Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

Отчёт по лабораторной работе № 3

Тема: Расчёт СМО.

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений.

Выполнил студент гр. 5130901/10101 _____________ М.Т. Непомнящий
(подпись)

Руководитель _________________________ А.Г. Сиднев
(подпись)

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

1. Задание

1.1. Условие варианта

Вариант 3:

Рассматривается система типа M/M/k/0, предназначенная для обслуживания суммы двух пуассоновских потоков требований λ_i , а время обслуживания распределено по показательному закону с интенсивностью μ_i $(i = 1, 2)$.

Первый поток является ординарным, поэтому каждое последующее требование занимает точно один из обслуживающих приборов; если все k приборов заняты, то вновь поступающее требование первого класса теряется. Для обслуживания каждого требования второго класса требуется одновременно k_0 приборов (и оно занимает все эти приборы одновременно на одно и то же показательно распределенное время со средним значением $\frac{1}{\mu_2}$). Если в момент поступления требования второго класса в системе имеется меньше, чем k_0 свободных приборов, это требование также теряется. Найти:

- долю потерянных требований первого и второго классов при $k_0 = k = 2$, и построить зависимость от λ_i , μ_i , $(i = 1, 2)$,
- выяснить, насколько изменится процент потерянных требований по сравнению со случаем, когда потоки ординарны и $\mu_i = \mu$, $i = 1, 2$.

2. Ход решения

2.1. Постановка задачи

Пред тем как решать задачу определим, что такое система типа M/M/k/0. В обозначении каждая буква представляет собой определенный аспект модели системы массового обслуживания:

M - означает, что поток поступления требований является пуассоновским. Это означает, что временные интервалы между поступлениями требований имеют экспоненциальное распределение.

M - указывает на то, что время обслуживания каждого требования также имеет экспоненциальное распределение.

k - представляет собой количество обслуживающих каналов (или приборов), доступных в системе. Если все каналы заняты при поступлении нового требования, оно будет ставиться в очередь. Это означает, что в системе может

0 - означает, что в системе отсутствует буферизация, или очередь. Если все каналы заняты, новые приходящие требования будут теряться.

Таким образом, модель M/M/k/0 описывает систему, в которой требования поступают и обслуживаются случайным образом, с определенным числом каналов для обслуживания, и без возможности буферизации или отложенного обслуживания.

В представленной задаче первый поток определён, он одинарен, а второй поток может вести себя по-разному: иметь заявку или быть ординарным, подобно первому потоку. Рассмотрим каждую из этих ситуаций отдельно:

2.2. СМО, в которой второй поток содержит две заявки

2.2.1. Описание и построение графа состояний

Опишем состояния системы для рассматриваемого случая:

- $S_{0,0}$ – СМО свободна,
- $S_{1,0}$ – в СМО находятся две заявки первого потока,
- $S_{2,0}$ – в СМО находится одна заявка первого потока,
- $S_{0,1}$ – в системе находится заявка второго потока.

Построим граф СМО согласно приведённым выше состояниям: (представить в виде цепочки)

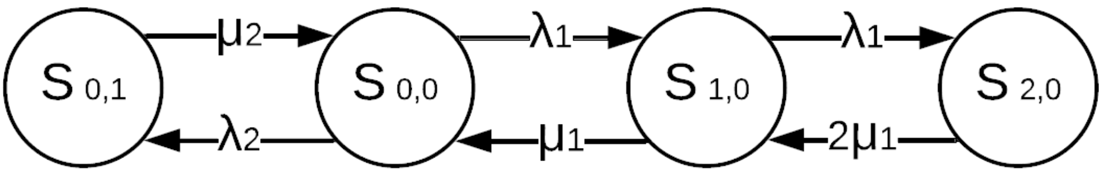

Рис. 1 – Граф состояний системы

2.2.2. Рассматривание системы

Пусть $P_{n,m}(t)$ – вероятность того, что в системе находится n заявок первого класса и m заявок второго класса в момент времени t.

