

Algorytmy i struktury danych

Lista 2

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla rzeczywistego $c > 0$, funkcja $g(n) = 1 + c + c^2 + \dots + c^n$ jest

- (a) $\Theta(1)$ jeśli $c < 1$.
- (b) $\Theta(n)$ jeśli $c = 1$.
- (c) $\Theta(c^n)$ jeśli $c > 1$.

Zadanie 2.

Wylicz ile linijek wypisze poniższy program (podaj wynik będący funkcją od n w postaci asymptotycznej $\Theta(\cdot)$). Można założyć, że n jest potęgą 4.

```
1: function f(n)
2:   if n > 1 then
3:     print_line('still going')
4:     f(n/4)
5:     f(n/4)
6:   end if
```

Zadanie 3.

Niech $f(n)$ i $g(n)$ będą funkcjami asymptotycznie nieujemnymi (tzn. nieujemnymi dla dostatecznie dużego n). Korzystając definicji notacji Θ udowodnij, że $\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$.

Zadanie 4.

Udowodnij, że $n! = o(n^n)$.

Zadanie 5.

Wylicz asymptotyczną złożoność (używając notacji Θ) poniższych fragmentów programów:

```
1: for i = 1 to n do
2:   j = i
3:   while j < n do
4:     sum = P(i, j)
5:     j ++
6:   end while
7: end for
```

```
1: for i = 1 to n do
2:   j = i
3:   while j < n do
4:     sum = P(i, j)
5:     j = j + j
6:   end while
7: end for
```

Rozważ dwa przypadki:

- koszt wykonania procedury $P(i, j)$ wynosi $\Theta(1)$
- koszt wykonania procedury $P(i, j)$ wynosi $\Theta(j)$.

Zadanie 6.

Wyznacz asymptotyczne oszacowanie górne dla następujących rekurencji:

- $T(n) = T(n/2) + 1$
- $T(n) = T(n/3) + n$
- $T(n) = 5T(n/2) + n$
- $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$

Zadanie 7.

Dane są pewne funkcje $f(n)$ i $g(n)$ takie, że $f(n) = O(g(n))$. Podaj i udowodnij, które z poniższych stwierdzeń są zawsze prawdziwe, a dla pozostałych podaj kontrprzykłady:

- $\log_2 f(n) = O(\log_2 g(n))$
- $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$
- $f(n)^2 = O(g(n)^2)$

Zadanie 8.

Zaprojektuj algorytm wczytujący z wejścia tablicę liczb $A[1], \dots, A[N]$ i przygotowujący tablicę B taką, że na jej podstawie będzie potrafił odpowiadać na pytania: ile wynosi suma elementów tablicy A od miejsca i do miejsca j włącznie dla $i < j$. Jaka jest złożoność czasowa Twojego algorytmu? Ile pamięci zajmuje tablica B ? Ile zajmuje odpowiedź na jedno pytanie?

Zadanie 9.

Pokaż, efektywną strategię gry w "10 pytań". Gra polega na odgadnięciu wartości liczby, o której wiadomo, że:

- jest dodatnia i całkowita,
- nie jest znane ograniczenie górne jej wartości.

Gracz może zadawać tylko pytania na które odpowiedź będzie TAK lub NIE. Ile pytań potrzebujesz, żeby zgadnąć dowolną liczbę (liczba pytań może zależeć od wielkości liczby)?

Zadanie 10.

Używając algorytmu "divide-and-conquer" do mnożenia liczb wykonaj mnożenie dwóch liczb binarnych 1001, 1011.