Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по лабораторной работе № 3

Тема: Расчёт СМО.

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений.

Выполнил студент гр. 5130901/10101 ____________ М.Т. Непомнящий
(подпись)

Руководитель ________________________ А.Г. Сиднев
(подпись)

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

1. Задание

1.1. Условие варианта

Вариант 3:

Рассматривается система типа М/М/К/0, предназначенная для обслуживания суммы двух пуассоновских потоков требований λ_i , а время обслуживания распределено по показательному закону с интенсивностью μ_i $(i = 1, 2)$.

Первый поток является ординарным, поэтому каждое последующее требование занимает точно один из обслуживающих приборов; если все k приборов заняты, то вновь поступающее требование первого класса теряется. Для обслуживания каждого требования второго класса требуется одновременно k_0 приборов (и оно занимает все эти приборы одновременно на одно и то же показательно распределенное время со средним значением $\frac{1}{\mu_2}$). Если в момент поступления требования второго класса в системе имеется меньше, чем k_0 свободных приборов, это требование также теряется. Найти:

- долю потерянных требований первого и второго классов при $k_0 = k = 2$, и построить зависимость от λ_i , μ_i , $(i = 1, 2)$,
- выяснить, насколько изменится процент потерянных требований по сравнению со случаем, когда потоки ординарны и $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$.

2. Ход решения

2.1. Постановка задачи

Пред тем как решать задачу определим, что такое система типа М/М/К/0. В обозначении каждая буква представляет собой определенный аспект модели системы массового обслуживания:

М - означает, что поток поступления требований является пуассоновским. Это означает, что временные интервалы между поступлениями требований имеют экспоненциальное распределение.

М - указывает на то, что время обслуживания каждого требования также имеет экспоненциальное распределение.

k - представляет собой количество обслуживающих каналов (или приборов), доступных в системе. Если все каналы заняты при поступлении нового требования, оно будет ставиться в очередь. Это означает, что в системе может

0 - означает, что в системе отсутствует буферизация, или очередь. Если все каналы заняты, новые приходящие требования будут теряться.

Таким образом, модель М/М/k/0 описывает систему, в которой требования поступают и обслуживаются случайным образом, с определенным числом каналов для обслуживания, и без возможности буферизации или отложенного обслуживания.

В представленной задаче первый поток определён, он одинарен, а второй поток может вести себя по-разному: иметь заявку или быть ординарным, подобно первому потоку. Рассмотрим каждую из этих ситуаций отдельно:

2.2. СМО, в которой второй поток содержит две заявки

2.2.1. Описание и построение графа состояний

Опишем состояния системы для рассматриваемого случая:

- $S_{0,0}$ – СМО свободна,
- $S_{1,0}$ – в СМО находятся две заявки первого потока,
- $S_{2,0}$ – в СМО находится одна заявка первого потока,
- $S_{0,1}$ – в системе находится заявка второго потока.

Построим граф СМО согласно приведённым выше состояниям:

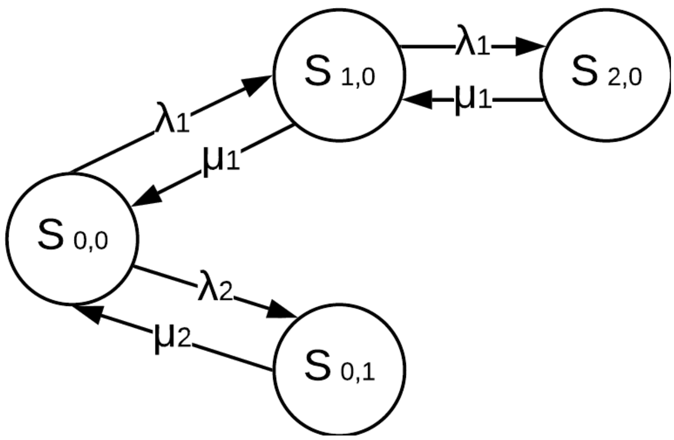

Рис. 1 – Граф состояний системы

2.2.2. Рассматривание системы

Пусть $P_{n,m}(t)$ – вероятность того, что в системе находится n заявок первого класса и m заявок второго класса в момент времени t.

