Sprawozdanie

P3.20 z analizy numerycznej

Obliczanie A^{-1} za pomocą rozkładu QR macierzy

Artur Derechowski
Mateusz Markiewicz

19 stycznia 2019

Spis treści

1 Wstęp

Macierzą odwrotną do A nazywamy macierz A^{-1} taką, że $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Jest kilka sposobów obliczania macierzy odwrotnej. W naszej pracowni przedstawiamy dwa z nich, czyli rozkład QR i rozkład LU, a następnie porównamy obie te metody.

1.1 Cel zadania

Zadanie zostało podzielone na dwie części. Wyznaczamy rozkład macierzy $A = QR$, gdzie Q jest macierzą ortogonalną, a R macierzą górnotrójkątną. Następnie wyznaczamy również rozkład macierzy $A = LU$, gdzie L i U są odpowiednio macierzami dolno i górnotrójkątnymi.
Następnie wykorzystujemy oba te rozkłady do policzenia macierzy odwrotnej do A i badamy je pod względem dokładności.

1.2 Streszczenie sprawozdania

Po teoretycznym wprowadzeniu do omawianego zagadnienia przejdziemy do opisu metod znajdowania A^{-1} opartych na rozkładach QR oraz LU. Przedstawimy algorytmu używane w tych metodach. Następnie zajmiemy się porównaniem tych metod, zarówno w sposób teoretyczny, jak i praktyczny. Porównamy zarówno dokładność obu tych metod, jak i ich numeryczną poprawność. Na końcu przedstawimy wnioski płynące z wyników obliczeń.

2 Opis teoretyczny problemu

2.1 Wprowadzenie do zagadnienia

Macierz A to prostokątna tablica danych jednego typu, w której każdy element numerowany jest za pomocą dwóch współrzędnych w następujący sposób:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Każda kolumna tej macierzy ma n elementów, a każdy wiersz m elementów, o takiej macierzy mówimy, że jest rozmiaru $n \times m$. Macierz, która ma tyle samo elementów w kolumnach i wierszach jest nazywana macierzą kwadratową o rozmiarze $n \times n$.

Mnożenie macierzy $A \cdot B$ zdefiniowane jest w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{bmatrix}$$

$$\text{gdzie } c_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Warto zauważyć, że aby mnożenie macierzy A i B było możliwe muszą być one odpowiednich rozmiarów. Dla macierzy A rozmiaru $n \times m$ macierz B musi być rozmiaru $m \times p$ dla powolnego p. Macierz wynikowa C jest wówczas rozmiaru $n \times p$.
Mnożenie macierzy nie jest przemienne, czyli $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Macierzą jednostkową (identycznościową, tożsamościową) I nazywamy macierz rozmiaru $n \times n$ zawierającą 1 na przekątnej oraz 0 na pozostałych współrzędnych.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Dla danej macierzy A określamy A^T, czyli **macierz transponowaną** macierzy A w następujący sposób:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierzą dolnotrójkątną L lub **macierzą górnotrójkątną** U nazywamy macierz, której współczynniki odpowiednio nad lub pod główną przekątną wynoszą 0.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz A jest **macierzą ortogonalną**, gdy spełnione jest równanie $A \cdot A^T = I = A^T \cdot A$, czyli jeśli jej transpozycja jest równocześnie jej macierzą odwrotną.

2.2 Poszukiwanie A^{-1}

Problem znalezienia **macierzy odwrotnej** A^{-1} dla danej macierzy A jest ważnym zagadnieniem z powodu użyteczności macierzy odwrotnej w wielu zagadnieniach. Macierz odwrotna do macierzy A może istnieć tylko, gdy A jest macierzą kwadratową, ale nie jest to warunkiem wystarczającym do istnienia A^{-1}. Warunkiem koniecznym jest również to, by macierz A była nieosobliwa, czyli $det(A) \neq 0$, gdzie $det(A)$ to wyznacznik macierzy A. Jeśli A^{-1} dla danej macierzy A istnieje mówimy, że A jest odwracalna. W przeciwnym przypadku A jest macierzą nieodwracalną.
Macierz odwrotna spełnia następujące własności:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$
$$I^{-1} = I$$

Szukanie A^{-1} jest trudnym problemem, do którego rozwiązania opracowane zostały różne metody. My omówimy dwie z nich. Pierwsza wykorzystuje rozkład $A = QR$ macierzy, a druga rozkład $A = LU$ macierzy A.

