

# **Projet d'optimisation dans l'incertain**

## Distribution d'énergie

L. Larbi, L. Khiel, R. Tsouria, M. Demoustier

IMT Atlantique  
2023-2024

# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2 Présentation du problème</b>	<b>4</b>
2.1 Génération d'énergie renouvelable . . . . .	4
2.2 Génération d'énergie non renouvelable . . . . .	5
2.3 Réponse à la demande et achat/vente d'énergie . . . . .	5
<b>3 Modèle Déterministe</b>	<b>6</b>
3.1 Paramètres et variables de décision . . . . .	7
3.2 Formulation du modèle déterministe . . . . .	8
3.2.1 Fonction objectif . . . . .	8
3.2.2 Contraintes . . . . .	10
3.3 Résolution du problème . . . . .	18
3.4 Analyse des résultats . . . . .	20
3.4.1 Analyse de la production d'énergie . . . . .	21
3.4.2 Analyse des échanges sur le marché de l'énergie . . . . .	23
<b>4 Modèle Stochastique</b>	<b>26</b>
4.1 Paramètres et variables de décision . . . . .	26
4.2 Formulation du modèle stochastique . . . . .	28
4.2.1 Fonction objectif . . . . .	28
4.2.2 Contraintes . . . . .	28
4.3 Résolution du problème . . . . .	29
4.4 Analyse des résultats . . . . .	31
4.4.1 Évaluation du modèle . . . . .	32
4.4.2 Analyse de l'impact du nombre de simulation . . . . .	34
4.4.3 Comparaison entre les modèles déterministe et stochastique . . . . .	38
4.4.4 Expérimentation avec $P_{ih}$ en tant que variable de seconde instance . . . . .	38
<b>5 Modèle Robuste</b>	<b>39</b>
5.1 Paramètres et variables de décision . . . . .	39
5.2 Formulation du modèle robuste . . . . .	42
5.2.1 Fonction objectif . . . . .	42
5.2.2 Contraintes . . . . .	43
5.3 Résolution du problème . . . . .	44
5.4 Analyse des résultats . . . . .	47
5.4.1 Analyse des résultats en fonction de $\Gamma$ . . . . .	47
5.4.2 Évaluation du modèle robuste . . . . .	49
5.4.3 Comparaison entre le modèle robuste et le modèle stochastique . . . . .	51
<b>6 Conclusion</b>	<b>51</b>

## Table des figures

1	Production moyenne des générateurs d'énergie renouvelable en fonction de l'heure	4
2	Distribution de la génération d'énergie renouvelable . . . . .	5
3	Contraintes de génération d'énergie non renouvelable lié au générateur . . . . .	5
4	Demande en énergie en fonction de l'heure . . . . .	6
5	Variables de décision lors de la diminution de la puissance d'un générateur . . . .	13
6	Variables de décision lors de l'augmentation de la puissance d'un générateur . . .	15
7	Évolution souhaitée de $B_h$ en fonction de $b_h$ . . . . .	17
8	Graphique de $B_h$ , $PA \times (-b_h)$ et $-PV \times b_h$ en fonction de $b_h$ . . . . .	18
9	Pourcentage de la demande couvert par la production d'énergie sur la journée . .	21
10	Puissance des générateurs 1, 5 et 10 au cours de la journée . . . . .	22
11	Production totale d'énergie par générateur . . . . .	22
12	Coûts de démarrage, de production et d'utilisation des générateurs . . . . .	23
13	Puissance du générateur 6 au cours de la journée . . . . .	25
14	Distribution des données aléatoires . . . . .	32
15	Évaluation du modèle stochastique . . . . .	33
16	Temps de calcul en fonction du nombre de simulations . . . . .	34
17	Distribution des coûts $B_{kh}$ par heure en fonction du nombre de simulations . . .	35
18	Distribution des données aléatoires sur l'intervalle $[Avg\_Rep - 2\sigma; Avg\_Rep + 2\sigma]$	37
19	Coûts total en fonction du nombre de simulation sans aléa extrême . . . . .	37
20	Probabilités d'occurrence des valeurs d'une loi normale . . . . .	40
21	Probabilité de $\Gamma$ . . . . .	47
22	Valeurs de la fonction objective en fonction de $\Gamma$ . . . . .	48
23	Coût en fonction de la robustesse . . . . .	49
24	Puissance des générateurs 2, 5 et 9 au cours de la journée en fonction de $\Gamma$	50

# 1 Introduction

Dans le cadre de ce projet, nous avons été chargés d'optimiser la production d'énergie d'un fournisseur national d'électricité, qui doit gérer à la fois des sites de production d'énergie renouvelable et des générateurs classiques. Le principal objectif est de satisfaire la demande en énergie tout en minimisant les coûts associés à l'utilisation des générateurs, ainsi que les transactions d'énergie avec le réseau.

Les sites de production d'énergie renouvelable produisent de l'énergie en fonction des conditions météorologiques, et cette production est considérée comme aléatoire avec une distribution normale. Par ailleurs, les générateurs conventionnels possèdent des contraintes spécifiques en termes de démarrage, d'arrêt et de variation de puissance.

## 2 Présentation du problème

### 2.1 Génération d'énergie renouvelable

La production d'énergie renouvelable est assurée par six générateurs dont la sortie varie en fonction des conditions météorologiques, introduisant ainsi un élément de variation aléatoire. Les prévisions de production pour chaque heure  $h$  de la journée ( $h = 1, \dots, 24$ ) sont estimées par les gestionnaires du réseau et suivent une loi normale  $\mathcal{N}(Avg\_Rep_j, 0.2^2)$ . Cette distribution a une moyenne spécifique pour chaque générateur, notée  $Avg\_Rep_j$  où  $j$  représente le numéro du générateur ( $j = 1, \dots, 6$ ), et un écart-type de 20 % qui reflète la variabilité autour de cette moyenne. Cette variation aléatoire nécessite de passer d'un modèle déterministe à des modèles qui optimisent dans l'incertain, tels que les modèles stochastiques et robustes.

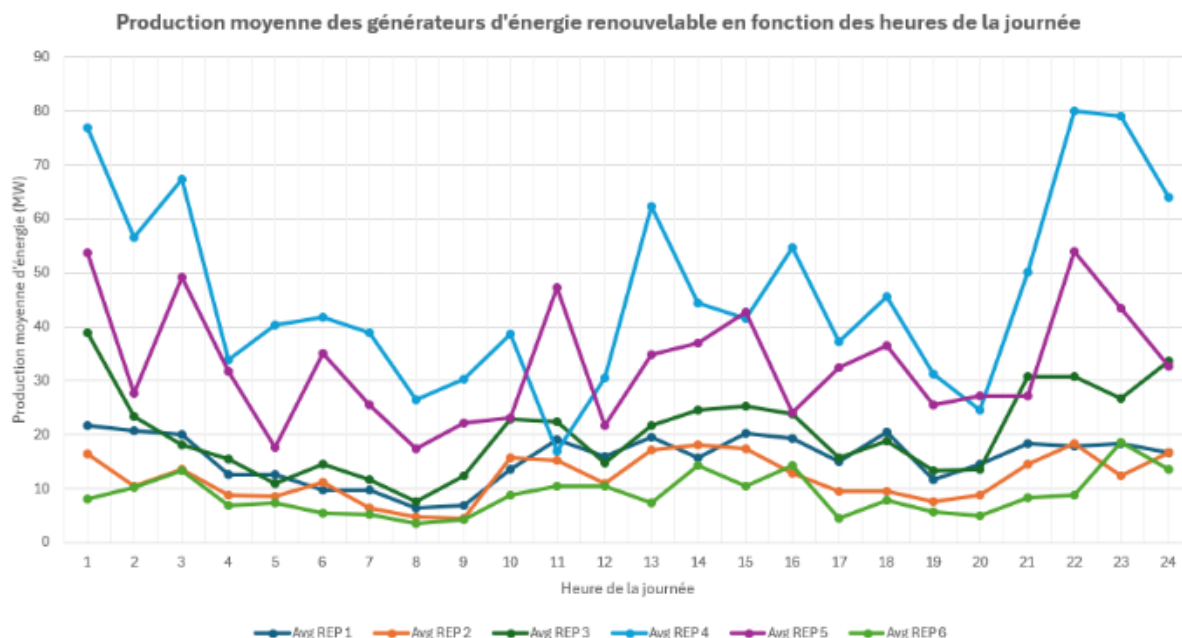
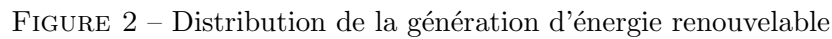
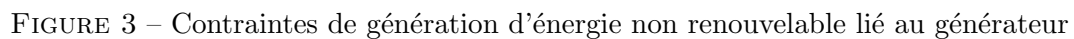


FIGURE 1 – Production moyenne des générateurs d'énergie renouvelable en fonction de l'heure



La production d'énergie non-renouvelable est assurée par 10 générateurs ( $i = 1, \dots, 10$ ) de types variés, chacun avec des caractéristiques spécifiques pour leur mise en marche et leur arrêt. Chaque générateur doit fonctionner pendant au moins un nombre d'heures  $UT_i$  une fois activé, avec une production maximale au démarrage déterminée par sa capacité de démarrage  $SU_i$ . Lors de l'arrêt d'un générateur, sa production au cours de l'heure précédente ne doit pas excéder sa capacité d'extinction  $SD_i$ , et il doit ensuite rester hors service pendant un certain nombre d'heures pour refroidir  $DT_i$ . Chaque générateur est également contraint par des valeurs de production minimale  $Pmin_i$  et maximale  $Pmax_i$ , et la variation de sa puissance entre deux périodes (heures) consécutives est limitée par ses capacités de montée  $RU_i$  et de descente  $RD_i$ .



L'objectif principal de notre projet est d'optimiser la mise en service, l'arrêt et la puissance des générateurs pour répondre efficacement à la demande d'énergie à toute heure. En cas de surplus de production, l'énergie peut être vendue au prix de 15 euros par mégawattheure (MWh).

En revanche, si la production des générateurs ne suffit pas à couvrir la demande, l'énergie manquante peut être achetée au prix de 120 euros par mégawattheure (MWh).

Prix d'achat	120€/MWh
Prix de vente	15€/MWh

TABLE 1 – Prix d'achat et de vente d'énergie

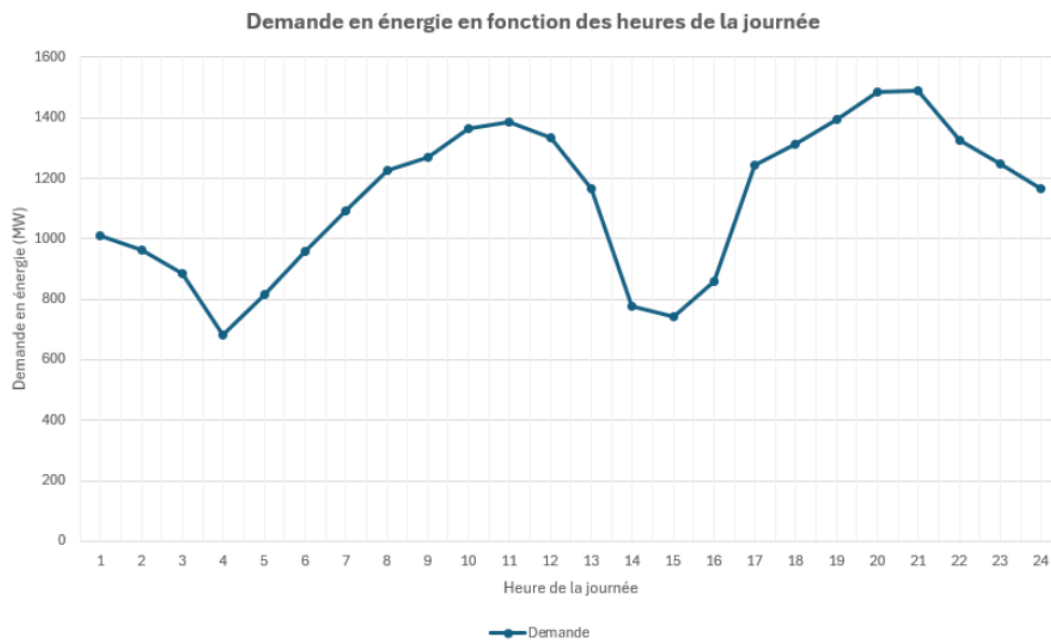


FIGURE 4 – Demande en énergie en fonction de l'heure

### 3 Modèle Déterministe

Cette section du rapport explore l'approche déterministe adoptée pour modéliser et résoudre le problème complexe de la gestion optimale de la production d'énergie. Contrairement aux modèles stochastiques qui prennent en compte l'incertitude des prévisions de production d'énergie renouvelable, le modèle déterministe se base sur des prévisions fixes et déterminées pour chaque heure. Pour ce modèle, nous admettons que la production d'énergie renouvelable est *Avg\_Rep*. Ce choix permet une formulation claire et précise des décisions à prendre concernant l'allumage des générateurs, leur puissance de sortie, et l'achat ou la vente d'énergie sur le réseau en fonction de la demande estimée. Dans cette partie, nous présenterons les paramètres et variables de décisions du modèle, les équations mathématiques qui décrivent les contraintes et la fonction objectif pour résoudre efficacement le problème dans ce cadre déterministe.

La modélisation du problème à l'aide d'un modèle déterministe constitue une étape essentielle, car elle permet de poser les bases solides nécessaires pour aborder les modèles plus complexes intégrant de l'incertitude. En effet, une fois le modèle déterministe établi, il devient plus aisé de le transformer en un modèle stochastique ou en un modèle robuste.

### 3.1 Paramètres et variables de décision

L'étude approfondie du problème nous a permis de préciser les paramètres du modèle. Pour les paramètres, nous avons déterminée les indices et listes d'indice, les caractéristiques des site de production d'énergie renouvelable, des générateurs d'énergie non-renouvelables, les paramètres de prix et celui de la demande.

Notation	Définition	Unité
<i>Listes d'indices</i>		
$H$	Liste des heures de la journée	
$I$	Liste des générateur d'énergie	
$J$	Liste des sites de production d'énergie renouvelable	
<i>Indices</i>		
$h$	Heures de la journée	
$i$	Numéro du générateur d'énergie	
$j$	Numéro du site de production d'énergie renouvelable	
<i>Paramètres des sites de production d'énergie renouvelable</i>		
$Avg\_Rep_{jh}$	Moyenne de production d'énergie renouvelable du site $j$ à l'heure $h$	$MW$
$\sigma$	Écart-type de la distribution normale de la production d'énergie renouvelable	
<i>Paramètres des générateurs d'énergie</i>		
$UT_i$	Nombre d'heure consécutive minimal de fonctionnement du générateur $i$ lorsqu'il est allumé	$h$
$DT_i$	Nombre d'heure consécutive minimal de refroidissement du générateur $i$ lorsqu'il est éteint	$h$
$SU_i$	Puissance maximale de démarrage (première heure) du générateur $i$	$MW$
$SD_i$	Puissance maximale d'arrêt (dernière heure) du générateur $i$	$MW$
$Pmax_i$	Puissance maximale du générateur $i$	$MW$
$Pmin_i$	Puissance minimale du générateur $i$	$MW$
$RU_i$	Augmentation maximale de la puissance du générateur $i$ en marche	$MW/h$
$RD_i$	Diminution maximal de la puissance du générateur $i$ en marche	$MW/h$
$CD_i$	Coût de démarrage du générateur $i$	€
$CP_i$	Coût de production du générateur $i$	€/MWh
$CU_i$	Coût d'utilisation du générateur $i$	€/h
<i>Paramètres de prix</i>		
$PV$	Prix de vente	€/MWh
$PA$	Prix d'achat	€/MWh
<i>Paramètre de demande</i>		
$D_h$	Demande à l'heure $h$	$MW$

TABLE 2 – Paramètres du modèle déterministe

L'étude du problème nous a également permis d'identifier les variables de décision telles que les instants d'allumage et d'extinction des générateurs, les niveaux de production pour chaque période, ainsi que les quantités d'énergie à acheter ou à vendre sur le marché.

Notation	Définition	Unité
<i>Variables booléenne</i>		
$X_{ih}$	État du générateur $i$ à l'heure $h$	
$A_{ih}$	Démarrage du générateur $i$ à l'heure $h$	
$S_{ih}$	Arrêt du générateur $i$ à l'heure $h$	
<i>Variables continue</i>		
$P_{ih}$	Puissance du générateur $i$ à l'heure $h$	MW
$B_h$	Montant des échanges d'énergie sur le marché à l'heure $h$	€

TABLE 3 – Variables de décision du modèle déterministe

### 3.2 Formulation du modèle déterministe

Maintenant que nous avons détaillé les différents paramètres et variables de décision, nous pouvons formuler le modèle mathématique déterministe. Ce modèle précis intégrera la fonction objectif ainsi que les contraintes qui régissent le comportement des générateurs et la gestion des flux énergétiques.

#### 3.2.1 Fonction objectif

Lors de l'étude du problème, nous avons constaté que l'objectif est d'optimiser la rentabilité opérationnelle tout en assurant une satisfaction complète de la demande en énergie à tout moment de la journée. Pour ce faire, il est essentiel de formuler une expression mathématique visant à minimiser les coûts totaux de production d'énergie. Cette fonction prend en compte plusieurs éléments financiers essentiels, tels que les coûts d'utilisation et de production des générateurs, les frais fixes associés au démarrage des générateurs, ainsi que les bénéfices et les pertes potentiels liés à la vente et à l'achat d'énergie sur le marché. Elle est définie par l'expression mathématique suivante :

$$\min \left( \sum_H \left( \sum_I (X_{ih} \times CU_i + P_{ih} \times CP_i + A_{ih} \times CD_i) + B_h \right) \right) \quad (1)$$

Analysons en détail cette fonction objectif afin de comprendre les différentes composantes qui la constituent.

#### COÛTS D'UTILISATION DES GÉNÉRATEURS :

Les coûts liés à l'utilisation des générateurs peuvent être représentés par l'expression mathématique suivante :



$$\sum_H \left( \sum_I (X_{ih} \times CU_i) \right) \quad (2)$$

Sachant que  $X_{ih}$  représente l'état binaire allumée ( $X_{ih} = 1$ ) ou éteint ( $X_{ih} = 0$ ) du générateur  $i$  à l'heure  $h$  et que  $CU_i$  est le coût d'utilisation par heure du générateur  $i$ , reflétant les dépenses associées à son fonctionnement. Nous obtenons donc  $CU_i$  lorsque le générateur est allumé et 0 lorsqu'il est éteint.

#### COÛTS DE PRODUCTION D'ÉNERGIE DES GÉNÉRATEURS :

Les coûts de production sont exprimés par l'expression suivante :

$$\sum_H \left( \sum_I (P_{ih} \times CP_i) \right) \quad (3)$$

Ici,  $P_{ih}$  représente la production en mégawattheures (MWh) du générateur  $i$  à l'heure  $h$ , et  $CP_i$  est le coût de production par MWh pour le générateur  $i$ . Cette formule calcule les dépenses associées à la quantité d'énergie produite par chaque générateur, multipliée par son coût unitaire de production.

#### FRAIS FIXES ASSOCIÉS AU DÉMARRAGE DES GÉNÉRATEURS :

Les coûts de démarrage sont modélisés par l'équation suivante :

$$\sum_H \left( \sum_I (A_{ih} \times CD_i) \right) \quad (4)$$

Ici,  $A_{ih}$  est une variable binaire qui indique si le générateur  $i$  démarre ( $A_{ih} = 1$ ) à l'heure  $h$  ( $A_{ih} = 0$  sinon), et  $CD_i$  représente le coût de démarrage fixe du générateur  $i$ . Cette formule permet de quantifier les coûts engendrés chaque fois qu'un générateur est mis en marche, tenant compte de ses spécificités de démarrage et des périodes d'activité.

#### BÉNÉFICES ET PERTES LIÉS À LA VENTE ET À L'ACHAT D'ÉNERGIE SUR LE MARCHÉ :

Les transactions d'achat ou de vente d'énergie sur le marché sont représentées par l'équation suivante :

$$\sum_H B_h \quad (5)$$

Ici,  $B_h$  représente le coût net d'achat (supérieur à 0) ou de vente (inférieur à 0) d'énergie sur le marché à l'heure  $h$ . Cette formule agrège les coûts financiers associés aux fluctuations de

l'offre et de la demande d'énergie, permettant de prendre des décisions d'achat ou de vente afin de répondre efficacement aux besoins du réseau tout en optimisant les coûts globaux.

