线性方程组 1

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

我们在高中时代就会解简单的线性方程组, 而在高等代数里, 对于线性方程组有了更深的研究. 我们从线性方程组中 “分解” 出向量, 并研究其线性相关性, 从而, 得到线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵与增广矩阵有相同的秩, 并且学习了判断是否有唯一解的条件.

今天讨论线性相关性, 又分为向量间和向量组间的线性相关性.

1.1 向量间的线性相关性与解线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots\boldsymbol{\alpha}_n\text{线性无关(相关)}\Longleftrightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\text{只有零解(有非零解)}. \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, j=1,2\cdots n$.

(1) 式的理解意义大于操作意义, 考研题目不会让我们判断哪几个具体的向量的线性相关性. 需要熟记: 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 只有零解; 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 有非零解.

例题 1 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 那么讨论 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性相关性?

解: 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足:

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=0.$$

即

$$(\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=0.$$

$\because$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,

$\therefore$ 成立

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}. \tag{2}$$

解得 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$, 所以, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

1.2 向量组间的线性相关性

定义 1 若向量组 S_2 中的每个向量都是 S_1 中的向量的线性组合, 就称 S_2 是 S_1 的线性组合. 若 S_1 和 S_2 互为线性组合, 就称 S_1 与 S_2 等价.

定理 1 若向量组 S_1 与 S_2 等价, 则他们对应的极大线性无关组等价.

点睛: 向量组中的一组极大线性无关组是该向量组的一个“代表”.

定理 2 若向量组 S_2 是 S_1 的线性组合, 则 $rank\ S_2\leqslant rank\ S_1$.

点睛: 向量组 S_2 由 S_1 线性表出, S_2 的秩就不会超过 S_1 的秩.

证: 设 rank $S_1=r_1$, rank $S_2=r_2$, 且向量组 S_1 的极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$, 向量组 S_2 的极大线性无关组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$. 则, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$ 与向量组 S_1 等价, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$ 与向量组 S_2 等价

$\because$ 向量组 S_2 由 S_1 线性表出,

$\therefore$ $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{r_2}$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$ 线性表出.

又 $\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r_1}$ 线性无关,

$\therefore$ $r_2\leqslant r_1$, 即 rank $S_2\leqslant$ rank S_1.

例题 2 设向量组 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的秩是 r. 求证:

(1) $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 中任意 r 个线性无关向量都是极大线性无关组.

(2) 设 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 能被其中某 r 个向量 $C=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\}$ 线性表出, 则 $C=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\}$ 线性无关.

证:

(1) 假设 $B=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\}$ 是其中任意 r 个线性无关的向量, 对于 $\forall\beta_0\in A\backslash B$, 若 $\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关, 则与向量组 $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 的秩是 r 矛盾, 所以, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中任意 r 个线性无关向量都是极大线性无关组.

(2) $\because$ 向量组 A 由向量组 C 线性表出, 由定理 2 , rank $C\geqslant$ rank $A=r$,
又 $\because$ 向量组 C 有 r 个向量,
$\therefore$ 向量组 C 线性无关.

线性方程组 2

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

我们在高中时代就会解简单的线性方程组, 而在高等代数里, 对于线性方程组有了更深的研究. 我们从线性方程组中 "分解" 出向量, 并研究其线性相关性, 从而, 得到线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵与增广矩阵有相同的秩, 并且学习了判断是否有唯一解的条件.

今天看几个有关线性相关性的例题.

2.1 向量组 "秩" 概念的重申

设向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 由 n 个向量组成. 如果这 n 个向量组线性无关, 就认为 n 是这个向量组中真正的向量个数, 秩就是 n. 如果向量组 S 线性相关, 则必有某个向量可以表示为其他向量的线性组合, 就认为这个向量是 "多余的", 剔除它. 考虑剩下的向量组, 重复以上的动作, 直至剩下的向量组线性无关. 假设剩下的向量组 $\tilde{S} = \left\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}\right\}$ 有 r 个向量. 这 r 个向量都不是 "多余的", 它们线性无关, r 是这个向量组中真正的向量个数.

以上, 被剩下的 r 个向量成为向量组 S 的极大线性无关组, 值得注意的是: 这 r 个向量不一定是唯一的. 比如:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 的秩为 2, S 的极大线性无关组可以是 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 或者 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 或者 $\{\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$.

例题 1 求向量

$$\alpha_1 = (1,2,0,-5,1), \alpha_2 = (1,2,3,4,-3), \alpha_3 = (2,4,-3,-19,6).$$

$$\alpha_4 = (1,1,1,1,1), \alpha_5 = (3,6,-3,-24,7).$$

组成的向量组 S 的一个极大线性无关组.

解: 将向量排成列向量

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -3 \\ -5 & 4 & -19 & 1 & -24 \\ 1 & -3 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

经过一系列初等行变换得到

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$ 是 S 的一个极大线性无关组.

2.2 稍难的例题

例题 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 且可以被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出, 则可以从 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 中选出 r 个向量替换成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 后, 得到的新向量组与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价.