3 Rozkład QR

3.1 Wstęp

Daną macierz A można jednoznacznie rozłożyć na iloczyn macierzy Q i R, takich, że $A = Q \cdot R$, gdzie Q jest macierzą ortogonalną ($Q \cdot Q^T = I$), a R jest macierzą górnotrójkątną.

Dzięki temu można łatwo rozwiązać układ równań $Ax = b$:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ QRx &= b \\ Rx &= Q^T b \end{aligned}$$

Gdy układ równań jest trójkątny, kolejne zmienne można wyznaczyć podstawieniami w sumarycznym czasie $O(n^2)$.

Podobnie, mając macierz $A = QR$, można wyliczyć odwrotność macierzy A, co jest naszym zadaniem.

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ QRA^{-1} &= I \\ A^{-1} &= R^{-1}Q^T \end{aligned}$$

3.2 Przekształcenia Householdera

Aby uzyskać macierz górnotrójkątną R, w każdym kroku algorytmu będziemy zerować dolną część jednej kolumny macierzy A. Używamy do tego przekształceń Householdera, które jest odbiciem, czyli przekształceniem ortogonalnym. Przykładowo, po zastosowaniu jednego przekształcenia Householdera, macierz $H_1 A$ będzie wyglądała następująco:

$$H_1 A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aby uzyskać takie przekształcenie mnożymy macierz A przez macierz Householdera postaci

$$H = I - 2v * v^T$$

gdzie v jest wektorem jednostkowym.

3.3 Przebieg algorytmu

Do rozkładu QR stosuje się przekształcenia Householdera na wektorze

$$u = x - \|x\| e_1$$

gdzie x jest pierwszą kolumną macierzy A, a $e_1 = [1, 0, ..., 0]^T$.

Gdy normalizujemy wektor u, macierz przekształcenia H dana jest wzorem:

$$H = I - 2\frac{u}{\|u\|}\frac{u^T}{\|u^T\|} = I - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

Można pokazać, że po tym przekształceniu macierz $H_1 A$ będzie miała wyzerowaną pierwszą dolną kolumnę poza najwyższym polem, czyli będzie odpowiedniej postaci do dalszego przekształcania na macierz górnotrójkątną.

W kolejnych krokach algorytmu stosujemy przekształcenia Householdera na macierzy A bez lewej kolumny i górnego wiersza. Wtedy uzyskana macierz będzie jednak mniejsza od macierzy A, więc aby nie zmieniać "lewych" kolumn, które zostały wcześniej dobrze dopasowane, dopełniamy macierz H_i macierzą identycznościową. Wtedy macierz, przez którą w każdym kroku mnożymy dotychczas uzyskaną macierz wygląda następująco:

$$H_k := \begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & H_k \end{bmatrix}$$

Stosując $n-1$ kolejnych przekształceń Householdera H_i otrzymujemy wynikowo macierz górnotrójkątną R, a także ortogonalną macierz Q, czyli rozkład, którego szukamy w następujący sposób:

$$R = H_{n-1} ... H_2 H_1 A$$
$$Q = H_1 H_2 ... H_{n-1}$$

Wynikowe macierze w rozkładzie QR można więc przedstawić jako iloczyn macierzy Householdera.

Można zobaczyć, że mając rozkład macierzy na iloczyn QR spełniający wyżej wymienione własności, macierz odwrotną A^{-1} można wyliczyć jako $A^{-1} = R^{-1} Q^T$. Następnym krokiem algorytmu jest więc odwrócenie macierzy górnotrójkątnej R. Można to zrobić w następujący sposób:

```
for i := 1 to n do
    A_ii = 1/A_ii
    for i := n − 1 step −1 to 1 do
        for j := n step −1 to i + 1 do
            s := 0
            for k := i + 1 to j do
                s := s + A_ik * A_kj
                A_ij = −A_ii * s
```

Ten algorytm, zastosowany do macierzy górnotrójkątnej, wylicza jej odwrotność w czasie $O(n^3)$.