### 3.2.2 Contraintes

Les contraintes jouent un rôle crucial dans la modélisation et l'optimisation de la gestion de la production d'énergie. Elles définissent les limites et les conditions que doivent respecter les décisions prises concernant l'allumage des générateurs, leur niveau de production, les transactions sur le marché de l'énergie... En imposant des règles spécifiques sur la disponibilité des générateurs, les capacités de production, et les flux énergétiques, ces contraintes garantissent la fiabilité et la sécurité du système énergétique tout en contribuant à la réalisation des objectifs économiques fixés. Dans cette section, nous détaillerons les différentes contraintes qui encadrent notre modèle, en les formulant de manière mathématique pour assurer une résolution optimale du problème.

#### CONTRAINTES N°0 : INITIALISATION DES GÉNÉRATEURS À L'HEURE 0

$$X_{i0} = E_i \quad \forall i \in I \quad (6)$$

$$P_{i0} \leq P_{\max_i} \times X_{i0} \quad \forall i \in I \quad (7)$$

$$P_{i0} \geq P_{\min_i} \times X_{i0} \quad \forall i \in I \quad (8)$$

Les contraintes d'initialisation ne sont généralement pas nécessaires pour modéliser le problème de distribution d'énergie. Cependant, dans la réalité, nous devons planifier notre production d'énergie de manière progressive. Ainsi, à l'heure  $h = 0$ , certains de nos générateurs peuvent déjà être en fonctionnement. Cette situation est représentée par le paramètre  $E_i$ , qui indique l'état initial du générateur  $i$ . Pour ce projet, ces états initiaux sont fournis dans le fichier **Network data.csv**. L'expression mathématique numéro 6 est utilisée pour initialiser l'état des générateurs. Les expressions mathématiques numéro 7 et 8, quant à elles, sont utilisées pour initialiser la puissance des générateurs à une valeur aléatoire choisie par le modèle.

Générateur ( $i$ )	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
État initial ( $X_{i0}$ )	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0

TABLE 4 – États initiaux des générateurs d'énergie

#### CONTRAINTE N°1 : DURÉE MINIMAL DE FONCTIONNEMENT CONSÉCUTIF DES GÉNÉRATEURS

$$\sum_{h=h_0}^{\min(h_0+UT_i;24)} X_{ih} \geq \min(UT_i; 24 - h_0) \times A_{ih_0} \quad \forall i \in I, \forall h_0 \in H \quad (9)$$

La contrainte numéro 1 permet de modéliser le fait que les générateurs ont une durée de fonctionnement consécutif minimal. Pour mieux la comprendre, nous allons analyser le fonctionnement de chaque une des parties de l'inéquation.

$$\sum_{h=h_0}^{\min(h_0+UT_i;24)} X_{ih} \quad i \in I, h_0 \in H \quad (10)$$

Le terme à gauche de l'inéquation (expression mathématique numéro 10) représente la durée de fonctionnement consécutif du générateur  $i$  entre l'heure "initial"  $h_0$  et l'heure d'arrêt au plus tôt  $h_0 + UT_i$ . Le terme 24 dans l'expression  $\min(h_0 + UT_i, 24)$  de la borne supérieure de la somme est utilisé pour traiter les cas où l'heure d'arrêt au plus tôt dépasserait la fin de la journée, car notre planification ne couvre que 24 heures.

$$\min(UT_i; 24 - h_0) \times A_{ih_0} \quad i \in I, h_0 \in H \quad (11)$$

Le terme à droite de l'inéquation (expression mathématique numéro 11) représente la durée minimale de fonctionnement consécutif du générateur  $i$ . Pour rappel, la variable de décision  $A_{ih}$  est égale à 1 si le générateur  $i$  démarre à l'heure  $h$  et à 0 sinon. Multiplier cette variable par  $UT_i$ , la durée minimale de fonctionnement consécutif du générateur  $i$  lorsqu'il est allumé, revient à dire que si le générateur  $i$  démarre, la durée minimale de fonctionnement consécutif sera égale à  $UT_i$ . S'il ne démarre pas, alors sa durée minimale de fonctionnement consécutif sera égale à 0. Comme pour l'expression mathématique numéro 10, le terme  $24 - h_0$  présent dans  $\min(UT_i, 24 - h_0)$  sert à gérer les cas où l'heure d'arrêt au plus tôt dépasserait la fin de la journée.

#### CONTRAINTE N°2 : DURÉE DE REFROIDISSEMENT MINIMAL DES GÉNÉRATEURS

$$\sum_{h=h_0}^{\min(h_0+DT_i;24)} (1 - X_{ih}) \geq \min(DT_i; 24 - h_0) \times S_{ih_0} \quad \forall i \in I, \forall h_0 \in H \quad (12)$$

La contrainte numéro 2 impose la durée de refroidissement des générateurs  $i$ . En effet, dans la réalité, un générateur d'énergie, une fois arrêté, possède une durée minimale pendant laquelle il ne peut être redémarré. Cette période est appelée durée de refroidissement.

L'expression mathématique de cette contrainte (expression numéro 12) est très similaire à celle qui impose la durée minimale de fonctionnement consécutif des générateurs  $i$  (expression numéro 9). Détaillons là afin de mieux la comprendre.

$$\sum_{h=h_0}^{\min(h_0+DT_i;24)} (1 - X_{ih}) \quad i \in I, h_0 \in H \quad (13)$$

Le terme à gauche de l'inéquation (expression mathématique numéro 13) représente la durée totale pendant laquelle le générateur  $i$  doit rester éteint entre l'heure initiale  $h_0$  et l'heure  $h_0 + DT_i$ . Ici,  $X_{ih}$  est une variable binaire qui prend la valeur 1 si le générateur  $i$  est allumé à l'heure  $h$ , et 0 s'il est éteint. Ainsi,  $1 - X_{ih}$  devient 1 lorsque le générateur est éteint et 0 lorsqu'il est allumé. En additionnant ces valeurs sur l'intervalle de temps allant de  $h_0$  à  $\min(h_0 + DT_i, 24)$ , on obtient la durée totale pendant laquelle le générateur est éteint dans cette période. Le terme 24 dans  $\min(h_0 + DT_i, 24)$  de la borne supérieure de la somme est utilisé pour traiter les cas où la durée de refroidissement dépasserait la fin de la journée, car notre planification ne couvre que 24 heures.

$$\min(DT_i; 24 - h_0) \times S_{ih_0} \quad i \in I, h_0 \in H \quad (14)$$

Le terme à droite de l'inéquation (expression numéro 14) représente la durée minimale pendant laquelle le générateur  $i$  doit rester éteint après avoir été arrêté. La variable de décision  $S_{ih_0}$  est égale à 1 si le générateur  $i$  s'arrête à l'heure  $h_0$ , et à 0 sinon. Multiplier cette variable par  $DT_i$ , la durée minimale de refroidissement du générateur  $i$ , signifie que si le générateur  $i$  s'arrête, il doit rester éteint pour au moins  $DT_i$  heures. S'il ne s'arrête pas, alors la durée minimale de refroidissement est nulle. Le terme  $\min(DT_i, 24 - h_0)$  gère les cas où la durée de refroidissement  $DT_i$  pourrait dépasser le temps restant de la journée, en limitant cette durée au temps restant jusqu'à la fin de la journée ( $24 - h_0$ ). Ainsi, cette partie de l'inéquation garantit que si le générateur  $i$  est arrêté, il restera éteint pendant au moins  $DT_i$  heures, ou jusqu'à la fin de la journée si  $DT_i$  dépasse le temps restant.

### CONTRAINTES N°3 : LIMITES (MAXIMALES ET MINIMALES) DE PUISSANCE DES GÉNÉRATEURS

$$P_{ih} \geq P_{\min_i} \times X_{ih} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (15)$$

$$P_{ih} \leq P_{\max_i} \times X_{ih} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (16)$$

Les inéquations 15 et 16 définissent les contraintes de puissance pour les générateurs. Elles garantissent que lorsque le générateur  $i$  est actif ( $X_{ih} = 1$ ), sa puissance  $P_{ih}$  reste dans les limites spécifiées : elle ne dépasse pas  $P_{\max_i}$  et ne descend pas en dessous de  $P_{\min_i}$ , comme détaillé dans la partie 2.2 et illustré dans la figure 3 par les zones rouges. De plus,  $X_{ih}$  est contraint à être 1 lorsque le générateur est en production effective, c'est-à-dire lorsque  $P_{ih}$  est supérieur à 0.

L'inégalité 15 requiert que  $P_{ih}$  soit au moins égal à  $P_{\min_i}$  lorsque le générateur est actif ( $X_{ih} = 1$ ). Si le générateur est éteint ( $X_{ih} = 0$ ),  $P_{ih}$  peut être nul ou supérieur à zéro, mais cette équation n'impose pas de contrainte.

Pour l'inégalité 16,  $P_{ih}$  ne peut pas excéder  $P_{\max_i}$  lorsque le générateur est actif ( $X_{ih} = 1$ ). Si le générateur est éteint ( $X_{ih} = 0$ ),  $P_{ih}$  peut être nul ou à son niveau minimum, mais il ne peut pas dépasser  $P_{\max_i}$ .

CONTRAINTES N°4 : VARIATIONS MAXIMALES DE LA PUISSANCE DES GÉNÉRATEURS  
ENTRE DEUX HEURES CONSÉCUTIVES

$$P_{ih-1} - P_{ih} \leq SD_i \times S_{ih} + RD_i \times X_{ih} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (17)$$

$$P_{ih} - P_{ih-1} \leq SU_i \times A_{ih} + RU_i \times X_{ih-1} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (18)$$

Les inégalités 17 et 18 définissent les variations de puissance des générateurs entre deux périodes consécutives  $h$  et  $h - 1$ . Chacune de ces inégalités traite deux situations spécifiques, que nous détaillerons pour expliquer en comment fonctionnent ces contraintes.

L'inégalité 17 contrôle la diminution de la puissance entre les périodes  $h - 1$  et  $h$ , exprimée par  $P_{ih-1} - P_{ih}$ . Deux situations sont régies par cette inégalité : d'abord, lors de l'arrêt d'un générateur où sa puissance chute à 0 MW, et ensuite, pour les baisses de puissance sans arrêt. Ces règles varient : un générateur doit réduire sa puissance sous sa puissance maximale d'arrêt  $SD_i$  pour s'arrêter, tandis que pour une diminution de puissance sans arrêt, la baisse doit respecter la réduction maximale  $RD_i$  lorsque le générateur est en fonctionnement. Les variables  $S_{ih}$  et  $X_{ih}$ , respectivement pour l'arrêt et l'état de fonctionnement des générateurs, garantissent que ces deux situations ne peuvent pas coexister, comme illustré dans la figure 5 ci-dessous, permettant ainsi deux formulations distinctes de l'inégalité.

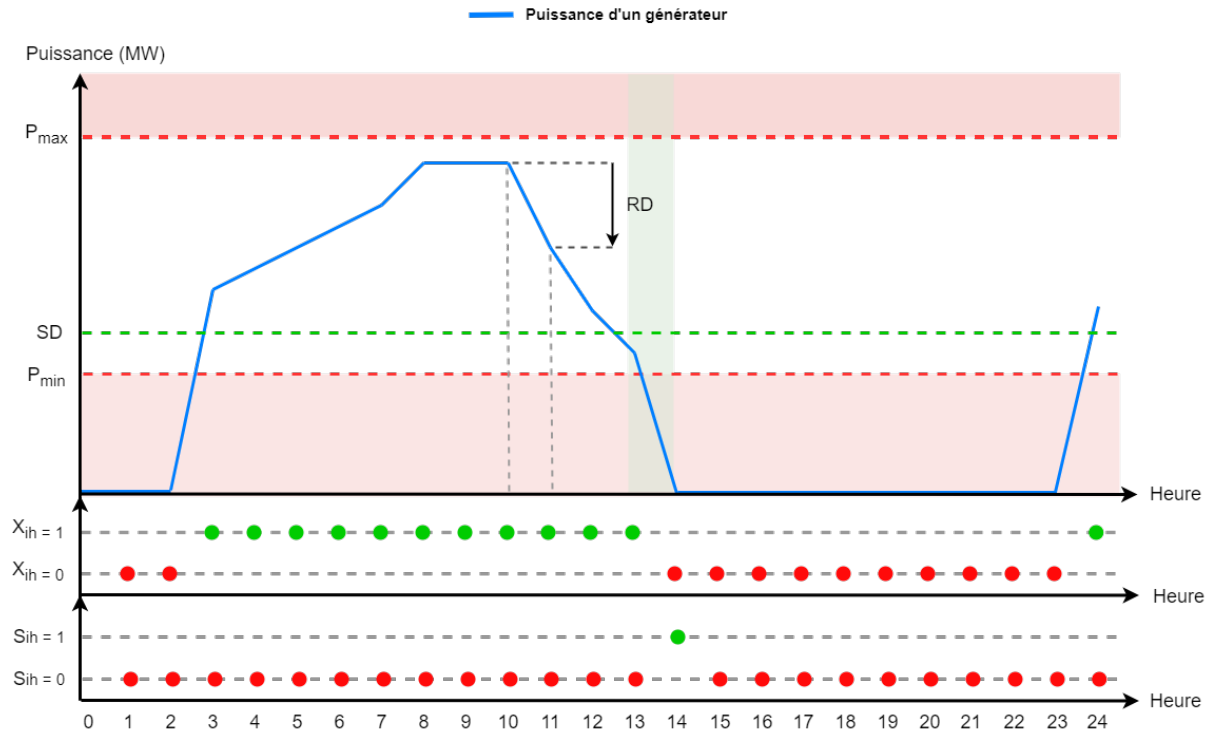


FIGURE 5 – Variables de décision lors de la diminution de la puissance d'un générateur

$$P_{ih-1} - P_{ih} \leq \begin{cases} SD_i \times S_{ih} & \text{pour une diminution de puissance avec arrêt} \\ RD_i \times X_{ih} & \text{pour une diminution de puissance sans arrêt} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (19)$$

$$P_{ih-1} - P_{ih} \leq \begin{cases} SD_i & \text{pour une diminution de puissance avec arrêt} \\ RD_i & \text{pour une diminution de puissance sans arrêt} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (20)$$

Ces expressions sont équivalentes à l'inégalité 17. Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque  $S_{ih} = 1$ , alors  $X_{ih} = 0$ , ce qui fait que la partie droite de l'inéquation devient  $SD_i$ . En revanche, lorsque  $X_{ih} = 0$ ,  $S_{ih} = 0$ , et la partie droite de l'inéquation devient  $RD_i$ . Ainsi, l'inégalité 17 nous permet de contraindre la diminution de puissance des générateurs dans les cas où ils s'arrêtent et où ils ne s'arrêtent pas.

L'inégalité 18 contrôle l'augmentation de la puissance entre les périodes  $h - 1$  et  $h$ , exprimée par  $P_{ih} - P_{ih-1}$ . Deux situations sont régies par cette inégalité : d'abord, lors du démarrage d'un générateur où sa puissance passe de 0 MW à une valeur comprise dans l'intervalle  $[P_{min_i}; SU_i]$ , et ensuite, pour les augmentations de puissance sans démarrage. Les règles varient : un générateur doit augmenter sa puissance en deçà de sa puissance maximale de démarrage  $SU_i$  pour démarrer, tandis que pour une augmentation de puissance sans démarrage, la hausse doit respecter l'augmentation maximale  $RU_i$  lorsque le générateur est en fonctionnement. Les variables  $A_{ih}$  et  $X_{ih-1}$ , représentant respectivement le démarrage et l'état de fonctionnement précédent des générateurs, garantissent que ces deux situations ne peuvent pas coexister, comme illustré dans la figure 6 ci-dessous, permettant ainsi deux formulations distinctes de l'inégalité. Contrairement à la contrainte pour la diminution de la puissance, la variable représentant l'état de fonctionnement d'un générateur est évaluée à l'heure  $h - 1$  plutôt qu'à l'heure  $h$  car, contrairement à la variable  $S_{ih}$  qui est égale à 1 lorsque le générateur s'arrête, la variable  $A_{ih}$  est égale à 1 lorsque le générateur démarre. Autrement dit, les variables  $A_{ih}$  et  $X_{ih}$  peuvent être égales à 1 au même moment. En utilisant  $X_{ih-1}$ , nous décalons effectivement les valeurs de  $X_{ih}$  d'une heure vers la droite.

$$P_{ih} - P_{ih-1} \leq \begin{cases} SU_i \times A_{ih} & \text{pour une augmentation de puissance avec démarrage} \\ RU_i \times X_{ih-1} & \text{pour une augmentation de puissance sans démarrage} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (21)$$

$$P_{ih} - P_{ih-1} \leq \begin{cases} SU_i & \text{pour une augmentation de puissance avec démarrage} \\ RU_i & \text{pour une augmentation de puissance sans démarrage} \end{cases} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (22)$$

Ces expressions sont équivalentes à l'inégalité 18. Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque  $A_{ih} = 1$ , alors  $X_{ih-1} = 0$ , ce qui fait que la partie droite de l'inégalité devient  $SU_i$ . En revanche, lorsque  $X_{ih-1} = 1$ ,  $A_{ih} = 0$ , et la partie droite de l'inégalité devient  $RU_i$ . Ainsi, l'inégalité 18 nous permet de contraindre l'augmentation de puissance des générateurs dans les

cas où ils démarrent et où ils ne démarrent pas.

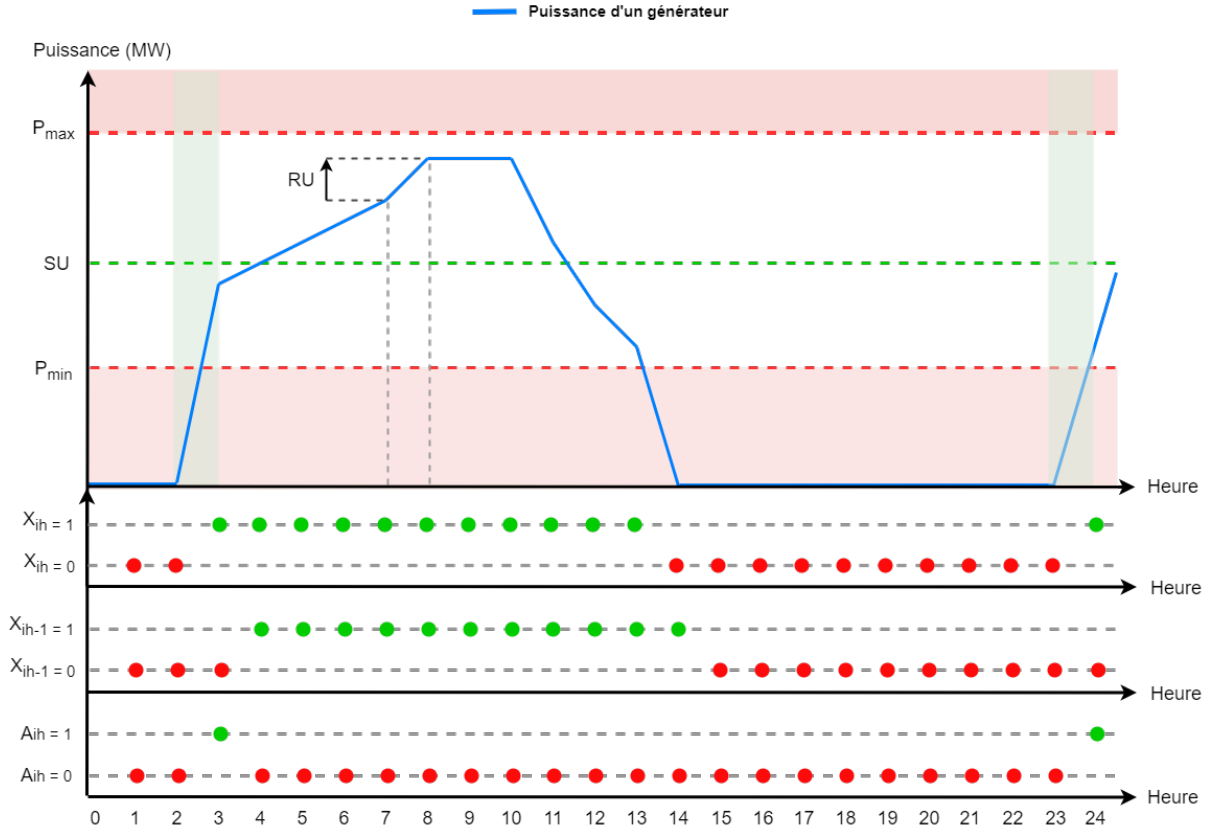


FIGURE 6 – Variables de décision lors de l'augmentation de la puissance d'un générateur

#### CONTRAINTES N°5 : GESTION DES CHANGEMENTS D'ÉTAT DES GÉNÉRATEURS

$$X_{ih} - X_{ih-1} = A_{ih} - S_{ih} \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (23)$$

$$A_{ih} + S_{ih-1} \leq 1 \quad \forall i \in I, \forall h \in H \quad (24)$$

Depuis le début de la modélisation mathématique de notre problème d'optimisation, nous utilisons les variables  $A_{ih}$  et  $S_{ih}$  pour représenter respectivement les démarrages et les arrêts des générateurs. Cependant, il est nécessaire de contraindre ces variables afin d'assurer le fonctionnement souhaité. Pour rappel, nous voulons que  $A_{ih}$  soit égal à 1 lorsque le générateur  $i$  démarre à l'heure  $h$  et à 0 le reste du temps. De même, nous souhaitons que  $S_{ih}$  soit égal à 1 lorsque le générateur  $i$  s'arrête à l'heure  $h$  et à 0 le reste du temps. Pour cela, nous utilisons deux contraintes spécifiques à la gestion des changements d'état. La première (expression numéro 23) permet de gérer les changements d'état et est la contrainte principale qui définit les propriétés des variables  $A_{ih}$  et  $S_{ih}$ . Cependant, une seconde contrainte est nécessaire pour résoudre une conséquence de la contrainte de changement d'état. En effet, cette dernière permettrait aux variables d'être égales à 1 simultanément, ce qui impliquerait que les générateurs démarrent et s'arrêtent en même temps, une situation impossible et indésirable. L'inégalité numéro 24 sert

donc de contrainte de non-simultanéité positive des changements d'état.

