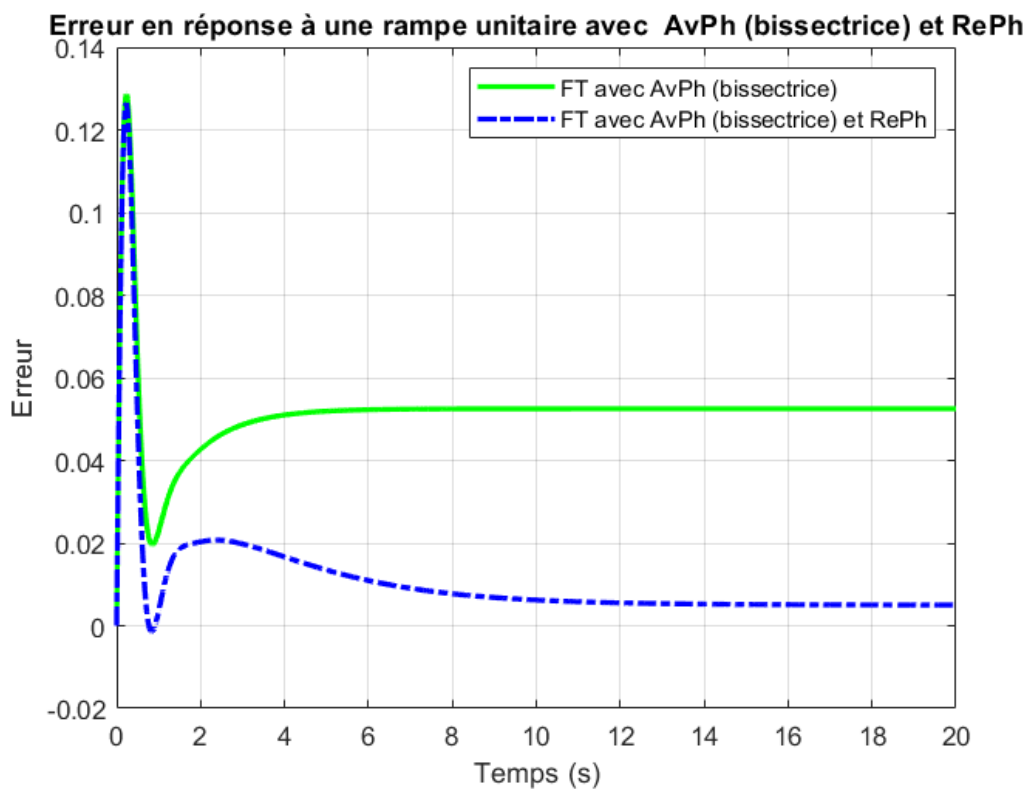
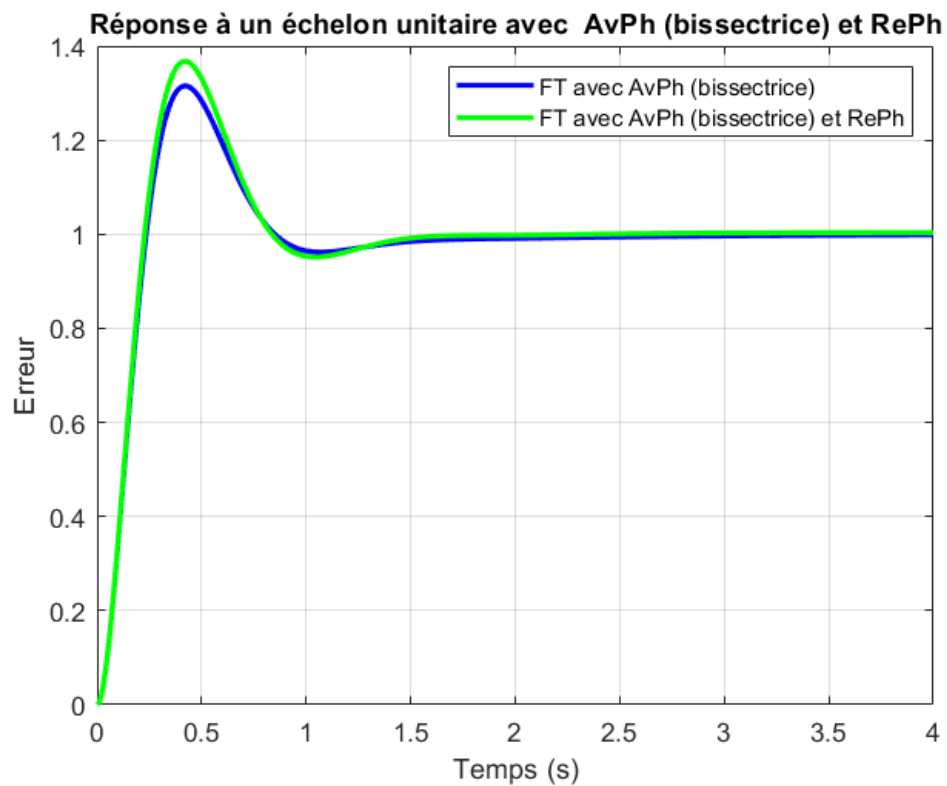
FTr =

