多项式 1

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

多项式是高等代数区别线性代数的部分, 但有的高校 (比如华中科大) 不会考, 这并不意味着这一部分有的同学不用复习, 因为高等代数后面的部分也会用到一些多项式的知识点. 作为基础版的每日一题, 这里的题目是基础的, 是为后面的部分做准备的, 请所有同学都认真对待!

1.1 **综合除法**. 这个知识点也许在初中或者高中接触过, 具体是这样的:

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是数域 F 上的多项式, $g(x)=x-c, c\in F$. 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$:

不妨设商 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$, 那么

Table 1: 综合除法

c		a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_1	a_0
	+)		cb_{n-1}	$\cdots$	cb_i	$\cdots$	cb_1	cb_0
		b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_{i-1}	$\cdots$	b_0	r

其中, $b_{n-1}=a_n, b_{i-1}=a_i+cb_i(\forall 1\leqslant i\leqslant n)$, 而且

$$r=a_0+cb_0.$$

例题 1 $f(x)=2x^4-5x+8, g(x)=x+3$, 求 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

解: 利用表 1, 依次计算 $(c=-3)$

$$b_3=a_4=2,$$

$$b_2=a_3+cb_3=-6,$$

$$b_1=a_2+cb_2=18,$$

$$b_0=a_1+cb_1=-59.$$

所以,

$$q(x)=2x^3-6x^2+18x-59.$$

而且,

$$r(x)=a_0+cb_0=185.$$

注: 使用综合除法, $g(x)$ 必须满足 $x-c$ 的格式! 想一想, 如果例 1 中的 $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, 该怎么解决呢?

1.2 **应该记住的几个定理**

1.2.1 对于任意 $f(x), g(x)\in F[x]$, 及它们的最大公因式 $d(x)$, 存在 $u(x), v(x)\in F[x]$ 使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

1.2.2 当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素时, $f(x), g(x)$ 互素 $\Longleftrightarrow$ 存在 $u(x), v(x) \in F[x]$ 使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

这个定理在后面后涉及多次.

1.2.3 (因式定理)

$$(x-c) \mid f(x) \Leftrightarrow f(c)=0.$$

1.2.4 判定重因式

$$f(x) \in F[x] \text{有重因式} \Leftrightarrow \big(f(x), f'(x)\big) \neq 1.$$

例题 2 单位根问题

(1) 证明多项式 x^n-1 没有重因式.

(2) 在复数域 C 上对 x^n-1 因式分解.

解:

(1) 令 $f(x)=x^n-1$, 然后 $f'(x)=nx^{n-1}$. 因为 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的根, 所以

$$\big(f(x), f'(x)\big)=1.$$

根据 1.2.4, $f(x)$ 没有重因式.

(2) 先求 x^n-1 的全体复数根, 即 $x^n=1$ 的根.

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是上述方程的所有复数根, 其中实数 $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, 则

$$z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=2k\pi, k=0,\pm 1\cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{2k\pi}{n}, 0 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$$

所以, 方程 $x^n-1=0$ 有 n 个不同的根

$$\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, k=0,1,2,\cdots,n-1$$

x^n-1 在复数范围内的标准分解式为

$$x^n-1=(x-1)(x-\omega_1)(x-\omega_2)\cdots(x-\omega_{n-1})$$

注: ω_k 成为 n 次单位根. 如果将它们用复平面上的点 A_K 表示, 它们就是以原点为圆心的单位圆的一个内接正 n 边形的顶点.

多项式 2

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

多项式是高等代数区别线性代数的部分, 但有的高校 (比如华中科大) 不会考, 这并不意味着这一部分有的同学不用复习, 因为高等代数后面的部分也会用到一些多项式的知识点. 作为基础版的每日一题, 这里的题目是基础的, 是为后面的部分做准备的, 请所有同学都认真对待!

2.1 **几个简单的例题**.

例题 1 试求七次多项式 $f(x)$, 使得 $f(x)+1$ 能被 $(x1)^4$ 整除, 而 $f(x)1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除.

解: 因为 $x=1$ 是 $f(x)+1$ 的 4 重根, 故 $x=1$ 是 $f'(x)$ 的 3 重根. 同样 $x=1$ 是 $f'(x)$ 的 3 重根. 又 $\deg f=6$, 故可设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a\left(x^6-3x^4+3x^2-1\right)$$

其中 a 为待定常数.

于是

$$f(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+b.$$

又由已知 $f(1)=1, f(1)=1$ 可得

$$a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+b=-1, a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)+b=1.$$

解得 $a=\frac{35}{16}, b=0$, 故

$$f(x)=\frac{5}{16}x^7-\frac{21}{16}x^5+\frac{35}{16}x^3-\frac{35}{16}x.$$

例题 2 设 F 为数域, $p(x)\in F[x]$ 不可约. 证明:

(1) $p(x)$ 在复数域上无重根;

(2) $p(x)$ 与某个多项式 $f(x)\in F[x]$ 有公共根 α, 则必有 $p(x)|f(x)$.

解:

(1) 由于 $p(x)\in F[x]$ 不可约, 故 $(p(x),p'(x))=1$, 所以, $p(x)$ 在复数域上无重根;

(2) 反证, 若 $(p(x),f(x))=1$, 则 $\exists u(x),v(x)$

$$p(x)u(x)+f(x)v(x)=1.$$

将 $x=\alpha$ 带入, 则得到矛盾. 因此 $p(x)|f(x)$.

例题 3 设 $f(x)$ 是整系数多项式, a 是一个整数,

$$f(a)=f(a+1)=f(a+2)=1.$$

求证: 对任意整数 c, $f(c)$ 不等于 1.

证: 由条件可设

$$f(x)=(x-a)(x-a-1)(x-a-2)g(x)+1.$$

其中 $g(x)$ 为整系数多项式. 若存在整数 c 使得 $f(c)=1$. 则

$$-1=f(c)=(c-a)(c-a-1)(c-a-2)g(c)+1.$$

即

$$(c-a)(c-a-1)(c-a-2)g(c)=-2.$$

由于 2 不能表示为三个连续整数的积. 矛盾.

2.2 Eisenstein **判别法**. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in \mathbb{Z}[x]$$

如果存在某个素数 p 同时满足以下条件:

(1) $p\nmid a_n$;

(2) $p\mid a_i,\forall 0\leqslant i\leqslant n-1$;

(3) $p^2\nmid a_0$,

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例题 4 证明下面的多项式 $f(x)$ 在有理数域上不可约:

(1) $f(x)=x^n+2, n$ 是任意正整数;

(2) $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1, p$ 是任意素数.

证:

(1) x^n+2 的首项系数是 1 不能被 $p=2$ 整除, 其余各项都被 2 整除, 常数项 2 不能被 2^2 整除. 由 Eisenstein 判别法, x^n+2 在有理数域上不可约.

(2) 不能直接对 $f(x)$ 用 Eisenstein 判别法, 因为没有素数可以整除系数 1. 取 $y=x-1, x=y+1, g(y)=f(y+1)$. 则

$$\begin{aligned} g(y) &= f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=\frac{(y+1)^p-1}{(y+1)-1} \\ &= \frac{y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-2}y^2+py}{y} \\ &= y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-2}y+p. \end{aligned}$$

$g(y)$ 的首项系数 1 不被 p 整除, 其余各项系数 $C_p^k=\frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}(1\leqslant k\leqslant p-1)$ 都被 p 整除, 常数项 p 不被 p^2 整除. 由 Eisenstein 判别法, $g(y)$ 在有理数域上不可约, 因此 $f(x)$ 在有理数域上不可约.