Cały algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej za pomocą rozkładu QR tworzy n macierzy H_i, które można wyliczyć w czasie $O(n^2)$, następnie wykonuje operacje w czasie $O(n^3)$, więc cała złożoność algorytmu to $O(n^3)$.

3.4 Gram-Schmidt

Znaną metodą ortogonalizacji macierzy jest proces Grama-Schmidta i również w ten sposób można uzyskać rozkład QR. Nie jest to jednak zalecane, ponieważ w wyniku tych przekształceń mogą powstawać bardziej znaczące błędy numeryczne. Można to wywnioskować interpretując proces Grama-Schmidta jako odejmowanie od wektora jego rzutów na poprzednio uzyskane wektory. Wtedy, gdy dwa wektory były "prawie" liniowo zależne, odejmujemy niemal cały wektor, co powoduje brak stabilności numerycznej.

4 Rozkład LU

4.1 Wstęp

Rozkład LU macierzy A polega na znalezieniu macierzy dolnotrójkątnej L (z wartościami 1 na głównej przekątnej) oraz górnotrójkątnej U, takich że ich iloczyn będzie macierzą A, czyli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

4.2 Metoda Doolittle'a

Metoda Doolittle'a polega na naprzemiennym wyznaczaniu kolejnych wierszy macierzy U oraz kolumn macierzy L. Szczegółowy algorytm wygląda następująco:

for $i := 1$ to n do
    $u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$
    $l_{ii} = 1$
    for $j := i + 1$ to n do

$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$
$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki})$

Na podstawie algorytmu widać, że rozkład macierzy rozmiaru n wymaga $O(n^3)$ operacji. Duża liczba operacji wpływa negatywnie zarówno na czas działania, jak również dokładność obliczeń.

4.3 Obliczenie macierzy odwrotnej za pomocą rozkładu LU

Dla danej macierzy kwadratowej A rozmiaru n macierz odwrotna A^{-1} to macierz kwadratowa tego samego rozmiaru spełniająca równość

$$A \cdot A^{-1} = Id = A^{-1} \cdot A$$

Powyższą równość możemy zapisać w postaci:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

stąd otrzymujemy n układów równań:

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ A \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad A \cdot \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązywanie układów równań za pomocą rozkładu LU

Korzystając z własności macierzy wiemy, że:

$$A \cdot X = B$$
$$(L \cdot U) \cdot X = B$$
$$L \cdot (U \cdot X) = B$$

Stąd znajdując wektor Y taki, że $L \cdot Y = B$ możemy wyznaczyć wektor X z własności $U \cdot X = Y$. Wektory X oraz Y łatwo wyznaczyć z zależności:

$$y_1 = b_1$$
$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \text{ dla } i = 2, 3, ..., n$$
$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right) \text{ dla } i = n-1, n-2, ..., 1$$

Wyznaczanie A^{-1}

Rozwiązując powyższe n układów równań otrzymamy n wektorów $X_1, X_2, ..., X_n$. Niech $X = [X_1|X_2|...|X_n]$, wtedy $X = A^{-1}$, czyli wyznaczyliśmy macierz odwrotną do macierzy A. Dla macierzy A rozmiaru $n \times n$ rozkład na macierze L, U wymaga $O(n^3)$ operacji. Obliczenie A^{-1} wymaga rozwiązania n układów równań, a rozwiązanie każdego z tych układów wymaga $O(n^2)$ operacji, stąd cały algorytm obliczania A^{-1} za pomocą rozkładu LU jest rzędu $O(n^3)$.