$$\frac{s + 0.4}{s + 0.03808}$$

Graphiques sans la surcompensation



Graphiques avec la surcompensation de 4 deg



Problème 7

Un système asservi à retour unitaire a pour fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+8)(s+30)}$$

En asservissant ce système avec un compensateur proportionnel de gain $K = 1075$, on obtient les performances désirées en régime transitoire. Cependant, on désire obtenir une erreur en régime permanent de 0.5 pour une entrée parabolique.

- Calculer les pôles en boucle fermée et la fréquence de traverse en gain obtenus avec le compensateur proportionnel.
- Avec le lieu des racines, faire un compensateur PI en cascade au compensateur P qui rencontre l'erreur en régime permanent tout en maintenant approximativement les pôles en boucle fermée. Comparer le lieu des racines original (avec le P) avec le lieu final (avec le P + PI).
- Avec le diagramme de Bode, faire un compensateur PI en cascade au compensateur P qui rencontre l'erreur en régime permanent tout en maintenant approximativement la fréquence de traverse en gain. Comparer le diagramme de Bode original (avec le P) avec le lieu final (avec le P + PI).

(a) Pôles en BF

Classe 1 \Rightarrow Kvel de la FT originale de 4.4792

Erreur à une rampe unitaire de 0.22326 avec FT originale

poles =

$$\begin{aligned} & -31.457 + 0i \\ & -3.2716 + 4.8447i \\ & -3.2716 - 4.8447i \end{aligned}$$

$$\omega_n^* = 5.8458 \text{ rad/s}$$

$$\zeta^* = 0.55964$$

$$PM^* = 56.386 \text{ deg}$$

$$\omega_g^* = 4.3495 \text{ rad/s}$$

fac_des = 10 (Facteur pour le zéro du PI)

(b) PI avec lieu des racines

Le Ki requis est: 0.44651

Le Kp requis est: 1.3648

Le compensateur PI avec lieu des racines est:

FTi =

$$\frac{1.365 s + 0.4465}{s}$$

(c) PI avec Bode

On cherche Ki qui nous donne une erreur en régime permanent de 30 en réponse à une entrée parabolique unitaire.