Тогда согласно графу состояний, приведённому на ри с. 1 выше определим вероятность $P_{0,1}$:

$$P_{0,1} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}} \qquad (1.1)$$

Тогда вероятность отсутствия заявок в системе $P_{0,0}$ можно найти путём домножения уравнения 1.1 на $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$:

$$P_{0,0} = P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2}{\lambda_2}$$

$$P_{0,0} = \frac{\mu_2}{\lambda_2 \cdot \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}\right)}$$

$$P_{0,0} = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2 + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \mu_1^2}}$$

$$P_{0,0} = \frac{1}{\frac{\lambda_2}{\mu_2} + 1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1^2}{2 \cdot \mu_1^2}} \tag{1.2}$$

Также из уравнения 1.1 можем найти вероятность $P_{1,0}$:

$$P_{1,0} = P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1}$$

$$P_{1,0} = \frac{1}{\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\mu_2 \cdot \lambda_1} \cdot \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}\right)}$$

$$P_{1,0} = \frac{1}{\frac{\lambda_2 \cdot \mu_1}{\mu_2 \cdot \lambda_1} + \frac{\lambda_1}{2 \cdot \mu_1}} \tag{1.3}$$

Аналогично найдём вероятность $P_{2,0}$:

$$P_{2,0} = P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}$$

$$P_{2,0} = \frac{1}{\frac{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}{\mu_2 \cdot \lambda_1^2} \cdot \left(1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}\right)}$$

$$P_{2,0} = \frac{1}{\frac{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}{\mu_2 \cdot \lambda_1^2} + \frac{2 \cdot \mu_1}{\lambda_1}}$$

$$P_{2,0} = \frac{1}{\frac{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}{\mu_2 \cdot \lambda_1^2} + \frac{2 \cdot \mu_1}{\lambda_1}} \tag{1.4}$$

Из уравнений 1.1 и 1.4 можем найти вероятность отказа для каждого из потоков. Тогда вероятность того, что требование первого потока получит отказ в обслуживании:

$$P_{\text{отк}_1} = P_{2,0} + P_{0,1}$$

$$P_{\text{отк}_1} = \left(P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}\right) + P_{0,1}$$

$$P_{\text{отк}_1} = P_{0,1} \cdot (\frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2} + 1)$$

$$P_{\text{отк}_1} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}} \cdot \left(\frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2} + 1\right) \tag{1.5}$$

Теперь из уравнений 1.1, 1.3 и 1.4 найдём вероятность того, что требование второго потока получит отказ в обслуживании:

$$P_{\text{отк}_2} = P_{2,0} + P_{0,1} + P_{1,0}$$

$$P_{\text{отк}_2} = \left(P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}\right) + P_{0,1} + P_{0,1} \cdot \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1}$$

$$P_{\text{отк}_2} = P_{0,1} \cdot \left(\frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2} + 1 + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1}\right)$$

$$P_{\text{отк}_2} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_2}{\lambda_2} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1} + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2}} \cdot \left(\frac{\mu_2 \cdot \lambda_1^2}{2 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1^2} + 1 + \frac{\mu_2 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 \cdot \mu_1}\right) \tag{1.6}$$

2.2.3. Графики зависимостей отказов от λ_1, μ_1, λ_2 и μ_2

Построим графики зависимостей потерь заявок первого ($P_{\text{отк},1}$) и второго ($P_{\text{отк},2}$) потоков от интенсивностей обслуживания (λ_1, λ_2) и поступления заявок (μ_1, μ_2). Для определенности все неварьируемые величины примем равными 0.5.

