行列式专题 1

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

今天开始我们进入行列式专题. 很多同学遇到稍复杂的行列式计算问题时, 就要花费很多时间, 甚至到最后还做不出来. 在考场上, 如果遇到行列式的题目, 应该就是最简单的题目, 应该快速的拿到分数. 接下来, 我来介绍五种常用的计算行列式的方法, 希望同学们可以灵活应用她们:

① 化为上 (下) 三角形法 ② 按行 (列) 展开 ③ 降阶法 ④ 拆行 (列) 法 ⑤ 降阶定理

1.1 化为上 (下) 三角形法

将行列式化为上三角形或者下三角形, 对主对角元乘积得到行列式的值是最简单的想法, 记住下面两个模型的计算思想和结果, 有助于加强我们对这个简单却实用的方法的认识.

I 型:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i} & b_2 & \cdots & b_n \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}=\left(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i}\right)a_2\cdots a_n.$$

这里假定 $a_i\neq 0$. 从第二行开始, 利用 a_i 把 c_i 或者 b_i “打掉”, 一直到第 n 行, 就得到一个上三角形或者下三角形的行列式.

II 型:

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ c_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{n-1} & b_{n-1} & \\ & & & c_n & b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r & * & \cdots & * & * \\ & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-1} & \\ & & & & b_n \end{vmatrix}=rb_2\cdots b_n.$$

其中,

$$r=a_1-a_2\frac{c_2}{b_2}+a_3\frac{c_2c_3}{b_2b_3}-\cdots+(-1)^{n+1}a_n\frac{c_2\cdots c_n}{b_2\cdots b_n}.$$

这里假定 $b_i\neq 0$. 从第 n 行开始, 利用 b_i 把 c_i “打掉”, 一直到第 2 行, 就得到一个上三角形的行列式. 原来 a_i 处用 $*$ 代替, 是因为我们并不关心这些值在把 c_i “打” 为 0 的过程中发生了什么样的变化.

例题 1 **例题** *1*

$$D_n=\begin{vmatrix} \lambda_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & \lambda_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & \lambda_n+a_nb_n \end{vmatrix},\quad \lambda_i\neq 0\,(i=1,2,\cdots,n)$$

分析: 求行列式的题目, 大多可以用不同的方法来做, 这道题就可以用大名鼎鼎的 “打洞原理” 得到结果. 但是, 稍作变形, 就可以利用模型 I 的公式轻松得到结果了.

解:
$$D_n=\begin{vmatrix}1 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n\\ & \lambda_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ & a_2b_1 & \lambda_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & \lambda_n+a_nb_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n\\ a_1 & \lambda_1 & & & \\ a_2 & & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_n & & & & \lambda_n\end{vmatrix}.$$

利用 I 型公式, 直接得到

$$D_n=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{\lambda_i}\right)\lambda_1\cdots\lambda_n.$$

注:

(a) “龙生龙, 凤生凤, 华罗庚的弟子会打洞.” 打洞原理并不神秘, 就是用非零的主对角元将非主对角元素通过行列变换化为 0, 通过这个简单的思想, 总结出了一系列非常有用的结论. 不知道相关结论的同学, 可以参考扬哥的《高等代数强化讲义》, 再用 “打洞原理” 做一遍这个题目.

(b) 在应用模型 I 之前, 通过加边法将题目转换为相对简单的等价形式. 相对降阶法的升阶法中的加边法, 在解决行列式问题时, 有时也能起到意想不到的作用, 本次专题, 并没有单独拎出来介绍这个方法, 希望通过这个例题让同学们对加边法有所认识.

行列式专题 2

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

---

① 化为上 (下) 三角形法 ② 按行 (列) 展开 ③ 降阶法 ④ 拆行 (列) 法 ⑤ 降阶定理

今天我们进入行列式专题 2. 二阶行列式和一阶行列式 (一个数) 是容易计算的, 有时, 尽管我们不能将复杂的行列式降到一阶或二阶, 降低行列式的阶数也有可能降低计算行列式的难度. **按行 (列) 展开**就属于一种降阶手段.

2.2 n **阶行列式按第一行展开得到展开式:**

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}. \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \end{aligned}$$

A_{1i} 代表 a_{1i} 的代数余子式. 这样, 我们将 n 阶行列式化为 n 个 n-1 阶行列式的线性组合, 当某一行或某一列只有少数非零元素时, 利用此方法就达到了降阶的目的.

