Obliczenia naukowe
Sprawozdanie
Lista 3

Mateusz Laskowski

25.11.2018

1. Zadanie 1

1.1. Opis problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą bisekcji.

1.2. Opis rozwiązania

Model funkcji:

function mbisekcji(f, a::Float64, b::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64)

Dane wejściowe:

f – funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
a, b – końce przedziału początkowego,
delta, epsilon – dokładności obliczeń,

Dane wyjściowe (r, v, it, err):

r – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v – wartość $f(r)$,
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu,
0 – brak błędu,
1 – funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b],

Opis działania funkcji:

1. Krok

Na samym początku obliczana jest długość przedziału, oznaczona jako e, wyznaczoną poprzez różnicę końców przedziału początkowego. Następnie długość przedziału jest dzielona przez dwa i dodawana do wartości a, wartość w funkcji oznaczona jako r. Sprawdzane jest, czy przedział e jest mniejszy od początkowej dokładności obliczeń (delta i epsilon). Jeżeli e jest mniejsze wtedy zwracany jest punkt r, wartość funkcji w punkcie r, liczba iteracji oraz sygnalizuje o błędzie (err = 1).

2. Krok

W przeciwnym wypadku (e jest większe od przyjętej dokładności obliczeń), całkowity przedział jest dzielony na dwa mniejsze przedziały [a, r] oraz [r, b]. Następnie sprawdzane jest, w którym w nowo powstałych przedziałach, gdzie funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału, gdzie podstawia je pod wartości a i b, i wraca do kroku pierwszego.

1.3. Uwagi

Funkcja, działała poprawnie, gdy są spełnione następujące warunki:

- funkcja przyjmuje różne znaki w punktach a oraz b,
- funkcja w podanym przedziale jest ciągła.

2. Zadanie 2

2.1. Opis problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą Newtona.

2.2. Rozwiązanie problemu

Model funkcji:

```
function mstycznych(f, pf, x0::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)
```

Dane wejściowe:

f – funkcja $f(x)$ jako anonimowa funkcja,
pf – pochodna $f'(x)$ jako anonimowa funkcja,
x0 – przybliżenie początkowe,
delta, epsilon – dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Dane wyjściowe (r**,** v**,** it**,** err):

r – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v – wartość $f(r)$,
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu,
0 – metoda zbieżna,
1 – nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,
2 – pochodna bliska zeru,

Opis działania funkcji:

Punkt startowy wybrany jako x_0. Każdy następny punkt jest wyznaczany za pomocą podanego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Punkt, który otrzymamy jest obliczana wartość w funkcji. Następnie jest prowadzona styczna do wykresu funkcji do otrzymanej wartości, gdzie przecięcie stycznej z osią OX wyznacza kolejne przybliżenie rozwiązania x_{n+1}. Jeżeli odległość między wartościami x_n, a x_{n+1} lub wartość funkcji jest większa niż przyjęta dokładność obliczeń (delta i elipsa), zostaje wybierane kolejne przybliżenie rozwiązania, chyba że dojdzie się do maksymalnej ilości iteracji i zostaje przerywana funkcja.

2.3. Uwagi

Szukany pierwiastek jest jednokrotny, $f'(r) \neq 0$.

3. **Zadanie 3**

3.1. Opis problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych.

3.2. Rozwiązanie problemu

Model funkcji:

Function msiecznych(f x0::Float64, x1::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)

Dane wejściowe:

f – funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja,
x0, x1 – przybliżenia początkowe,
delta, epsilon – dokładności obliczeń,
maxit – maksymalna dopuszczalna liczba iteracji,

Dane wyjściowe (r, v, it, err):

r – przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
v – wartość $f(r)$,
it – liczba wykonanych iteracji,
err – sygnalizacja błędu,
0 – metoda zbieżna,
1 – nie osiągnięto wymaganej dokładności w maxit iteracji,

Opis działania funkcji:

W celu wyznaczenia x_n, aby wyliczyć kolejne przybliżenia aproksymujemy pochodną:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Otrzymaną wartość, można podstawić do wzoru Newtona, gdzie korzystamy oto poniżej podanego wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Algorytm ze wzoru Newtona zakłada, że na dostatecznie małym przedziale funkcję można zastąpić sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią OX wyznacza kolejną przybliżoną wartość pierwiastka funkcji. Jeśli odległość między punktami $|f(x_{n+1}) - f(x_n)|$ lub wartość $f(x_{n+1})$ są większe od przyjętej dokładności obliczeń (delta i epsilon) wyznaczana jest nowa styczna (chyba, że przekroczy maxit) i obliczane są kolejne przybliżenie miejsca zerowego. Warto zaznaczyć, że ta funkcja jest lokalnie zbieżna.

3.3. Uwagi

Szukany pierwiastek jest jednokrotny, $f'(r) \neq 0$. Zaś sama funkcja zmienia znak w podanym przedziale.

4. **Zadanie 4**

4.1. Opis problemu

Wyznaczyć pierwiastek równania $sin\, x - (\frac{1}{2}x^2)$, za pomocą wcześniej napisanej metody:

A. bisekcji z przedziałem początkowym [1.5, 2.0] i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$,
B. Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$,
C. siecznych z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.0$ i $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$, $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$,

4.2. Rozwiązanie problemu

Dane podane wyżej, użyłem jako danych wejściowych do wcześniej napisanych metod.

4.3. Wyniki

Ryc. 4.1 – Tabela przedstawia wyniki funkcji, po uruchomieniu z danymi wejściowymi podanymi w podpunkcie 4.1

Metoda	**Pierwiastek równania**	**Wartość funkcji**	**Ilość iteracji**	**Sygnalizacja błędu**
bisekcji	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Newtona	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
siecznych	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

4.4. Wnioski

Rozwiązując zadanie, udało się wyznaczyć jedno z dwóch miejsc zerowych, podanej funkcji w zadaniu. Porównując wyniki, każda z napisanych metod wyznaczyła miejsce zerowe. Ocenić wyniki wszystkich trzech metod, można za pomocą ilości potrzebnych iteracji do uzyskania wyniku. Na załączonej tabeli, Ryc. 4.1, najgorzej poradziła sobie metoda bisekcji, zaś metoda Newtona i siecznych doprowadziła do wyniku już po 4 iteracjach. Jednak najlepszą metodą na tym przykładzie jest metoda siecznych, ponieważ przybliżenie pierwiastka równania w tej metodzie jest lepsze oraz ma mało iteracji.