Le Ki requis est: 0.44651

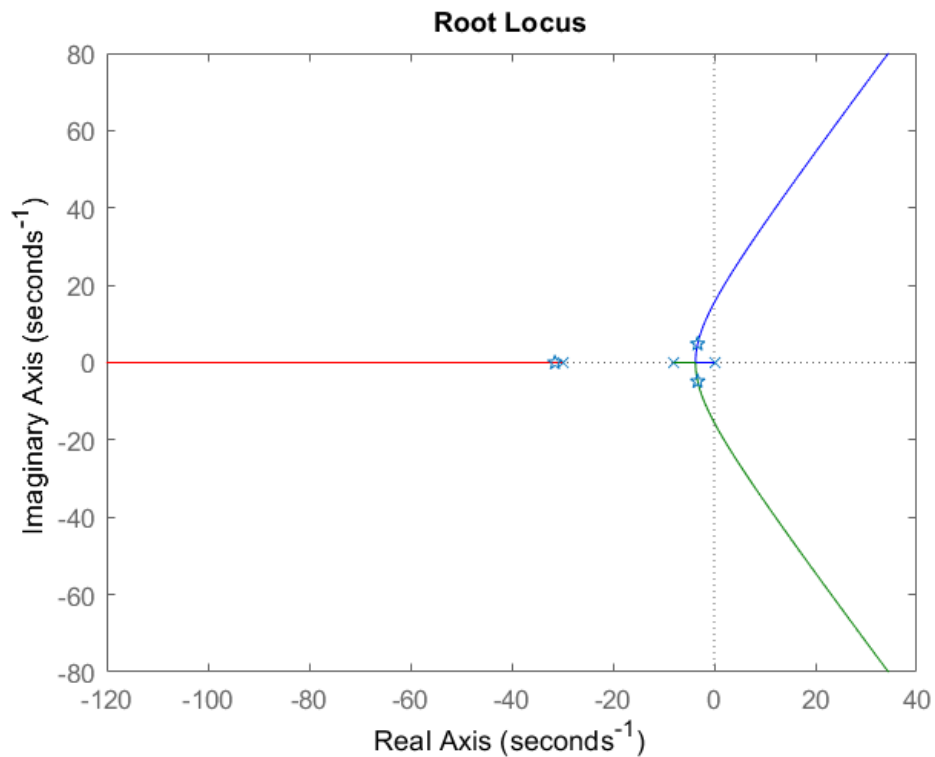
Le Kp requis est: 1.0266

Le compensateur PI avec Bode est:

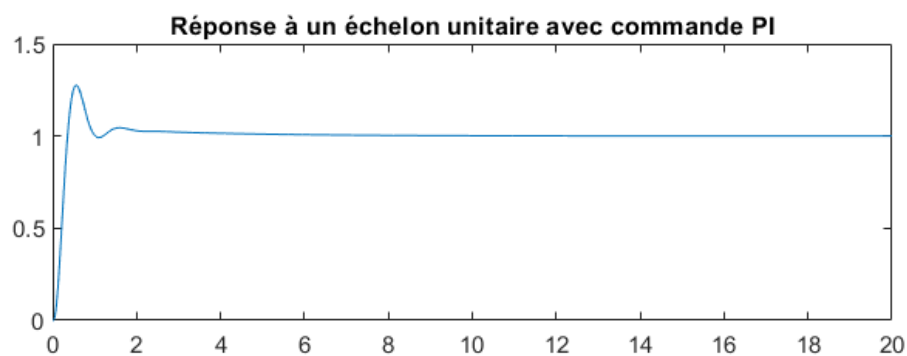
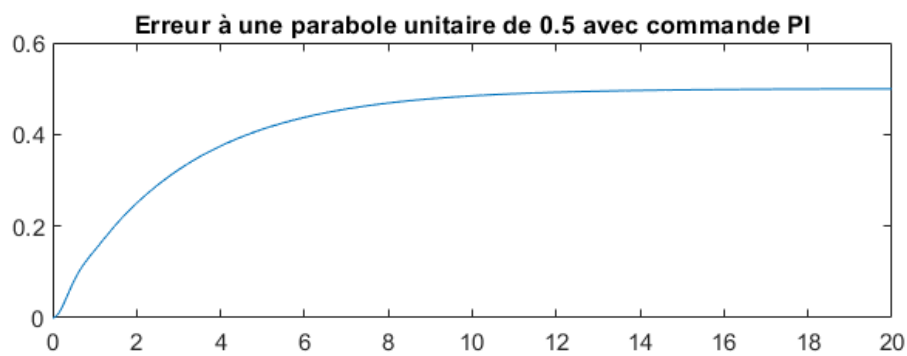
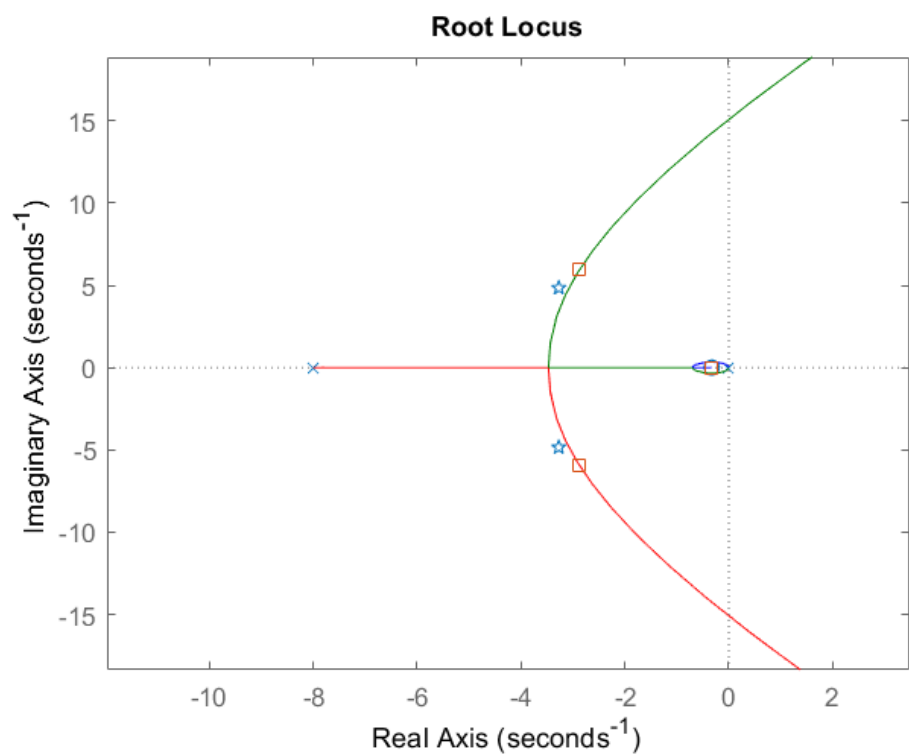
FTi =