5 Porównanie metod opartych na rozkładach QR oraz LU

5.1 Wstęp

Do obliczeń użyjemy programu w języku Julia w wersji 1.0.1. Liczby zmiennoprzecinkowe reprezentowane będą w podwójnej precyzji.
Do przedstawiania dokładności, z jaką poszczególne metody wyznaczają macierzy odwrotne wykorzystamy pierwszą normę macierzową zdefiniowaną następująco:

$$\|A\|_1 = \max_{1<=j<=n} \sum_{i=1}^{n} \mid A_{ij} \mid$$

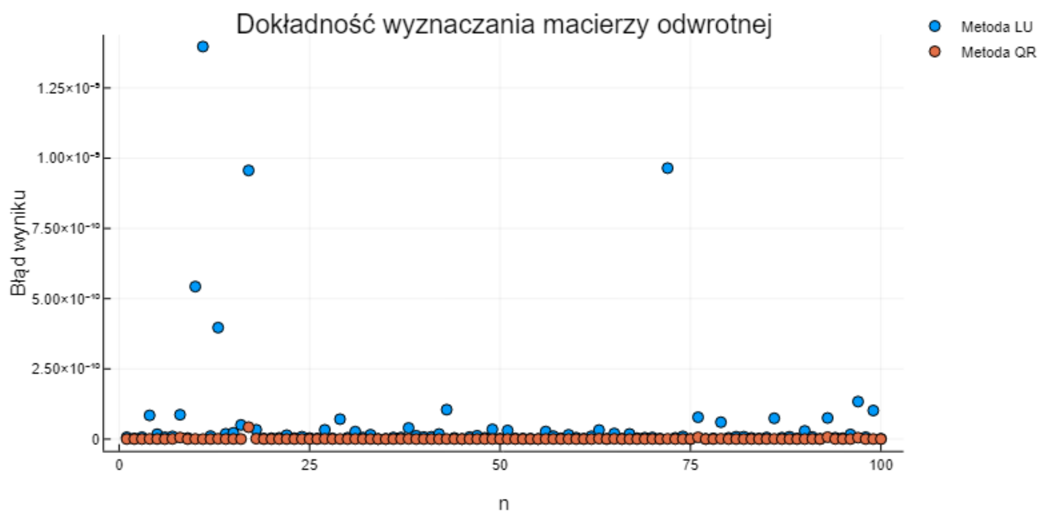
Wiemy, że $\|A \cdot A^{-1}\| = \|Id\| = 1$, stąd czym wartość $\|A \cdot B\|$ jest bliższa 1, tym macierz B jest dokładniejszym wyznaczeniem macierzy odwrotnej do danej macierzy A.

5.2 Porównanie metody opartej na rozkładzie QR i LU

By porównać metody wyznaczania A^{-1} oparte na rozkładach QR oraz LU macierzy A rozważmy różne macierze A oraz porównajmy $\|A \cdot A^{-1}\|$. Rozważmy różne macierze A.

Macierz A z losowymi wartościami

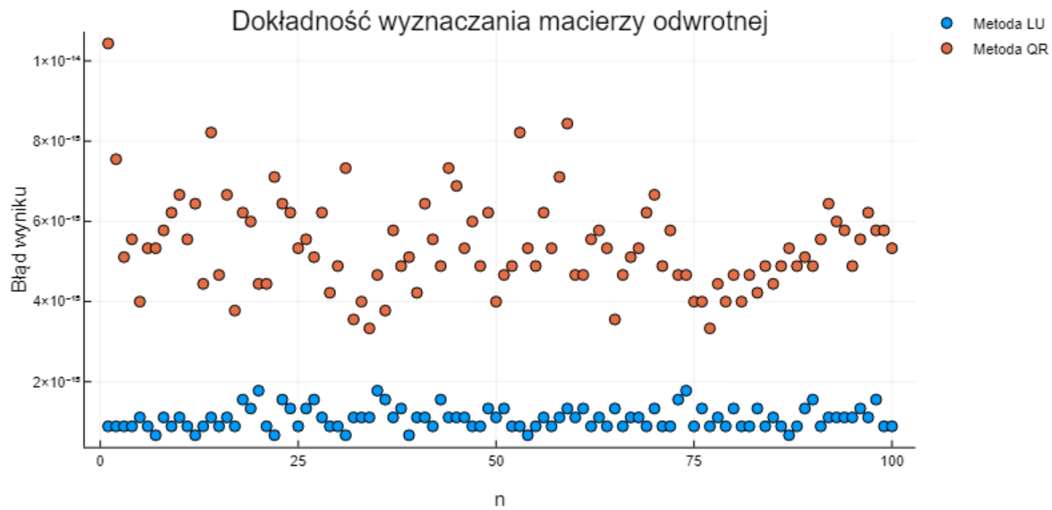
Rozważmy 100 macierzy A rozmiaru 50×50, których elementy a_{ij} mają losową wartość całkowitą należącą do przedziału $[-100, 100]$. Porównamy dokładność wyznaczania macierzy A^{-1} za pomocą metod opartych na rokadzie LU oraz QR. Błąd wyniku będzie przedstawiony jako wartość
$\mid 1 - \|A \cdot A^{-1}\| \mid$.