В качестве средства для построения графиков воспользуемся графическим калькулятором Desmos (ссылка на график будет приведена в источниках в конце отчёта):

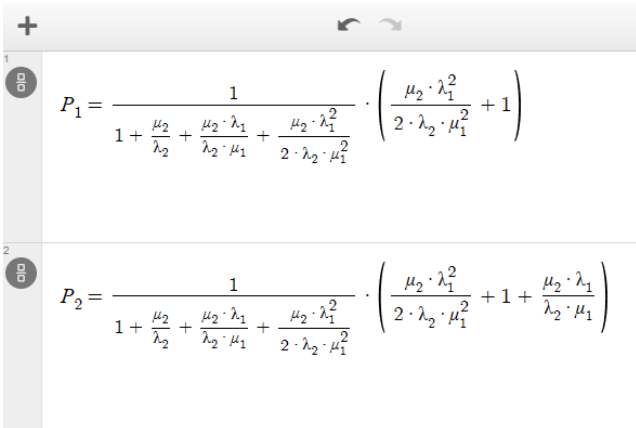

Рис. 2 – Задание исходных уравнений для вероятностей

*В качестве значений для не варьируемых величин было выбрано значение 1. Это значение показалось мне оптимальным. При желании можно выбрать другие (перемещать ползунок для конкретных неварьируемых переменных).