Тогда согласно графу состояний, приведённому на рис. 1 выше составляем систему дифференциальных уравнений Колмогорова-Чепмена (производная вероятности состояния равна сумме входящих потоков за вычетом суммы исходящих потоков):

$$\begin{cases} \frac{dP_{0,0}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0} + \mu_1 P_{1,0} + \mu_2 P_{0,1} \\ \frac{dP_{1,0}}{dt} = \lambda_1 P_{0,0} - (\lambda_1 + \mu_1)P_{1,0} + \mu_1 P_{2,0} \\ \frac{dP_{1,0}}{dt} = \lambda_1 P_{1,0} - \mu_1 P_{2,0} \\ \frac{dP_{0,1}}{dt} = \lambda_2 P_{0,0} - \mu_2 P_{0,1} \end{cases}$$

Входящий поток требований в систему уравновешивается выходящим потоком, поэтому будем считать систему стационарной. В стационарном режиме системы вероятности состояний постоянны, т. е. $\frac{dP_{i,j}}{dt} = 0$, откуда получаем систему для отыскания вероятностей состояния системы, которую дополняем нормировочным уравнением:

$$\begin{cases} 0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0} + \mu_1 P_{1,0} + \mu_2 P_{0,1} \\ 0 = \lambda_1 P_{0,0} - (\lambda_1 + \mu_1)P_{1,0} + \mu_1 P_{2,0} \\ 0 = \lambda_1 P_{1,0} - \mu_1 P_{2,0} \\ 0 = \lambda_2 P_{0,0} - \mu_2 P_{0,1} \\ P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + P_{0,1} = 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Из четвертого уравнения системы 1.1 получим:

$$0 = \lambda_2 P_{0,0} - \mu_2 P_{0,1}$$

$$P_{0,1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_{0,0} \tag{1.2}$$

Подставим полученное значение для $P_{0,1}$ в первое, получим:

$$0 = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_{0,0} + \mu_1 P_{1,0} + \mu_2 \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_{0,0}$$

$$P_{1,0} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_{0,0} \tag{1.3}$$

Из четвертого уравнения системы 1.1 получим:

$$0 = \lambda_1 P_{1,0} - \mu_1 P_{2,0}$$

$$P_{2,0} = \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_{1,0} = \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} P_{0,0} \tag{1.4}$$

Подставим уравнения 1.2, 1.3 и 1.4 в нормировочное уравнение системы 1.1:

$$P_{0,0} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} P_{0,0} + \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} P_{0,0} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} P_{0,0} = 1$$

Найдём вероятность отсутствия заявок в системе:

$$P_{0,0} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}$$

Тогда вероятность того, что требование второго потока получит отказ в обслуживании:

$$P_{\text{отк},2} = 1 - P_{0,0} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}$$

А вероятность того, что требование первого потока получит отказ в обслуживании:

$$P_{\text{отк},1} = P_{2,0} + P_{0,1} = \frac{\frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{{\lambda_1}^2}{{\mu_1}^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}}$$

2.2.3. Графики зависимостей отказов от λ_1, μ_1, λ_2 и μ_2

Построим графики зависимостей потерь заявок первого ($P_{\text{отк},1}$) и второго ($P_{\text{отк},2}$) потоков от интенсивностей обслуживания (λ_1, λ_2) и поступления заявок (μ_1, μ_2). Для определенности все неварьируемые величины примем равными единице.