La contrainte de transition d'état garantit que les variables  $A_{ih}$  et  $S_{ih}$  représentent correctement les moments où un générateur démarre ou s'arrête. Cette contrainte, formulée par l'équation numéro 23, établit que la différence entre l'état de fonctionnement du générateur  $i$  à l'heure  $h$  et son état à l'heure précédente  $h - 1$  doit être égale à la différence entre les variables de démarrage  $A_{ih}$  et d'arrêt  $S_{ih}$ . Ainsi, cette formulation permet de distinguer quatre situations possibles :

Changement d'état	$X_{ih}$	$X_{ih-1}$	$X_{ih} - X_{ih-1}$	$A_{ih}$	$S_{ih}$	$A_{ih} - S_{ih}$
Aucun (éteint)	0	0	0	$S_{ih}$	$A_{ih}$	0
Démarrage	1	0	1	1	0	1
Arrêt	0	1	-1	0	1	-1
Aucun (allumé)	1	1	0	$S_{ih}$	$A_{ih}$	0

TABLE 5 – Variables de décision en fonction des changements d'état des générateurs avec la contrainte de gestion (23)

Le tableau ci-dessus présente les quatre situations possibles de changement d'état. On observe que les variables  $A_{ih}$  et  $S_{ih}$  prennent les valeurs attendues lors du démarrage ou de l'arrêt d'un générateur. Cependant, dans les cas où il n'y a aucun changement d'état, la contrainte actuelle force  $A_{ih}$  et  $S_{ih}$  à être égales. Nous souhaitons plutôt que ces deux variables soient toutes deux égales à 0 lorsque aucun changement d'état n'a lieu. Pour cela, nous pouvons introduire la contrainte de non-simultanéité positive des changements d'état, formulée par l'inégalité numéro 24. Cela nous permet de distinguer les situations suivantes :

Changement d'état	$X_{ih}$	$X_{ih-1}$	$X_{ih} - X_{ih-1}$	$A_{ih}$	$S_{ih}$	$A_{ih} - S_{ih}$
Aucun (éteint)	0	0	0	0	0	0
Démarrage	1	0	1	1	0	1
Arrêt	0	1	-1	0	1	-1
Aucun (allumé)	1	1	0	0	0	0

TABLE 6 – Variables de décision en fonction des changements d'état des générateurs avec les contraintes de gestion (23) et de non-simultanéité positive (24)

#### CONTRAINTES N°6 : OPÉRATIONS SUR LE MARCHÉ DE L'ÉNERGIE AVEC SATISFACTION DE LA DEMANDE

$$B_h \geq -PV \times \left( \sum_j (Avg\_Rep_{jh}) + \sum_i (P_{ih}) - D_h \right) \quad \forall h \in H \quad (25)$$

$$B_h \geq PA \times \left( D_h - \sum_j (Avg\_Rep_{jh}) - \sum_i (P_{ih}) \right) \quad \forall h \in H \quad (26)$$



Les contraintes représentées par les inégalités 25 et 26 sont essentielles dans notre modèle car elles garantissent la satisfaction de la demande par la production, ainsi que l'achat ou la vente d'énergie à chaque heure  $h$  de la journée. Pour mieux comprendre ces contraintes, transformons-les un petit peu en introduisant la variable  $b_h$  appartenant à l'ensemble  $\mathbb{R}$  qui représente la quantité d'énergie (en MWh) échangée sur le marché de l'énergie à l'heure  $h$ . L'expression mathématique ci-dessous peut être utile pour mieux comprendre son fonctionnement désiré.

$$b_h \begin{cases} < 0 & \text{en cas de d'achat d'énergie sur le marché} \\ = 0 & \text{en cas d'absence d'échange d'énergie sur le marché} \\ > 0 & \text{en cas de vente d'énergie sur le marché} \end{cases} \quad \forall h \in H \quad (27)$$

Pour modéliser cette quantité d'énergie échangée sur le marché, il nous suffit de calculer la différence entre la quantité d'énergie renouvelable et non-renouvelable produite à l'heure  $h$  et la demande en énergie à l'heure  $h$ . Cela nous donne l'équation suivante :

$$b_h = \sum_j (Avg\_Rep_{jh}) + \sum_i (P_{ih}) - D_h \quad \forall h \in H \quad (28)$$

Grâce à cette équation, nous avons modélisé l'échange d'énergie sur le marché. Cependant, ce n'est pas suffisant car les prix d'achat et de vente de l'énergie sur le marché diffèrent (voir Tableau 1). Il est impossible de convertir directement la quantité d'énergie échangée sur le marché  $b_h$  en valeur (dépense) monétaire des échanges d'énergie  $B_h$  à l'heure  $h$  avec une seule contrainte, en raison du caractère non linéaire du coefficient d'accroissement  $B_h$ . Ce coefficient est de 120 €/MWh (*PA*) lorsque  $b_h$  est négatif et de 15 €/MWh (*PV*) lorsqu'il est positif.

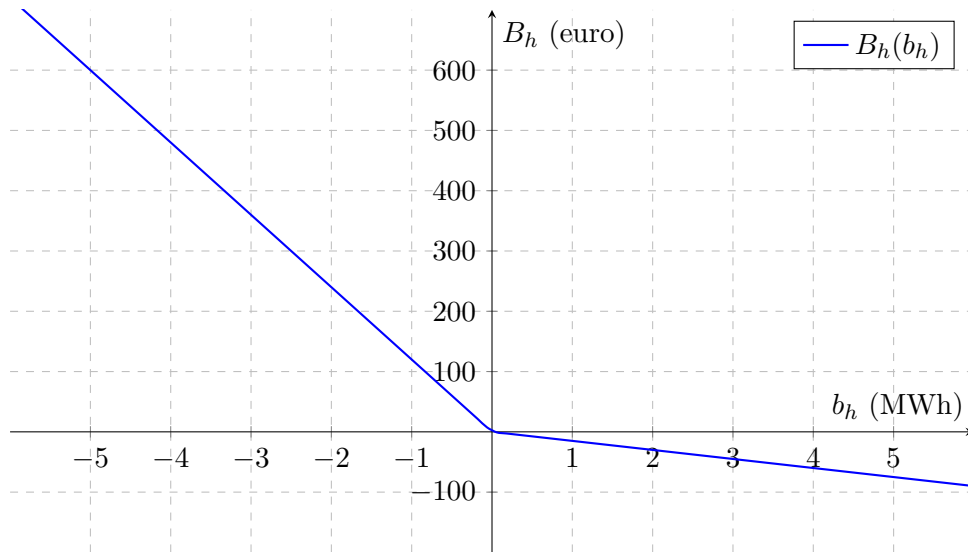


FIGURE 7 – Évolution souhaitée de  $B_h$  en fonction de  $b_h$

Pour réaliser cela, nous devons créer deux contraintes : la première régira le fonctionnement de  $B_h$  lorsque  $b_h$  est négatif et la seconde, son fonctionnement lorsque  $b_h$  sera positif. Ces deux contraintes sont représentées par les inégalités 25 ( $b_h < 0$ ) et 26 ( $b_h > 0$ ). Simplifions les pour plus de clareté.

$$B_h \geq -PV \times b_h \quad \forall h \in H \quad (29)$$

$$B_h \geq PA \times -b_h \quad \forall h \in H \quad (30)$$

Nous tenons à préciser que nous avons décidé d'écrire les contraintes de cette façon car cela montre plus intuitivement que  $B_h$  est négatif quand nous sommes en situation de vente, et positif quand nous sommes en situation d'achat (à l'inverse de  $b_h$ ).

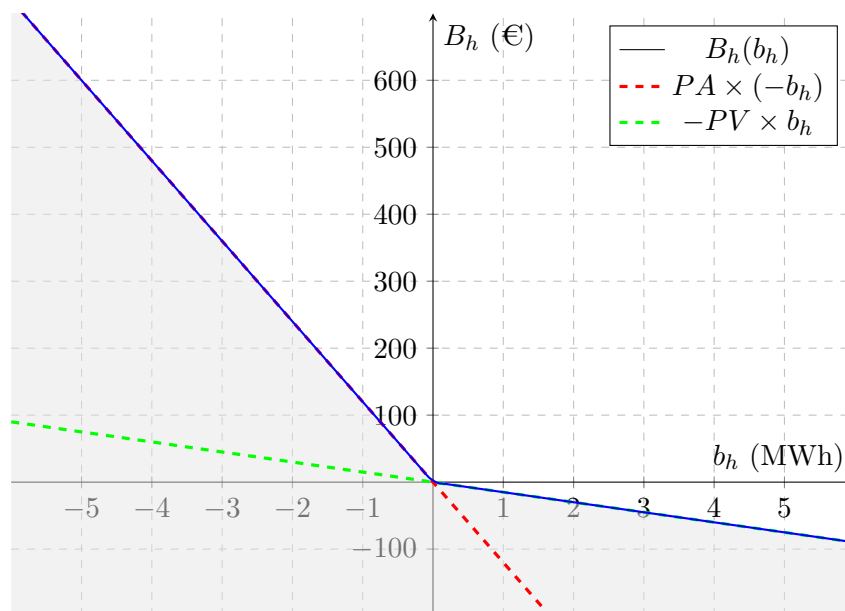


FIGURE 8 – Graphique de  $B_h$ ,  $PA \times (-b_h)$  et  $-PV \times b_h$  en fonction de  $b_h$

Grâce aux deux contraintes, nous pouvons déterminer que  $B_h$  prendra une valeur dans la zone non grisée de la figure ci-dessus. Plus précisément,  $B_h$  se situera sur la courbe bleue, aux extrémités de cette zone grisée. Cela est dû à la nature de notre fonction objectif (expression mathématique numéro 1), qui inclut  $B_h$  comme un coût à minimiser. En conséquence, la fonction objectif tendra à pousser  $B_h$  vers les valeurs minimales possibles en fonction de  $b_h$ .

### 3.3 Résolution du problème

Maintenant que notre modèle mathématique est entièrement défini, nous pouvons passer à sa résolution. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser la bibliothèque PuLP disponible sous Python. PuLP est particulièrement utile pour formuler et résoudre des problèmes d'optimisation. Elle intègre un algorithme de résolution par défaut basé sur le simplexe, en combinaison avec

d'autres techniques. Il offre également la possibilité d'utiliser d'autres solveurs externes (comme GUROBI, GLPK, CPLEX, etc.) via des API. Pour notre étude, nous utiliserons l'algorithme de résolution par défaut inclus dans PuLP. Les codes présents dans ce rapport sont également présents sur le Google Collab du projet accessible via ce lien :

<https://colab.research.google.com/EnergyDistribution>

#### CODE PYTHON POUR MODÉLISATION ET RÉOLUTION DU MODÈLE DÉTERMINISTE :

```
# Dans ce code, nous considerons que les donnees sont deja importees.

# Importation de la librairie PuLP
from pulp import *

# Creation des variables de decisions
X = LpVariable.dicts("X", (I, H), cat=LpBinary)
A = LpVariable.dicts("A", (I, H), cat=LpBinary)
S = LpVariable.dicts("S", (I, H), cat=LpBinary)
P = LpVariable.dicts("P", (I, H), lowBound=0, cat=LpContinuous)
B = LpVariable.dicts("B", (H), cat=LpContinuous)

# Initialisation du probleme
prob = LpProblem("EnergyDistributionProblem", LpMinimize)

# Fonction objective
prob += lpSum(lpSum(X[i][h] * CU[i] + A[i][h] * CD[i] + CP[i] * P[i][h]
                    for i in I) + B[h] for h in H[1:]))

# Contraintes 0 : Initialisation des generateurs a l'heure 0
for i in I:
    # Initialisation des X
    X[i][0] = E[i]
    # Initialisation des P (hors des contraintes 3 car h = 0 n'est pas dans H)
    prob += P[i][0] >= Pmin[i] * X[i][0]
    prob += P[i][0] <= Pmax[i] * X[i][0]

# Contrainte 1 : Duree minimal de fonctionnement consecutif des generateurs
for i in I:
    for h0 in H:
        prob += lpSum(X[i][h] for h in range(h0, min(h0+UT[i], 24))) >= min(UT[i],
        24-h0) * A[i][h0]

# Contrainte 2 : Duree de refroidissement minimal des generateurs
for i in I:
    for h0 in H:
        prob += lpSum(1 - X[i][h] for h in range(h0, min(h0 + DT[i], 24))) >= min
        (DT[i], 24-h0) * S[i][h0]

# Contraintes 3 : Limites (maximales et minimales) de puissance des generateurs
for i in I:
    for h in H:
        # Limite minimale
        prob += P[i][h] >= Pmin[i] * X[i][h]
        # Limite maximale
        prob += P[i][h] <= Pmax[i] * X[i][h]
```

```

# Contraintes 4 : Variations maximales de la puissance des generateurs entre deux
# heures consecutives
for i in I:
    for h in H:
        # Limite de diminution
        prob += P[i][h-1] - P[i][h] <= SD[i] * S[i][h] + RD[i] * X[i][h]
        # Limite d'augmentation
        prob += P[i][h] - P[i][h-1] <= SU[i] * A[i][h] + RU[i] * X[i][h-1]

# Contraintes 5 : Gestion des changements d'etats des generateurs
for i in I:
    for h in H:
        # Changements d'etats
        prob += X[i][h] - X[i][h-1] == A[i][h] - S[i][h]
        # Non-simultaneite positive des changements d'etats
        prob += A[i][h] + S[i][h] <= 1

# Contraintes 6 : Operations sur le marche de l'energie avec satisfaction de la
# demande
for h in H:
    prob += B[h] >= -PV * (lpSum(Avg_Rep[j][h] for j in J) + lpSum(P[i][h] for i
    in I) - D[h])
    prob += B[h] >= PA * (D[h] - lpSum(Avg_Rep[j][h] for j in J) - lpSum(P[i][h]
    for i in I))

# Resolution du probleme
prob.solve()

# Fonction pour verifier et extraire la valeur de la variable
def get_var_value(var):
    return var.varValue if hasattr(var, 'varValue') else var

# Extraction des resultats
result = {
    "Statut": LpStatus[prob.status]
    "Valeur optimale": value(prob.objective)
    "h": H,
    "B": [get_var_value(B[h]) for h in H],
    "X": {i: [get_var_value(X[i][h]) for h in H] for i in I},
    "A": {i: [get_var_value(A[i][h]) for h in H] for i in I},
    "S": {i: [get_var_value(S[i][h]) for h in H] for i in I},
    "P": {i: [get_var_value(P[i][h]) for h in H] for i in I}
}

```

### 3.4 Analyse des résultats

Cette section se consacre à l'examen des résultats obtenus à partir de notre modèle déterministe. Après avoir défini et implémenté notre modèle mathématique en utilisant PuLP, nous avons résolu le problème d'optimisation pour obtenir des solutions concrètes. L'objectif de ces analyses est de vérifier la validité de notre modèle, d'évaluer la performance des générateurs dans différentes conditions et de comprendre les implications des contraintes appliquées. Nous explorerons les résultats en termes de production d'énergie et de coût grâce aux échanges d'énergie sur le marché.

Avant toute chose, il est important de noter que le modèle a trouvé la solution optimale au problème en 2,2 secondes. Le coût optimal de production d'énergie s'élève à 415 832,35 euros.

### 3.4.1 Analyse de la production d'énergie

La première étape de notre analyse concerne la production d'énergie, qui constitue le cœur du problème que nous avons résolu. En examinant la production d'énergie, nous pouvons vérifier si la demande a bien été satisfaite, validant ainsi une des contraintes essentielles de notre modèle. De plus, cette analyse nous permettra de comprendre la répartition de la production entre les différents générateurs et d'évaluer la stratégie d'achat et de vente d'énergie adoptée par notre modèle.

Tout d'abord, examinons si notre modèle satisfait bien la demande et analysons la répartition de la production entre les différents générateurs, comme illustré par le graphique ci-dessous.

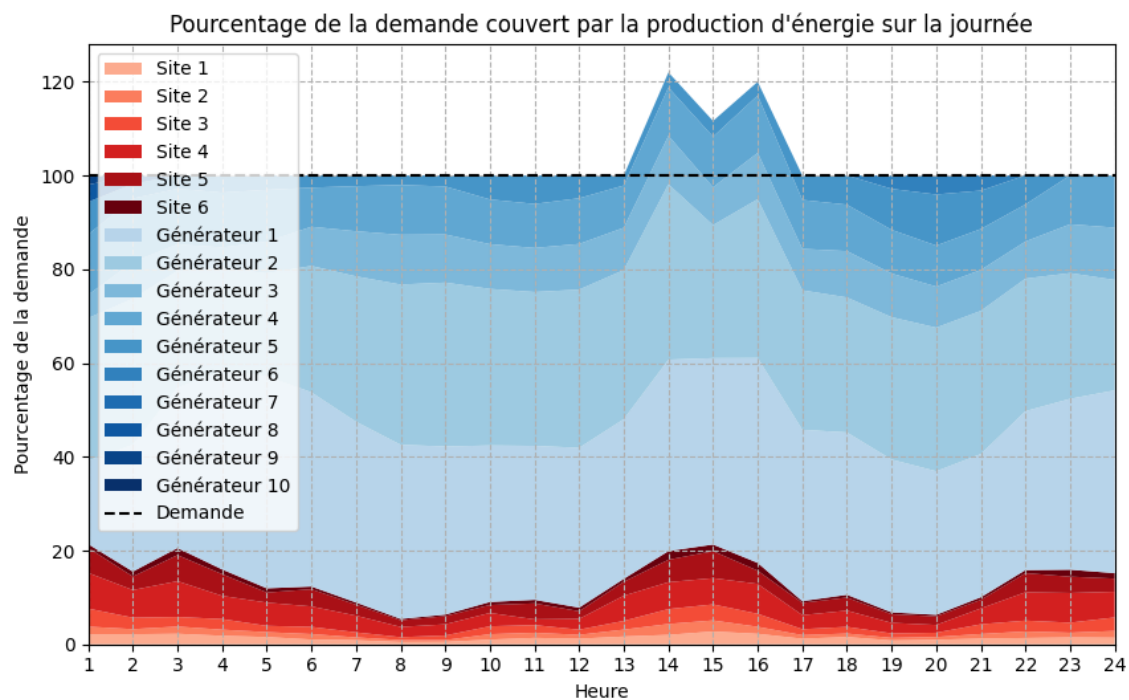


FIGURE 9 – Pourcentage de la demande couvert par la production d'énergie sur la journée

Heure	1	2	3	4	...	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$B_h$	0	0	0	0	...	0	0	0	-2557,8	-1293,945	-2570,355	0	0	0	42,96	0	0	0	0

TABLE 7 – Valeurs de  $B_h$  en fonction de l'heure de la journée

Dans ce graphique, les zones correspondant aux sites de production d'énergie renouvelable sont en rouge, tandis que les générateurs sont en bleu. Une ligne pointillée noire représente la demande. Comme nous pouvons le constater sur le tableau 7, la demande est satisfaite pour chaque heure de la journée (car  $B_h = 0$ ), sauf à 20h, où le modèle a préféré acheter pour 42.96 € d'énergie (0,358 MWh) plutôt que de produire de l'énergie pour répondre à la demande. On observe également que le modèle a choisi de vendre pour 6442,1 € d'énergie (429,47 MWh) entre 14h et 16h. Nous remarquons aussi que plus le numéro du générateur est faible, plus sa contribution à la production est élevée, et inversement pour les sites de production d'énergie renouvelable. Analysons pourquoi en examinant les figures 10 et 11.