$$\frac{1.027 s + 0.4465}{s}$$

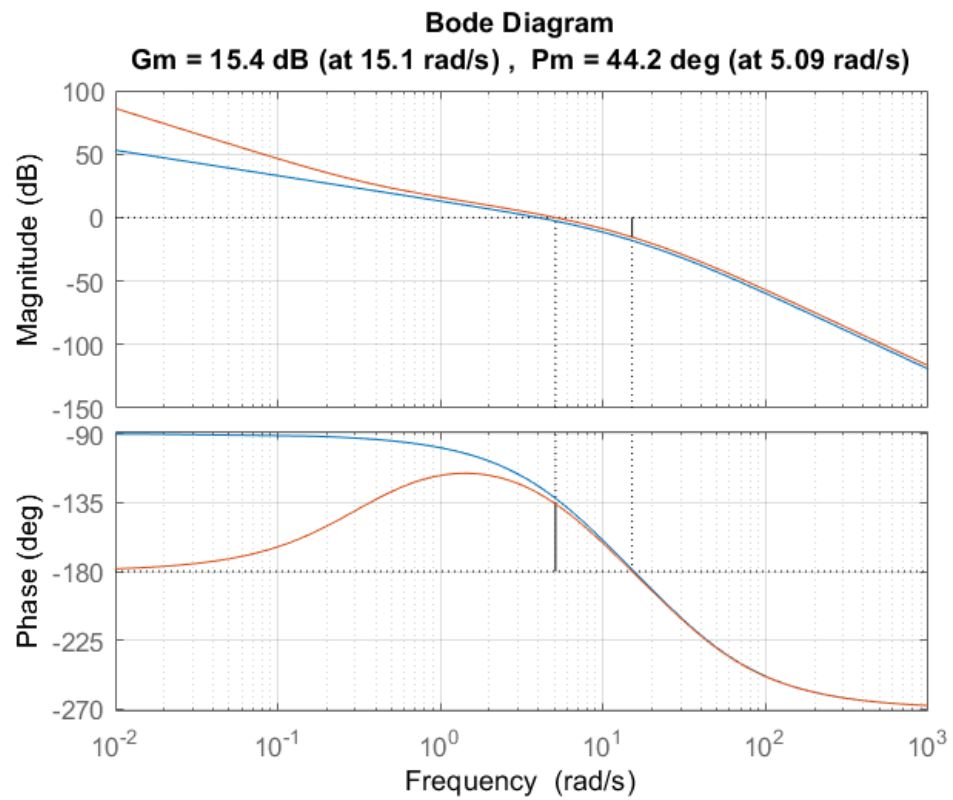
Système avec compensateur P et pôles désirés



