Algorytmy i struktury danych
Lista 4

Zadanie 1.
Rozważ wyszukiwanie elementu x w posortowanej tablicy $A[1, \ldots, n]$ o różnych elementach. Wiemy, że może zostać do tego użyty algorytm Binary-Search, który ma złożoność obliczeniową $O(\log n)$. Pokaż, że w ”comparison model“ (czyli można zadawać tylko pytania w stylu: czy $A[i] \geq z$?), wyszukiwane jest $\Omega(\log n)$.

Zadanie 2.
Przyjmij, że dany jest algorytm w postaci “czarnej skrzynki”, który wyznacza medianę w pesymistycznym przypadku w czasie liniowym. Zaprojektuj algorytm, który używając tej “czarnej skrzynki” wyznacza dowolną statystykę pozycyjną w czasie liniowym.

Zadanie 3.
Zaprojektuj algorytm wyznaczający element maksymalny i minimalny tablicy n elementowej używający co najwyżej $3\lceil \frac{n}{2} \rceil$ porównań.

Zadanie 4.
Niech $X[1 \ldots n]$ i $Y[1 \ldots n]$ będą dwiema posortowanymi tablicami. Podaj algorytm, który w czasie $O(\lg n)$ wyznacza medianę wszystkich $2n$ elementów z obu tablic.

Zadanie 5.
Nieporządkiem w ciągu $a_1, \ldots, a_n$ nazywamy każdą parę indeksów (i, j) taką, że $i < j$ oraz $a_i > a_j$. Ułóż algorytm obliczający liczbę nieporządków w danym ciągu n-elementowym.

Zadanie 6.
Niech $\{k_1, k_2\} = DualPivotPartition(A, p, q)$ będzie procedurą dzielącą tablicę $A[p \ldots q]$ na trzy pod-tablice: $A[p \ldots k_1{-}1], A[k_1{+}1 \ldots k_2{-}1], A[k_2{+}1 \ldots q]$, wykorzystującą losowe 2 elementy jako pivoty. Podaj pseudokod algorytmu $DualPivotRandomSelect()$ znajdującą i-tą statystykę pozycyjną w tablicy A, wykorzystującą $DualPivotPartition()$. Zapisz wzór rekurencyjny na wartość oczekiwaną liczby porównań w stworzonym algorytmie.

Zadanie 7.
Czy algorytm SELECT powinien mieć polską nazwę "magiczne piątki"? Odpowiedź uzasadnij sprawdzając jaką złożoność miała by zmodyfikowana wersja SELECT’a, która w kroku wyszukiwania mediany median:

- dzieli tablice na $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ trójek,
- dzieli tablice na $\lceil \frac{n}{7} \rceil$ siódemek.

Zadanie 8.
Doktor Zseimel postanowił zaciągnąć się do pracy na platformę wiertniczą. Niestety został zakwalifikowany do kategorii osób o statusie “overqualified” i nie dostał wymarzonej pracy. Zaproponowano mu natomiast zostanie konsultantem strategicznym koncernu naftowego, który planuje budowę dużego rurociągu przebiegającego z zachodu na wschód przez pola naftowe, na których znajduje się n wież wiertniczych.

Do każdej wieży ma dochodzić odnoga głównego rurociągu po najkrótszej możliwej drodze (albo na północ, albo na południe) (zakładamy, że główny rurociąg będzie modelowany przez prostą, a odchodzące od niego odnogi będą prostymi podłączonymi do głównego rurociągu pod kątem prostym). Jakiego algorytmu powinien użyć doktor dla zadanych współrzędnych $(x_i, y_i)_{i=1...n}$ wież, aby wyznaczyć optymalne położenie głównego rurociągu (czyli takie, dla którego suma długości odnóg jest minimalna)? Wykaż, że można takie położenie wyznaczyć w czasie liniowym.

Zadanie 9.
Podaj nierekurencyjny algorytm wypisujący klucze drzewa BST w porządku in-order.

Zadanie 10.
Pokaż, że w drzewie BST jeśli wierzchołek ma dwóch synów, to jego następnik nie ma lewego syna, a jego poprzednik nie ma prawego syna.

Zadanie 11.
Drzewo jest zbalansowane, jeśli ma wysokość logarytmiczną względem liczby wierzchołków. Które z powyższych warunków implikują zbalansowanie? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.

1. Każdy węzeł ma dwóch synów lub jest liściem.
2. Rozmiar każdego poddrzewa można zapisać jako $2k - 1$, gdzie k jest liczbą naturalną (oczywiście dla każdego poddrzewa k może być inne).
3. Istnieje $C > 0$ takie, że dla każdego wierzchołka x jego większe poddrzewo ma co najwyżej C razy więcej wierzchołków od jego mniejszego poddrzewa.
4. Istnieje $c > 0$ takie, że dla każdego wierzchołka x wysokość jego poddrzew różni się najwyżej o c.

Zadanie 12.
Pokaż wykonanie dla drzew czerwono-czarnych oraz BST wstawiania kolejno kluczy $41, 38, 31, 12, 19, 8$ do początkowo pustego drzewa.

Zadanie 13.
Pokaż wykonanie dla drzew czerwono-czarnych oraz BST usuwania z drzew z powyższego zadania kolejno kluczy $8, 12, 19, 31, 38, 41$.