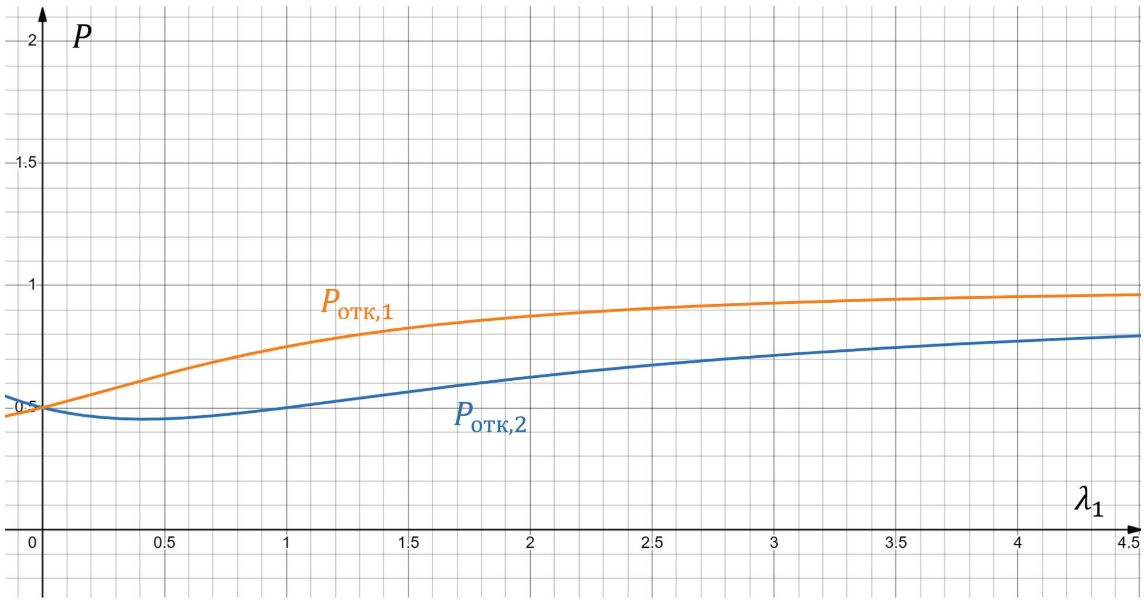

Рис. 2 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\lambda_1)$ и $P_{\text{отк},2}(\lambda_1)$

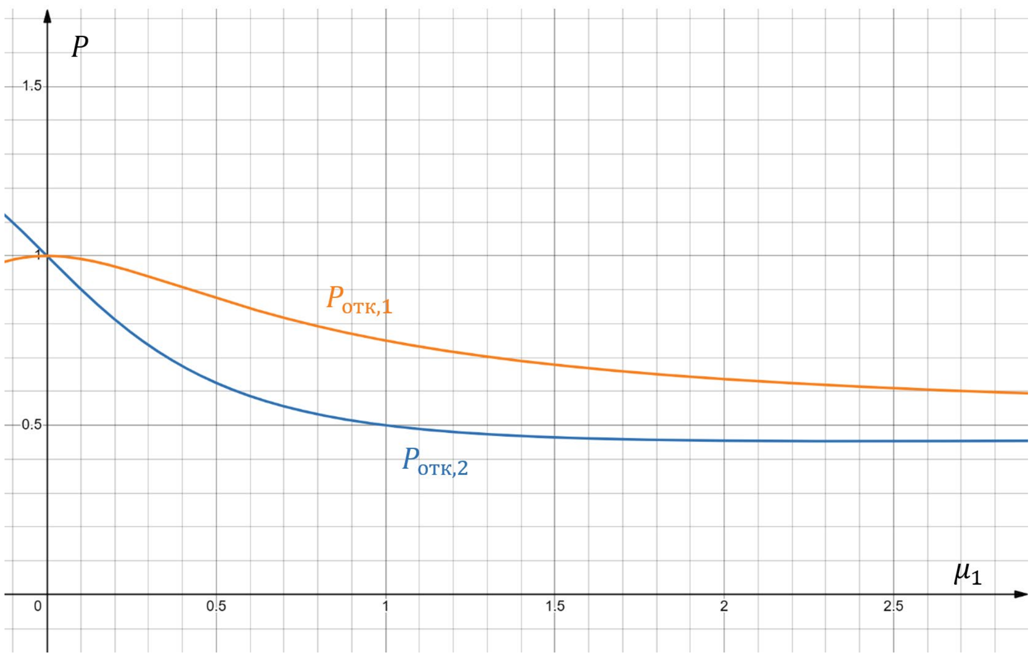

Рис. 3 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\mu_1)$ и $P_{\text{отк},2}(\mu_1)$

