

OBLICZENIA NAUKOWE  
**Lista nr 2 (laboratorium)**<sup>1</sup>  
 (uwarunkowanie zadań i stabilność algorytmów)

**zad. 1** Powtórz zadanie 5 z listy 1, ale usuń ostatnią 9 z  $x_4$  i ostatnią 7 z  $x_5$ . Jaki wpływ na wyniki mają niewielkie zmiany danych?

**zad. 2** Narysować wykres funkcji  $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$  w co najmniej dwóch dowolnych programach do wizualizacji. Następnie policzyć granicę funkcji  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Porównać wykres funkcji z policzoną granicą. Wyjaśnić zjawisko.

**zad. 3** Rozważmy zadanie rozwiązywania układu równań liniowych

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

dla danej macierzy współczynników  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i wektora prawych stron  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ .

Macierz  $\mathbf{A}$  generować w następujący sposób:

- (a)  $\mathbf{A} = \mathbf{H}_n$ , gdzie  $\mathbf{H}_n$  jest macierzą Hilberta stopnia  $n$  wygenerowaną za pomocą funkcji `A=hilb(n)` (źródła w języku Julia na stronie domowej),
- (b)  $\mathbf{A} = \mathbf{R}_n$ , gdzie  $\mathbf{R}_n$  jest losową macierzą stopnia  $n$  z zadaniem wskaźnikiem uwarunkowania  $c$  wygenerowaną za pomocą funkcji `A=matcond(n,c)` (źródła w języku Julia na stronie domowej).

Wektor  $\mathbf{b}$  zadany jest następująco  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ , gdzie  $\mathbf{A}$  jest wygenerowaną macierzą, a  $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$ . Zatem wiemy jakie jest rozwiązanie dokładne  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  dla  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{b}$ .

Rozwiązać  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  za pomocą dwóch algorytmów: eliminacji Gaussa (`x=A\b`) oraz  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  (`x=inv(A)*b`). Eksperymenty wykonać dla macierzy Hilberta  $\mathbf{H}_n$  z rosnącym stopniem  $n > 1$  oraz dla macierzy losowej  $\mathbf{R}_n$ ,  $n = 5, 10, 20$  z rosnącym wskaźnikiem uwarunkowania  $c = 1, 10, 10^3, 10^7, 10^{12}, 10^{16}$ . Porównać obliczony  $\tilde{\mathbf{x}}$  z rozwiązaniem dokładnym  $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)^T$ , tj. **policzyć błędy względne**.

W języku Julia za pomocą funkcji `cond(A)` można sprawdzić jaki jest wskaźnik uwarunkowania wygenerowanej macierzy. Natomiast za pomocą funkcji `rank(A)` można sprawdzić jaki jest rząd macierzy.

**zad. 4** ("złośliwy wielomian", Wilkinson) Zainstalować pakiet `Polynomials`.

- (a) Użyć funkcji `roots` (z pakietu `Polynomials`) do obliczenia 20 zer wielomianu  $P$  w

---

<sup>1</sup>Większość zadań pochodzi z książki: D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005. Zadania 5 i 6 pochodzą z książki H.O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe *Granice chaosu. Fraktale, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, rozdziały 1.4 i 1.5.

postaci naturalnej

$$\begin{aligned}
 P(x) = & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} \\
 & - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} - 756111184500x^{13} \\
 & + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} \\
 & + 1307535010540395x^{10} - 10142299865511450x^9 \\
 & + 63030812099294896x^8 - 311333643161390640x^7 \\
 & + 1206647803780373360x^6 - 3599979517947607200x^5 \\
 & + 8037811822645051776x^4 - 12870931245150988800x^3 \\
 & + 13803759753640704000x^2 - 8752948036761600000x \\
 & + 2432902008176640000
 \end{aligned}$$

(współczynniki wielomianu  $P$  umieszczone są na stronie domowej w pliku `wielomian.txt`).  
 $P$  jest postacią naturalną wielomianu Wilkinsona  $p$

$$\begin{aligned}
 p(x) = & (x - 20)(x - 19)(x - 18)(x - 17)(x - 16) \\
 & (x - 15)(x - 14)(x - 13)(x - 12)(x - 11) \\
 & (x - 10)(x - 9)(x - 8)(x - 7)(x - 6) \\
 & (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)
 \end{aligned}$$

Sprawdzić obliczone pierwiastki  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq 20$ , obliczając  $|P(z_k)|$ ,  $|p(z_k)|$  i  $|z_k - k|$ .  
 Wyjaśnić rozbieżności.

Zapoznać się z funkcjami: `Poly`, `poly`, `polyval` (z pakietu `Polynomials`).

Wsk. Arytmetyka w `Float64` w języku `Julia` ma od 15 do 17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym.

- (b) Powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić współczynnik  $-210$  na  $-210 - 2^{-23}$ .  
 Wyjaśnić zjawisko.

**zad. 5** Rozważmy równanie rekurencyjne (model logistyczny, model wzrostu populacji)

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n), \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

gdzie  $r$  jest pewną daną stałą,  $r(1 - p_n)$  jest czynnikiem wzrostu populacji, a  $p_0$  jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

Przeprowadzić następujące eksperymenty:

1. Dla danych  $p_0 = 0.01$  i  $r = 3$  wykonać 40 iteracji wyrażenia (1), a następnie wykonać ponownie 40 iteracji wyrażenia (1) z niewielką modyfikacją tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku odrzucając cyfry po trzecim miejscu po przecinku (daje to liczbę 0.722) i kontynuować dalej obliczenia (do 40-tej iteracji) tak, jak gdyby był to ostatni wynik na wyjściu. Porównać otrzymane wyniki.  
 Obliczenia wykonać w arytmetyce `Float32` (w języku `Julia`).
2. Dla danych  $p_0 = 0.01$  i  $r = 3$  wykonać 40 iteracji wyrażenia (1) w arytmetyce `Float32` i `Float64` (w języku `Julia`). Porównać otrzymane wyniki.

**zad. 6** Rozważmy równanie rekurencyjne

$$x_{n+1} := x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

gdzie  $c$  jest pewną daną stałą.

Przeprowadzić następujące eksperymenty. Dla danych:

1.  $c = -2$  i  $x_0 = 1$
2.  $c = -2$  i  $x_0 = 2$
3.  $c = -2$  i  $x_0 = 1.999999999999999$
4.  $c = -1$  i  $x_0 = 1$
5.  $c = -1$  i  $x_0 = -1$
6.  $c = -1$  i  $x_0 = 0.75$
7.  $c = -1$  i  $x_0 = 0.25$

wykonać, w języku **Julia** w arytmetyce **Float64**, 40 iteracji wyrażenia (2). Zaobserwować zachowanie generowanych ciągów.

Wsk. Przeprowadzić iteracje graficzną  $x_{n+1} := x_n^2 + c$ .

Rozwiązania zadań przedstawić w sprawozdaniu, plik pdf + **wydruk**, które powinno zawierać:

1. krótki opis problemu,
2. rozwiązanie,
3. wyniki oraz ich interpretację,
4. wnioski.

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z kodem (\*.jl). Pliki powinny być skomentowane: imię i nazwisko autora (**anonimowe źródła nie będą sprawdzane**), opisane parametry formalne funkcji, komentarze zmiennych. Spakowane pliki wraz ze sprawozdaniem (\*.zip) należy przesłać e-mailem prowadzącemu. Natomiast wydruk sprawozdania należy oddać **prowadzącemu na laboratorium**.

UWAGA: Ostateczną wersję programów proszę przetestować pod linuxem.