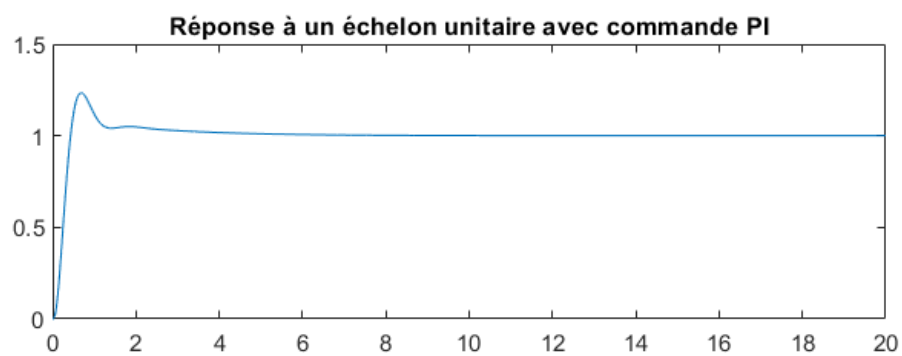
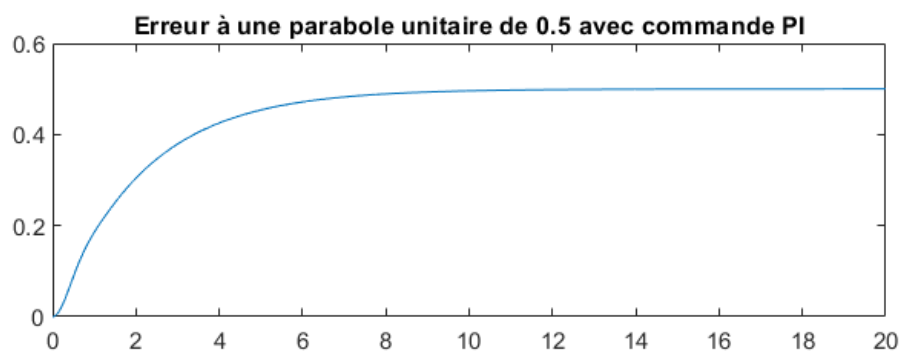
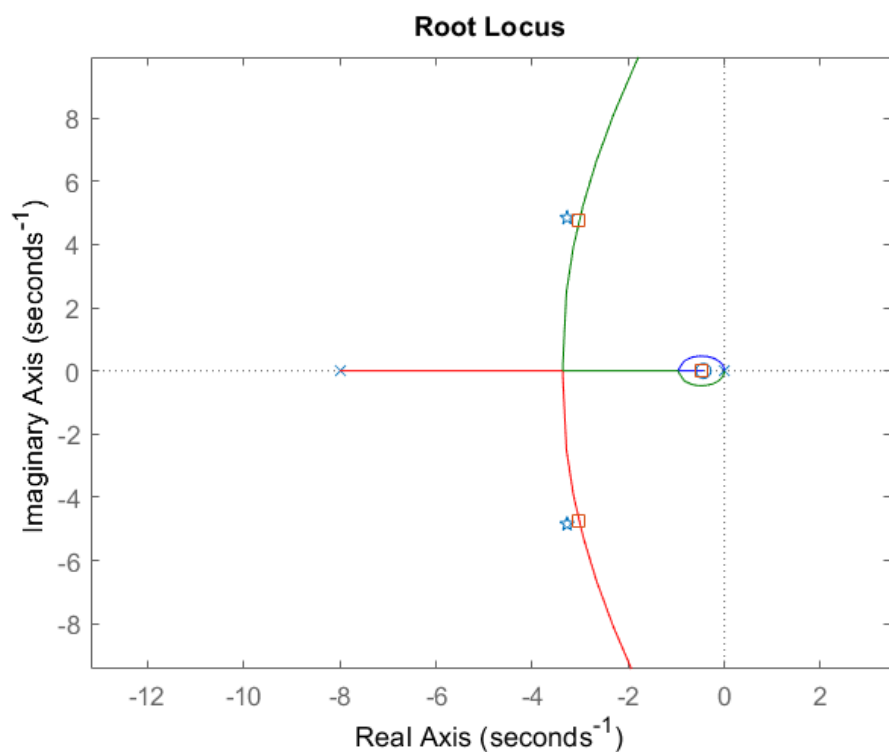
Retard de phase conçu avec le lieu des racines



