

Laboratorium ochrony danych

Ćwiczenie nr 2

Temat ćwiczenia: Ciała skończone rozszerzone

Cel dydaktyczny: Opanowanie programowej metody konstruowania ciał skończonych rozszerzonych $GF(p^m)$, poznanie ich własności oraz techniki wykonywania działań na elementach tych systemów algebraicznych.

Wprowadzenie teoretyczne

W algebrze ciał skończonych ciała rozszerzone $GF(q)$ można konstruować nad ciałami prostymi $GF(p)$ lub ciałami rozszerzonymi niższego stopnia. Liczba elementów q ciała rozszerzonego $GF(q)$ nad ciałem prostym $GF(p)$ wynosi $q = p^m$, gdzie m jest *stopniem rozszerzenia*. Ciała rozszerzone nie są ciałami liczbowymi, a ich elementy oznaczamy zwykle za pomocą symboli nieliczbowych.

W przypadku ciał skończonych do konstrukcji ciał rozszerzonych stosuje się wielomiany pierwotne. Wtedy pierwiastek wielomianu pierwotnego α jest elementem pierwotnym ciała, a niezerowe elementy ciała rozszerzonego w postaci mnożeniu zapiszemy jako potęgi elementu pierwotnego. Na przykład elementami ciała rozszerzonego $GF(q)$ będą: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}$. Konstrukcja ciała rozszerzonego ma na celu wyznaczenie tabliczek dodawania i mnożenia ciała rozszerzonego.

Postać mnożeniowa elementów ciała skończonego pozwala wyznaczyć iloczyn dwóch dowolnych elementów ciała. Iloczyn dwóch elementów ciała skończonego α^i i α^j wynosi

$$\alpha^i \cdot \alpha^j = \alpha^{i+j \pmod{q-1}}.$$

Obliczając iloczyny dla kolejnych elementów ciała, można wyznaczyć całą tabliczkę mnożenia.

Aby wyznaczyć tabliczkę dodawania, należy zapisać elementy ciała skończonego w postaci addytywnej. Może to być postać macierzowa, wektorowa lub wielomianowa.

Sposób obliczania elementów ciała rozszerzonego w postaci wektorowej oraz tabliczek działań pokażemy na przykładzie ciała $GF(2^3) = GF(8)$ generowanego przez wielomian pierwotny $p(x)$ trzeciego stopnia nad $GF(2)$, gdzie:

$$p(x) = x^3 + x + 1.$$

Wielomian ten umożliwia konstrukcję ciała rozszerzonego $GF(2^3)$ zawierającego osiem elementów. Niżej przedstawimy metodę wyznaczania elementów ciała rozszerzonego $GF(2^3)$ w postaci addytywnej za pomocą wektorów.

Wektorowa postać elementów ciała rozszerzonego jest wygodna, gdy konstruujemy ciało metodami programowymi. W celu wyznaczenia wektorowej postaci elementów ciała skończonego $GF(8)$ wykorzystujemy sekwencję pseudolosową generowaną przez wielomian pierwotny służący do konstrukcji ciała rozszerzonego. Aby wygenerować sekwencję okresową, piszemy zależność rekurencyjną stowarzyszoną z wielomianem

$$s_{j+3} = s_j + s_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Zakładając ciąg początkowy 100, otrzymamy następującą sekwencję pseudolosową

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ \dots$$

Zastosowany wielomian daje rozszerzenie trzeciego stopnia, dlatego też wektory odpowiadające elementom ciała rozszerzonego będą zawierały po trzy współrzędne. Biorąc kolejne grupy trzejelementowe, z powyższej sekwencji pseudolosowej otrzymamy elementy ciała rozszerzonego w postaci wektorowej:

$$0 = [0\ 0\ 0], \quad 1 = [1\ 0\ 0], \quad \alpha = [0\ 0\ 1], \quad \alpha^2 = [0\ 1\ 0],$$

$$\alpha^3 = [1\ 0\ 1], \quad \alpha^4 = [0\ 1\ 1], \quad \alpha^5 = [1\ 1\ 1], \quad \alpha^6 = [1\ 1\ 0].$$

Zbiór wektorów jest uzupełniany wektorem zerowym.