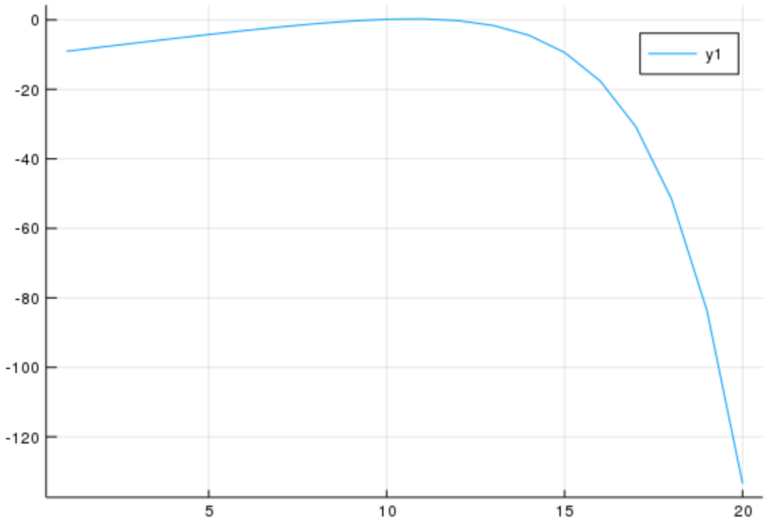
5. **Zadanie 5**

5.1. Opis problemu

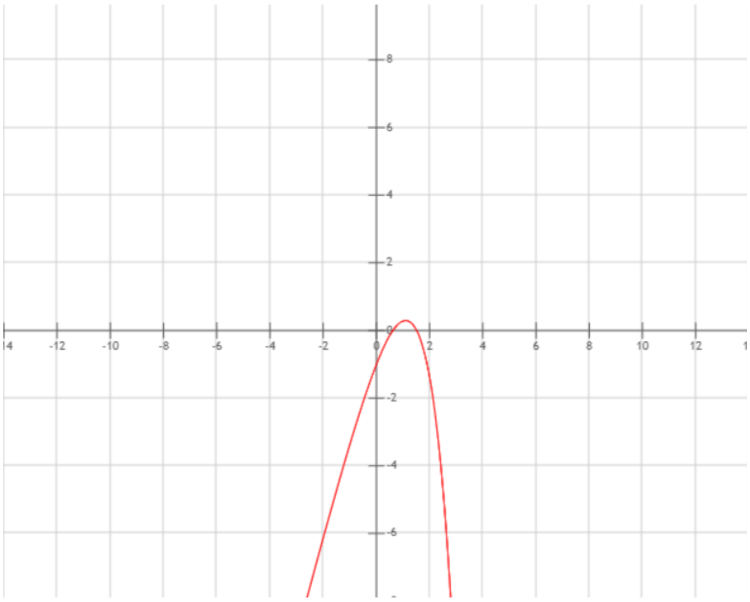
Metodą bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Dokładność obliczeń: $\delta = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-4}$.

5.2. Rozwiązanie problemu

W celu wyznaczenia punktu przecięcia zadanych funkcji, to tak naprawdę szukamy rozwiązania równania $3x = e^x$, czyli można z tego utworzyć nową funkcję w takiej postaci $f(x) = 3x - e^x$. Więc teraz możemy uznać, że szukamy miejsca zerowego powstałej z przekształceń funkcji. Wygenerowałem funkcję za pomocą biblioteki Plots w języku Julia, oraz sprawdziłem jak wykres funkcji wygląda, tak aby móc dobrze określić przedziały, które będą danymi wejściowymi.



Ryc. 5.1 – Wykres wygenerowany w języku Julia w bibliotece Plots.



Ryc. 5.2 – Wykres obrazujący funkcję $f(x) = 3x - e^x$.

Dzięki otrzymanym wykresom, łatwo zauważyć jakie można uznać przedziały dobre jako dane wejściowe do funkcji, ponieważ oba końce muszą mieć różne znaki. Przedziały, których użyłem to [0.0, 1.0] oraz [1.0, 2.0].

5.3. Wyniki

Ryc. 5.3 – Tabela przedstawiająca wyniki funkcji $f(x) = 3x - e^x$ w wyróżnionych przedziałach.

Przedział	Miejsce przecięcia funkcji	Wartość funkcji	Liczba iteracji	Sygnalizacja błędu
[0.0, 1.0]	0.619140625	9.066320343276146e-5	9	0
[1.0, 2.0]	1.5120849609375	7.618578602741621e-5	13	0

5.4. Wnioski

Miejsca przecięcia funkcji, które uzyskaliśmy można uznać za prawidłowe (wartości według Wolframalpha to 0.619061 i 1.51213), ponieważ wliczając to oczywiście błąd obliczeniowy, to wartości są naprawdę mocno zbliżone. Warto zauważyć, że dzięki dobrym ustawieniem przedziałów, metoda była w stanie obliczyć miejsca zerowe funkcji. Trzeba pamiętać, że przy używaniu metody bisekcji, końce przedziałów muszą mieć różne znaki.