Jak widać z wykresu dla macierzy tego typu metoda oparta na rozkładzie QR jest dokładniejsza oraz stabilniejsza od metody opartej na rozkładzie LU. Błąd wyznaczenia A^{-1} za pomocą metody QR nie przekracza $1 \cdot 10^{-12}$ podczas gdy błąd dla metody LU dla niektórych macierzy przekracza wartość $1 \cdot 10^{-9}$.

Macierz A z dominującą przekątną

Rozważmy 100 macierzy A rozmiaru 100×100 z coraz mocniej dominującą przekątną. Niech dla $n = 1$ macierz A będzie macierzą z losowymi wartościami całkowitymi z przedziału $[-50, 50]$. Wraz ze wzrostem n do wartości na przekątnej macierzy A będziemy dodawać losowe wartości, by ostatecznie dla $n = 100$ wartości na przekątnej macierzy A były rzędu $1 \cdot 10^6$. Zbadamy dokładność wyznaczania A^{-1} dla kolejnych tak zdefiniowanych macierzy A za pomocą metod LU oraz QR.



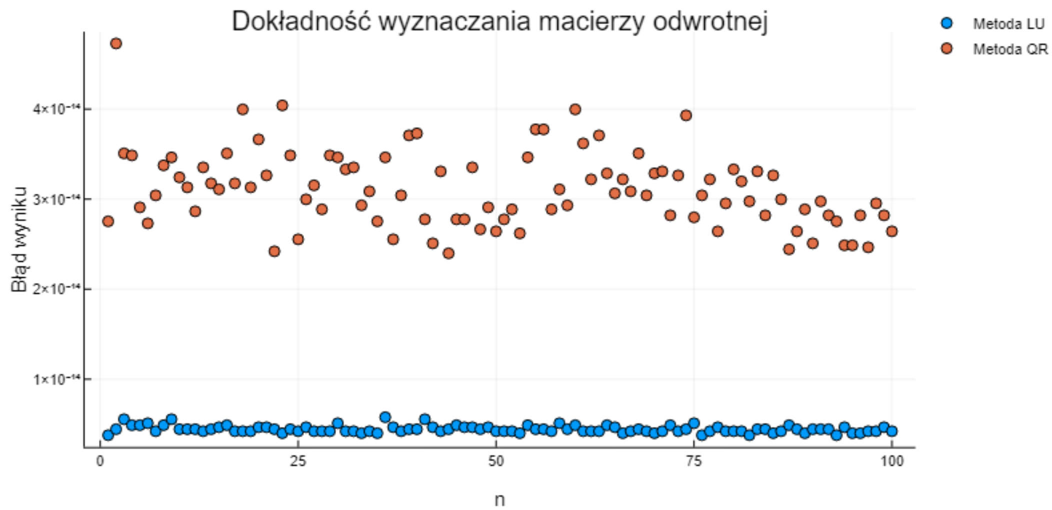
Z wykresu wynika, że dla macierzy A tego typu obie metody mają dobrą dokładność, lecz to metoda oparta na rozkładzie LU jest lepsza. Dokładności obu metod są jednak tego samego rzędu, wiec różnica nie jest wyraźna.