Posługując się elementami ciała w postaci wektorowej, można wyznaczyć sumę dowolnych elementów ciała oraz całą tabliczkę dodawania. Na przykład suma dwóch elementów ciała α^2 i α^3 wynosi

$$\alpha^2 + \alpha^3 = [010] + [101] = [111] = \alpha^5.$$

Współrzędne sumujemy modulo 2. Tabliczki mnożenia i dodawania elementów w ciele rozszerzonym $GF(2^3) = GF(8)$ pokazano poniżej.

Tabliczki mnożenia i dodawania ciała $GF(8)$

·	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
α	0	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1
α^2	0	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α
α^3	0	α^3	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2
α^4	0	α^4	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3
α^5	0	α^5	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4
α^6	0	α^6	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5

+	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
0	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6
1	1	0	α^3	α^6	α	α^5	α^4	α^2
α	α	α^3	0	α^4	1	α^2	α^6	α^5
α^2	α^2	α^6	α^4	0	α^5	α	α^3	1
α^3	α^3	α	1	α^5	0	α^6	α^2	α^4
α^4	α^4	α^5	α^2	α	α^6	0	1	α^3
α^5	α^5	α^4	α^6	α^3	α^2	1	0	α
α^6	α^6	α^2	α^5	1	α^4	α^3	α	0

W ciałach charakterystyki 2 (postaci $GF(2^m)$) mamy $-\alpha^i = \alpha^i$, czyli element przeciwny do danego elementu jest równy temu elementowi.

Dla ciał charakterystyki $p > 2$ element przeciwny do α^i wynosi:

$$-\alpha^i = \alpha^{i+(q-1)/2}.$$

Dla każdego elementu ciała można wyznaczyć wielomian minimalny. Wielomianem minimalnym $m_i(x)$ elementu ciała α^i jest wielomian najniższego stopnia taki, że α^i jest pierwiastkiem tego wielomianu

$$m_i(\alpha^i) = 0.$$

Generalnie wielomian minimalny stopnia k nad $GF(q)$ ma następujące pierwiastki:

$$\alpha^i, \alpha^{ip}, \alpha^{ip^2}, \dots, \alpha^{ip^{k-1} \pmod{(q-1)}}.$$

Elementy tego ciągu są nazywane elementami sprzężonymi i mają taki sam rząd modyfikacyjny. Posługując się powyższym ciągiem, można rozbić na warstwy cyklotomiczne niezerowe elementy każdego ciała rozszerzonego. Aby utworzyć te warstwy, bierzemy kolejne elementy ciała, które nie występują w warstwach poprzednich. Pierwszą warstwę tworzy element 1. Dla ciała $GF(2^4) = GF(16)$, utworzonego z wielomianu $p(x) = x^4 + x + 1$, otrzymamy następujące warstwy cyklotomiczne ($q = 16$; $q-1 = 15$):

$$\begin{aligned} &1; \\ &\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8; \\ &\alpha^3, \alpha^6, \alpha^{12}, \alpha^9; \\ &\alpha^5, \alpha^{10}; \\ &\alpha^7, \alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^{11}. \end{aligned}$$

Każda z tych warstw odpowiada jednemu wielomianowi minimalnemu, którego pierwiastkami będą elementy warstwy. W powyższym przykładzie warstwa druga, trzecia i piąta utworzą wielomiany czwartego stopnia, warstwa czwarta wielomian drugiego stopnia, a jedynka, znajdująca się w warstwie pierwszej, utworzy wielomian pierwszego stopnia.

Znajomość rozkładu pierwiastków na warstwy cyklotomiczne pozwala obliczyć wielomiany minimalne elementów ciała. Jeśli znamy pierwiastki wielomianu x_1, x_2, \dots, x_n , to wielomian można obliczyć ze znanego w algebrze wzoru

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

W ciałach charakterystyki 2 odejmowanie zastępuje się dodawaniem. Dla przykładu wielomian minimalny elementu α^3 ciała $GF(2^4)$

$$m_3(x) = (x + \alpha^3)(x + \alpha^6)(x + \alpha^{12})(x + \alpha^9).$$

Obliczenie powyższego iloczynu wymaga znajomości elementów ciała w postaci addytywnej lub tabliczki dodawania. Po wymnożeniu pojawiają się sumy elementów ciała, które można obliczyć na podstawie tabelki dodawania, np.