证: 对 r 用递推法:

当 $r=1$ 时, 由于 α_1 线性无关, 所以 $\alpha\neq 0$. 已知 α_1 可以被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出, 设为

$$\alpha_1=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_n\beta_n$$

由于 $\alpha_1\neq 0$, 所以至少存在一个 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 使得 $k_i\beta_i\neq 0$, 于是就有

$$\beta_i=\frac{1}{k_i}(\alpha_1-k_1\beta_1-\cdots-k_{i-1}\beta_{i-1}-k_{i+1}\beta_{i+1}-\cdots-k_n\beta_n)$$

这就说明 β_i 可以由 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 线性表出, 即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 等价.

当 $r=2$ 时, 已知 α_1,α_2 线性无关且可以被 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出, 上面已知存在 i 使得 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 是等价的. 那么 α_2 可以被 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 线性表出, 可以写为

$$\alpha_2=l_1\beta_1+\cdots+l_{i-1}\beta_{i-1}+l_i\alpha_1+l_{i+1}\beta_{i+1}+\cdots+l_n\beta_n$$

因为 α_1,α_2 线性无关, 所以必然存在 $j(j\neq i,\text{不妨设}j>i)$ 使得 $l_j\beta_j\neq 0$, 从而

$$\beta_j=\frac{1}{l_j}\left(\alpha_2-l_1\beta_1-\cdots-l_{i-1}\beta_{i-1}-l_i\alpha_1-l_{i+1}\beta_{i+1}-\cdots-l_{j-1}\beta_{j-1}-l_{j+1}\beta_{j+1}-\cdots-l_n\beta_n\right).$$

即 β_j 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_{j-1},\alpha_2,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n$ 线性表出, 于是 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_{j-1},\alpha_2,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n$ 是等价的.

由等价的传递性就有: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_{i-1},\alpha_1,\beta_{i+1},\cdots,\beta_{j-1},\alpha_2,\beta_{j+1},\cdots,\beta_n$ 是等价的.

如此, 对任意的正整数 r 命题都成立.

线性方程组 3

2020 年 3 月 6 日

主页: matnoble.me

微信公众号: 数系家园

我们在高中时代就会解简单的线性方程组, 而在高等代数里, 对于线性方程组有了更深的研究. 我们从线性方程组中“分解”出向量, 并研究其线性相关性, 从而, 得到线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 系数矩阵与增广矩阵有相同的秩, 并且学习了判断是否有唯一解的条件.

线性方程组解的判定

3.1 方法论

(1) 若 $r(A) < r(\bar{A})$, 方程组无解.

(2) 若 $r(A) = r(\bar{A})$, 方程组有解.

(2.1) 若 $r(A) = n$, 方程组有唯一解;

(2.2) 若 $r(A) < n$, 方程组有无穷多解, 且通解中有 $n - r(A)$ 个独立取值的自由参数.

注: 此处 n 表示矩阵 A 的列数.

对原线性方程组做初等行变换, 经过上述判断, 就完成了对于线性方程组的求解. 如果 A 是方阵, 则可以直接求 $|A|$.

下面两个例题, 一定要耐心的自己先做完, 再对答案!

3.2 含参数的线性方程组

例题 1 当 λ 取何值时, 如下线性方程组唯一解? 无解? 无穷多解? 在无穷多解时, 求其通解.

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$$

解:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

(1) 当 $|A| \neq 0$ 时, 即 $\lambda \neq -2, \lambda \neq 1$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda = 2$ 时,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & \vdots & -5 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -2 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -9 \end{bmatrix}$$

因此 $r(A) = 2 \neq r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解.

(3) 当 $\lambda=1$ 时,

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&-2\\1&1&1&\vdots&-2\\1&1&1&\vdots&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&-2\\0&0&0&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

因此 $r(A)=r(\bar{A})=1$, 方程组有无穷多解. 通解为

$$X=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

例题 2 当 a,b 取何值时, 方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1\\2x_1+(a+3)x_2-3x_3=3\\-2x_1+(a-1)x_2+bx_3=a-1\end{cases}$ 无解? 有唯一解? 有无穷多解? 并在无穷多解时求其全部解.

解: 对初等矩阵作初等行变换

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a+1&-1&1\\0&2(a+1)&b-3&a+2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&a+1&-1&1\\0&0&b-1&a\end{bmatrix}$$

(1) 当 $a\neq-1, b\neq1$ 时, $r(A)=r(\bar{A})=3$, 方程组有唯一解.

(2) 当 $a=-1$ 时,

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-1&1\\0&0&b-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&b-2\end{bmatrix}$$

$r(A)=2$.

若 $b\neq2$, $r(\bar{A})=3$, 方程组无解.

若 $b=2$, $r(\bar{A})=2$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$X=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(3) 当 $a\neq-1, b=1$ 时, $r(A)=2$.

若 $a\neq0, r(\bar{A})=3$, 方程组无解.

若 $a=0$, $r(\bar{A})=2$, 方程组有无穷多解, 其通解为

$$X=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$