6. Zadanie 6

6.1. Opis problemu

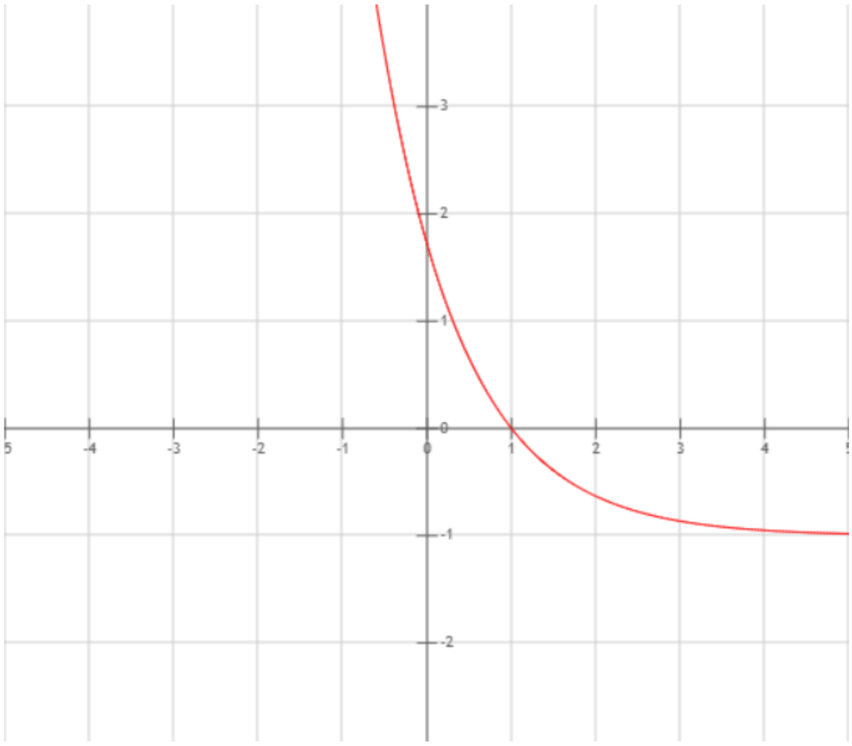
Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Dokładności obliczeń: : $\delta = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-5}$.

Przeprowadzić eksperymenty:

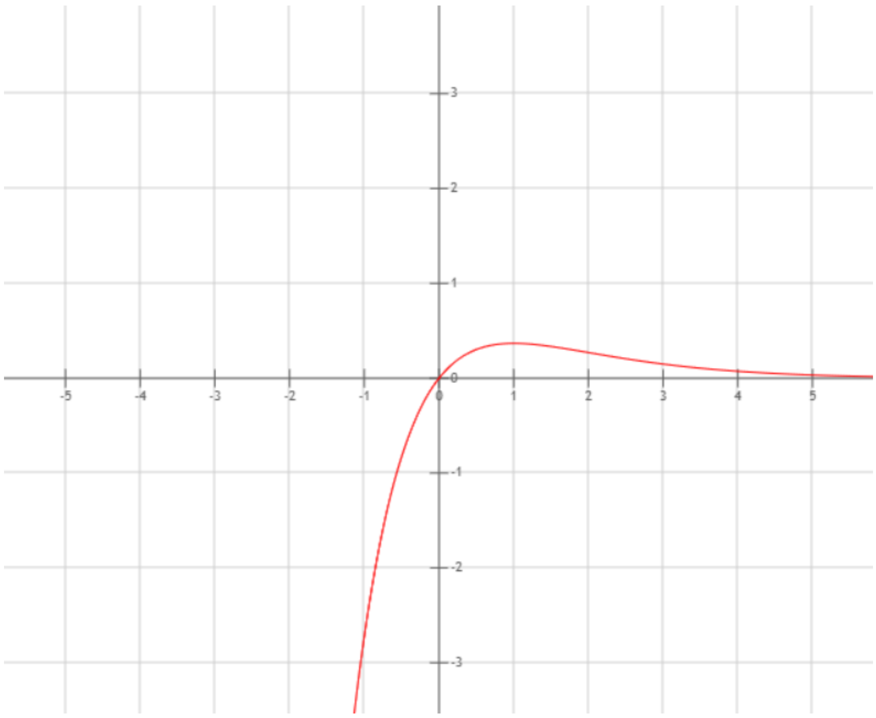
A. Co się stanie, gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy $x_0 \in (1, \infty]$?
B. Co się stanie, gdy w metodzie Newtona dla f_2 wybierzemy $x_0 > 1$?
C. Czy można wybrać $x_0 = 1$ dla f_2 w metodzie Newtona?