$$m_3(x) = (x + \alpha^3)(x + \alpha^6)(x + \alpha^{12})(x + \alpha^9) = (x^2 + (\alpha^3 + \alpha^6)x + \alpha^9)(x + \alpha^{12})(x + \alpha^9).$$

Programową realizację dodawania w ciałach skończonych ułatwiają Logarytmy Zecha. Przyjmujemy, że elementy ciała skończonego $GF(q)$ charakterystyki p wyrażamy za pomocą potęg elementu pierwotnego α : $0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}$. Wykładniki potęg są liczbami całkowitymi liczonymi modulo $(q-1)$. Element zerowy w postaci potęgowej można zapisać za pomocą symbolu $\alpha^{-\infty} = 0$.

Logarytm Zecha oznaczamy przez $Z(x)$ i definiujemy za pomocą równania

$$\alpha^{Z(x)} = \alpha^x + 1.$$

Dla ciał charakterystyki 2: $Z(0) = -\infty$, a $Z(-\infty) = 0$.

Dla ciał charakterystyki $p > 2$: $Z((q-1)/2) = -\infty$, a $Z(-\infty) = 0$.

Dodawanie z wykorzystaniem logarytmu Zecha wykonuje się następująco ($y \geq x$):

$$\alpha^x + \alpha^y = \alpha^x (1 + \alpha^{y-x}) = \alpha^{x+Z(y-x)}.$$

Dla ($x \geq y$) zamienia się zmienne x, y . Wynik dodawania nie zmienia się.

Implementacja tej metody dodawania wymaga, aby utworzyć tablice logarytmów Zecha albo na bieżąco obliczać wartości logarytmów Zecha.

Logarytmy Zecha dla danego ciała można obliczać z wielomianu generującego ciało (zobacz tabela logarytmów Zecha), np. dla $GF(2^2) = GF(4)$ z $p(x) = x^2 + x + 1$, dla $GF(2^3) = GF(8)$ z $p(x) = x^3 + x + 1$, dla $GF(2^4) = GF(16)$ z $p(x) = x^4 + x + 1$, oraz zależności:

$$Z((q-1-x)p^i \bmod (q-1)) = (Z(x)-x)p^i \bmod (q-1),$$

$$Z(xp^i \bmod (q-1)) = Z(x)p^i \bmod (q-1).$$

Logarytmy Zecha dla ciał charakterystyki dwa

q	Logarytmy Zecha dla $x = 1, 2, \dots, q-2$														
4	2 1														
8	3	6	1	5	4	2									
16	4	8	14	1	10	13	9	2	7	5	12	11	6	3	
32	20	9	26	18	8	21	29	5	2	16	12	11	17	27	25
	10	13	4	30	1	6	24	28	22	15	3	14	23	7	19
64	6	12	32	24	62	1	26	48	45	61	25	2	35	52	23
	33	47	27	56	59	42	50	15	4	11	7	18	41	60	46
	34	3	16	31	13	54	44	49	43	55	28	21	39	37	9
	30	17	8	38	22	53	14	51	36	40	19	58	57	20	29
	10	5													

Aby było możliwe zastosowanie komputerowych technik obliczeniowych w tej dziedzinie, należy przedstawić elementy ciała w postaci liczbowej i określić działania na tych liczbach.

W tym celu można przyjąć odwzorowanie zbioru elementów ciała $GF(q)$ na q -elementowy zbiór całkowitych liczb dodatnich:

$$\sigma: \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\}.$$

Odwzorowanie to określa funkcja:

$$\sigma(\alpha^x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } \alpha^x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } \alpha^x = 0. \end{cases}$$

Tak więc zerowy element ciał odwzorowuje się na zero, a elementy niezerowe α^x odwzorowują się na liczby równe $x+1$. Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne i izomorficzne.

Dla odwzorowania σ istnieje odwzorowanie odwrotne σ^{-1}

$$\sigma^{-1}: \{0, 1, 2, 3, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{q-2}\},$$

przy czym dla $x = 0, 1, 2, \dots, q-1$ jest:

$$\sigma^{-1}(x) = \begin{cases} \alpha^{x-1} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Dla większości zastosowań wystarczy zdefiniować cztery funkcje (dla $x \geq y$; w przeciwnym wypadku zamienia się zmienne x, y):

Sumę: $S(x, y)$.