Macierz $A = Q^T \cdot B \cdot Q$

Rozważmy 100 macierzy A rozmiaru A rozmiaru 100×100. Niech Q będzie pewną macierzą ortogonalną tego samego rozmiaru. Wówczas niech:

$$A = Q^T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \cdot Q$$

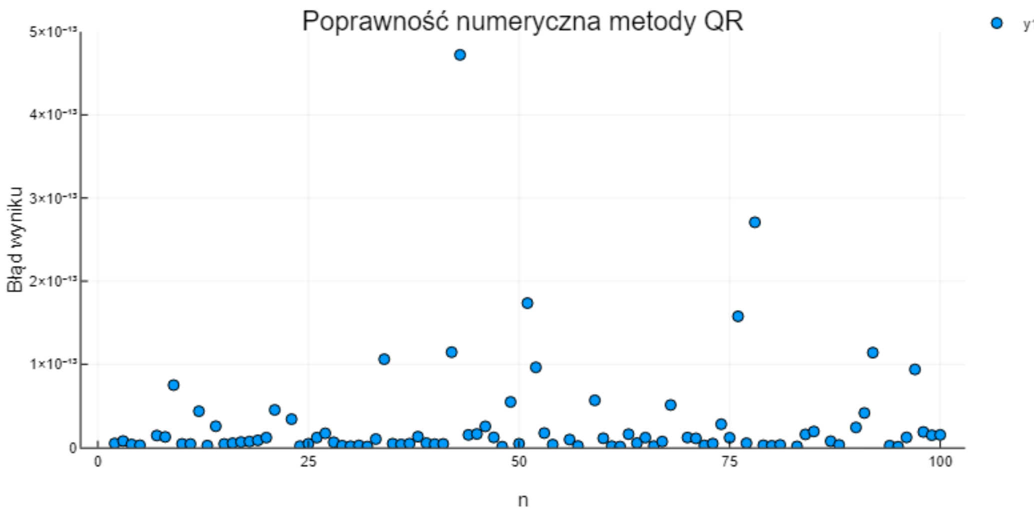
Niech dla każdej macierzy A zachodzi własność $\lambda_{11} \geq \lambda_{22} \geq ... \geq \lambda_{nn}$ oraz niech wartości lambda będą początkowo zbliżone (dla $n = 1$ spełniona jest własność $\lambda_{11} \sim \lambda_{22} \sim ... \sim \lambda_{nn}$), a następnie niech wartości λ rosną, stając się do siebie coraz mocniej różne. Porównamy dokładność wyznaczania macierzy A^{-1} za pomocą metod LU oraz QR dla tak zdefiniowanych macierzy A.