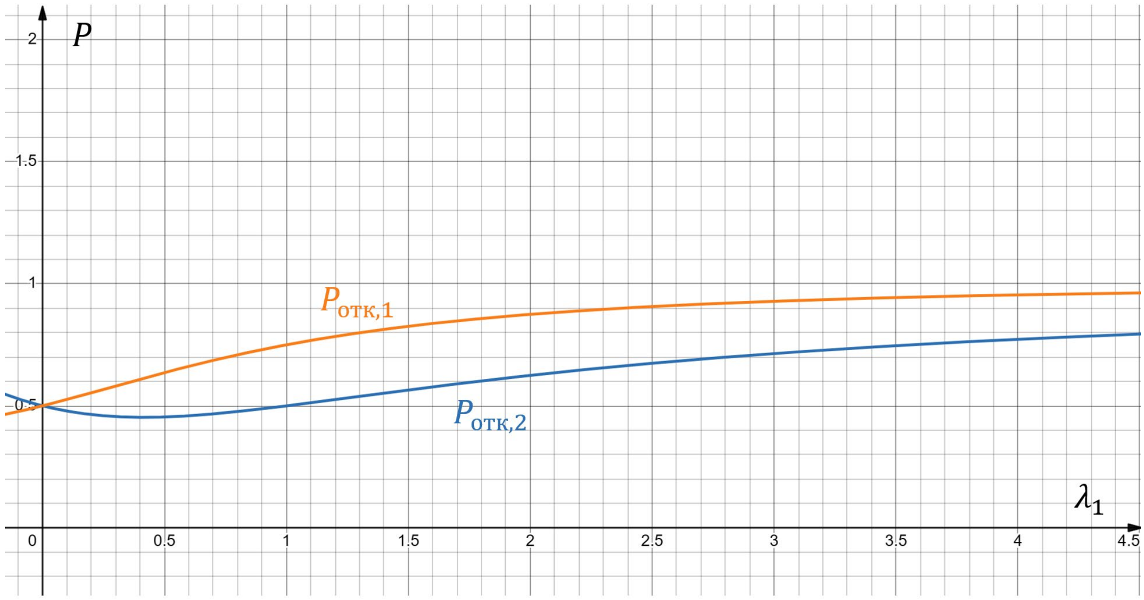

Рис. 3 – Зависимость $P_{отк,1}(\lambda_1)$ и $P_{отк,2}(\lambda_1)$

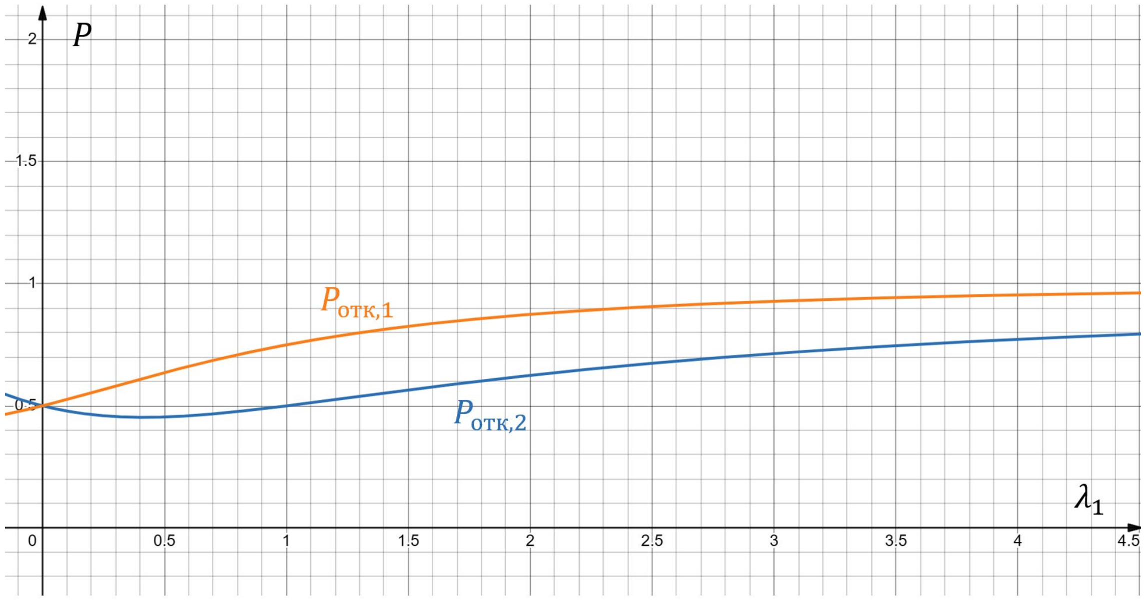

Рис. 4 – Зависимость $P_{отк,1}(\lambda_1)$ и $P_{отк,2}(\lambda_1)$

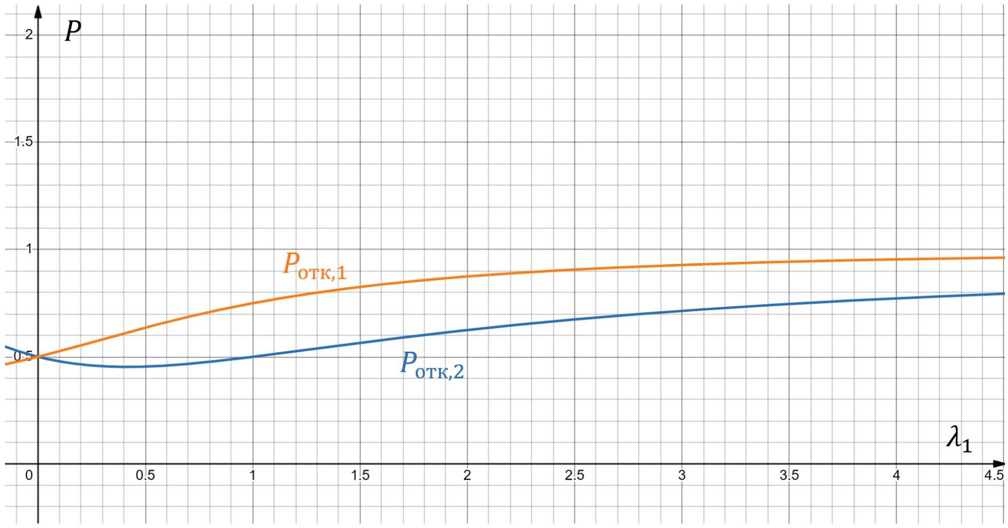