6.2. Rozwiązanie problemu

Na samym początku sprawdziłem jak wyglądają wykresy funkcji f_1 oraz f_2.



Rys. 6.1 – Wykres przedstawiający funkcję $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.



Rys. 6.2 – Wykres przedstawiający funkcję $f_2(x) = xe^{-x}$

Dzięki wykresom jestem w stanie określić dane wejściowe, potrzebne do metod. Miejsca zerowe poszukiwane dla funkcji $f_1(x)$ będzie w przedziale $x \in [0.0, 2.0]$, a dla funkcji $f_2(x)$ w przedziale $x \in [-1.0, 1.0]$. Końce tych przedziałów przyjąłem jako punkty początkowe w metodzie bisekcji oraz w przypadku metody siecznych. Zaś za punkt początkowy, w przypadku metody stycznych w obu funkcjach przyjąłem punkt $x_0 = -0.5$.

6.3. Wyniki

Ryc. 6.3 – tabela wyników dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.

Metoda	***x***	$\boldsymbol{f_1(x)}$	***it***	***err***
bisekcji	1.0	0.0	1	0
stycznych	0.9999999791619734	2.083802685959313e-8	5	0
siecznych	1.0000017597132702	-1.7597117218937086e-6	6	0

Ryc. 6.4 – tabela wyników dla funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$.

Metoda	***x***	$\boldsymbol{f_2(x)}$	***it***	***err***
bisekcji	0.0	0.0	1	0
stycznych	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	4	0
siecznych	1.744165849924562e-8	1.7441658195034172e-8	18	0

6.4. Wnioski

Można zauważyć, że najlepiej poradziła sobie metoda bisekcji. Oczywiście warto pamiętać, że nie otrzymalibyśmy tak dobrych wyników w tej metodzie, jeżeli źle obrałbym przedziały, które uznałem jako dobre dane wejściowe. Jeżeli wykorzystujemy metodę bisekcji to w tym przypadku bierzemy pod uwagę globalną zbieżność funkcji. W przypadku metody stycznych i siecznych, jest właśnie inaczej. Dane startowe mają duży wpływ na poprawność wyników. Metody te są lokalnie zbieżne, a więc złe punkty początkowe nie zwrócą poprawnych wyników.

A. W metodzie Newtona dla funkcji $f_1(x)$ wartości zwracane do $x_0 = 7.4$ były akceptowalne, czyli err = 0. W przedziale [7.7, 12.5], pojawił się błąd err = 1, czyli nie osiągnięto dokładności po maxit iteracjach. Bardzo ciekawe bo zwracana wartość to NaN. Powodem pojawienia się wartości „not a numer" było to, że w pewnym momencie pochodna, była bliska zeru i przechodziła przez jeden z warunków $|f'(x_0)| < \epsilon$, a następnie dochodziło do dzielenia przez ZERO. Co doprowadziło do takiego wyniku. Natomiast kolejne iteracje z większymi wartościami zwracały err = 2, czyli pochodna była bliska zera, a metoda kończyła działanie.

B. W metodzie Newtona dla funkcji $f_2(x)$ wartości były akceptowalne do $x_0 = 14.0$. Co ciekawe pojawiły się pojedyncze nieprawidłowości, zostały zwrócone err = 2, czyli pochodna była bliska zera. Takie przypadki wypadły dla x_0 równych 5.0 oraz 8.6. Po dłuższej obserwacji zauważyłem, że wyniki były różne ale oscylowały bardziej lub mniej przy realnej wartości. Po $x_0 = 14.0$ metoda zwracała err = 2. Widać na tym przykładzie, że dobre wartości początkowe są bardzo ważne w tej metodzie.

C. Po wywołaniu metody Newtona uzyskujemy taki oto wynik (1.0, -0.0, 0, 2). Ten wynik jest związany z pochodną tej funkcji, która dla $x_0 = 1.0$ osiąga swoje miejsce zerowe, a styczna nie spełnia warunków metody Newtona. (Pochodna funkcji: $f_2'(x) = -e^{-x}(x-1)$).