下面考虑两个有意义的问题:

2.2.1 **那么** $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = ?$

$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} =$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

最后一个行列式的第一行和第二行相同, 因此,

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \cdots + a_{2n}A_{1n} = 0.$$

类似的, 某一行 (列) 只有乘以该行 (列) 对应的代数余子式才等于行列式, 其他情况都等于 0. 即课本 P79 的结论.

进一步, 可以得到更为重要的结论:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{bmatrix} = |A|\,E.$$

注意: 上式中, 无论 $|A|$ 是否等于 0, 都是成立的.

2.2.2 **试证明下式**

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证: 设 $a_{1i}=b_{1i}+c_{1i}$, 带入展开式:

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (b_{11}+c_{11})A_{11}+(b_{12}+c_{12})A_{12}+\cdots+(b_{1n}+c_{1n})A_{1n}$$

$= b_{11}A_{11}+b_{12}A_{12}+\cdots+b_{1n}A_{1n} \ + \ c_{11}A_{11}+c_{12}A_{12}+\cdots+c_{1n}A_{1n}$(根据线性性质)

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.2.2 是后面拆行 (列) 法的理论基础, 因此, 掌握这个证明过程有助于在后面更好的应用它.

例题 1 计算行列式 D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & c_2^1 & c_3^1 & \cdots & c_{n-1}^1 & c_n^1 \\ 1 & c_3^2 & c_4^2 & \cdots & c_n^2 & c_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{n-1}^{n-2} & c_n^{n-2} & \cdots & c_{2n-4}^{n-2} & c_{2n-3}^{n-2} \\ 1 & c_n^{n-1} & c_{n+1}^{n-1} & \cdots & c_{2n-3}^{n-1} & c_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

解: 根据公式 $c_n^m - c_{n-1}^{m-1} = c_{n-1}^m$, 从第 n 行开始, 依次减去上一行, 一直到第 2 行, 得到:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 1 & c_3^2 & \cdots & c_{n-1}^2 & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & c_{n-1}^{n-2} & \cdots & c_{2n-5}^{n-2} & c_{2n-4}^{n-2} \\ 0 & 1 & c_n^{n-1} & \cdots & c_{2n-4}^{n-1} & c_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & c_3^2 & \cdots & c_{n-1}^2 & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & c_{n-1}^{n-2} & \cdots & c_{2n-5}^{n-2} & c_{2n-4}^{n-2} \\ 1 & c_n^{n-1} & \cdots & c_{2n-4}^{n-1} & c_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

上式中, 按照第一列展开就得到一个 $(n-1)\times(n-1)$ 阶的行列式, 达到了降阶的目的. 对后面的行列式再进行一次同样的操作, 即从 $n-1$ 行开始, 依次减去上一行, 一直到第 2 行, 再

按第一列展开, 就得到:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & c_2^1 & \cdots & c_{n-2}^1 & c_{n-1}^1\\ 0 & 1 & \cdots & c_{n-2}^2 & c_{n-1}^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n-6}^{n-2} & c_{2n-5}^{n-2}\\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n-5}^{n-1} & c_{2n-4}^{n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cdots & c_{n-2}^2 & c_{n-1}^2\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cdots & c_{2n-6}^{n-2} & c_{2n-5}^{n-2}\\ 1 & \cdots & c_{2n-5}^{n-1} & c_{2n-4}^{n-1}\end{vmatrix}.$$

一直这样做 $n-1$ 次, 就得到:

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & c_{n-1}^{n-2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

行列式专题 3

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

---

① 化为上 (下) 三角形法　② 按行 (列) 展开　③ 递推公式　④拆行 (列) 法　⑤ 降阶定理

今天我们进入行列式专题 3. 按行 (列) 展开后, 有一类行列式会构成一个递推关系式, 这是计算行列式, 就相当于求地拖关系式的通项, 所以研究求通项的方法是很有必要的. **直接从例题学习方法**

例题 1 计算行列式 D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解: 按第一行展开, 得到

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

然后, 移项得到:

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}).$$

记 $a_n = D_{n+1} - \alpha D_n$, 所以, $a_n = \beta a_{n-1}$. 而且

$$D_1 = \alpha+\beta. \quad D_2 = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta.$$