Element przeciwny: $OE(x)$.

Iloczyn: $P(x, y)$.

Element odwrotny: $IE(x)$.

Po uwzględnieniu odwzorowania σ można obliczyć te cztery funkcje:

$$S(x, y) = \begin{cases} (y + Z(x - y) - 1) \bmod (q - 1) + 1 & \text{dla } x, y \neq 0 \text{ i } x > y, \\ x + y & \text{dla } x = 0 \text{ lub } y = 0, \\ 0 & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } y = OE(x), \end{cases}$$

$$OE(x) = \begin{cases} (x + (q - 1)/2) \bmod (q - 1) & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } p > 2, \\ x & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } p = 2, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 + (x + y - 2) \bmod (q - 1) & \text{dla } x > 0 \text{ i } y > 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \text{ lub } y = 0, \end{cases}$$

$$IE(x) = \begin{cases} q + 1 - x & \text{dla } x > 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

W ciałach charakterystyki 2 dla elementu przeciwnego zachodzi: $y = OE(x) = x$.

Do obliczenia sumy $S(x, y)$ wykorzystuje się logarytmy Zecha. Za pomocą powyższych wzorów można w dowolnym języku programowania napisać procedury realizujące algorytmy działań w rozszerzonych ciałach skończonych.

Przykład

Rozważamy ciało rozszerzone $GF(p^m) = GF(2^2) = GF(4) = GF(q)$, utworzone z wykorzystaniem wielomianu pierwotnego $p(x) = x^2 + x + 1$ nad $GF(2) = GF(p)$, gdzie $q = p^m$, $p = 2$, $m = 2$, $q = 4$.

Równanie rekurencyjne i sekwencja okresowa stowarzyszone z wielomianem $p(x) = x^2 + x + 1$:

$$x^2 + x + 1 = 0,$$

$$x^2 = -x - 1,$$

$$x^2 = x + 1.$$

Równanie rekurencyjne:

$$S_{j+2} = S_{j+1} + S_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$S_0 = 1, S_1 = 0,$$

$$\begin{array}{cccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Elementy ciała rozszerzonego $GF(4) = \{0, 1, \alpha^1, \alpha^2\}$:

$$0 = [0 \ 0], \quad 1 = [1 \ 0], \quad \alpha = [0 \ 1], \quad \alpha^2 = [1 \ 1].$$

Odwzorowanie elementów ciała na wartości liczbowe $x = 0, 1, 2, 3$ używane w programie:

$$\sigma: \{0, 1, \alpha^1, \alpha^2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}.$$

Wartości logarytmów Zecha obliczone z wielomianu $p(x) = x^2 + x + 1$ dla $q = 4$ (podane w Tabeli dla $q = 4$).

$$\text{Dla } x = 1; \quad Z(1) = 2$$

$$\text{Dla } x = 2; \quad Z(2) = 1.$$

Tabliczka dodawania elementów w ciele $GF(4)$ wyznaczona z postaci wektorowej elementów ciała:

+	0	1	α^1	α^2
0	0	1	α^1	α^2
1	1	0	α^2	α^1
α^1	α^1	α^2	0	1
α^2	α^2	α^1	1	0

$$1 + 1 = [1 \ 0] + [1 \ 0] = [0 \ 0],$$

$$1 + \alpha^1 = [1 \ 0] + [0 \ 1] = [1 \ 1] = \alpha^2,$$

$$1 + \alpha^2 = [1 \ 0] + [1 \ 1] = [0 \ 1] = \alpha^1,$$

Te same obliczenia można wykonać z wykorzystaniem logarytmów Zecha przyjmując:

$$x, y \in \{0, 1, 2, 3\} \text{ oraz wzór na sumę elementów } x + y \text{ dla } x \geq y:$$

$$S(x, y) = \begin{cases} (y + Z(x - y) - 1) \bmod (q - 1) + 1 & \text{dla } x, y \neq 0 \text{ i } x > y, \\ x + y & \text{dla } x = 0 \text{ lub } y = 0, \\ 0 & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } y = OE(x). \end{cases}$$