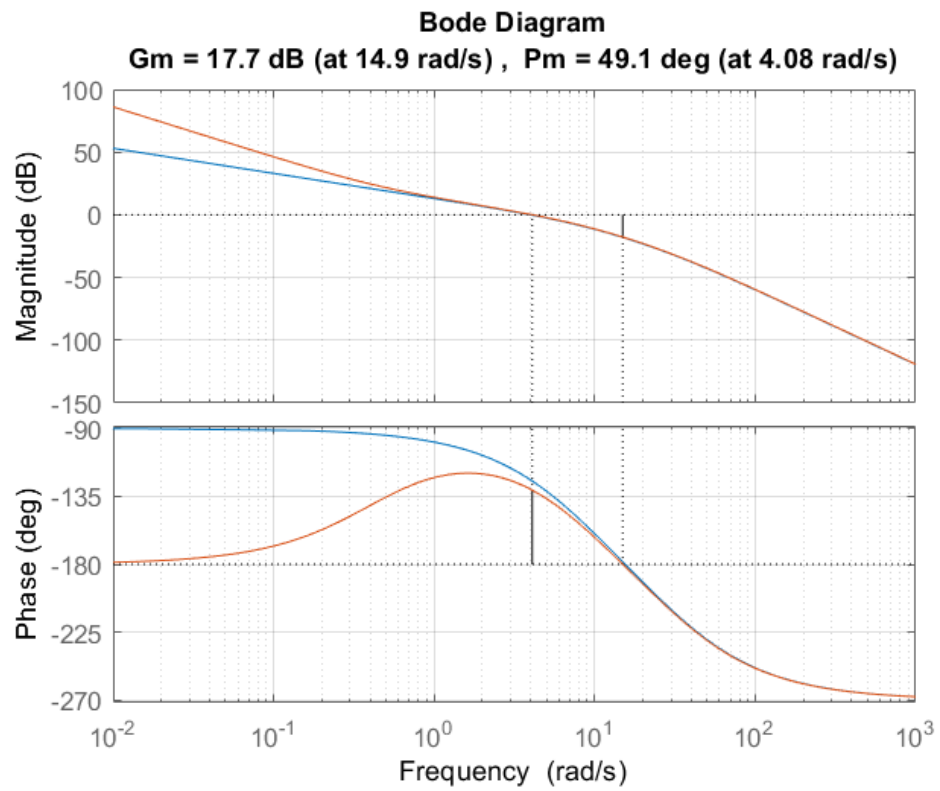
Retard de phase conçu avec le lieu des racines (suite)



Retard de phase conçu avec le diagramme de Bode



Retard de phase conçu avec le diagramme de Bode (suite)



```

% LABO Problème avec Bode et lieu des racines et compensateurs PI et PD

% JdeL
% Juin 2014
% Mars 2017
% Mars 2020
% Mars 2022

clear all
close all
clc

col = ['b', 'g', 'r', 'c', 'm', 'k', 'b'];

% Fonction transfert du systeme

num = [1075];
den = [conv([1 8],[1 30]),0]
FT = tf(num,den);

% Erreur en RP de la FT originale

Kvel_now = num(end)/den(end-1);
eRP_now = 1/Kvel_now;
disp(' ')
disp(['Classe 1 => Kvel de la FT originale de ', num2str(Kvel_now)])
disp(['Erreur √t une rampe unitaire de ', num2str(eRP_now), ' avec FT
originale'])

% Performances requises

eRP_des = 0.5;
Kacc_des = 1/eRP_des;

figure
rlocus(FT)
pol = rlocus(FT,1)
hold on
plot(real(pol), imag(pol), 'p')
wn = abs(pol(2))
zet = -real(pol(2))/wn

PM_des = atand(2*zet/sqrt(sqrt(1+4*zet^4)-2*zet^2))
wg_des = 2*zet*wn/tand(PM_des)
zet_chk = 0.5*sqrt(tand(PM_des)*sind(PM_des))
fac_des = 10.0

%
figure(100)
margin(FT)

%% PI avec racines

Ki = Kacc_des/Kvel_now;
zi = real(pol(2))/fac_des;
Kpi = -Ki/zi;
numi = [Kpi Ki];
deni = [1 0];