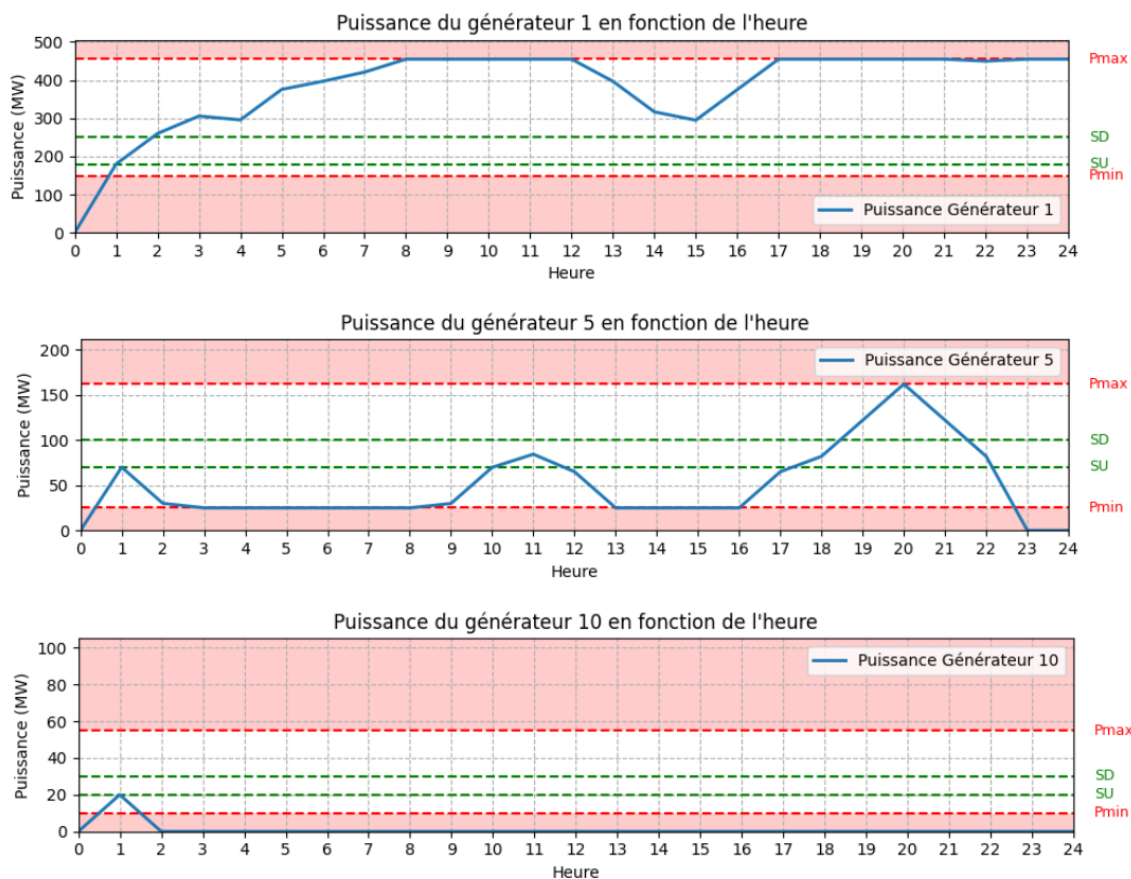


FIGURE 10 – Puissance des générateurs 1, 5 et 10 au cours de la journée

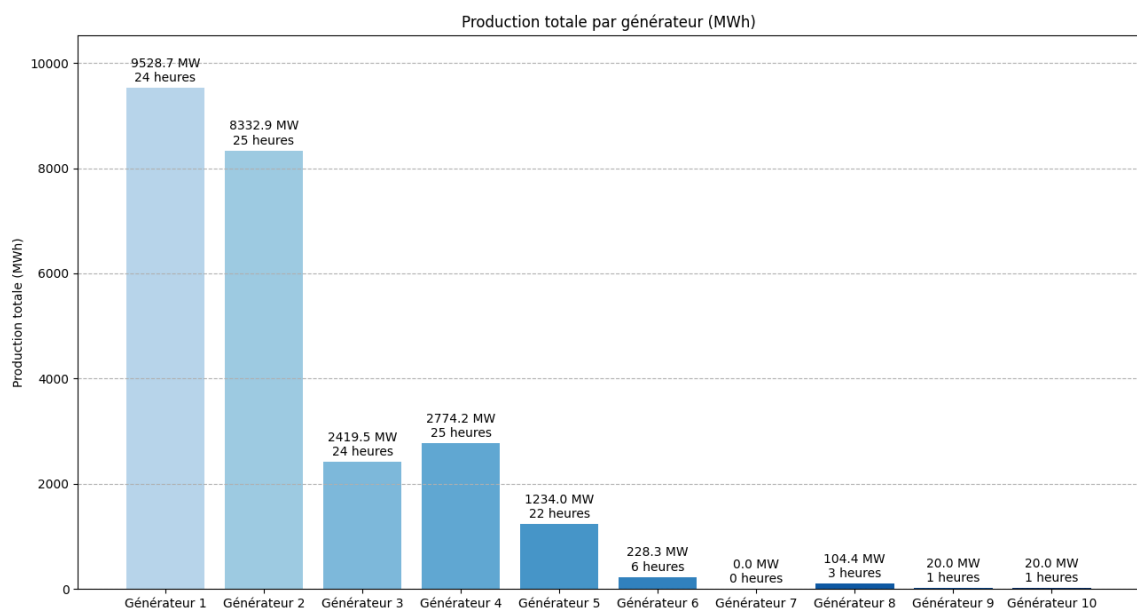


FIGURE 11 – Production totale d'énergie par générateur

Les figures 10 et 11 nous permettent de mieux comprendre la stratégie adoptée par notre modèle pour minimiser les coûts. Sur la figure 10, nous observons l'évolution de la production d'énergie des générateurs 1, 5 et 10 tout au long de la journée. Au-delà du respect des contraintes de production, nous remarquons que le générateur 1 maintient une production constante tout au long de la journée, bien en deçà de sa puissance minimale de production  $P_{\min}$ . En revanche, les autres générateurs présentent un comportement différent. Par exemple, le générateur 5 fonctionne principalement au minimum de sa capacité, augmentant sa production à des moments spécifiques comme entre 17h et 22h pour combler les creux de production sans nécessiter d'arrêt, minimisant ainsi les coûts de démarrage  $CD$ . En revanche, le générateur 10 produit rarement, n'intervenant que lorsque nécessaire pour répondre à la demande, comme le montre la figure 11. On constate également que les générateurs de rang inférieur produisent beaucoup d'énergie et restent allumés la plupart du temps, tandis que les générateurs de rang supérieur sont rarement activés.

Cependant, la question se pose : pourquoi le modèle a-t-il décidé d'acheter de l'énergie à 20h malgré la disponibilité de capacité de production chez les générateurs de rang inférieur ? À l'inverse, pourquoi a-t-il surproduit entre 14h et 16h alors que les générateurs de rang supérieur n'étaient pas au minimum de leur capacité de production ? Pour mieux comprendre ces décisions, il est essentiel d'analyser l'impact des échanges d'énergie sur le marché sur les coûts totaux et d'évaluer comment ces coûts auraient été affectés si aucun échange n'avait eu lieu.

### 3.4.2 Analyse des échanges sur le marché de l'énergie

Pour analyser ces échanges sur le marché de l'énergie et pour en comprendre la logique, regardons les coûts d'allumage, de production et de fonctionnement des générateurs.

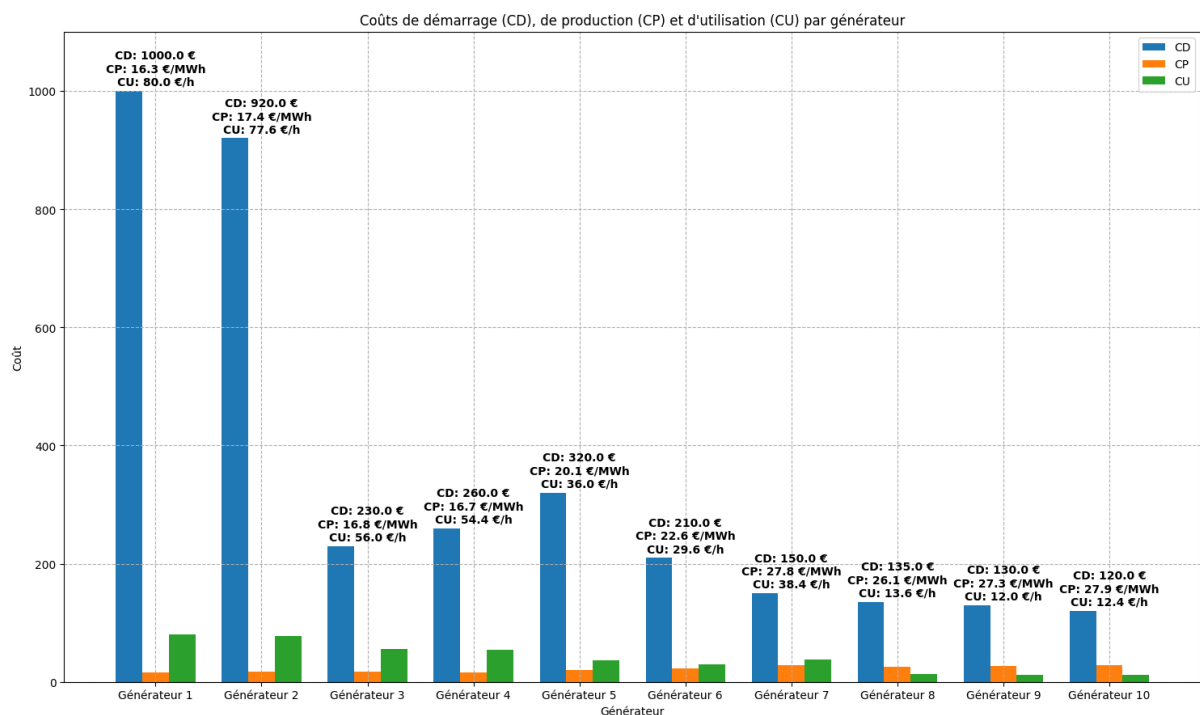


FIGURE 12 – Coûts de démarrage, de production et d'utilisation des générateurs

Générateur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$CD$ (€)	1000	920	230	260	320	210	150	135	130	120
$CP$ (€/MWh)	16,3	17,4	16,8	16,7	20,1	22,6	27,8	26,1	27,3	27,9
$CU$ (€/h)	80	77,6	56	54,4	36	29,6	38,4	13,6	12	12,4

TABLE 8 – Coûts de démarrage, de production et d'utilisation des générateurs

Comme illustré sur la figure 12 et dans le tableau 8, les coûts de démarrage et d'utilisation décroissent en fonction du rang du générateur, tandis que les coûts de production augmentent avec ce rang. Cela reflète la réalité où un générateur plus puissant nécessite plus de ressources pour être démarré et utilisé, mais bénéficie d'un coût de production unitaire réduit grâce à des économies d'échelle.

Passons maintenant à l'analyse des coûts globaux si aucun échange d'énergie n'avait eu lieu. Examinons d'abord le cas de l'achat de 0,358 MWh à 20h pour un montant total de 42,96 €. Pour évaluer le coût potentiel de production de cette énergie, nous devons d'abord connaître l'état des générateurs à 20h et déterminer s'ils disposaient de la capacité résiduelle nécessaire pour produire cette quantité d'énergie. Pour cela, regardons le tableau 9 ci-dessous.

Générateur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_{i20}$	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
En capacité de produire	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

TABLE 9 – État et capacité de produire 0,358 MWh des générateurs à 20h

Nous observons que seuls les générateurs 6, 7, 8, 9 et 10 ont la capacité de produire les 0,358 MWh nécessaires pour répondre à la demande. Analysons à présent les coûts si nous choisissons de produire avec ces générateurs. Nous ne considérons pas la possibilité d'utiliser plusieurs générateurs simultanément car la somme des coûts de démarrage et d'utilisation serait nettement supérieure aux coûts de production. Nous tenons également à rappeler

Générateur	6	7	8	9	10
$CD$ (€)	0	150	135	130	120
$CP * 0,358$ (€)	8,0908	9,9524	9,3438	9,7734	9,9882
$CU$ à 20h (€)	29,6	38,4	13,6	12	12,4
Coût total (€)	37,6908	198,3524	157,9438	151,7734	142,3882

TABLE 10 – Coût de production de 0,358 MWh des générateurs 6, 7, 8, 9 et 10 à 20h

Ce tableau met en évidence que le générateur 6 est le seul capable de produire les 0,358 MWh nécessaires à un coût inférieur à celui du marché. La différence entre le coût de production du générateur 6 et le prix d'achat sur le marché s'élève à 5,2692 €. Cette observation suscite des interrogations quant au choix du modèle utilisé. Pour approfondir notre analyse, examinons de plus près la production d'énergie du générateur 6 au cours de la journée, représentée par la figure 13, ainsi que les contraintes qui s'appliquent sur cette dernière.



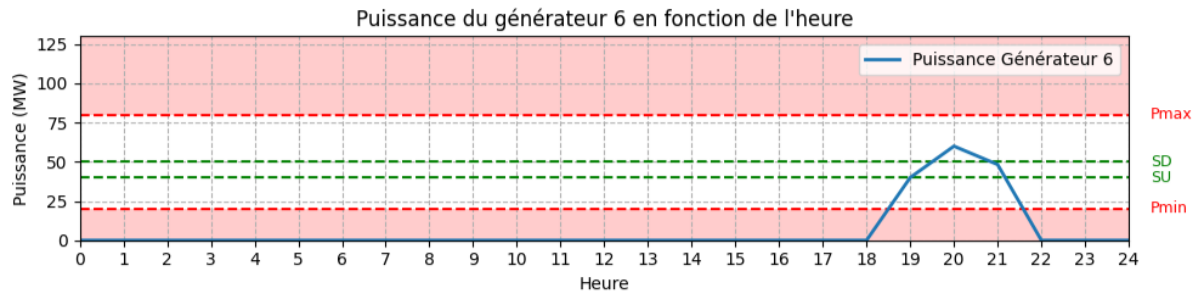


FIGURE 13 – Puissance du générateur 6 au cours de la journée

En examinant la production du générateur 6 tout au long de la journée, nous constatons qu'il fonctionne de manière efficace. Cependant, une question se pose : pourquoi le générateur 6 n'a-t-il pas augmenté sa production à 20h pour économiser sur l'achat d'énergie ? Pour répondre à cette interrogation, examinons la contrainte d'augmentation de puissance entre 19h et 20h. À 19h, la puissance du générateur est de 40 MW, sa capacité maximale de démarrage  $SU$ . À 20h, sa puissance atteint 60 MW, ce qui demeure insuffisant pour satisfaire la demande. Pour éviter l'achat sur le marché, il aurait fallu augmenter la puissance de 0,358 MW. Cependant, la contrainte d'augmentation maximale de puissance par heure  $RU$  pour ce générateur est de 20 MW/h. En passant de 40 MW à 19h à 60 MW à 20h, nous avons déjà atteint cette augmentation maximale sur cette période. Par conséquent, il nous était impossible d'augmenter davantage la puissance du générateur. Une autre possibilité aurait été de démarrer le générateur plus tôt, mais cela aurait prolongé sa durée de fonctionnement d'une heure, augmentant ainsi le coût de production des 0,358 MWh d'au moins 29,6 euros (coût d'utilisation  $CU$ ).

La vente d'énergie entre 14h et 16h est également influencée par les contraintes de variation de puissance des générateurs. Cela est clairement démontré en observant le prix minimum de production d'un MWh, détenu par le générateur 1 à 16,3 euros/MWh, un coût supérieur au prix de vente du MWh sur le marché, ce qui n'est pas rentable. Cette décision découle de la nécessité pour les générateurs de répondre à une demande initialement élevée qui a fortement chuté entre 14h et 16h (comme confirmé par la figure 4). Cette diminution rapide de la demande n'a pas permis aux générateurs de réduire leur production de manière opportune en raison des contraintes imposées sur la variation de la puissance des générateurs entre deux heures consécutives.

En conclusion de nos analyses sur le modèle déterministe, nous avons observé comment celui-ci a permis de planifier efficacement la production d'énergie tout en minimisant les coûts associés. Grâce à une optimisation rigoureuse et à une prise en compte précise des contraintes, le modèle a réussi à répondre de manière satisfaisante à la demande énergétique. Ces analyses ont également permis de mettre en lumière les raisons sous-jacentes des échanges d'énergie sur le marché, tout en mettant en évidence les compromis et les contraintes auxquels le modèle est confronté pour minimiser les coûts tout en respectant les exigences opérationnelles des générateurs. Toutefois, pour une vision plus robuste et réaliste de la gestion énergétique, il est pertinent d'explorer maintenant le modèle stochastique. Celui-ci prendra en compte l'incertitude des paramètres, offrant ainsi une perspective plus adaptée aux aléas météorologiques. Cette approche permettra d'évaluer la résilience du système énergétique face à l'incertitude, offrant ainsi une meilleure préparation aux scénarios imprévus.

## 4 Modèle Stochastique

Après avoir conclu nos analyses sur le modèle déterministe, qui a permis de planifier efficacement la production d'énergie en minimisant les coûts tout en respectant les exigences opérationnelles, nous devons maintenant aborder l'incertitude inhérente à la production d'énergie renouvelable. Cette section du rapport explore l'approche stochastique, une méthode qui intègre les variabilités et incertitudes dans la gestion optimale de la production d'énergie.

Une approche stochastique consiste à modéliser les incertitudes en utilisant des distributions de probabilités, ce qui permet de simuler différentes réalités possibles et d'optimiser les décisions en fonction de l'ensemble de ces simulations. Contrairement au modèle déterministe qui repose sur des prévisions fixes, le modèle stochastique reconnaît que la production d'énergie renouvelable peut fluctuer autour d'une moyenne prévue (*Avg\_Rep*) selon une distribution normal  $\mathcal{N}(Avg\_Rep_j, 0.2^2)$ . En intégrant ces variations dans notre modèle, nous pouvons mieux anticiper et réagir aux imprévus.

Dans cette partie, nous détaillerons les paramètres et variables décisionnelles spécifiques au modèle stochastique, ainsi que les équations mathématiques qui décrivent les contraintes et la fonction objectif adaptées pour inclure les incertitudes. Nous analyserons également les résultats de notre modèles pour différents scénarios. L'objectif est de développer une gestion énergétique plus résiliente et réaliste, capable de faire face aux fluctuations de la production renouvelable tout en maintenant une optimisation efficace des coûts et de la production.

### 4.1 Paramètres et variables de décision

Les paramètres introduits précédemment et expliqués dans la section sur le modèle déterministe ne seront pas réitérés ici, car ils demeurent inchangés. Toutefois, nous devons ajouter les paramètres  $K$  et  $k$ , représentant respectivement la liste des simulations servant à modéliser les variations possibles de la production d'énergie renouvelable et le numéro de la simulation. Ces paramètres introduits dans le modèle stochastique jouent un rôle crucial dans la gestion de l'incertitude associée à la production d'énergie renouvelable. Chaque simulation, identifiée par  $k$ , génère une valeur aléatoire, noté  $Reg_{kjh}$ , selon une distribution normale spécifiée  $\mathcal{N}(Avg\_Rep_j, 0.2^2)$ . Cette valeur aléatoire reflète une estimation de la production d'énergie renouvelable pour le scénario  $k$ . Il s'agit également d'un nouveau paramètre de notre modèle. Nous y reviendrons dans la partie liée à la fonction objective et dans celle liée aux contraintes pour expliquer plus en détails le fonctionnement de ces paramètres.

Concernant les variables de décisions, le passage d'un modèle déterministe à un modèle stochastique implique des ajustements au niveau ces dernières. Pour comprendre ces adaptations, il est crucial de saisir un concept fondamental des modèles stochastiques : les variables de première et de seconde instance.

Les variables de première instance, également appelées variables "ici et maintenant", sont celles pour lesquelles les décisions doivent être prises avant que l'incertitude ne se révèle. Ces décisions sont prises sans connaissance précise des réalisations futures des variables aléatoires. Elles incluent typiquement les décisions stratégiques ou planifiées, telles que l'allumage des générateurs et les niveaux de production initialement programmés.

Les variables de seconde instance, ou variables "attendre et voir", sont celles qui permettent des ajustements après que les incertitudes se sont révélées. Ces décisions sont prises en réponse aux réalisations effectives des variables aléatoires, permettant ainsi une certaine flexibilité opérationnelle. Elles incluent les ajustements de production en temps réel, les achats ou ventes d'énergie supplémentaires, et d'autres décisions opérationnelles prises une fois que les variations de la production d'énergie renouvelable sont connues.

En intégrant ces variables de première et de seconde instance, le modèle stochastique peut mieux gérer les incertitudes et optimiser les décisions de manière plus réaliste et robuste. La formulation mathématique des contraintes et de la fonction objectif sera donc adaptée pour inclure cette distinction, permettant une gestion dynamique et réactive face aux fluctuations de la production d'énergie renouvelable.