Mamy:

$$\text{dla } x = 2; \quad y = 1;$$

$$S(x, y) = S(2, 1) = [1 + Z(1) - 1] \bmod 3 + 1 = 2 + 1 = 3;$$

dla $x = 3; y = 1;$

$$S(x, y) = S(3, 1) = [1 + Z(2) - 1] \bmod 3 + 1 = 1 + 1 = 2;$$

dla $x = 3; y = 3;$

$$S(x, y) = S(3, 3) = 0;$$

dla $x = 1; y = 3;$

$$S(x, y) = S(1, 3) = S(3, 1) = 2.$$

W efekcie otrzymujemy następującą tabelkę dodawania $x + y$ w ciele $GF(4)$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Tabela mnożenia w $GF(4)$ wyznaczona z zależności:

$$\alpha^i \cdot \alpha^j = \alpha^{(i+j) \bmod (q-1)},$$

·	0	1	α^1	α^2
0	0	0	0	0
1	0	1	α^1	α^2
α^1	0	α^1	α^2	1
α^2	0	α^2	1	α^1

oraz zależności $P(x, y)$.

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Przebieg ćwiczenia

1. Napisać podprogram do wykonywania mnożenia w ciele $GF(p^m)$. Zastosować wzór $\alpha^i \cdot \alpha^j = \alpha^{i+j \pmod{(q-1)}}$. Wydrukować tabliczki mnożenia dla przypadku ciał $GF(2^3)$ i $GF(2^4)$. Na wydrukach zastąpić symbol α^i tekstem ai .
2. Napisać podprogram do wykonywania dodawania i mnożenia w ciele $GF(p^m)$ oraz sprawdzić jego działanie dla przypadku ciał $GF(2^2)$, $GF(2^3)$ i $GF(2^4)$. Zastosować logarytmy Zecha. Wartości logarytmów $Z(x)$ (dla $q = 4, 8, 16$; $x = 1, 2, \dots, q-2$) zdefiniować jako stałe w programie. Do obliczenia sumy $(x+y)$, gdzie elementy x i y są podawane z klawiatury oraz $x, y \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, wykorzystać wzór $S(x, y)$, a do obliczenia ich iloczynu wzór $P(x, y)$.
3. Wydrukować tabliczki mnożenia i dodawania w ciałach $GF(2^2)$, $GF(2^3)$ i $GF(2^4)$ w oparciu o podprogramy zrealizowane w zadaniu drugim.
4. Obliczyć wielomian czwartego stopnia elementów ciała $GF(2^4)$ utworzonego z wielomianu $x^4 + x + 1$. Wartości elementów x_1, x_2, x_3, x_4 są podawane przez użytkownika lub zdefiniowane jako stałe w programie.

$$m_i(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = \\ x^4 + [(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4)]x^3 + [(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4]x^2 + \\ [(x_3 + x_4)x_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3x_4]x + x_1x_2x_3x_4.$$

Na przykład, dla $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha^2$, $x_3 = \alpha^4$ i $x_4 = \alpha^8$ otrzymamy wielomian minimalny $m_1(x) = x^4 + x + 1$. Wykorzystać wzory na sumę, np. $x_1 + x_2 = S(x_1, x_2)$, oraz iloczyn, np. $x_1x_2 = P(x_1, x_2)$, dwóch elementów ciała $GF(2^4) = GF(16)$ oraz wartości logarytmów Zecha, dla $q = 16$, wyliczone z wykorzystaniem wielomianu $x^4 + x + 1$ i podane w tabeli. W tym przypadku wartości elementów wynoszą:

$$x_1 = \alpha = 2, x_2 = \alpha^2 = 3, x_3 = \alpha^4 = 5 \text{ i } x_4 = \alpha^8 = 9.$$

Wyświetlić finalną postać wielomianu. Na wydrukach zastąpić symbol α^i tekstem ai .

Zadania rozwiązać w dowolnym języku programowania. Zademonstrować działanie programów podczas laboratorium. Przysłać krótkie sprawozdanie zawierające wyniki testów funkcjonalnych opracowanych programów.