Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по лабораторной работе № 4

Тема: Расчёт сетей СМО.

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений.

Выполнил студент гр. 5130901/10101 ____________ М.Т. Непомнящий
(подпись)

Руководитель ________________________ А.Г. Сиднев
(подпись)

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

1. Задание

1.1. Условие варианта

Вариант 7:

Задана сеть массового обслуживания, включающая три узла, $\boldsymbol{M = 3}$. Число каналов обслуживания в узлах определяется вектором $\boldsymbol{m^T = (1\ 1\ 1)}$, интенсивности обслуживания — вектором

$$\boldsymbol{\mu^T = (2\, c^{-1},\ \ 0{,}8\, c^{-1},\ \ 0{,}1\, c^{-1}).}$$

В сети циркулируют $\boldsymbol{N}$ заявок в соответствии с матрицей передач $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0{,}1} & \mathbf{0{,}4} & \mathbf{0{,}5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Требуется:

а) определить характеристики узлов и сети в целом ($N = 3$);

б) сопоставить характеристики узлов указанной сети с сетью, где узлы 2 и 3 объединены в один узел с числом каналов, равным двум и усреднённой интенсивностью $\boldsymbol{0{,}45\, c^{-1}}$.

2. Ход работы

2.1. Часть А

Изобразим граф сети для пункта (а):

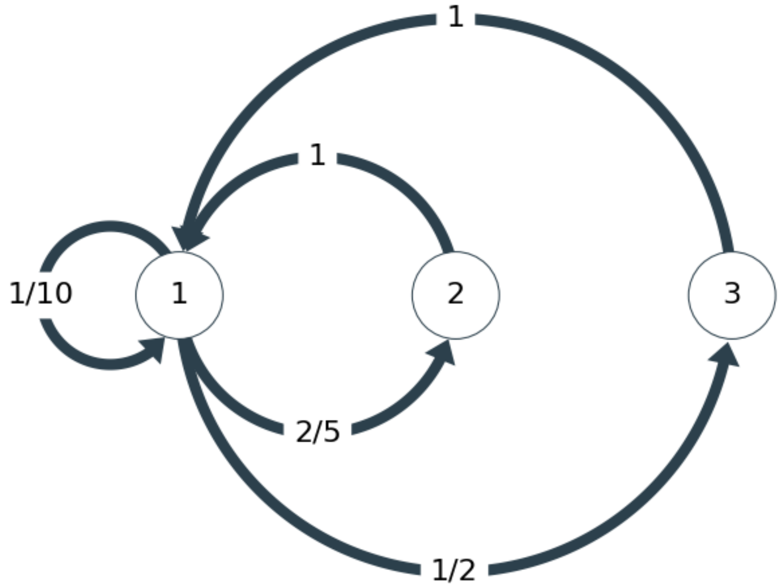

Рис. 1 – Граф сети (а)

Рассчитаем вероятности посещения узлов сети ω. Для этого построим систему уравнений:

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{10} + \omega_2 + \omega_3$$

$$\omega_2 = \frac{2\omega_1}{5}$$

$$\omega_3 = \frac{\omega_1}{2}$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1$$

Значения ω:

$$\omega_1 = \frac{10}{19}$$

$$\omega_2 = \frac{4}{19}$$

$$\omega_3 = \frac{5}{19}$$

Количество состояний системы равно $|S(3,4)| = C_6^3 = 10$, где $S(N, M)$ – множество всех состояний при N заявок в системе и M узлах

Вероятность каждого состояния рассчитывается по формуле:

$$P(n_1, \dots, n_m) = \frac{\prod_{i=1}^{M} z_i(n_i)}{\sum_{n \in S(N,M)} \prod_{i=1}^{M} z_i(n_i)}$$

где

$$z_i(n_i) = \frac{\omega_i^{n_i}}{\prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k)}$$

$$\mu_i(k) = \begin{cases} k\mu_i, & k < m_i \\ m_i\mu_i, & k \geq m_i \end{cases}$$

где m_i – количество каналов в узле.