Notre problème consiste à planifier la production d'énergie de nos générateurs sur une période d'une journée afin de répondre à la demande. Comme vu précédemment, les variables impliquant la planification sont considérées comme des variables de première instance. Dans notre cas, cela concerne les variables liées à la production d'énergie. Plus précisément, les variables de première instance de notre modèle sont : l'état du générateur  $i$  à l'heure  $h$  ( $X_{ih}$ ), le démarrage et l'arrêt du générateur  $i$  à l'heure  $h$  ( $S_{ih}$  et  $A_{ih}$ ), ainsi que la puissance du générateur  $i$  à l'heure  $h$  ( $P_{ih}$ ). La variable représentant le montant des échanges d'énergie sur le marché à l'heure  $h$  ( $B_h$ ) est, quant à elle, une variable de seconde instance, car l'achat et la vente sont des processus instantanés utilisés pour satisfaire la demande en réaction à la production. Nous obtenons ainsi les variables de décision suivantes.

Notation	Définition	Unité
<b>Variables de première instance</b>		
<i>Variables booléennes</i>		
$X_{ih}$	État du générateur $i$ à l'heure $h$	
$A_{ih}$	Démarrage du générateur $i$ à l'heure $h$	
$S_{ih}$	Arrêt du générateur $i$ à l'heure $h$	
<i>Variable continue</i>		
$P_{ih}$	Puissance du générateur $i$ à l'heure $h$	MW
<b>Variables de seconde instance</b>		
<i>Variable continue</i>		
$B_{hk}$	Montant des échanges d'énergie sur le marché à l'heure $h$ pour la simulation $k$	€

TABLE 11 – Variables de décision du modèle stochastique

Le paramètre  $k$  apparaît comme un indice dans la variable  $B_{hk}$ . En effet, les variables de seconde instance, telles que  $B_{hk}$ , sont ajustées en fonction des incertitudes une fois qu'elles sont révélées, dépendant ainsi du scénario de simulation  $k$ . En revanche, les variables de première instance sont décidées avant que les incertitudes ne soient connues et ne dépendent donc pas de la simulation. L'idée sous-jacente est de faire tourner un grand nombre de simulations afin de déterminer les meilleures valeurs pour les variables de première instance, optimisant ainsi la

fonction objectif du modèle.

Dans la sous-partie consacrée à l'analyse de notre modèle stochastique, nous explorerons également le fonctionnement de notre modèle en envisageant  $P_{ih}$  comme une variable de seconde instance (cette démarche est présente uniquement à des fins expérimentales).

## 4.2 Formulation du modèle stochastique

Maintenant que nous avons détaillé les différents paramètres et variables de décision, nous allons formuler le modèle mathématique stochastique. Dans cette formulation, nous nous concentrerons principalement sur les différences par rapport au modèle déterministe déjà présenté. Nous intégrerons la fonction objectif adaptée ainsi que les contraintes modifiées pour tenir compte de l'incertitude liée à la production d'énergie renouvelable.

### 4.2.1 Fonction objectif

La fonction objectif dans un modèle stochastique est conçue pour minimiser les coûts de production en prenant en compte les incertitudes liées à la production d'énergie renouvelable. Contrairement à un modèle déterministe, où les décisions sont basées sur des prévisions fixes, le modèle stochastique considère une gamme de scénarios possibles pour la production d'énergie renouvelable. Cela permet une optimisation plus robuste face aux variations et incertitudes.

Dans notre modèle stochastique, la fonction objectif est formulée comme suit :

$$\min \left( \sum_H \left( \sum_I (X_{ih} \times CU_i + P_{ih} \times CP_i + A_{ih} \times CD_i) + \frac{1}{K} \sum_K (B_{kh}) \right) \right) \quad (31)$$

La différence clé dans cette fonction objectif stochastique par rapport à celle du modèle déterministe (expression mathématique 1) est l'introduction de la moyenne des coûts des échanges d'énergie sur le marché sur tous les scénarios ( $\frac{1}{K} \sum_K B_{kh}$ ). Ce terme capture l'incertitude en moyennant les coûts associés à différents scénarios possibles de production d'énergie renouvelable.

En optimisant cette fonction, nous cherchons à minimiser les coûts totaux attendus, intégrant ainsi les variations possibles dans la production d'énergie et fournissant une solution plus résiliente et adaptative aux incertitudes.

### 4.2.2 Contraintes

Dans le modèle stochastique, la majorité des contraintes restent identiques à celles du modèle déterministe. Cependant, il y a une exception notable : les contraintes liées aux échanges d'énergie sur le marché. Ces contraintes, qui sont les contraintes numéro 6 dans notre formulation, subissent une modification pour tenir compte des incertitudes inhérentes à la production d'énergie renouvelable.

$$B_{kh} \geq -PV \times \left( \sum_j (\text{Rep}_{kjh}) + \sum_i (P_{ih}) - D_h \right) \quad \forall k \in K, \forall h \in H \quad (32)$$

$$B_{kh} \geq PA \times \left( D_h - \sum_j (\text{Rep}_{kjh}) - \sum_i (P_{ih}) \right) \quad \forall k \in K, \forall h \in H \quad (33)$$

La principale différence entre les contraintes des deux modèles réside dans la gestion des variables de seconde instance et l'introduction des simulations. Dans le modèle déterministe, les contraintes sur les échanges d'énergie ( $B_h$ ) sont basées sur la production d'énergie renouvelable moyenne ( $Avg\_Rep_{jh}$ ). En revanche, dans le modèle stochastique, ces contraintes sont adaptées pour chaque scénario de simulation ( $k$ ), en fonction de la production réelle simulée ( $\text{Rep}_{kjh}$ ).

Cette adaptation est cruciale car elle permet au modèle de répondre de manière flexible et appropriée à une variété de scénarios possibles, chacun représentant une réalisation différente des incertitudes liées à la production d'énergie renouvelable. En incluant toutes les simulations  $k$  dans les contraintes, le modèle s'assure que les décisions prises (notamment les variables de première instance comme  $P_{ih}$ ) sont robustes et efficaces pour toutes les conditions envisagées, minimisant ainsi les coûts tout en respectant les contraintes opérationnelles.

Ces modifications permettent donc au modèle stochastique de mieux capturer et gérer les incertitudes, optimisant ainsi la planification de la production d'énergie tout en assurant la satisfaction de la demande dans un contexte incertain.

### 4.3 Résolution du problème

Maintenant que nous avons terminé de modéliser notre problème en adaptant le modèle déterministe à un modèle stochastique, nous pouvons passer à sa résolution. Pour cela, nous utiliserons à nouveau Python et la bibliothèque PuLP, mais avec une approche légèrement différente. En effet, cette fois, nous allons créer une fonction pour résoudre notre modèle. Cette démarche nous permettra de tester facilement notre modèle pour différents nombres de simulations, afin d'évaluer son comportement et sa performance dans divers scénarios.

#### CODE PYTHON POUR MODÉLISATION ET RÉOLUTION DU MODÈLE STOCHASTIQUE :

```
# Dans ce code, nous considérons que les données sont déjà importées.

# Importation de la librairie PuLP
from pulp import *

def StochastiqueEnergyDistributionModel(nbSim):

    # Creation de la liste des simulations
    K = range(nbSim)
```

```

# Generation des scenarios de production d'energie renouvelable aleatoire
Reg = np.random.normal(1, std, (nbSim, 6, 24))
for k in K :
    for j in J:
        for h in H:
            Reg[k][j-1][h-1] *= Avg_Rep[j][h]

# Creation des variables de decisions
# Variables de premiere instance
X = LpVariable.dicts("X", (I, H), cat=LpBinary)
A = LpVariable.dicts("A", (I, H), cat=LpBinary)
S = LpVariable.dicts("S", (I, H), cat=LpBinary)
P = LpVariable.dicts("P", (I, H), lowBound=0, cat=LpContinuous)
# Variable de seconde instance
B = LpVariable.dicts("B", (K, H), cat=LpContinuous)

# Initialisation du probleme
prob = LpProblem("EnergyDistributionProblem", LpMinimize)

# Fonction objective
prob += lpSum(lpSum(X[i][h] * CU[i] + P[i][h] * CP[i] + A[i][h] * CD[i] for i
in I) + (1 / len(K)) * lpSum(B[k][h] for k in K) for h in H)

# Contraintes 0 : Initialisation des generateurs a l'heure 0
for i in I:
    # Initialisation des X
    X[i][0] = E[i]
    # Initialisation des P
    prob += P[i][0] >= Pmin[i] * X[i][0]
    prob += P[i][0] <= Pmax[i] * X[i][0]

# Contrainte 1 : Duree minimal de fonctionnement consecutif des generateurs
for i in I:
    for h0 in H:
        prob += lpSum(X[i][h] for h in range(h0, min(h0+UT[i], 24))) >= min(UT
[i], 24-h0) * A[i][h0]

# Contrainte 2 : Duree de refroidissement minimal des generateurs
for i in I:
    for h0 in H:
        prob += lpSum(1 - X[i][h] for h in range(h0, min(h0 + DT[i], 24))) >=
min(DT[i], 24-h0) * S[i][h0]

# Contraintes 3 : Limites (maximales et minimales) de puissance des
generateurs
for i in I:
    for h in H:
        # Limite minimale
        prob += P[i][h] >= Pmin[i] * X[i][h]
        # Limite maximale
        prob += P[i][h] <= Pmax[i] * X[i][h]

# Contraintes 4 : Variations maximales de la puissance des generateurs entre
deux heures consecutives
for i in I:
    for h in H:
        # Limite de diminution
        prob += P[i][h-1] - P[i][h] <= SD[i] * S[i][h] + RD[i] * X[i][h]
        # Limite d'augmentation

```

```

prob += P[i][h] - P[i][h-1] <= SU[i] * A[i][h] + RU[i] * X[i][h-1]

# Contraintes 5 : Gestion des changements d'etats des generateurs
for i in I:
    for h in H:
        # Changements d'etats
        prob += X[i][h]-X[i][h-1] == A[i][h] - S[i][h]
        # Non-simultaneite positive des changements d'etats
        prob += A[i][h] + S[i][h] <= 1

# Contraintes 6 : Operations sur le marche de l'energie avec satisfaction de
la demande pour toutes les simulations
for k in K:
    for h in H:
        prob += B[k][h] >= -PV * (lpSum(Rep[k][j][h] for j in J) + lpSum(P[i]
)[h] for i in I) - D[h])
        prob += B[k][h] >= PA * (D[h] - lpSum(Rep[k][j][h] for j in J) -
lpSum(P[i][h] for i in I))

# Resolution du probleme
prob.solve()

# Fonction pour verifier et extraire la valeur de la variable
def get_var_value(var):
    return var.varValue if hasattr(var, 'varValue') else var

# Extraction des resultats
result = {
    "Statut": LpStatus[prob.status],
    "Valeur optimale": value(prob.objective),
    "h": H,
    "B": {k: [get_var_value(B[k][h]) for h in H] for k in K},
    "X": {i: [get_var_value(X[i][h]) for h in H] for i in I},
    "A": {i: [get_var_value(A[i][h]) for h in H] for i in I},
    "S": {i: [get_var_value(S[i][h]) for h in H] for i in I},
    "P": {i: [get_var_value(P[i][h]) for h in H] for i in I}
}

return result

```

#### 4.4 Analyse des résultats

La sous-partie "Analyse des résultats" constitue une étape cruciale dans notre étude du modèle stochastique de gestion optimale de la production d'énergie. Cette section vise à évaluer la robustesse et l'efficacité de notre modèle à travers plusieurs perspectives. Nous commencerons par une évaluation générale du modèle, en analysant sa capacité à fournir des solutions optimales compte tenu de l'incertitude introduite par les simulations de production d'énergie renouvelable.

Un élément clé de cette analyse est l'impact du nombre de simulations sur les résultats obtenus. Comme illustré par le graphique ci-dessous, nous observons que plus le nombre de simulations augmente, plus la distribution des données suit une loi normale. Ce phénomène est particulièrement évident lorsque nous comparons les distributions obtenues avec 10 et 1000 simulations. Avec un faible nombre de simulations, la distribution peut être irrégulière et déviée de la normale, ce qui reflète une capture imparfaite des variations aléatoires. En revanche, avec un nombre élevé de simulations, la distribution se stabilise et converge vers une loi normale, indiquant une meilleure représentation des incertitudes..

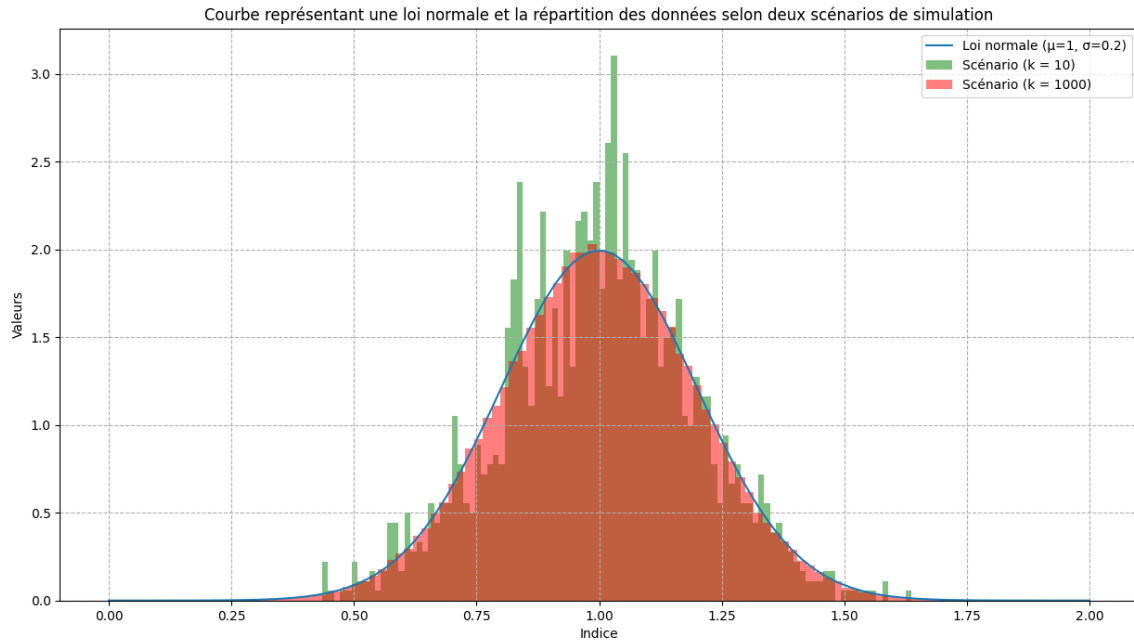


FIGURE 14 – Distribution des données aléatoires

Ensuite, nous explorerons plus en détail comment cette précision accrue influence les performances de notre modèle, notamment en déterminant comment la variation du nombre de scénarios simulés affecte la qualité et la robustesse des solutions obtenues. De plus, nous comparerons les performances du modèle stochastique avec celles du modèle déterministe. Cette comparaison mettra en lumière les avantages et les limitations de chaque approche dans la gestion des systèmes énergétiques, en particulier en termes de coûts et de capacité à gérer les incertitudes.

Enfin, nous expérimenterons en considérant  $P_{ih}$  comme une variable de seconde instance, explorant ainsi comment cette modification influence la gestion optimale de la production d'énergie dans un contexte stochastique. Cette dernière analyse nous permettra d'évaluer la flexibilité et l'adaptabilité de notre modèle face à des changements dans les paramètres de décision, renforçant ainsi notre compréhension de ses capacités et de ses limites.

#### 4.4.1 Évaluation du modèle

L'évaluation d'un modèle est cruciale pour déterminer sa capacité à produire des résultats précis et fiables dans des conditions variées et imprévisibles, validant ainsi sa robustesse et son efficacité dans des scénarios non pris en compte lors de sa construction. Elle permet de vérifier sa capacité à généraliser et à proposer des solutions optimales cohérentes avec les attentes du problème posé.

Pour évaluer notre modèle stochastique de gestion énergétique, nous avons suivi une méthodologie bien précise. Nous avons divisé nos données en ensembles distincts : un ensemble d'entraînement utilisé pour développer le modèle et un ensemble de test réservé pour évaluer ses performances sur des exemples non vus. Cette approche simule des conditions réelles où le



modèle doit généraliser à de nouvelles données, vérifiant ainsi sa capacité à gérer l'incertitude et à prendre des décisions efficaces dans des environnements variables.

L'analogie avec l'intelligence artificielle est directe : tout comme dans l'apprentissage automatique, où un modèle est évalué sur un ensemble de données de test distinct pour vérifier sa capacité à généraliser, notre modèle stochastique est soumis à une évaluation similaire. Cela garantit que le modèle ne se contente pas d'apprendre par cœur les données d'entraînement mais qu'il est capable de produire des résultats fiables et précis sur de nouvelles simulations de production d'énergie renouvelable.

En conclusion, l'évaluation de notre modèle stochastique de gestion énergétique est une étape cruciale pour garantir sa fiabilité et son utilité dans des environnements réels et dynamiques. Elle nous permet de valider sa capacité à répondre efficacement aux défis posés tout en fournissant des solutions optimales. Nous examinerons maintenant comment les résultats obtenus avec notre ensemble de test, qui est cinq fois plus petit que l'ensemble d'entraînement, impactent le coût total du modèle.

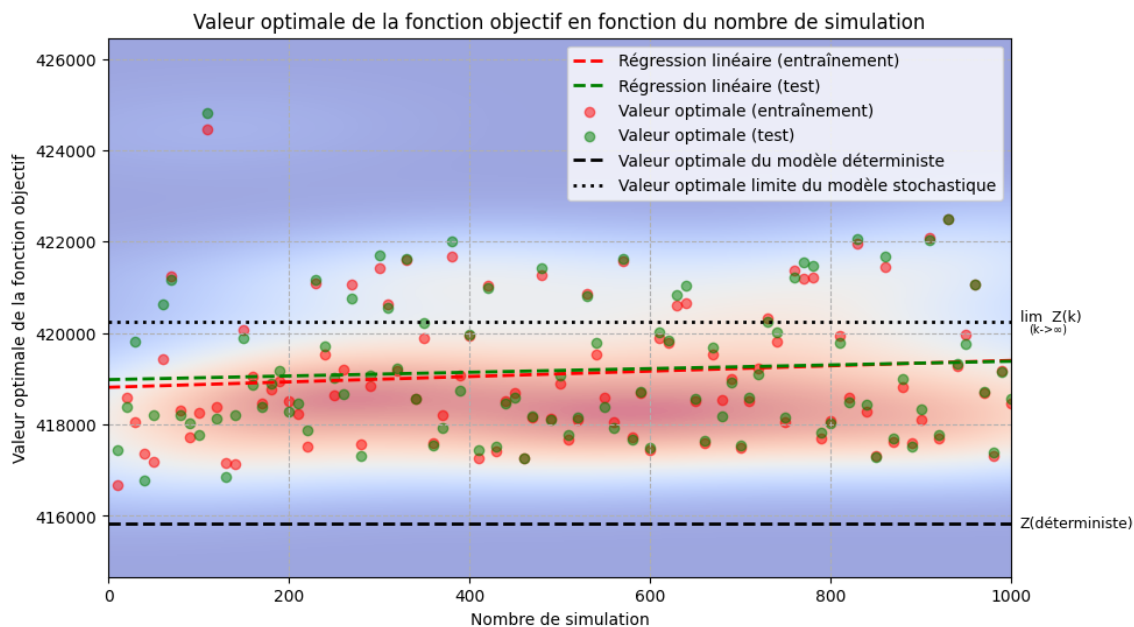


FIGURE 15 – Évaluation du modèle stochastique

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessus, notre modèle donne approximativement les mêmes résultats pour l'ensemble de test et l'ensemble d'entraînement. Ces résultats sont surprenants car nous nous attendions à ce que les résultats pour l'ensemble de test soient moins bons d'au moins un millier d'euros par rapport à ceux de l'ensemble d'entraînement. Une similarité aussi élevée entre les deux ensembles indique que le modèle parvient à généraliser efficacement et à produire des solutions robustes même sur des données non vues.

Cela suggère que notre modèle stochastique est bien conçu pour gérer les incertitudes et les variations dans les données de production d'énergie renouvelable. Cette robustesse est probablement due à la qualité de la modélisation des incertitudes et à la capacité du modèle à s'adapter aux différents scénarios rencontrés. De plus, nous avons observé que le modèle devient

de plus en plus robuste avec l'augmentation du nombre de simulations. En effet, à mesure que le nombre de simulations augmente, le modèle parvient à mieux capturer les variations et les scénarios extrêmes, améliorant ainsi sa performance et sa fiabilité.