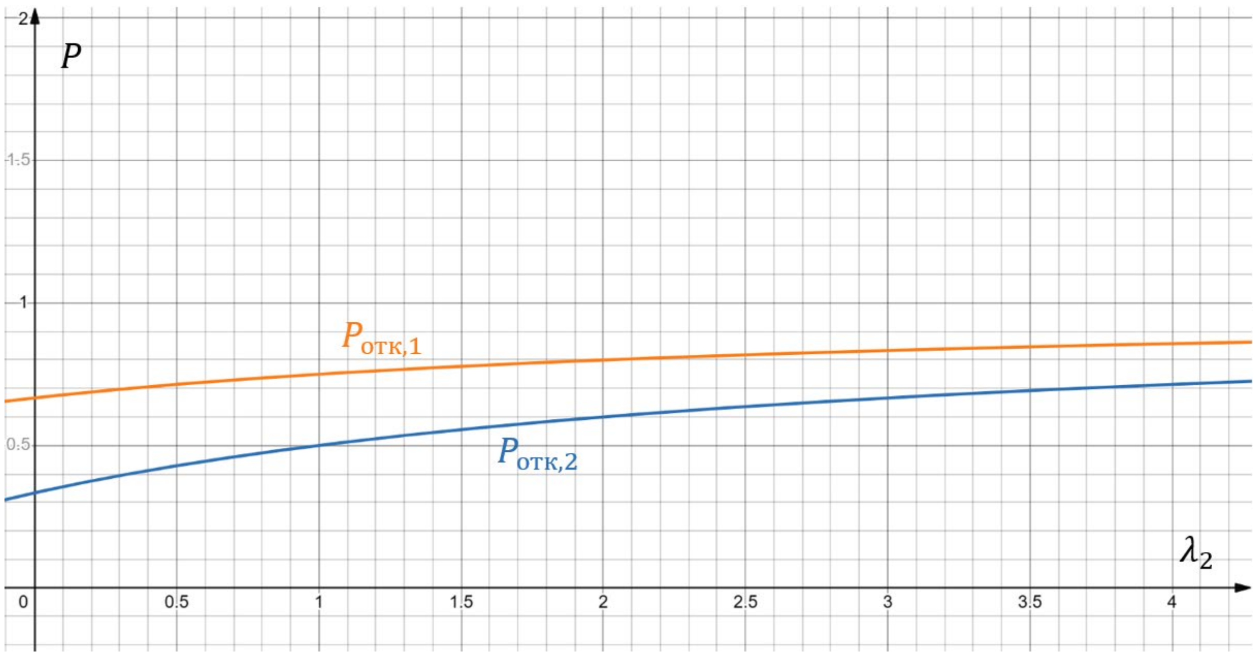

Рис. 4 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\lambda_2)$ и $P_{\text{отк},2}(\lambda_2)$

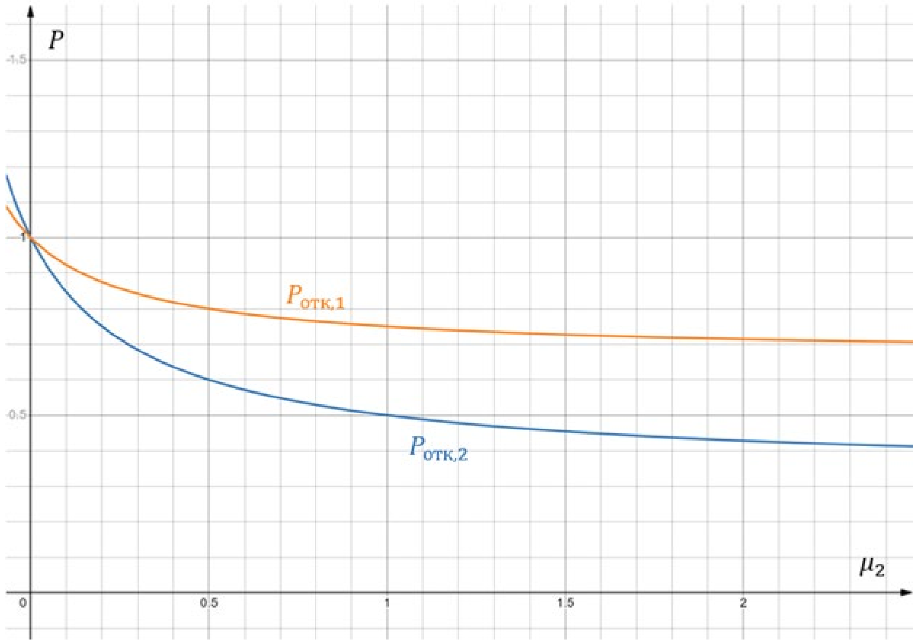

Рис. 5 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\mu_2)$ и $P_{\text{отк},2}(\mu_2)$

2.3. СМО, в которой второй поток содержит одинарен

В этом случае мы рассматриваем систему как M/M/k/0, где количество каналов обслуживания k одинаково для обоих потоков. Вероятности потери требований первого и второго классов будут зависеть от соответствующих интенсивностей поступления и обслуживания, а также от количества доступных каналов обслуживания. Т. к. при суммировании независимых пуассоновских потоков суммарный поток также пуассоновский, то имеем стандартную двухканальную СМО с отказами с интенсивностью поступающего потока $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и интенсивностью обслуживания μ. В этом случае вероятность отказа в обслуживании одинакова для обоих потоков:

$$P = P_{\text{отк},1} = P_{\text{отк},2} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu^2}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}}$$