Рис. 5 – Зависимость $P_{отк,1}(\lambda_1)$ и $P_{отк,2}(\lambda_1)$

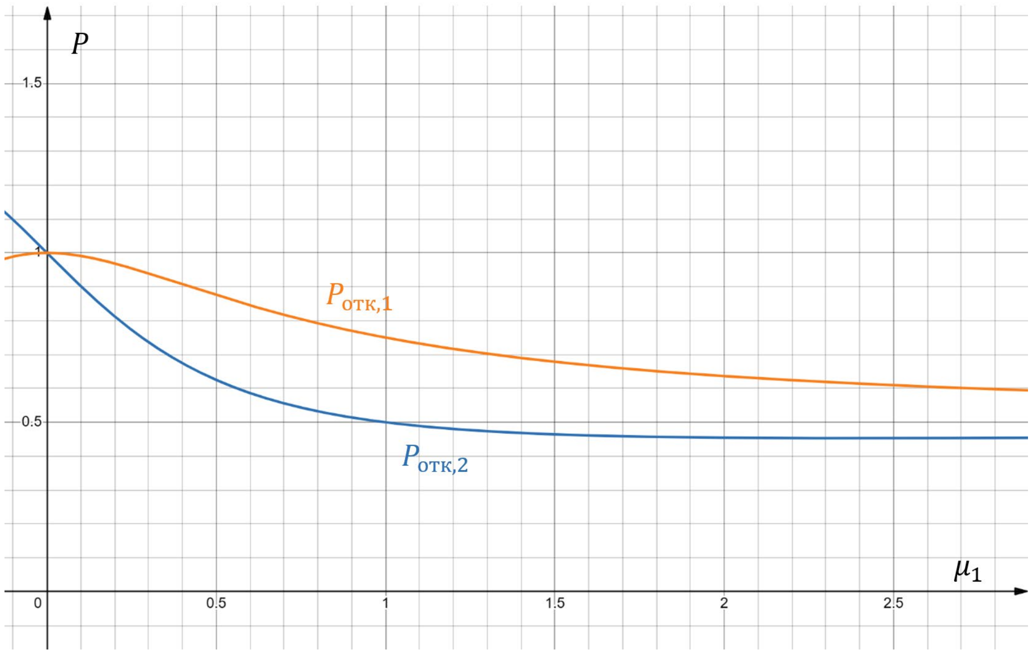

Рис. 6 – Зависимость $P_{отк,1}(\mu_1)$ и $P_{отк,2}(\mu_1)$

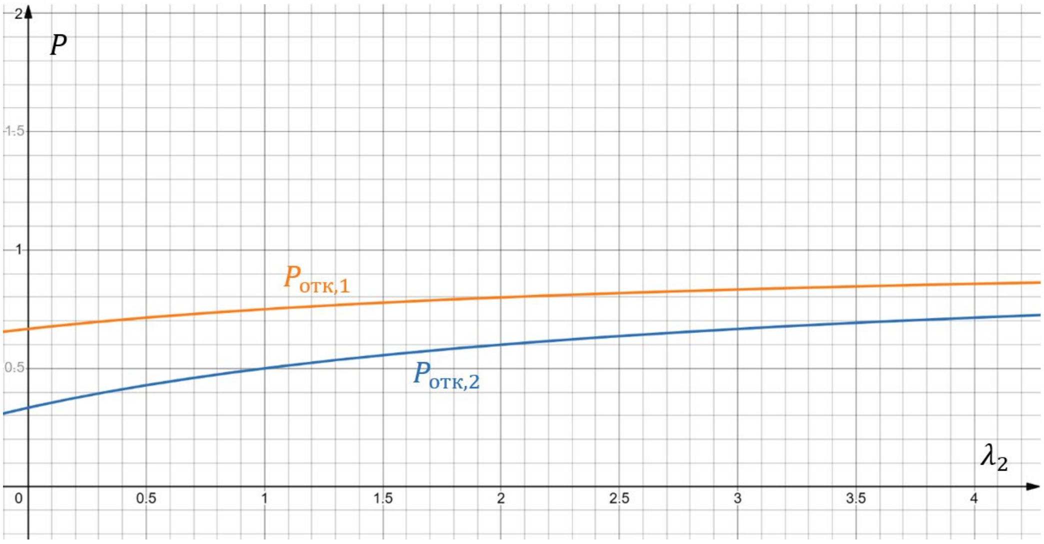

Рис. 7 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\lambda_2)$ и $P_{\text{отк},2}(\lambda_2)$