В таком случае вероятности равны:

P_{003}	$8.1037 \cdot 10^{-1}$
P_{012}	$8.1037 \cdot 10^{-2}$
P_{021}	$8.1037 \cdot 10^{-3}$
P_{030}	$8.1037 \cdot 10^{-4}$
P_{102}	$8.1037 \cdot 10^{-2}$
P_{111}	$8.1037 \cdot 10^{-3}$
P_{120}	$8.1037 \cdot 10^{-4}$
P_{201}	$8.1037 \cdot 10^{-3}$
P_{210}	$8.1037 \cdot 10^{-4}$
P_{300}	$8.1037 \cdot 10^{-4}$

Для расчета свойств системы использовались следующие формулы:

$$\bar{J}_j = \sum_{n \in S(N,M)} n_j P(n_1, \dots, n_m)$$

$$\bar{n}_{o_j} = \sum_{n \in S(N,M); n_j > m_j} \left(n_j - m_j\right) P(n_1, \dots, n_m)$$

$$\bar{t}_{\text{ож}_j} = \frac{\bar{n}_{o_j}}{\mu_j \left(\bar{J}_j - \bar{n}_{o_j}\right)}$$

$$\bar{t}_{\text{c}_j} = \frac{\bar{J}_j}{\mu_j \left(\bar{J}_j - \bar{n}_{o_j}\right)}$$

Для всей сети:

$$\bar{n}_o = \sum_{i=1}^{M} \bar{n}_{o_i}\,; \bar{J} = \sum_{i=1}^{M} \bar{J}_i\,; \bar{t}_c = \sum_{i=1}^{M} \bar{t}_{c_i}\,; \bar{t}_{\text{ож}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{t}_{\text{ож}_i}$$

	1 узел	2 узел	3 узел	Вся сеть
Среднее число требований $\bar{J}$	$1.1021 \cdot 10^{-1}$	$1.1021 \cdot 10^{-1}$	2.7796	3.0
Среднее число ожидающих требований $\bar{n}_o$	$1.0535 \cdot 10^{-2}$	$1.0535 \cdot 10^{-2}$	1.7828	1.8039
Среднее время пребывания $\bar{t}_c$	$5.5285 \cdot 10^{-1}$	1.3821	$2.7886 \cdot 10^{1}$	$2.9821 \cdot 10^{1}$
Среднее время ожидания $\bar{t}_{\text{ож}}$	$5.2846 \cdot 10^{-2}$	$1.3211 \cdot 10^{-1}$	$1.7886 \cdot 10^{1}$	$1.8071 \cdot 10^{1}$

2.2. Часть Б

Изобразим граф сети для пункта (б):

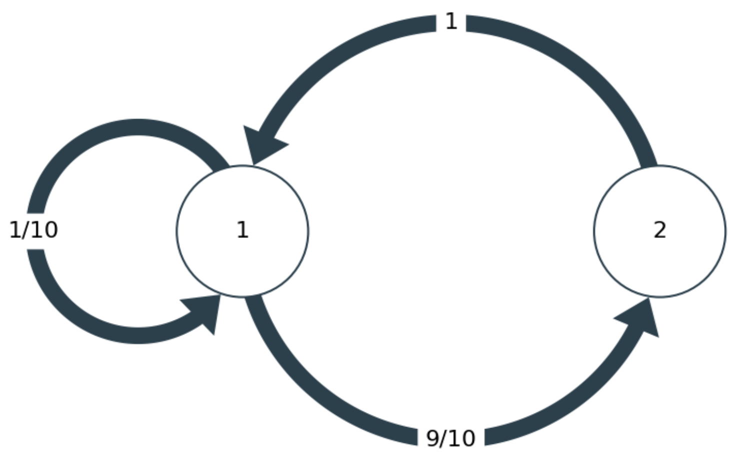

Рис. 2 – Гра сети (б)

Рассчитаем вероятности посещения узлов сети ω. Для этого построим систему уравнений:

$$\omega_1 = \frac{\omega_1}{10} + \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{9\omega_1}{10}$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1$$

Значения ω:

$$\omega_1 = \frac{10}{19}$$

$$\omega_2 = \frac{9}{19}$$

Количество состояний системы равно $|S(3,4)| = C_6^3 = 4$, где $S(N,M)$ – множество всех состояний при N заявок в системе и M узлах