Le fait que les performances du modèle ne se dégradent pas de manière significative lors du passage de l'entraînement au test, et qu'elles s'améliorent avec plus de simulations, renforce la confiance dans sa capacité à fonctionner de manière fiable dans des environnements réels. Cette tendance à une robustesse accrue avec plus de simulations souligne l'importance d'un nombre suffisant de simulations pour obtenir des résultats précis et stables.

En conclusion, l'évaluation montre que notre modèle stochastique maintient des performances élevées et cohérentes entre les phases d'entraînement et de test. Cette stabilité et cette robustesse, qui s'améliorent avec le nombre de simulations, sont essentielles pour garantir que le modèle peut être utilisé efficacement dans des conditions réelles, fournissant des résultats précis et optimisés malgré les incertitudes inhérentes à la production d'énergie renouvelable.

#### 4.4.2 Analyse de l'impact du nombre de simulation

Pour évaluer l'impact du nombre de simulations sur notre modèle stochastique, nous analyserons comment la qualité et la robustesse des solutions évoluent en fonction du nombre de simulations. Notre but est de trouver un équilibre optimal entre le nombre de simulations et la précision des résultats, tout en tenant compte des contraintes computationnelles.

Le nombre de simulations est critique dans les modèles stochastiques pour représenter les incertitudes. Un nombre excessif de simulations peut entraîner des temps de calcul prohibitifs sans amélioration significative de la précision. Notre objectif est de trouver le juste équilibre entre la robustesse du modèle et le temps de calcul. Pour mieux comprendre l'impact du nombre de simulations sur le temps d'exécution, examinons la figure ci-dessous.

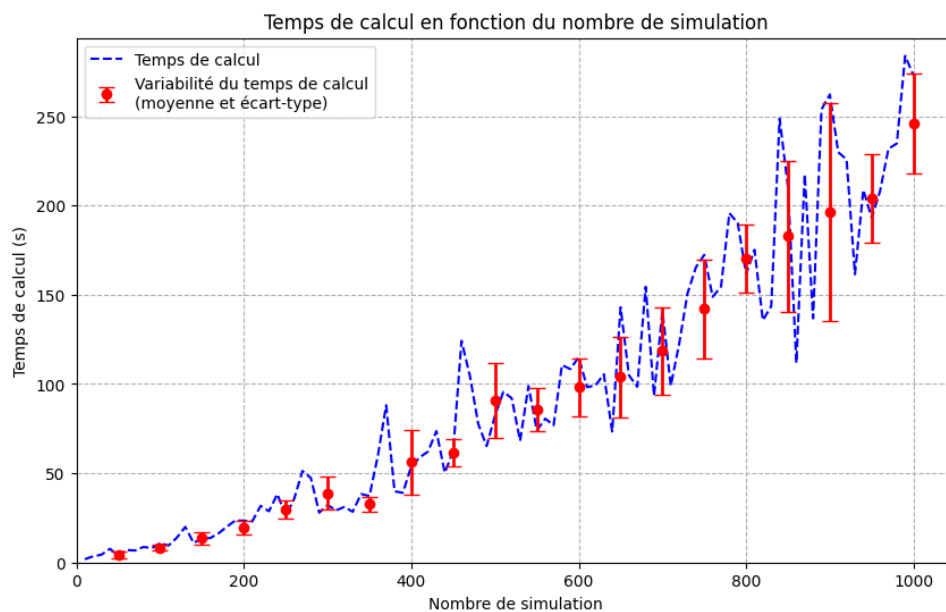


FIGURE 16 – Temps de calcul en fonction du nombre de simulations

Cette figure représente l'exécution du modèle pour différents nombres de simulations, allant de 10 à 1000. Il est cependant important de noter que ces données concernant le temps d'exécution ont été requises en résolvant notre modèle sur une machine virtuelle dédiée à cet usage. Les résultats peuvent être différents en fonction de la configuration de la machine sur laquelle est faite l'analyse.

Comme nous pouvions l'imaginer, le temps de calcul augmente de manière exponentielle avec le nombre de simulations. Cette observation souligne l'importance de trouver un équilibre entre précision et efficacité computationnelle. De plus, nous notons que la variabilité (écart-type) du temps de calcul augmente également avec le nombre de simulations. Cependant, en ramenant cet écart-type en pourcentage par rapport à la moyenne, nous nous rendons compte que ce dernier est plutôt stable, voire qu'il diminue légèrement.

Maintenant que nous avons évalué l'impact du nombre de simulation sur le temps de calculs, évaluons l'impact du nombre de simulations sur les coûts de notre modèle stochastique. Pour ce faire, regardons l'évolution de la précision des résultats en fonction du nombre de simulations grâce à la figure 15. Regardons également la figure ci-dessous qui montre la distribution des coûts  $B_{kh}$  par heure en fonction du nombre de simulation.

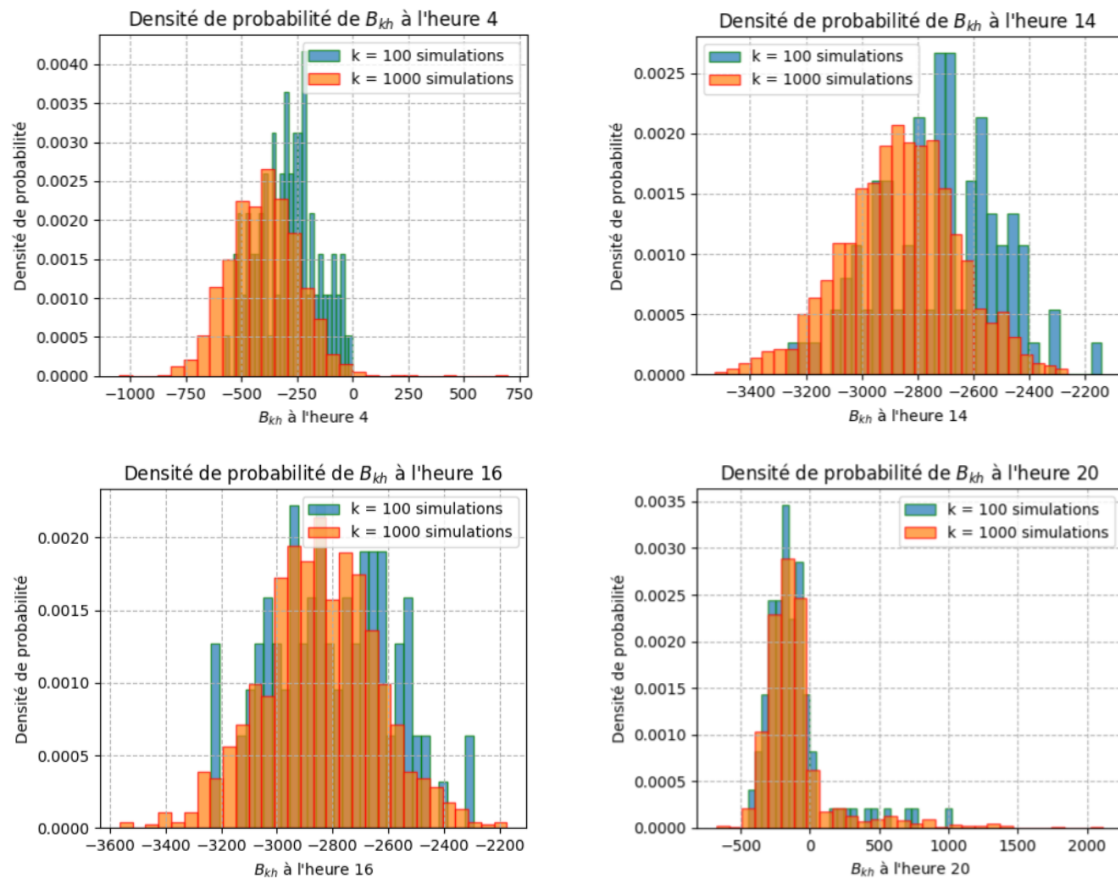


FIGURE 17 – Distribution des coûts  $B_{kh}$  par heure en fonction du nombre de simulations

Tout d'abord, examinons la figure 17 qui présente la distribution des coûts  $B_{kh}$  par heure en

fonction du nombre de simulations. Nous nous concentrerons spécifiquement sur les distributions de  $B_{kh}$  pour  $h = 14$  et  $h = 16$ . Dans le modèle déterministe, nous avons observé que pour ces heures, nous vendions de l'énergie en raison d'une chute brutale de la demande entre 12h et 14h.

Nous constatons que le passage au modèle stochastique n'a pas modifié la nécessité de vendre notre excédent d'énergie sur le marché. Cependant, à 14h, nous remarquons que  $B_{kh}$  suit désormais une distribution de type normal centrée autour d'un coût inférieur à sa valeur dans le modèle déterministe (-2557,8 €). Il était attendu que la variable de seconde instance  $B_{kh}$  suive une distribution probabiliste, mais ce qui est particulièrement intéressant, c'est la rareté des cas où l'aléa améliore la solution par rapport au modèle déterministe, du moins dans les cas où nous vendons de l'énergie ( $h = 14$  et  $h = 16$ ).

En revanche, la situation est très différente pour les heures où nous achetons de l'énergie, comme à 20h. La distribution de  $B_{kh}$  à cette heure-là montre un changement significatif par rapport à la valeur du modèle déterministe qui était de 42,96 € d'achat d'énergie sur le marché. Cette distribution stochastique présente un mode négatif (vente d'énergie sur le marché), permettant ainsi une réduction des coûts par rapport aux achats précédents, bien que dans certains cas, la quantité achetée puisse être considérablement supérieure à celle prévue par le modèle déterministe.

Passons maintenant à la distribution de  $B_{kh}$  à 4h. Dans le modèle déterministe, aucune transaction sur le marché n'était nécessaire à cette heure-là et le coût était donc nul. En revanche, dans le modèle stochastique, cette situation idéale de non-transaction se traduit par des ventes d'énergie présentant une distribution normale centrée autour de -400 €, avec très peu de cas où le coût est supérieur ou égal à 0 €.

Concernant les coûts totaux. Comme nous avons déjà pu le voir avec la figure 15, l'évolution des coûts totaux (valeur de la fonction objective) ne varie pas énormément en fonction du nombre de simulation. Une petite augmentation peut être identifiée mais cela est trop peu pour être notable. Nous observons que le coût total ne présente pas de tendance claire à la stabilisation à mesure que le nombre de simulations augmente, même sur l'intervalle de 10 à 1000 simulations. Cette absence de convergence semble être due à la présence trop faible d'événements extrêmes dans les scénarios simulés. Pour clarifier cette observation, nous avons restreint la distribution normale des simulations à l'intervalle  $[Avg\_Rep - 2\sigma; Avg\_Rep + 2\sigma]$  comme le montre la figure présente à la fin de la partie. Les résultats obtenus (également disponible à la fin de la partie) montrent une convergence beaucoup plus lente du modèle, mettant en évidence l'impact significatif des scénarios extrêmes sur la précision des résultats. Nous explorerons cela plus en profondeur avec l'analyse du modèle robuste.

Pour approfondir notre analyse, nous avons également exécuté le modèle avec 20 000 simulations afin de déterminer la tendance asymptotique de la fonction objectif lorsque le nombre de simulations tend vers "l'infini" (nous n'avons pas pu faire avec plus de simulations à cause de la RAM limitée à 12,7 GB de notre machine virtuelle Google Colab). Ces résultats confirment que la valeur de la fonction objectif converge effectivement vers une valeur stable avec un nombre très élevé de simulations. Cette constatation souligne l'importance de modéliser correctement les scénarios extrêmes pour obtenir des estimations fiables du coût total tout en optimisant les ressources computationnelles.

Ces analyses nous permettent de pouvoir choisir le nombre de simulations qui offre le meilleur

compromis entre précision et temps de calcul. En trouvant ce point d'équilibre, nous pouvons utiliser notre modèle stochastique de manière plus efficace et pragmatique, en tenant compte des ressources disponibles et des besoins de précision.

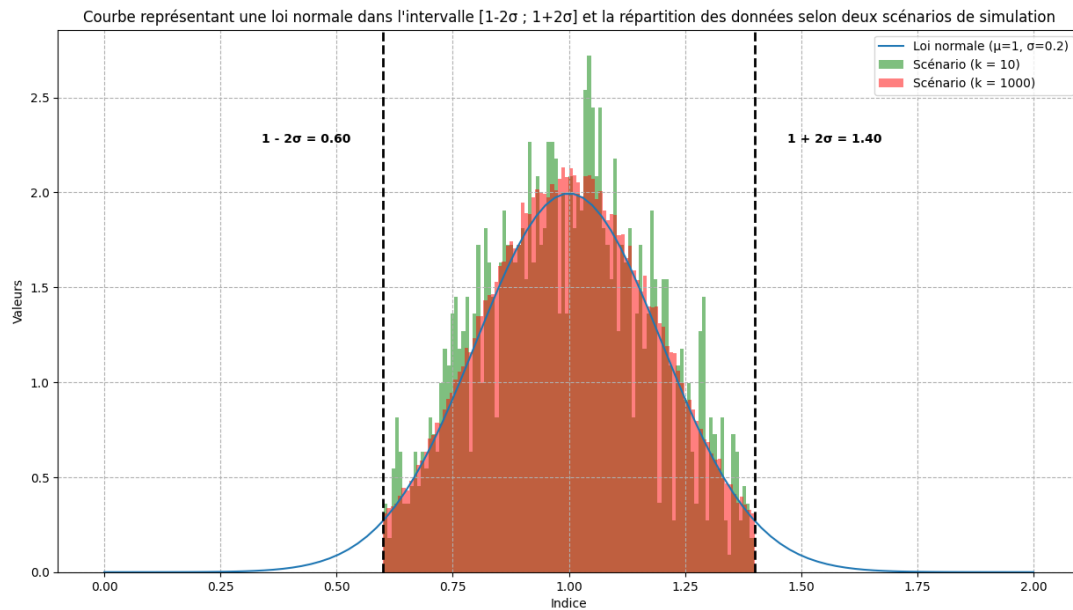


FIGURE 18 – Distribution des données aléatoires sur l'intervalle  $[Avg\_Rep - 2\sigma; Avg\_Rep + 2\sigma]$

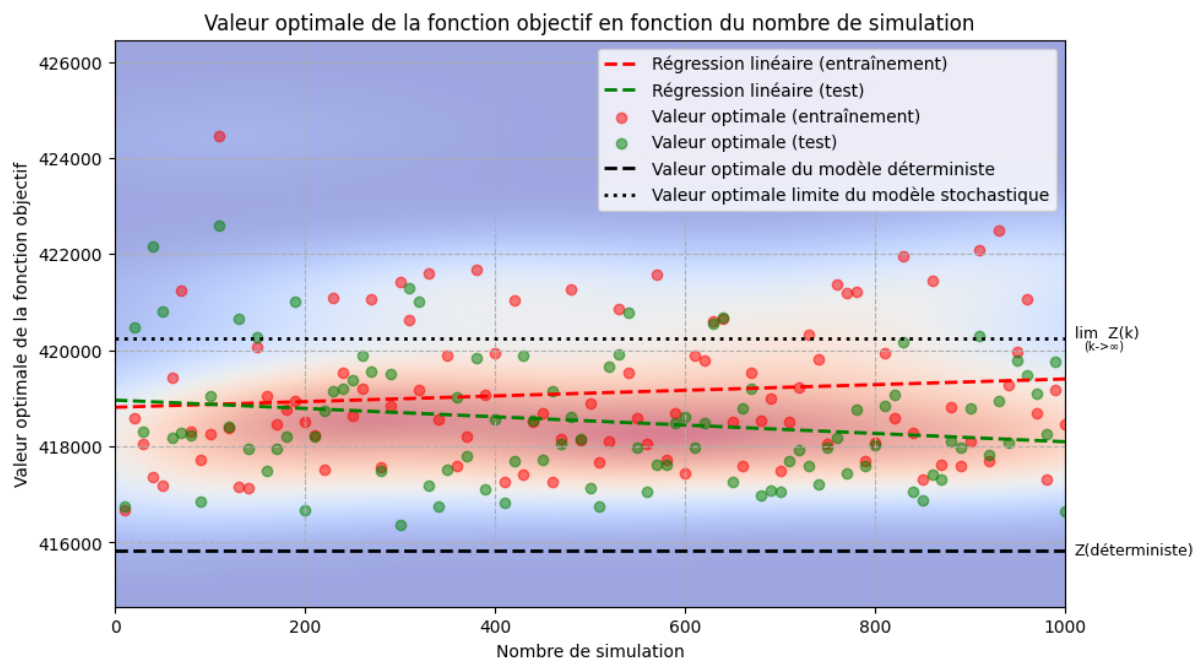


FIGURE 19 – Coûts total en fonction du nombre de simulation sans aléa extrême

#### 4.4.3 Comparaison entre les modèles déterministe et stochastique

Le passage d'un modèle déterministe à un modèle stochastique dans notre étude de gestion énergétique entraîne une augmentation d'environ 4000 euros du coût total, représentant une augmentation d'environ 1% (Figure 15 : Evaluation du modèle stochastique) . Cette augmentation relativement faible suggère que les aléas associés à la production d'énergie renouvelable n'ont pas un impact significatif sur les coûts totaux, mettant en évidence la robustesse du modèle face à l'incertitude. Regardons tout de même d'où proviennent ces 1% supplémentaire.

Selon notre analyse, la couverture de la demande par la production d'énergie indique que le modèle stochastique assure une couverture légèrement supérieure à celle du modèle déterministe. Les courbes de puissances des générateurs au cours du temps, présentées dans la figure 17, confirment cette observation. On remarque que le modèle stochastique produit davantage que le modèle déterministe, ce qui permet une meilleure adaptation aux incertitudes de production tout en minimisant les coûts d'échange sur le marché de l'énergie.

Avec toutes les informations que nous avons recueillies sur le modèle stochastique, nous sommes désormais en mesure de tirer des conclusions sur la stratégie que nous pourrions adopter en tant que gestionnaires du parc de générateurs. Après avoir constaté l'absence de convergence du modèle après 1000 simulations, principalement en raison de l'impact des situations extrêmes, et avoir analysé la durée de calcul en fonction du nombre de simulations, nous avons déterminé qu'un modèle stochastique utilisant 200 simulations serait optimal. En effet, ce modèle serait aussi précis qu'un modèle utilisant 1000 simulations, tout en réduisant le temps d'exécution de manière significative : seulement 25 secondes pour 200 simulations comparé à 250 secondes pour 1000 simulations.

#### 4.4.4 Expérimentation avec $P_{ih}$ en tant que variable de seconde instance

Nous avons choisi de traiter  $P_{ih}$  comme une variable de seconde instance pour permettre une réponse plus flexible et adaptative aux variations stochastiques de la production d'énergie renouvelable. En ajustant  $P_{ih}$  après la réalisation des aléas, nous espérons réduire les coûts totaux et améliorer la robustesse du modèle face aux incertitudes.

Lorsque  $P_{ih}$  est traité comme une variable de seconde instance, le temps de calcul augmente d'environ 1,5 fois (plus encore lorsque le nombre de simulations est élevé) par rapport au modèle où  $P_{ih}$  est une variable de première instance. Cette augmentation est due à la complexité supplémentaire de résoudre le modèle en tenant compte des ajustements post-aléa. Par exemple, si le modèle initial prenait 25 secondes, le modèle avec  $P_{ih}$  en seconde instance prendrait environ 38 secondes.

En termes de coût total, le modèle avec  $P_{ih}$  en seconde instance montre une réduction notable par rapport au modèle avec  $P_{ih}$  en première instance. Plus précisément, ce modèle atteint un coût total qui est environ 2000 euros supérieur au coût optimal déterministe. Cette flexibilité d'ajustement en temps réel permet de mieux aligner la production avec les conditions réelles, évitant les inefficacités et les coûts supplémentaires associés aux prévisions inexactes.

En conclusion, bien que le traitement de  $P_{ih}$  comme une variable de seconde instance entraîne une augmentation du temps de calcul de 1,5 fois, il offre des avantages significatifs en termes de réduction des coûts totaux, démontrant une amélioration de l'efficacité et de la robustesse du modèle avec un coût total proche de celui du modèle déterministe, environ 2000 euros de plus.

## 5 Modèle Robuste

La modélisation robuste est une approche qui vise à renforcer la résilience d'un modèle face à l'incertitude et aux variations imprévues des paramètres ou des conditions environnementales. Contrairement aux modèles déterministes et stochastiques qui supposent des prévisions fixes ou probabilistes pour les variables incertaines, le modèle robuste cherche à anticiper et à se défendre contre les pires scénarios possibles, représentés comme des "ennemis" qui cherchent à déstabiliser le modèle.