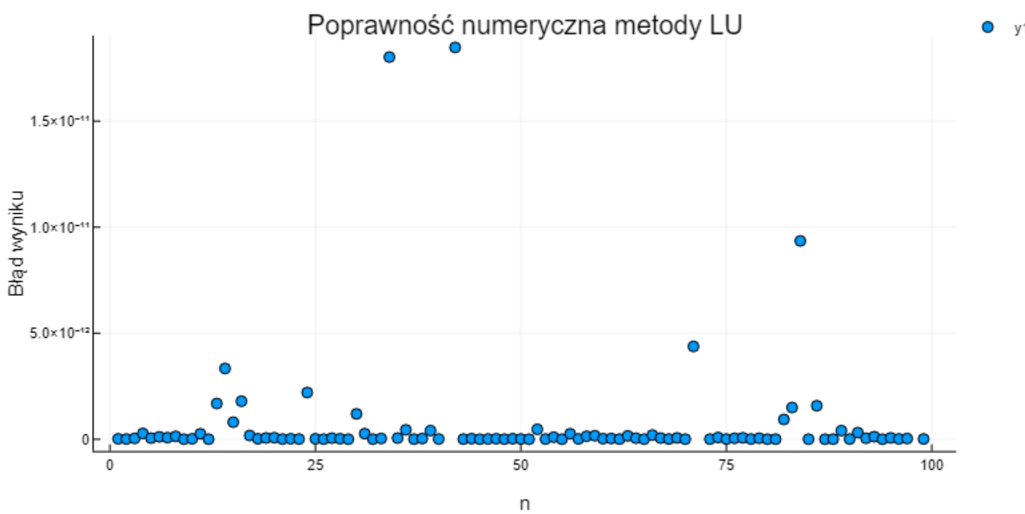


Z wykresu wynika, że w przypadku macierzy A tego typu metoda LU okazuje się ponownie dokładniejsza od metody QR. Błąd dokładności metody opartej na rozkładzie QR jest rzędu $1 \cdot 10^{-14}$, a metody opartej na rozkładzie LU jest rzędu $1 \cdot 10^{-15}$. Warto zaznaczyć, że pomimo różnicy jednego rzędu dokładności, to obie metody mają dobrą dokładność.

5.3 Poprawność numeryczna metod LU oraz QR

Rozważmy macierz A oraz $\overline{A}$ takie, że $\overline{a_{ij}} = a_{ij} + \epsilon$, gdzie $\epsilon \in (-10^{-13}, 10^{-13})$. Porównamy wartości $\|A^{-1} - \overline{A}^{-1}\|$, jeśli badana metoda jest numerycznie poprawna wartość ta powinna nie przekraczać $1 \cdot 10^{-13}$. Zbadajmy 100 macierzy A rozmiaru 25×25, których elementy to losowe liczby całkowite z przedziału $[-50, 50]$. Na ich podstawie zbadamy poprawność numeryczną metod QR oraz LU w sposób opisany powyżej.





Z wykresów widzimy, że metoda QR jest bardziej poprawna numerycznie od metody LU. Dla większości macierzy błąd uzyskanego wyniku jest niewielki, jednak w przypadku metody LU zdarzają się macierze, dla których wartość $\|A^{-1} - \overline{A}^{-1}\|$ jest rzędu $1 \cdot 10^{-9}$, co nie zdarza się w przypadku metody QR.

5.4 Wnioski

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że metoda znajdowania A^{-1} oparta na rozkładzie QR jest bardziej stabilna i numerycznie poprawna od metody opartej na rozkładzie LU, chociaż dla pewnych grup macierzy jest mniej dokładna (lecz nadal uzyskiwany błąd jest akceptowalny w zdecydowanej większości przypadków). Warto również zauważyć, że znając rozkłady QR oraz LU danej macierzy A wyznaczenie A^{-1} na podstawie rozkładu QR jest o wiele prostsze oraz numerycznie poprawne od wyznaczania macierzy odwrotnej na podstawie rozkładu LU. Na wyniki wpływ ma więc to, że sam proces znajdowania rozkładu QR powoduje większe błędy numeryczne od procesu znajdowania rozkładu LU. Powyższa obserwacja potwierdza się również w przypadku funkcji bibliotecznych z pakietu „Linear Algebra".

6 Podsumowanie

Wyznaczenie macierzy odwrotnej do danej macierzy A za pomocą rozkładu QR jest metodą gwarantującą stabilność, numeryczną poprawność oraz zadowalającą dokładność. Pomimo, że istnieją macierze, dla których wyznaczenie A^{-1} za pomocą rozkładu LU jest dokładniejsze, niż wyznaczenie macierzy odwrotnej za pomocą rozkładu QR, metoda QR gwarantuje nam większą stabilność i pewność uzyskanego wyniku. Należy być jednak świadomym faktu, że obie te metody posiadają swoje wady i zalety.

7 Literatura

1) D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005.
2) A. Schegel (aaronsc32), QR Decomposition with Householder Reflections, RPubs, 2018.
3) Mathematics Source Library C&ASM, mymathlib.com, 2004.
4) D. Bindel, Matrix Computations (CS6210), Cornell University, Sep 28 2012.