Problème de processus aléatoires

Sébastien Roy
Département de génie électrique et de génie informatique
Université de Sherbrooke

20 juillet 2021

La suite constitue une explication et une piste de démarrage pour la dérivation mathématique devant être remise avec le rapport d'APP. Dans votre rapport, il est important d'indiquer toutes les étapes mais pas nécessaire d'inclure des explications de style pédagogique comme ci-dessous.

1 Formulation du problème

On a

$$N(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t) - Y(t)\sin(2\pi f_c t)$$

On cherche à isoler les conditions devant s'appliquer à $X(t)$ et $Y(t)$ pour que $N(t)$ soit stationnaire au sens large, de moyenne nulle.

Il faut donc dériver les conditions sur $X(t)$ et $Y(t)$ telles que les deux conditions nécessaires à la stationnarité au sens large soient remplies, soit

1. la moyenne doit être invariante dans le temps ;
2. la fonction d'autocorrélation $R_{NN}(\cdot)$ doit être invariante dans le temps.

Dans ce cas-ci, la moyenne est non seulement invariante dans le temps, elle est également nulle.

2 Conditions sur $X(t)$ et $Y(t)$ découlant de l'invariance de la moyenne

Si $N(t)$ est de moyenne nulle, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{N(t)\} &= \mathbf{E}\{X(t)\cos(2\pi f_c t) - Y(t)\sin(2\pi f_c t)\} = 0 \\
&= \mathbf{E}\{X(t)\cos(2\pi f_c t)\} - \mathbf{E}\{Y(t)\sin(2\pi f_c t)\},
\end{aligned}$$

puisque l'espérance d'une somme est toujours la somme des espérances. De plus, on remarque que le cosinus et le sinus forment des fonctions du temps déterministes, c-à-d qu'elles ne sont pas aléatoires.

Elles agissent donc comme des *constantes* pour un t donné et peuvent être sorties de l'espérance. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{N(t)\} &= \mathbf{E}\{X(t)\}\cos(2\pi f_c t) - \mathbf{E}\{Y(t)\}\sin(2\pi f_c t)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Pour que cette expression donne zéro pour toute valeur de t, et étant donné que la relation entre le cosinus et le sinus varie dans le temps, il faut nécessairement avoir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{X(t)\} &= 0\\ \mathbf{E}\{Y(t)\} &= 0.\end{aligned}$$

On a donc déjà deux conditions sur $X(t)$ et $Y(t)$ pour que la moyenne de $N(t)$ soit nulle et donc, invariante dans le temps.

3 Conditions sur $X(t)$ et $Y(t)$ découlant de l'invariance de $R_{NN}(\cdot)$

Ici, on vous donne le début de la démarche et vous devez la compléter.

Il faut également que la fonction d'autocorrélation soit invariante dans le temps. Celle-ci s'exprime

$$\begin{aligned}R_{NN}(\tau) &= \mathbf{E}\{N(t)N(t+\tau)\} = \mathbf{E}\{[X(t)\cos(2\pi f_c t) - Y(t)\sin(2\pi f_c t)]\times\\ &\quad \times [X(t+\tau)\cos(2\pi f_c(t+\tau)) - Y(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau))]\}.\end{aligned}$$

Si on exprime le produit interne terme par terme, on trouvera 4 termes de la forme

$$\mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c(t+\tau)) = R_{XX}(\tau)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c(t+\tau)).$$

Par le biais d'une identité trigonométrique, le produit de cosinus ci-dessus peut être exprimé sous forme d'une somme de cosinus. On obtient alors deux termes, l'un avec un cosinus en $2\pi f_c(t+\tau-t) = 2\pi f_c\tau$ et l'autre en $2\pi f_c(t+\tau+t) = 2\pi f_c(2t+\tau)$. Si on fait de même avec tous les autres termes du produit ci-haut, on obtiendra un groupe de 4 termes en $2\pi f_c\tau$ et un groupe de 4 termes en $2\pi f_c(2t+\tau)$. Pour que le processus soit stationnaire, sa fonction d'autocorrélation doit être invariante dans le temps. Il s'ensuit que le groupe de 4 termes en $2\pi f_c(2t+\tau)$, qui dépend du temps, doit être égal à zéro pour toute valeur de t. On peut en déduire des conditions tout comme pour la moyenne ci-dessus en sachant que

$$\begin{aligned}R_{XX}(\tau) &= \mathbf{E}\{X(t)X(t+\tau)\}\\ R_{YY}(\tau) &= \mathbf{E}\{Y(t)Y(t+\tau)\}\\ R_{XY}(\tau) &= \mathbf{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}\\ R_{YX}(\tau) &= \mathbf{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}\end{aligned}$$

où les deux dernières sont des fonctions de corrélation croisée.