Imaginez que dans un jeu stratégique, vous devez élaborer des plans non seulement en prévoyant les mouvements de vos adversaires connus, mais aussi en tenant compte des actions les plus hostiles et imprévisibles qu'ils pourraient prendre. De même, un modèle robuste anticipe les pires variations possibles dans les données d'entrée et prend des décisions qui minimisent les conséquences négatives potentielles.

Pour passer d'un modèle déterministe à un modèle robuste, plusieurs ajustements sont nécessaires. Tout d'abord, il faut identifier les paramètres clés susceptibles de varier de manière significative et déterminer les limites ou les bornes de ces variations. Plutôt que de se baser sur des valeurs moyennes ou des distributions probabilistes, le modèle robuste spécifie des intervalles dans lesquels les paramètres peuvent fluctuer tout en respectant les contraintes opérationnelles et les objectifs de performance.

Un avantage majeur des modèles robustes est leur capacité à fournir des solutions qui fonctionnent bien dans une variété de scénarios, même ceux qui n'ont pas été envisagés initialement. Cela augmente la fiabilité et la stabilité des décisions prises par le modèle dans des environnements dynamiques et incertains. De plus, les modèles robustes réduisent le risque de sous-performance ou d'échec complet face à des conditions extrêmes.

Cependant, cette robustesse accrue peut parfois conduire à des solutions plus conservatrices ou moins optimales dans des situations où les variations réelles des paramètres sont moins extrêmes que prévues. En d'autres termes, la précaution intégrée dans les modèles robustes peut entraîner une perte d'efficacité ou de rentabilité potentielle lorsque les conditions sont moins défavorables que prévu.

Le modèle robuste représente une avancée significative par rapport aux modèles déterministes et stochastiques en intégrant la prévisibilité du premier et la résilience face à l'incertitude du second. En envisageant les scénarios les plus défavorables, il permet aux décideurs de prendre des décisions éclairées et fiables, même dans des environnements changeants et potentiellement hostiles. Nous avons bénéficié de l'expertise précieuse de M. Guillaume Ghienne pour développer ce modèle, ce qui a facilité notre compréhension malgré la réduction du niveau de détail dans cette partie. Passons désormais à l'examen des paramètres et des variables de décision de notre modèle robuste.

### 5.1 Paramètres et variables de décision

Dans le modèle robuste présenté, plusieurs ajustements ont été effectués par rapport aux modèles précédents (déterministe et stochastique) afin d'assurer une meilleure résilience face à l'incertitude. Tout d'abord, nous avons introduit deux nouvelles variables de décision distinctes pour représenter les transactions sur le marché de l'énergie (précédemment représentée par la

variable  $B_h$  :  $Achats_h$  et  $Ventes_h$ . L'ajout de ces variables au déterminant de  $B_h$  ne change aucunement le fonctionnement du modèle mais permet simplement de se rapprocher d'une forme mathématique permettant un passage plus simple vers le robuste. L'un des ajouts principaux réside également dans l'introduction des variables  $r_{jh}$  et  $q_h$ , ainsi que l'utilisation de  $\hat{Rep}_{jh}$ ,  $Dev\_Rep_{kjh}$  et  $\Gamma$ .

Tout d'abord,  $\hat{Rep}_{jh}$  représente la déviation extrême de la production d'énergie renouvelable ( $Rep_{jh}$ ) pour le site  $j$  à l'heure  $h$ , calculée comme la moyenne  $Avg\_Rep_{jh}$  moins deux écarts-types  $\sigma$  (une distribution normale n'ayant pas de valeur minimal, nous prendrons  $Avg\_Rep - 2\sigma$  comme valeur minimal car la probabilité d'être en dessous de cette valeur est seulement de 2,2% comme le montre la figure ci-dessous). Cette approche permet de simuler des scénarios plus réalistes pour la production d'énergie renouvelable, tenant compte de variations importantes par rapport à la moyenne.

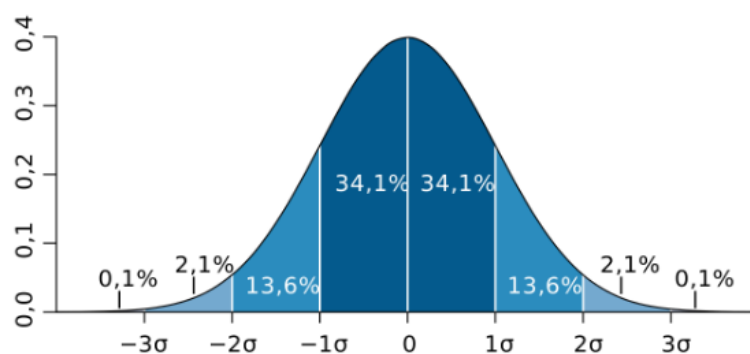


FIGURE 20 – Probabilités d'occurrence des valeurs d'une loi normale

Ensuite,  $Dev\_Rep_{kjh}$  représente les scénarios de déviation utilisés pour modéliser les fluctuations réelles de la production d'énergie renouvelable dans chaque simulation  $k$ . Chaque valeur  $Dev\_Rep_{kjh}$  est générée aléatoirement selon une distribution normale pour refléter une estimation réaliste de la production d'énergie renouvelable sous différentes conditions.

Les variables  $r_{jh}$  et  $q_h$  sont introduites spécifiquement pour le modèle robuste afin de gérer la couverture robuste de la demande.  $q_h$  représente la somme des coûts de déviation pour chaque heure  $h$ , tandis que  $r_{jh}$  est utilisé pour les contraintes associées aux scénarios de déviation extrême de la production d'énergie renouvelable.

Le paramètre  $\Gamma$  est utilisé dans les contraintes du modèle robuste pour pondérer la couverture robuste de la demande. Il permet de déterminer la marge de sécurité ou de résilience par rapport à la demande réelle, en influençant la décision sur la quantité d'énergie à acheter ou vendre sur le marché. Autrement dit, il représente le nombre de site d'énergie renouvelable étant à leurs fonctionnement minimum.

Comparé aux modèles précédents, ces ajustements permettent au modèle robuste de mieux anticiper et de se préparer aux pires scénarios possibles en termes de production d'énergie renouvelable. Cela offre une flexibilité accrue dans la prise de décision, permettant ainsi de minimiser les coûts et d'assurer une gestion efficace des ressources énergétiques face à l'incertitude.



Notation	Définition	Unité
<i>Listes d'indices</i>		
$H$	Liste des heures de la journée	
$I$	Liste des générateur d'énergie	
$J$	Liste des sites de production d'énergie renouvelable	
$K$	Liste des simulations	
<i>Indices</i>		
$h$	Heures de la journée	
$i$	Numéro du générateur d'énergie	
$j$	Numéro du site de production d'énergie renouvelable	
$k$	Numéro de la simulation	
<i>Paramètres des sites de production d'énergie renouvelable</i>		
$Avg\_Rep_{jh}$	Moyenne de production d'énergie renouvelable du site $j$ à l'heure $h$	$MW$
$\sigma$	Écart-type de la production d'énergie renouvelable	
$\hat{Rep}_{jh}$	Déviati on extrême de la production d'énergie renouvelable pour le site $j$ à l'heure $h$	$MW$
$Dev\_Rep_{kjh}$	Déviati on de la production d'énergie renouvelable du site $j$ à l'heure $h$ , dans la simulation $k$	$MW$
$\Gamma$	Nombre de site d'énergie renouvelable étant à leurs fonctionnement minimum	
<i>Paramètres des générateurs d'énergie</i>		
$UT_i$	Nombre d'heure consécutive minimal de fonctionnement du générateur $i$ lorsqu'il est allumé	$h$
$DT_i$	Nombre d'heure consécutive minimal de refroidissement du générateur $i$ lorsqu'il est éteint	$h$
$SU_i$	Puissance maximale de démarrage (première heure) du générateur $i$	$MW$
$SD_i$	Puissance maximale d'arrêt (dernière heure) du générateur $i$	$MW$
$Pmax_i$	Puissance maximale du générateur $i$	$MW$
$Pmin_i$	Puissance minimale du générateur $i$	$MW$
$RU_i$	Augmentation maximale de la puissance du générateur $i$ en marche	$MW/h$
$RD_i$	Diminution maximal de la puissance du générateur $i$ en marche	$MW/h$
$CD_i$	Coût de démarrage du générateur $i$	€
$CP_i$	Coût de production du générateur $i$	€/MWh
$CU_i$	Coût d'utilisation du générateur $i$	€/h
<i>Paramètres de prix</i>		
$PV$	Prix de vente	€/MWh
$PA$	Prix d'achat	€/MWh
<i>Paramètre de demande</i>		
$D_h$	Demande à l'heure $h$	$MW$

TABLE 12 – Paramètres du modèle robuste

Notation	Définition	Unité
<i>Variables booléenne</i>		
$X_{ih}$	État du générateur $i$ à l'heure $h$	
$A_{ih}$	Démarrage du générateur $i$ à l'heure $h$	
$S_{ih}$	Arrêt du générateur $i$ à l'heure $h$	
<i>Variables continue</i>		
$P_{ih}$	Puissance du générateur $i$ à l'heure $h$	$MW$
$Achats_h$	Achats d'énergie sur le marché à l'heure $h$	$MWh$
$Ventes_h$	Ventes d'énergie sur le marché à l'heure $h$	$MWh$
$r_{jh}$	Contribution de la déviation de production d'énergie renouvelable du site $j$ à l'heure $h$	$MW$
$q_h$	Surplus ou déficit de production à l'heure $h$ en fonction des pires scénarios de déviation	$MW$

TABLE 13 – Variables de décision du modèle robuste

## 5.2 Formulation du modèle robuste

Le passage à un modèle robuste entraîne de multiples changements au niveau des contraintes du modèle. Ces modifications sont essentielles pour intégrer l'incertitude de manière proactive et garantir que le système peut fonctionner de manière fiable même dans les pires scénarios. En modélisation robuste, l'objectif est d'anticiper et de se préparer aux variations extrêmes des paramètres, notamment ceux liés à la production d'énergie renouvelable et à la demande énergétique.

Les contraintes doivent être ajustées pour refléter cette nouvelle approche, où l'on tient compte non seulement des valeurs moyennes attendues, mais aussi des déviations potentielles qui pourraient compromettre la viabilité du plan établi. En introduisant des variables et des paramètres supplémentaires, tels que  $r_{jh}$  et  $q_h$ , le modèle robuste assure que les solutions obtenues restent robustes face aux incertitudes inhérentes.

Ces changements permettent de transformer un modèle initialement conçu pour des conditions idéales en un modèle capable de résister aux aléas et aux fluctuations, assurant ainsi une meilleure gestion des risques et une optimisation plus réaliste des ressources. Passons maintenant à la description des modifications apportées à la fonction objectif et aux contraintes et voyons comment elles contribuent à la robustesse du modèle.

### 5.2.1 Fonction objectif

Dans le modèle robuste, l'incertitude n'intervient pas directement dans la fonction objectif, mais elle est prise en compte à travers les différentes contraintes grâce aux paramètres et variables introduits précédemment. Cependant, une différence notable existe entre la fonction objectif de notre modèle robuste et celle des modèles déterministe et stochastique : la variable de décision  $B_h$  a été remplacée par les variables de décision  $Achats_h$  et  $Ventes_h$ . Cette modification simplifie le passage au modèle robuste et permet de gérer les achats et ventes d'énergie

de manière distincte.

Pour mieux comprendre cette transformation, il est essentiel de déterminer le lien entre ces variables et d'ajuster correctement la fonction objectif.

Dans les modèles précédents, la variable  $B_h$  représentait la somme des échanges sur le marché de l'énergie (en €). Dans le modèle robuste, les variables  $Achats_h$  et  $Ventes_h$  représentent respectivement la quantité d'énergie achetée et vendue sur le marché de l'énergie (en MWh). Connaissant cela, nous pouvons établir l'équation reliant ces variables de décision :

$$B_h = PA \times Achats_h - PV \times Ventes_h \quad \forall h \in H \quad (34)$$

Ainsi, en intégrant cette relation dans notre modèle, nous obtenons la nouvelle formulation de la fonction objectif pour le modèle robuste. La fonction objectif devient alors :

$$\min \left( \sum_H \left( \sum_I (X_{ih} \times CU_i + P_{ih} \times CP_i + A_{ih} \times CD_i) + PA \times Achats_h - PV \times Ventes_h \right) \right) \quad (35)$$

Pour rappel, cette nouvelle formulation a pour unique but de se rapprocher d'une forme mathématique connu qui nous permet de passer plus facilement d'un modèle déterministe ou stochastique à un modèle robuste.

### 5.2.2 Contraintes

Dans le modèle robuste, les contraintes n°6 liées à l'achat et à la vente d'énergie ainsi qu'à la satisfaction de la demande subissent des modifications importantes par rapport au modèle déterministe. De plus, une nouvelle contrainte liée au dual apparaît pour garantir la robustesse du modèle face aux incertitudes. Examinons ces modifications en détail.

Les contraintes n°6 du modèle déterministe assurent que la somme des échanges d'énergie sur le marché est suffisante pour équilibrer la production et la demande. Elles sont exprimées par les expression mathématique 25 et 26. Ces contraintes utilisent la variable  $B_h$  pour représenter les échanges nets sur le marché de l'énergie, garantissant que la production totale, y compris la production renouvelable moyenne  $Avg\_Rep_{jh}$ , est équilibrée avec la demande  $D_h$ .

Dans le modèle robuste, les contraintes sont ajustées pour prendre en compte les incertitudes en introduisant les variables  $Achats_h$ ,  $Ventes_h$ ,  $q_h$ , et  $r_{jh}$ . La contrainte de couverture de la demande devient :

CONTRAINTE N°6 : COUVERTURE ROBUSTE DES OPÉRATIONS SUR LE MARCHÉ  
DE L'ÉNERGIE AVEC SATISFACTION DE LA DEMANDE

$$Achats_h - Ventesh_h + \sum_i (P_{ih}) + \sum_j (Avg\_Rep_{jh}) \geq D_h + \Gamma \times q_h + \sum_j (r_{jh}) \quad \forall h \in H \quad (36)$$

Cette contrainte assure que, même dans les pires scénarios, la demande  $D_h$  est couverte par les achats et ventes d'énergie, la production des générateurs  $P_{ih}$ , et la production renouvelable moyenne  $Avg\_Rep_{jh}$ . Les termes supplémentaires  $\Gamma \times q_h$  et  $\sum_j (r_{jh})$  représentent les ajustements nécessaires pour garantir la robustesse face aux variations extrêmes de la production renouvelable. Une nouvelle contrainte liée au dual est également introduite pour renforcer la robustesse du modèle.

#### CONTRAINTE N°7 : CONTRAINTE ASSOCIÉE AU DUAL

$$q_h + r_{jh} \geq \hat{Rep}_{jh} \quad \forall h \in H, \forall j \in J \quad (37)$$

Cette contrainte assure que la somme des variables duales  $q_h$  et  $r_{jh}$  est au moins égale à la déviation extrême  $\hat{Rep}_{jh}$  de la production renouvelable, garantissant ainsi que les ajustements de la production prennent en compte les pires scénarios possibles.

Les modifications apportées aux contraintes dans le modèle robuste visent à intégrer explicitement l'incertitude et à renforcer la résilience du modèle face aux variations extrêmes. En introduisant des variables supplémentaires et en ajustant les contraintes existantes, le modèle robuste offre une solution plus fiable et plus stable, capable de résister aux aléas et aux fluctuations imprévisibles de la production et de la demande d'énergie. Ainsi, le modèle robuste ne se contente pas de réagir aux variations, mais anticipe activement les pires scénarios.

### 5.3 Résolution du problème

Maintenant que nous avons terminé de modéliser notre problème en adaptant le modèle déterministe à un modèle robuste, nous pouvons passer à sa résolution. Pour ce faire, nous utiliserons à nouveau Python et la bibliothèque PuLP, en adoptant une approche similaire à celle utilisée pour le modèle stochastique. Nous allons créer une fonction dédiée à la résolution de notre modèle robuste, ce qui nous permettra de tester facilement différentes valeurs de  $\Gamma$ . Cette démarche nous permettra d'évaluer le comportement et la performance du modèle en fonction de ce paramètre crucial. Nous implémenterons également une fonction "QualityTest" permettant d'évaluer notre modèle sur des données réaliste (voir partie 5.4.2). ***Il est important de noter que le code utilisé pour la résolution du modèle robuste a été écrit par notre professeur, M. Guillaume Ghienne.***

#### CODE PYTHON POUR MODÉLISATION ET RÉOLUTION DU MODÈLE ROBUSTE :

```
# Dans ce code, nous considérons que les donnees sont deja importees.

# Importation de la librairie PuLP
from pulp import *
```

```

def RobustEnergyDistributionModel(Gamma):

    # Deviation extreme de la puissance du REP
    Hat_Rep = (pd.DataFrame(Avg_Rep) * 0.4).to_dict()

    # Scenarios de deviation pour simuler un cout realiste
    Nb_Scenarios = 100
    Dev_Rep = {}
    for n in range(Nb_Scenarios):
        for j in J:
            for h in H:
                Dev_Rep[(n,j,h)] = np.random.normal(0, 0.2*Avg_Rep[j][h])

    # Creation des variables de decisions
    X = LpVariable.dicts("X", (I, H), cat=LpBinary)
    A = LpVariable.dicts("A", (I, H[1:]), cat=LpBinary)
    S = LpVariable.dicts("S", (I, H[1:]), cat=LpBinary)
    P = LpVariable.dicts("P", (I, H[1:]), lowBound=0, cat=LpContinuous)
    Achats = LpVariable.dicts("Achats", (H[1:]), lowBound=0, cat=LpContinuous)
    Ventres = LpVariable.dicts("Ventres", (H[1:]), lowBound=0, cat=LpContinuous)
    # Variables induit par le robuste
    r = LpVariable.dicts("r", (J,H[1:]), lowBound=0, cat=LpContinuous)
    q = LpVariable.dicts("q", (H[1:]), lowBound=0, cat=LpContinuous)

    # Initialisation du probleme
    prob = LpProblem("EnergyDistributionProblem", LpMinimize)

    # Fonction objective
    prob += lpSum(lpSum(X[i][h] * CU[i] + A[i][h] * CD[i] + CP[i] * P[i][h] for i
    in I) + Achats[h] * PA - Ventres[h] * PV for h in H[1:])

    # Contraintes 0 : Initialisation des generateurs a l'heure 0
    for i in I:
        # Initialisation des X
        X[i][0] = E[i]
        # Initialisation des P
        prob += P[i][0] >= Pmin[i] * X[i][0]
        prob += P[i][0] <= Pmax[i] * X[i][0]

    # Contrainte 1 : Duree minimal de fonctionnement consecutif des generateurs
    for i in I:
        for h0 in H:
            prob += lpSum(X[i][h] for h in range(h0,min(h0+UT[i], 24))) >= min(UT
            [i], 24-h0) * A[i][h0]

    # Contrainte 2 : Duree de refroidissement minimal des generateurs
    for i in I:
        for h0 in H:
            prob += lpSum(1 - X[i][h] for h in range(h0, min(h0 + DT[i], 24))) >=
            min(DT[i], 24-h0) * S[i][h0]

    # Contraintes 3 : Limites (maximales et minimales) de puissance des
    generateurs
    for i in I:
        for h in H:
            # Limite minimale
            prob += P[i][h] >= Pmin[i] * X[i][h]
            # Limite maximale
            prob += P[i][h] <= Pmax[i] * X[i][h]

```

```

# Contraintes 4 : Variations maximales de la puissance des generateurs entre
deux heures consecutives
for i in I:
    for h in H:
        # Limite de diminution
        prob += P[i][h-1] - P[i][h] <= SD[i] * S[i][h] + RD[i] * X[i][h]
        # Limite d'augmentation
        prob += P[i][h] - P[i][h-1] <= SU[i] * A[i][h] + RU[i] * X[i][h-1]

# Contraintes 5 : Gestion des changements d'etats des generateurs
for i in I:
    for h in H:
        # Changements d'etats
        prob += X[i][h] - X[i][h-1] == A[i][h] - S[i][h]
        # Non-simultaneite positive des changements d'etats
        prob += A[i][h] + S[i][h] <= 1

# Contrainte 6 : Couverture robuste des operations sur le marche de l'energie
avec satisfaction de la demande pour toutes les simulations
for h in H:
    prob += Achats[h] - Ventes[h] + lpSum(P[i][h] for i in I) + lpSum(Avg_Rep
[j][h] for j in J) >= D[h] + Gamma * q[h] + lpSum(r[j][h] for j in J)

# Contrainte 7 : Contrainte associee au dual
for h in H:
    for j in J:
        prob += q[h] + r[j][h] >= Hat_Rep[j][h]

# Resolution du probleme
prob.solve()

# Fonction permettant de simulee le cout
def Quality_Test():
    cost = 0
    for k in range(Nb_Scenarios):
        for h in H[1:]:
            cost += sum(X[i][h].varValue * CU[i] + A[i][h].varValue * CD[i] +
CP[i] * P[i][h].varValue for i in I)
            production = sum(P[i][h].varValue for i in I) + sum(Avg_Rep[j][h
]+Dev_Rep[k,j,h] for j in J)
            if production > D[h]:
                cost -= (production-D[h])*PV
            else:
                cost += (D[h]-production)*PA
    return cost/Nb_Scenarios

# Fonction pour verifier et extraire la valeur de la variable
def get_var_value(var):
    return var.varValue if hasattr(var, 'varValue') else var

# Extraction des resultats
result = {
    "execution_time": prob.solutionTime,
    "objective" : value(prob.objective),
    "simulatedCost" : quality_test(),
    "h": H,
    "Ventes": [get_var_value(Ventes[h]) for h in H],
    "Achats": [get_var_value(Achats[h]) for h in H],

```

```

    "B": [PA * get_var_value(Achats[h]) - PV * get_var_value(Ventes[h]) for h
in H]
    "X": {i: [get_var_value(X[i][h]) for h in H] for i in I},
    "A": {i: [get_var_value(A[i][h]) for h in H] for i in I},
    "S": {i: [get_var_value(S[i][h]) for h in H] for i in I},
    "P": {i: [get_var_value(P[i][h]) for h in H] for i in I},
    "r": {j: [get_var_value(r[j][h]) for h in H] for j in J},
    "q": [get_var_value(q[h]) for h in H]
}

return result

```

## 5.4 Analyse des résultats

Dans cette partie d'analyse de notre modèle robuste, nous explorons en détail l'impact du paramètre  $\Gamma$  sur les variables de décision clés ainsi que sur l'évaluation globale de notre modèle.  $\Gamma$  joue un rôle crucial dans la gestion des incertitudes et nous permet d'adapter nos décisions en fonction du niveau de risque acceptable. Nous examinons également comment le modèle robuste se compare aux autres approches, notamment au modèles déterministes et stochastiques. Cette comparaison nous permet de mesurer la performance de notre modèle face à la variabilité des conditions réelles et de déterminer son efficacité dans la prise de décision sous incertitude. Pour information, le temps de calcul du problème robuste est en moyenne de 3,02 secondes.

