Lista 02 - Visão Computacional

Matheus Carvalho

9 de abril de 2024

Sumário

1 Exercício 01:

1.1 Alternativa A:

Transformação afins $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preservam paralelismo.

Vamos começar, construindo base teórica para que seja possível provar, no fim, o que foi pedido no exercício. Primeiramente, sabemos que, por definição, as transformações afins são invertíveis, pois existe uma relação bijetiva entre os pontos e as suas projeções.

$$\rho(x) = x' \to \rho^{-1}(x') = x$$

Além disso, existe uma outra propriedade, que vamos provar em seguida, de que transformações afim levam retas em retas. Para isso, vamos monstrar que ela leva quaisquer três pontos colineares em três pontos colineares. Mas para isso, vamos usar uma consequêcia da afirmação acima. Se a transformação feita pela matriz A é invertível, então $detA \neq 0$.

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad det(P) = 0 \qquad TP = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos supor que a matriz que faz a transformação é a matriz T. Sabemos que $det(TP) = 0$, visto que, $det(TP) = det(T)det(P) = 0$. Com isso, fica provado que a matriz resultande da transformação abriga três pontos conlineares.

Vamos, agora, provar o que foi pedido. Suponha que r e s sejam retas paralelas e que $T(r)$ e $T(s)$ sejam retas concorrentes e se cruzam no ponto M. Vamos definir o ponto Q como $P^-1(P(M)$, e pelo que foi provado, Q teria que pertencer a ambas as retas, r e s. Sabemos que isso é absurdo, pois nossa hipótese inicial é que as retas são paralelas e não se cruzam.

1.2 Alternativa B:

Falsa.

1.3 Alternativa C:

As isometrias, são transformações rígidas que conservam as distâncias entre os pontos. Logo, imagine três pontos A, B e C formando um triângulo. Após a transformação, eles formarão um novo triângulo A', B' e C'. Sabemos que as distâncias entre dois pontos, e as distâncias entre dois pontos transformados é o mesmo. Isso, é suficiente para garantir que os triângulos são semelhantes, e, portanto, possuem os mesmo ângulos.

1.4 Alternativa D:

Foi mostrado na questão anterior, que independente de onde a isomeria leve a origem, ela vai conservar os ângulos.

1.5 Alternativa E:

Falsa.

1.6 Alternativa F:

Para que a afirmativa seja verdadeira, basta que uma transformação qualquer leve uma circunferência em uma cônica. Sabemos que transformações afim, que são transformações projetivas, podem distorcer uma das dimenções da circunferência e transformá-la em uma elipse.

1.7 Alternativa G:

É possível construir uma transformação projetiva que leve um dos focos da elipse em um ponto impróprio, dessa forma, levaria a elipse para uma parábola. Levando uma cônica em outra cônica.

2 Exercício 02:

Vamos definir $x_1 = (3, 0, 1)^T$ e $x_2 = (-3, 0, 1)$ tais que, a transformação H, realiza as seguintes transformações.

$$H(x_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H(x_1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que a nossa matriz de transformação não vai nem rotacionar, nem transladar. Logo ela vai ter uma cara mais simples e, por isso, chegaremos no seguinte sistema.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ w & 0 & q \end{bmatrix} \qquad -3w + q = 1 \qquad 3w + q = 0$$

Vamos definir um vetor genérico $m = (x, y, 1)^T$ e após resolver o sistema, vamos ter a seguinte transformação:

$$Tm = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}} \\ \frac{y}{-\frac{x}{6}+\frac{1}{2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{G} \\ \frac{y}{G} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pela equação da parábola dada, temos que $x = \pm 3\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$, e, de acordo com a nossa generlização, $G = \pm\frac{3\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}+3}{6}$. Logo, nossa transformação genéria contém todos os pontos Tk, para os dois diferentes valores de G. A partir desse ponto, eu não consegui desenvolver. Conversei com o Sillas, vi que ele jogou no geogebra, mas não sei como sair da equação que eu encontrei para a equação da parábola.

3 Exercício 03:

Vamos supor que existem duas transformações que levam quatro pontos quaisquer nos mesmos quatro pontos. Isso implica que as duas transformações são iguais, pois não existem qualquer propriedades que tornam os pontos especiais, eles podem ser quaisquer pontos no espaço.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad TP = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 10 & 10 \\ -10 & 10 & 10 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 20 & 0 & -10 \\ 0 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$