所以,

$$a_n = \beta^2 a_{n-2} = \cdots = \beta^{n-1} a_1 = \beta^{n+1}.$$

其中, $a_1 = D_2 - \alpha D_1 = \beta^2$. 带入迭代式 $a_n = D_{n+1} - \alpha D_n$

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= \beta^{n+1} + \alpha D_n = \beta^{n+1} + \alpha\beta^n + \alpha^2 D_{n-1} = \\ &\cdots\ \cdots \\ &= \beta^{n+1} + \alpha\beta^n + \alpha^2\beta^{n-1} + \cdots + \alpha^n\beta^1 + \alpha^{n+1}. \end{aligned}$$

所以

$$D_n = \begin{cases} \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, \alpha \neq \beta \\ (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n, \alpha = \beta \end{cases} \tag{1}$$

启发:

对于上面 $D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$, 令 $D_n = x^n$, 移项并化简得到:

$$0 = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = (x-\alpha)(x-\beta).$$

即 $x_1 = \alpha$ 或 $x_2 = \beta$ 为该二次方程的跟 (可以相同, 也可以是复数). **这样**, 遇到有递推关系的行列式, 我们就有了可以借鉴的方法. (李尚志老师的《线性代数》教材中, 利用线性空间的这一

工具, 给出了一种"巧妙"的方法, 感兴趣的同学去翻翻教材吧!) 再做一个例题, 练练手吧!

例题 2 计算行列式 D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & 1 & 2\cos\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}.$$

解: 跟上面一样的方法, 按第一行展开, 得到:

$$D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2}.$$

令 $D_n = x^n$, 带入上式, 并移项, 得到:

$$x^2 - (2\cos\theta)x - 1 = 0.$$

解得:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\theta + i\sin\theta \\ x_2 = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases}$$

因为 $x_1 \neq x_2$, 所以带入式 (1) 的第一个式子, 得到:

$$D_n = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

行列式专题 4

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

---

①化为上 (下) 三角形法 ②按行 (列) 展开 ③递推公式 ④拆行 (列) 法 ⑤降阶定理

今天我们进入行列式专题 4. 拆行 (列) 法的证明并不难, 需要用到②按行 (列) 展开中的证明. 有可能开始时使用这类方法会有些慢, 但是用不了多久, 你会发现类似的题目都是"一瞪眼儿的事".

行列式拆行 (列) 法则

在行列式专题 2 中, 已经证明若 $a_{1i} = b_{1i} + c_{1i}$, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

若 $a_{i1} = b_{i1} + c_{i1}$, 类似的, 成立:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

那么, 若 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \forall\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$ 成立, 上式可以拆分成什么样呢? 也就是说

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \ ?$$

显然, 由第一列, 可以将行列式分为两个行列式的和

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix}.$$

不难看出, 由右边第一个式子的第二列可以继续分解成两个行列式的和

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21} & c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix}.$$

由右边第二个式子的第二列同样可以分解成两个行列式的和

$$\begin{vmatrix} c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & b_{n2}+c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ c_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & b_{nn}+c_{nn} \end{vmatrix}.$$

这样, 由原式前两列就可以分解为四个行列式的和, 进行下去, 我们可以将一个 n 阶行列式分解为 2^n 个行列式的和.

也就是说, 原行列式的每一列都可以分成两组, 从第 1 列到 n 列, 依次任选一组, 对应的组成新的行列式, 共有 2^n 种取法, 这些行列式的和就等于原来的行列式.

看上去这样做, 将问题变复杂了, 但对于某些特殊情形, 可以得到简化行列式的目的, 甚至有出人意料的效果. 正如下面的例题:

例题 1 计算行列式 D_n

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解: 该行列式可以等价的写为:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(x-a) & a+0 & \cdots & a+0 \\ a+0 & a+(x-a) & \cdots & a+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+0 & a+0 & \cdots & a+(x-a) \end{vmatrix}.(\text{然后按列拆分})$$

$$= \begin{vmatrix} (x-a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (x-a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (x-a) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & (x-a) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & 0 & \cdots & (x-a) \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} (x-a) & a & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \cdots & (x-a) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} (x-a) & 0 & \cdots & a \\ 0 & (x-a) & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)^n + na(x-a)^{n-1}.$$

上面拆分的结果只有 $(1+n)$ 项, 是因为剩余的 $2^n-(1+n)$ 项行列式全部为 0. 当你熟悉之后, 完全不用这么麻烦, 挨个展开, 类似的题目, 应该用很少的时间, “一瞪眼儿”就能得到正确的结果! 稍作改变, 就有一些难度了, 如下所示:

例题 2 计算行列式 D_n

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & b & \cdots & b & b\\ a & x_2 & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_{n-1} & b\\ a & a & \cdots & a & x_n\end{vmatrix}.$$

解: 将最后一列拆分:

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1 & b & \cdots & b & b+0\\ a & x_2 & \cdots & b & b+0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_{n-1} & b+0\\ a & a & \cdots & a & b+(x_n-b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & b & \cdots & b & b\\ a & x_2 & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_{n-1} & b\\ a & a & \cdots & a & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & b & \cdots & b & 0\\ a & x_2 & \cdots & b & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_{n-1} & 0\\ a & a & \cdots & a & (x_n-b)\end{vmatrix}.$$

后面一个行列式显然等于 $(x_n-b)D_{n-1}$.