### 5.4.1 Analyse des résultats en fonction de $\Gamma$

Avant toute analyse de résultats en fonction de *Gamma*, regardons la probabilité en  $\Gamma$ . Cela nous permettra de commencer ces analyses avec un peu de contexte quand à la probabilité d'appartenance de certains événements mais également dans le choix final de notre *Gamma*.

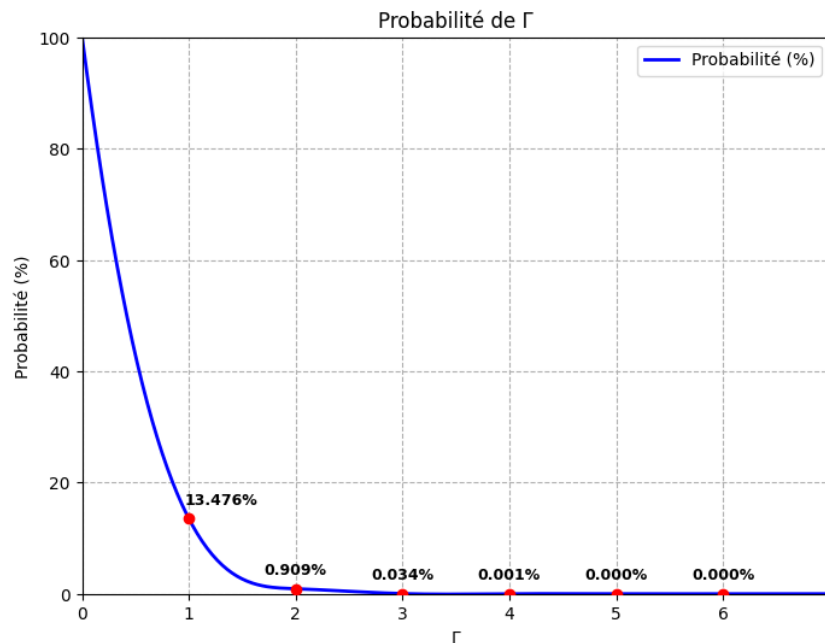


FIGURE 21 – Probabilité de  $\Gamma$

La figure ci-dessus présente la probabilité des situations utilisées pour entraîner notre modèle en fonction de  $\Gamma$ , qui varie de 0 à 7 pour notre modèle robuste. Cette visualisation nous permet

d'évaluer la fréquence à laquelle différentes valeurs de  $\Gamma$  se produisent au sein de nos simulations.  $\Gamma$  est un paramètre critique dans notre modèle, influençant les décisions prises en fonction de la probabilité associée à chaque niveau. En analysant cette distribution, nous remarquons que les valeurs de  $\Gamma$  inférieures à 2 ont une probabilité significativement plus élevée, tandis que pour  $\Gamma$  égal ou supérieur à 2, cette probabilité est inférieure à 1%. Cela indique que les scénarios avec un  $\Gamma$  élevé sont très peu probables et ont un impact moins fréquent sur notre production effective. Cependant, en entraînant notre modèle pour des  $\Gamma$  élevés, nous pourrions compromettre la précision de la solution pour des situations qui ont presque aucune chance de se produire. Notre objectif dans cette analyse est donc de sélectionner le  $\Gamma$  optimal qui permet de considérer la majorité des situations, assurant ainsi la robustesse face à l'aléa tout en visant la meilleure solution en termes de coût. Pour approfondir notre compréhension, examinons également les valeurs prises par la fonction objective en fonction de  $\Gamma$ , afin de mieux comprendre l'impact de ce paramètre sur les coûts.

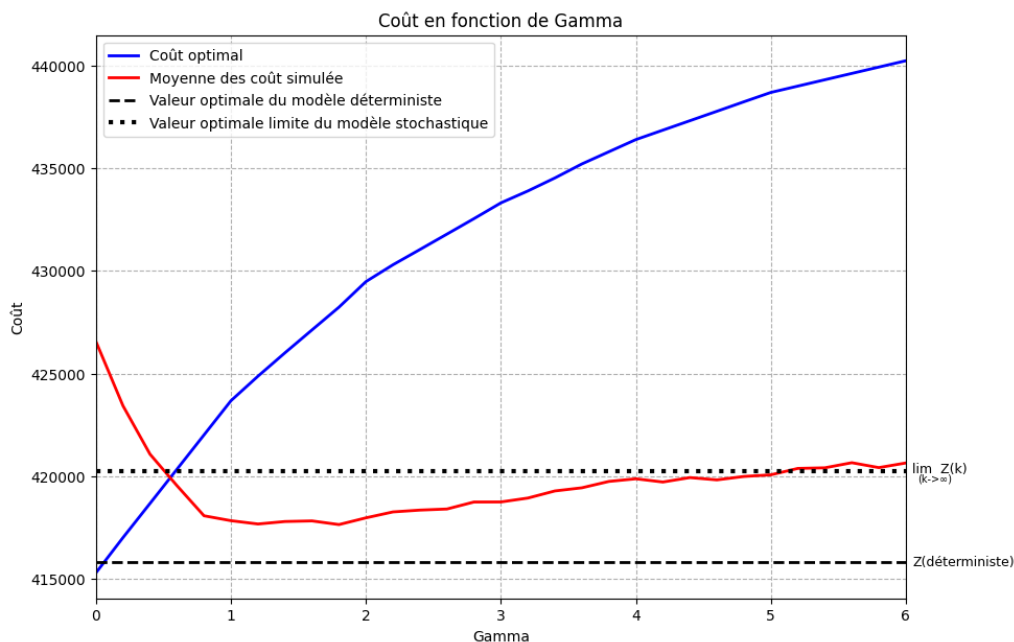


FIGURE 22 – Valeurs de la fonction objective en fonction de  $\Gamma$

La figure ci-dessus présente l'évolution du coût total en fonction du paramètre  $\Gamma$ . Comme observé, à mesure que  $\Gamma$  augmente, le coût total augmente également. Cependant, la courbe cruciale pour évaluer la qualité du modèle en fonction de  $\Gamma$  est la courbe rouge, représentant les coûts réels simulés en fonction de  $\Gamma$ . Nous constatons que pour des valeurs de  $\Gamma$  inférieures à 5, le modèle robuste surpasse le modèle stochastique. Néanmoins, cette courbe seule ne permet pas de déterminer le coût supplémentaire pour le gain en robustesse associé. Pour une analyse plus approfondie, examinons la courbe ci-dessous.

La figure 23 ci-dessous nous présente les coûts associés à chaque probabilité de  $\Gamma$ . Elle permet de visualiser rapidement le coût supplémentaire engendré pour renforcer la robustesse de notre modèle. Cette analyse est essentielle pour comprendre l'impact d'une sur-robustesse sur les coûts et souligne l'importance de choisir soigneusement ce paramètre en fonction des objectifs spécifiques que l'on souhaite atteindre. Pour mieux comprendre l'impact du paramètre  $\Gamma$  sur la puissance des générateurs, vous pouvez regarder la figure ci-dessous.



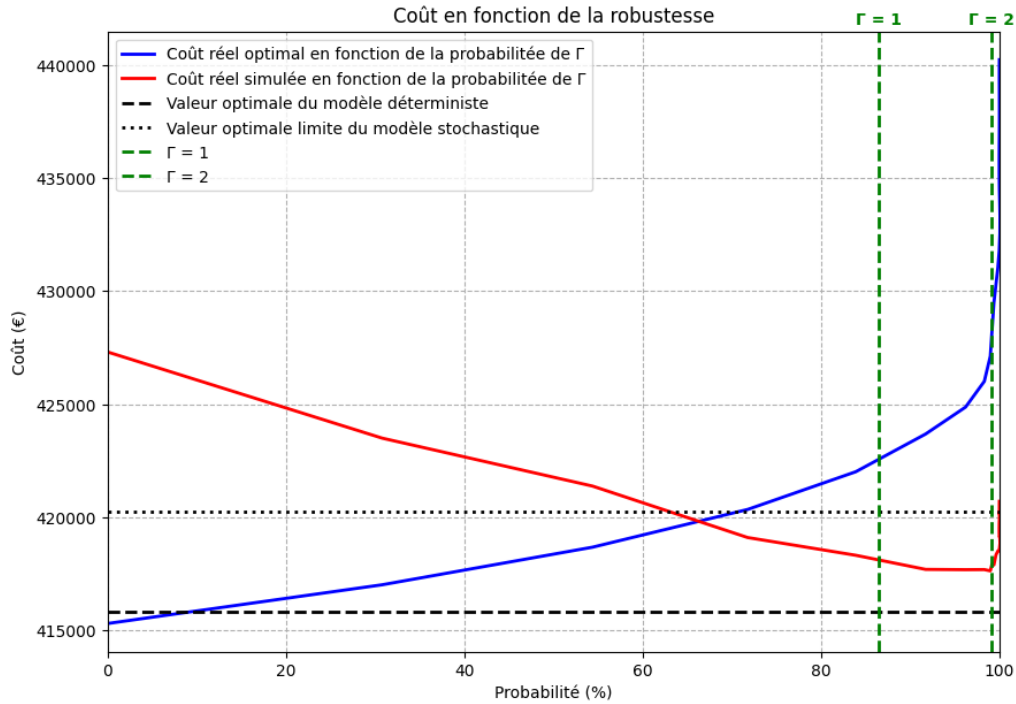


FIGURE 23 – Coût en fonction de la robustesse

#### 5.4.2 Évaluation du modèle robuste

Pour garantir la qualité et la robustesse des solutions de notre modèle robuste, nous avons intégré la fonction ‘QualityTest’ (fonction ayant servie à créer les courbes de coût simulée), qui joue un rôle crucial dans l’évaluation de la performance optimisée. Elle teste la solution face à des variations aléatoires et calcule le coût total moyen sur divers scénarios simulés pour mesurer sa capacité à gérer les incertitudes et les déviations des données d’entrée.

La fonction ‘QualityTest’ remplit deux objectifs principaux. Premièrement, elle évalue la robustesse de la solution du modèle en simulant divers scénarios de déviation et en calculant le coût moyen, ce qui permet de mesurer sa performance dans des conditions variées et imprévues. Deuxièmement, elle sert de mécanisme de validation pour garantir que la solution optimisée est efficace non seulement dans les conditions optimales mais aussi dans des scénarios plus réalistes et variés. Cette intégration assure que notre modèle peut prendre des décisions robustes malgré les aléas associés à la production d’énergie renouvelable et à la demande d’énergie.

La méthodologie d’évaluation via ‘QualityTest’ comprend plusieurs étapes. Nous générons une gamme étendue de scénarios aléatoires basés sur les variations possibles des paramètres de production d’énergie renouvelable, représentant ainsi les conditions potentielles rencontrées par le modèle. Chaque scénario est évalué avec la solution optimisée pour calculer le coût total, fournissant une mesure précise de la robustesse de la solution. Nous comparons ensuite les résultats avec ceux du modèle déterministe pour évaluer les avantages de notre approche robuste en termes de gestion des incertitudes et des coûts associés.

En observant la figure 20, il est clair que le coût de notre modèle est significativement supérieur à celui du modèle déterministe optimal pour des valeurs de  $\Gamma$  inférieures à 1. À partir

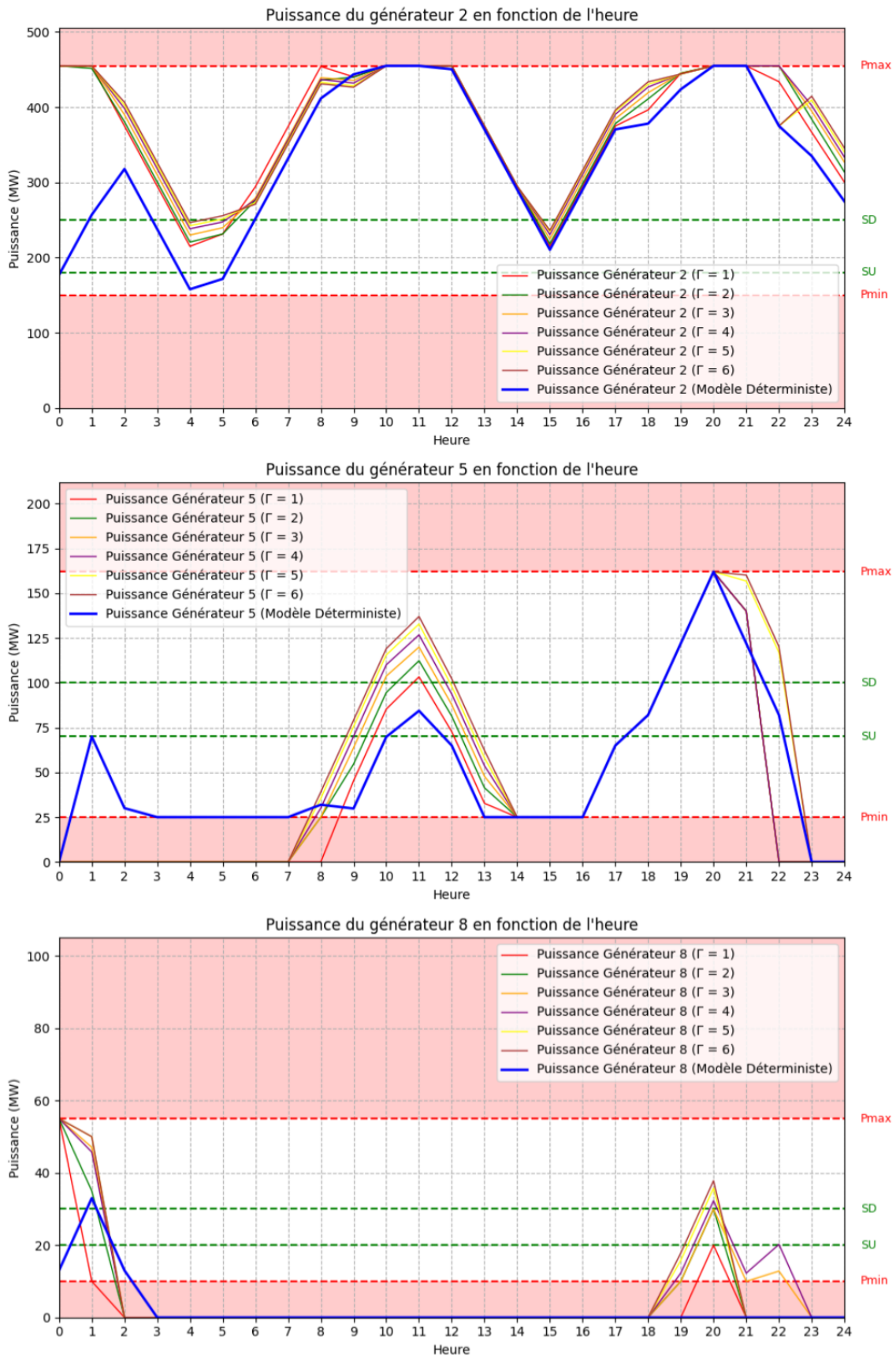


FIGURE 24 – Puissance des générateurs 2, 5 et 9 au cours de la journée en fonction de  $\Gamma$

de  $\Gamma = 1$ , le coût simulé se situe entre le coût optimal du modèle déterministe et la limite de coût du modèle stochastique. Cette observation indique que notre modèle robuste maintient une cohérence et une robustesse dans ses résultats. Pour  $\Gamma = 2$ , qui couvre 99% des scénarios aléatoires, nous constatons une augmentation de seulement 2500 euros par rapport au modèle déterministe optimal, démontrant ainsi un compromis efficace entre robustesse et coût supplémentaire.

En conclusion, l'analyse révèle que notre modèle robuste maintient une performance stable et fiable dans des conditions variées, tout en optimisant les coûts et en minimisant les risques associés à l'incertitude.

### 5.4.3 Comparaison entre le modèle robuste et le modèle stochastique

Pour comparer notre modèle robuste à notre modèle stochastique, nous examinons plusieurs aspects cruciaux de leur performance. Le modèle robuste intègre des mécanismes pour gérer efficacement les incertitudes et les variations des paramètres, assurant ainsi une adaptation dynamique aux conditions changeantes. En revanche, le modèle stochastique prend en compte ces incertitudes de manière probabiliste, permettant une évaluation plus réaliste des décisions à prendre.

Le modèle robuste se distingue par sa capacité à maintenir des performances optimales dans une gamme plus large de conditions, grâce à son approche flexible et adaptative. En revanche, le modèle stochastique, bien qu'il offre une représentation plus fidèle des risques et des aléas, peut parfois nécessiter des ressources computationnelles plus importantes en raison du nombre élevé de simulations nécessaires pour évaluer les scénarios probabilistes.

En résumé, le choix entre le modèle robuste et le modèle stochastique dépend des priorités spécifiques du problème à résoudre : le premier pour une robustesse étendue avec une gestion proactive des incertitudes, et le second pour une modélisation précise des distributions probabilistes associées aux événements aléatoires.

## 6 Conclusion

En conclusion, notre étude a exploré trois approches distinctes pour la gestion optimale de la production d'énergie, chacune avec ses avantages et ses limites spécifiques. Le modèle déterministe, bien que simplifié et efficace pour des conditions stables et prévisibles, s'avère souvent insuffisant face aux variations et aux incertitudes réelles présentes dans les systèmes énergétiques contemporains. En revanche, le modèle stochastique offre une représentation plus fidèle des aléas, permettant une prise de décision plus informée en intégrant la probabilité dans les calculs d'optimisation.

Notre approche robuste, quant à elle, vise à combiner le meilleur des deux mondes en intégrant la gestion proactive des incertitudes tout en maintenant une efficacité calculatoire raisonnable. Ce modèle s'est révélé particulièrement adapté pour optimiser les coûts de production tout en assurant une couverture robuste de la demande, même face à des scénarios extrêmes et peu probables.

En participant à cette unité d'enseignement sur l'optimisation dans l'incertain, nous avons acquis une compréhension approfondie des défis et des stratégies pour modéliser et résoudre des problèmes réels sous incertitude. L'importance de considérer les variations et les risques dans les décisions stratégiques a été clairement démontrée à travers nos analyses et nos résultats. Cette expérience enrichissante nous a permis de développer des compétences précieuses en matière de modélisation, d'analyse et d'optimisation, essentielles pour aborder les défis complexes du monde réel.

Enfin, cette étude nous rappelle l'importance de choisir le bon modèle en fonction des objectifs spécifiques du problème, tout en tenant compte des compromis entre précision, robustesse et efficacité computationnelle. Ces apprentissages seront essentiels pour notre parcours professionnel dans le domaine de l'ingénierie des systèmes énergétiques et pour notre contribution à la transition vers un avenir énergétique durable et résilient.