Построим график $P_{\text{отк}}(\lambda)$, взяв в качестве неварьируемой величины $\mu = 1$:

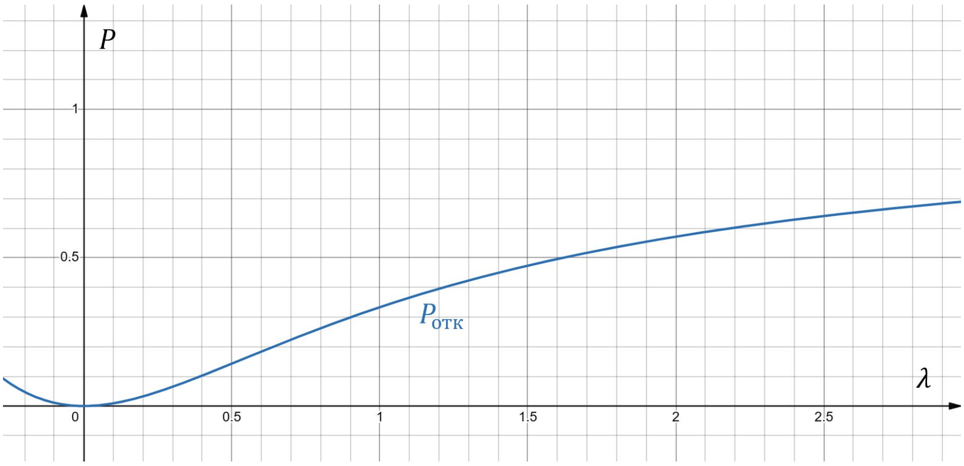

Рис. 6 – График зависимости $P_{\text{отк}}(\lambda)$

Построим график $P_{\text{отк}}(\mu)$, взяв в качестве неварьируемой величины $\lambda = 1$:

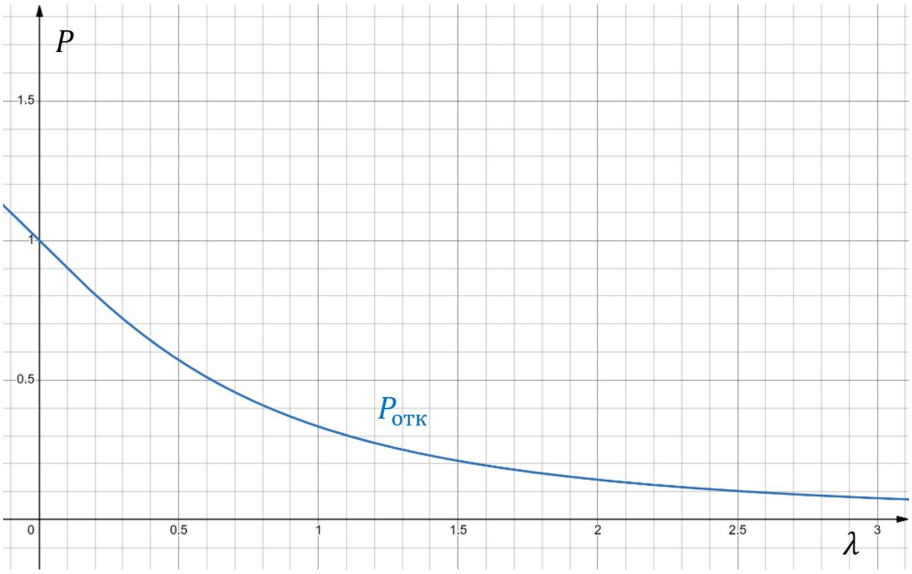

Рис. 7 – График зависимости $P_{\text{отк}}(\mu)$

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была проведена аналитическая оценка системы массового обслуживания типа М/М/К/0 в двух сценариях: когда второй поток содержит две заявки и когда второй поток является ординарным.

В результате анализа были выявлены ключевые зависимости доли потерь заявок первого и второго классов от параметров системы, таких как интенсивности поступления и обслуживания. В обеих ситуациях было показано, что вероятность отказа в обслуживании зависит от соотношения интенсивностей поступления и обслуживания, а также от количества доступных каналов обслуживания.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о важности оптимизации параметров системы для минимизации потерь заявок и повышения её производительности. Оптимальный выбор параметров системы может способствовать улучшению обслуживания клиентов и повышению эффективности работы организации.