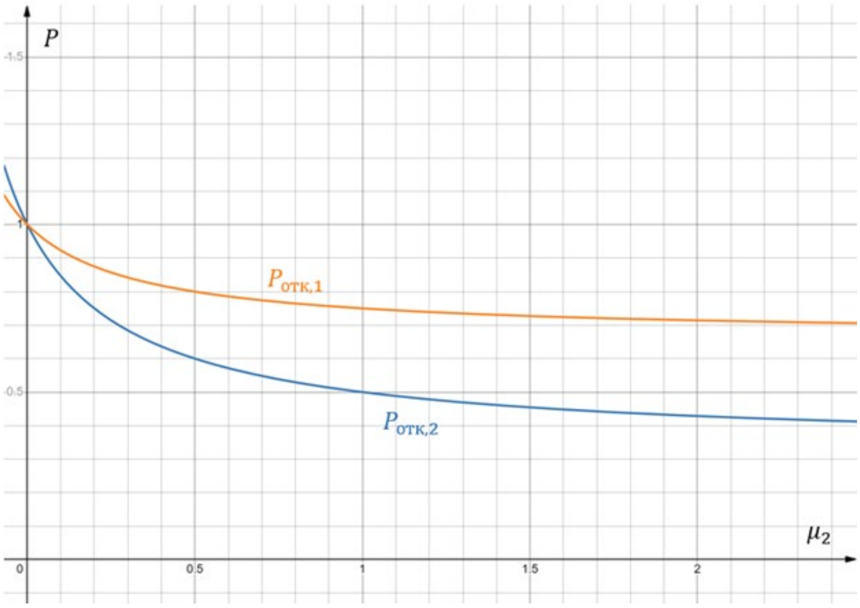

Рис. 8 – Зависимость $P_{\text{отк},1}(\mu_2)$ и $P_{\text{отк},2}(\mu_2)$

2.3. СМО, в которой второй поток содержит одинарен

В этом случае мы рассматриваем систему как M/M/k/0, где количество каналов обслуживания k одинаково для обоих потоков. Вероятности потери требований первого и второго классов будут зависеть от соответствующих интенсивностей поступления и обслуживания, а также от количества доступных каналов обслуживания. Т. к. при суммировании независимых пуассоновских потоков суммарный поток также пуассоновский, то имеем стандартную двухканальную СМО с отказами с интенсивностью поступающего потока $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и интенсивностью обслуживания μ. В этом случае вероятность отказа в обслуживании одинакова для обоих потоков:

$$P = P_{\text{отк}_1} = P_{\text{отк}_2} = \frac{\frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2}}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot \mu^2}}$$

Построим график $P_{\text{отк}}(\lambda)$, взяв в качестве неварьируемой величины $\mu = 1$:

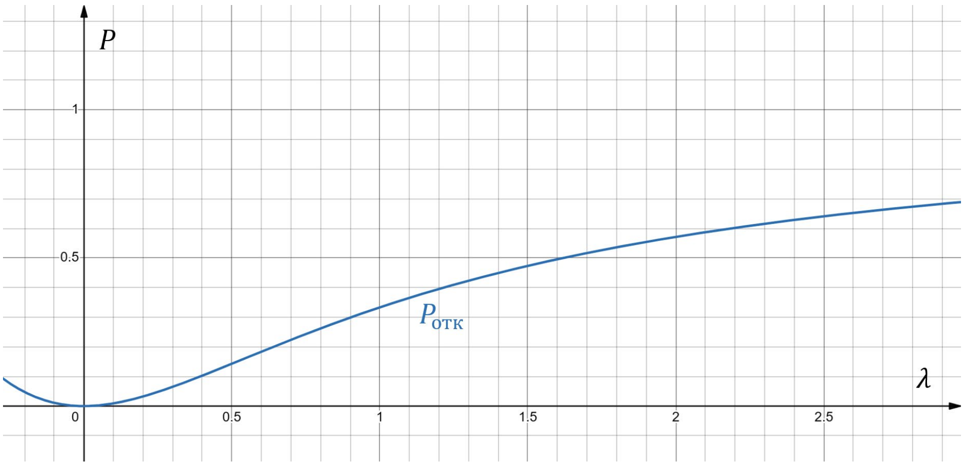

Рис. 9 – График зависимости $P_{\text{отк}}(\lambda)$

Построим график $P_{\text{отк}}(\mu)$, взяв в качестве неварьируемой величины $\lambda = 1$:

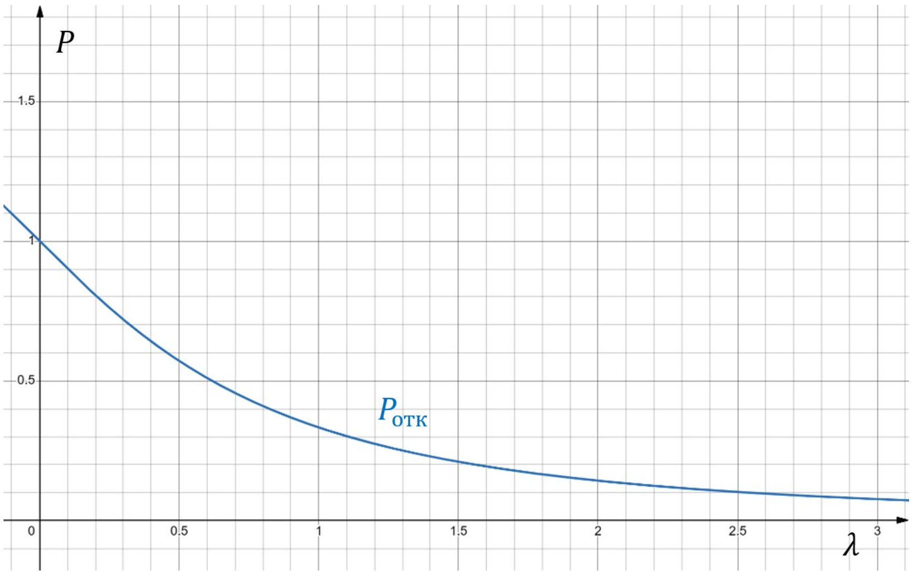

Рис. 10 – График зависимости $P_{\text{отк}}(\mu)$

3. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была проведена аналитическая оценка системы массового обслуживания типа M/M/k/0 в двух сценариях: когда второй поток содержит две заявки и когда второй поток является ординарным.

В результате анализа были выявлены ключевые зависимости доли потерь заявок первого и второго классов от параметров системы, таких как интенсивности поступления и обслуживания. В обеих ситуациях было показано, что вероятность отказа в обслуживании зависит от соотношения интенсивностей поступления и обслуживания, а также от количества доступных каналов обслуживания.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о важности оптимизации параметров системы для минимизации потерь заявок и повышения её производительности. Оптимальный выбор параметров системы может способствовать улучшению обслуживания клиентов и повышению эффективности работы организации.

4. Источники

Графики вероятностей из данной лабораторной работы, построенные в редакторе Desmos, можно найти по данной ссылке – https://www.desmos.com/calculator/wbzytalfio