```

```

FTi = tf(numi,deni);
disp(['Le Ki requis est: ', num2str(Ki)])
disp(['Le Kp requis est: ', num2str(Kpi)])

disp(['Le compensateur PI avec lieu des racines est:'])
FTi
FTFTi = FT*FTi;
%
[numpi,denpi] = tfdata(FTFTi,'v');
[numpibf,denpibf] = feedback(numpi,denpi,1,1);

Kaccnow = numpi(end)/denpi(end-2);
eRP_des = 1/Kaccnow;

tpi = [0:0.01:20]';
u0pi = ones(size(tpi));
u1pi = tpi;
u2pi = tpi.^2/2;
y0pi = lsim(numpibf,denpibf,u0pi,tpi);
y2pi = lsim(numpibf,denpibf,u2pi,tpi);

figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(tpi,u2pi-y2pi)
title(['Erreur √t une parabole unitaire de ', num2str(eRP_des), ' avec commande PI'])

subplot(2,1,2)
plot(tpi,y0pi)
title(['R√ponse √t un √chelon unitaire avec commande PI'])

figure(3)
rlocus(numpi,denpi)
hold on
plot(real(pol(2:3)), imag(pol(2:3)), 'p')
p = rlocus(numpi,denpi,1);
plot(real(p), imag(p), 's')

figure(4)
bode(FT)
hold on
grid on
margin(FTFTi)
%% PI avec Bode

% On place le z√ro du PI √t zi = wg_des/F, F = 10 (r√gle du pouce).
% Selon le probl√me 2(b), on a qu'un changement de classe de 1 √t 2 donne la
% relation: Kacc = Kvel*Ki et donc: Ki = Kacc_des/Kvel_now.
% On a donc Ki et zi dans: PI = (Kp s + Ki)/s = Kp(s + Ki/Kp)/s = Kp(s + zi)/s.
% On peut ainsi calculer Kp = Ki/zi.

disp('On cherche Ki qui nous donne une erreur en r√gime permanent de 30 en
r√ponse √t une entr√e parabolique unitaire.')

Ki = Kacc_des/Kvel_now;
zi = -wg_des/fac_des;
Kpi = -Ki/zi;

```

```

numi = [Kpi Ki];
deni = [1 0];
FTi = tf(numi,deni);
disp(['Le Ki requis est: ', num2str(Ki)])
disp(['Le Kp requis est: ', num2str(Kpi)])

disp(['Le compensateur PI avec Bode est:'])
FTi
FTFTi = FT*FTi;
%
[numpi,denpi] = tfdata(FTFTi,'v');
[numpibf,denpibf] = feedback(numpi,denpi,1,1);

Kaccnow = numpi(end)/denpi(end-2);
eRP_des = 1/Kaccnow;

tpi = [0:0.01:20]';
u0pi = ones(size(tpi));
u1pi = tpi;
u2pi = tpi.^2/2;
y0pi = lsim(numpibf,denpibf,u0pi,tpi);
y2pi = lsim(numpibf,denpibf,u2pi,tpi);

figure(5)
subplot(2,1,1)
plot(tpi,u2pi-y2pi)
title(['Erreur √t une parabole unitaire de ', num2str(eRP_des), ' avec commande PI'])

subplot(2,1,2)
plot(tpi,y0pi)
title(['R√ponse √t un √chelon unitaire avec commande PI'])

figure(6)
rlocus(numpi,denpi)
hold on
plot(real(pol(2:3)), imag(pol(2:3)),'p')
p = rlocus(numpi,denpi,1);
plot(real(p), imag(p),'s')

figure(7)
bode(FT)
hold on
grid on
margin(FTFTi)

```