对于前一个式子, 用最后一行的 -1 倍加到各行, 得到

$$\begin{vmatrix}x_1 & b & \cdots & b & b\\ a & x_2 & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_{n-1} & b\\ a & a & \cdots & a & b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1-a & b-a & \cdots & b-a & 0\\ 0 & x_2-a & \cdots & b-a & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-a & 0\\ a & a & \cdots & a & b\end{vmatrix}.$$

再按最后一列展开, 行列式等于 $b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a)$. 综合, 就有

$$D_n=(x_n-b)D_{n-1}+b\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-a).$$

如果按最后一行拆开, 近似地, 就有对称式:

$$D_n=(x_n-a)D_{n-1}+a\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-b).$$

如此, 就可以将 D_n 解出来:

$$D_n=\frac{b\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)-a\prod_{i=1}^{n}(x_i-b)}{b-a}.$$

行列式专题 5

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

---

① 化为上 (下) 三角形法 ② 按行 (列) 展开 ③ 递推公式 ④拆行 (列) 法 ⑤ 降阶定理

今天我们进入行列式专题 5. 降阶是计算行列式的一个手段, 在前面也提到过. 今天, 我们借助"打洞"这一手段, 介绍"降阶定理", 很重要!

5.1 **降阶定理**: 设 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是一个方阵, 若 A 可逆, 那么有

$$|M|=|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|. \tag{1}$$

证明:

$$\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

对矩阵 M 左乘初等矩阵 $\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -CA^{-1} & E_m \end{bmatrix}$, 就使得子方块 A 下方全部化为 0(因此, 该定理又名"打洞原理"). 然后, 上式两边同时求行列式即可.

这里需要用到矩阵分块运算的知识, 可以学过矩阵一章, 再回头看这一定理, 但是, 需要知道的是, 这里用到的都是最简单的知识, 可以看成是高斯消元法的矩阵形式.

推广:

当方阵 D 可逆时, 也成立:

$$|M|=|D|\cdot\left|A-BD^{-1}C\right|. \tag{2}$$

当方阵 A 和方阵 D 都可逆时, 成立:

$$|A|\cdot\left|D-CA^{-1}B\right|=|D|\cdot\left|A-BD^{-1}C\right|. \tag{3}$$

上面两条, 可以轻松的证出来. 有了"打洞原理", 原来很复杂的题目, 就可以变得很容易了.

例题 1 计算行列式 D_n

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解:

$$\begin{aligned} D_n &= \left|\begin{bmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_n \end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{bmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\right| \quad \text{运用公式 (3)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\begin{vmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \right| \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix} \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[(2-n)^2 - \sum_{i,j=1}^n \frac{a_j}{a_i} \right].
\end{aligned}
$$

写在最后

每日一题初级版介绍了 5 种计算行列式的方法, 分别是① 化为上 (下) 三角形法 ② 按行 (列) 展开 ③ 递推公式 ④拆行 (列) 法 ⑤ 降阶定理. 当然, 计算行列式的方法还有很多很多, 这里介绍的都是比较常见的. 介绍每一种方法后, 都至少有一个例题来辅助记住该方法. 而且, 还可以发现, 在计算一个行列式总是需要多种方法综合使用, 这就要求我们能够灵活的应用他们.

每日一题初级版中涉及的做多的还是行列式的计算, 而行列式这一章的知识不仅仅如此, 克拉默法则用于解线性方程组的证明, 拉普拉斯展开定理, 以及 A, B 是可乘的方阵是, 为什么 $|AB| = |A|\,|B|$? 等等. 都是值得弄明白的问题. 考研初期, 还是要老老实实的看课本. (课本也不要局限于一本)

由于高代内容的联系性, 除了多项式一章, 其他章节的关系可以说是“错综复杂”, “我中有你, 你中有我”. 因此, 高代的知识点需要反复看, 看得越多, 越有感觉!