Вероятность каждого состояния рассчитывается по формуле:

$$P(n_1, \dots, n_m) = \frac{\prod_{i=1}^{M} z_i(n_i)}{\sum_{n \in S(N,M)} \prod_{i=1}^{M} z_i(n_i)}$$

где:

$$z_i(n_i) = \frac{\omega_i^{n_i}}{\prod_{k=1}^{n_i} \mu_i(k)}$$

$$\mu_i(k) = \begin{cases} k\mu_i, & k < m_i \\ m_i\mu_i, & k \geq m_i \end{cases}$$

где m_i – количество каналов в узле.

В таком случае вероятности равны:

P_{03}	$5.5172 \cdot 10^{-1}$
P_{12}	$2.7586 \cdot 10^{-1}$
P_{21}	$1.3793 \cdot 10^{-1}$
P_{30}	$3.4483 \cdot 10^{-2}$

Для расчета свойств системы использовались следующие формулы:

$$\bar{J}_j = \sum_{n \in S(N,M)} n_j P(n_1, \dots, n_m)$$

$$\bar{n}_{o_j} = \sum_{n \in S(N,M); n_j > m_j} (n_j - m_j) P(n_1, \dots, n_m)$$

$$\bar{t}_{\text{ож}_j} = \frac{\bar{n}_{o_j}}{\mu_j \left(\bar{J}_j - \bar{n}_{o_j}\right)}$$

$$\bar{t}_{\text{с}_j} = \frac{\bar{J}_j}{\mu_j \left(\bar{J}_j - \bar{n}_{o_j}\right)}$$

Для всей сети:

$$\bar{n}_o = \sum_{i=1}^{M} \bar{n}_{o_i}; \bar{J} = \sum_{i=1}^{M} \bar{J}_i; \bar{t}_c = \sum_{i=1}^{M} \bar{t}_{c_i}; \bar{t}_{\text{ож}} = \sum_{i=1}^{M} \bar{t}_{\text{ож}_i}$$

	1 узел	2 узел	Вся сеть
Среднее число требований $\bar{J}$	$6.5517 \cdot 10^{-1}$	2.3448	3.0
Среднее число ожидающих требований $\bar{n}_o$	$2.069 \cdot 10^{-1}$	$5.5172 \cdot 10^{-1}$	$7.5862 \cdot 10^{-1}$
Среднее время пребывания $\bar{t}_c$	$7.3077 \cdot 10^{-1}$	2.906	3.6368
Среднее время ожидания $\bar{t}_{\text{ож}}$	$2.3077 \cdot 10^{-1}$	$6.8376 \cdot 10^{-1}$	$9.1453 \cdot 10^{-1}$

2.3. Сравнительная таблица

	Система	1 узел	2 узел	3 узел	Вся сеть
Среднее число требований $\bar{J}$	А	$1.1021 \cdot 10^{-1}$	$1.1021 \cdot 10^{-1}$	2.7796	3.0
	Б	$6.5517 \cdot 10^{-1}$	2.3448	-	3.0
Среднее число ожидающих требований $\bar{n}_o$	А	$1.0535 \cdot 10^{-2}$	$1.0535 \cdot 10^{-2}$	1.7828	1.8039
	Б	$2.069 \cdot 10^{-1}$	$5.5172 \cdot 10^{-1}$	-	$7.5862 \cdot 10^{-1}$
Среднее время пребывания $\bar{t}_c$	А	$5.5285 \cdot 10^{-1}$	1.3821	$2.7886 \cdot 10^{1}$	$2.9821 \cdot 10^{1}$
	Б	$7.3077 \cdot 10^{-1}$	2.906	-	3.6368
Среднее время ожидания $\bar{t}_{\text{ож}}$	А	$5.2846 \cdot 10^{-2}$	$1.3211 \cdot 10^{-1}$	$1.7886 \cdot 10^{1}$	$1.8071 \cdot 10^{1}$
	Б	$2.3077 \cdot 10^{-1}$	$6.8376 \cdot 10^{-1}$	-	$9.1453 \cdot 10^{-1}$