

线性代数总复习

—行百里者半九十—

整理:MatNoble

微信公众号:数学思维探究社 | 博客:blog.matnoble.top

目 录

1 第一阶段:基础运算与代数结构 (重点攻克计算准确度)	3
1.1 1. 行列式 (Determinants)	3
1.1.1 知识点精讲	3
1.1.2 典型例题与计算技巧	3
1.2 2. 矩阵运算 (Matrix Operations)	4
1.2.1 知识点精讲 (必背公式与性质清单)	4
1.2.2 典型例题	6
2 第二阶段:核心应用与综合大题 (重难点突破)	6
2.1 3. 向量组与线性方程组 (Linear Systems)	6
2.1.1 知识点图解与判定流程 (必背逻辑)	7
2.1.2 核心操作:如何快速求基础解系 (高分秘籍)	8
2.1.3 典型例题	8
2.2 4. 特征值与相似对角化 (Eigenvalues)	9
2.2.1 知识点精讲	9
2.2.2 典型例题	10
2.3 5. 二次型 (Quadratic Forms)	10
2.3.1 知识点精讲	10
2.3.2 典型例题	11

3 考场工具箱 & 避坑指南	11
3.1 符号与书写规范 (扣分点)	11
3.2 高频应试技巧	11



1 第一阶段:基础运算与代数结构 (重点攻克计算准确度)

1.1 1. 行列式 (Determinants)

核心考点: n 阶规律型行列式、抽象行列式计算、代数余子式。

1.1.1 知识点精讲

1. 行(列)和相等模型:

- 若每一行(或列)的元素之和都等于常数 k , 操作: $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ (所有列加到第 1 列), 提取公因子 k , 第一列全变为 1, 然后 $R_i - R_1$ 化简。

2. “爪形”/“箭形”行列式:

- 特征: 只有第一行、第一列及主对角线有非零元素, 其余全为 0。
- 万能解法: 利用主对角线的元素将第一行(或第一列)的非对角线元素消为 0, 化为三角行列式。

3. 范德蒙德 (Vandermonde) 行列式:

- 形态: 第一行全 1, 第二行 x_1, \dots, x_n , 第三行平方, ..., 第 n 行 $n-1$ 次方。
- 公式: $D_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ (所有下角标大的减去小的之积)。

4. 分块行列式(重要计算性质):

- $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
- $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$ (其中 A 为 m 阶, B 为 n 阶)。

5. 代数余子式求和:

- 公式: $|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$ 。
- 技巧: 若题目要求 $\sum k_j A_{ij}$, 则构造一个新行列式 D' , 将原行列式 A 的第 i 行替换为 (k_1, k_2, \dots, k_n) , 则 $D' = \sum k_j A_{ij}$ 。

1.1.2 典型例题与计算技巧

【例 1】 n 阶“箭形”行列式计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ 。

解题技巧:

- 若 $a_i = 1$, 直接两行相减化简。
- 若 $a_i \neq 1$, 利用 $C_1 \rightarrow C_1 - \sum \frac{1}{a_i} C_i$ (若 $a_i \neq 0$) 将第一列非对角元消零。
- 更通用的加边法:** 构造 $n+1$ 阶行列式, 左上角补 1, 第一行补 0, 第一列补 0, 保持原值不变, 然后化简。

【例 2】代数余子式 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$ 。

解析: 注意题目求的是余子式 M_{ij} 之和, 而展开定理用的是 A_{ij} 。关系: $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$ 。即 $M_{11} = A_{11}, M_{12} = -A_{12}, M_{13} = A_{13}, M_{14} = -A_{14}$ 。目标式 = $A_{11} - A_{12} + A_{13} - A_{14}$ 。构造新行列式 D' : 将原 D 第一行替换为 $(1, -1, 1, -1)$, 其余行不变。计算 D' 的值即为所求。

【例 3】(抽象行列式计算技巧) 已知 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 求 $|2A^{-1}(3A)^T|$ 。

计算公式运用:

- 常数 k 提出来要 n 次方: $|kB| = k^n |B|$ 。
- 乘积拆分: $|AB| = |A||B|$ 。
- 转置不变: $|A^T| = |A|$ 。
- 逆矩阵: $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 。**步骤:** 原式 = $2^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |(3A)^T| = 8 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |3A|$ (转置去掉, 值不变) = $8 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3^3 |A|)$ (注意 3 提出来是 3^3) = $4 \cdot 27 \cdot 2 = 216$ 。

1.2 2. 矩阵运算 (Matrix Operations)

核心考点: 必背运算性质、伴随矩阵、分块矩阵、矩阵方程。

1.2.1 知识点精讲 (必背公式与性质清单)

1. 矩阵基本运算与转置 (T)

- $(AB)^T = B^T A^T$ (反序定律, 必考)。
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 。

-
- $|A^T| = |A|$ 。

2. 逆矩阵 (A^{-1})

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (反序定律)。
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ 。
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 。
- **多项式求逆法:**若 $A^2 - 3A + 2E = O$, 求 A^{-1} ?
 - 移项得 $A^2 - 3A = -2E$ 。
 - 提公因式 $A(A - 3E) = -2E$ 。
 - 两边除以-2: $A \cdot [-\frac{1}{2}(A - 3E)] = E$ 。
 - 故 $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3E)$ 。

3. 伴随矩阵 (A^*)

- **基本定义:** $AA^* = A^*A = |A|E$ (解题核心)。
- **行列式:** $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。
- **逆矩阵:** $(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ 。
- **套娃公式:** $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ 。

4. 秩 ($r(A)$) 的性质

- $r(A) = r(A^T) = r(AA^T)$ 。
- **乘积秩:** $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ 。
- **零矩阵结论:** 若 $AB = O$ (A 是 $m \times n$, B 是 $n \times s$), 则 $r(A) + r(B) \leq n$ (必考选择题结论)。
- **伴随秩:**
 - $r(A) = n \Rightarrow r(A^*) = n$
 - $r(A) = n - 1 \Rightarrow r(A^*) = 1$
 - $r(A) < n - 1 \Rightarrow r(A^*) = 0$

5. 分块矩阵求逆

- 准对角形: $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ 。
- 副对角形: $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$ (注意位置和逆的对应)。

1.2.2 典型例题

【例 4】副对角分块矩阵已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^{10} 和 A^{-1} 。

解析: 分块为 $A = \begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix}$ 。

1. $A^2 = \begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}A_{21} & O \\ O & A_{21}A_{12} \end{pmatrix}$ 。 A^2 是准对角矩阵, 其 k 次幂只需对对角块求幂。 $A^{10} = (A^2)^5 = \begin{pmatrix} (A_{12}A_{21})^5 & O \\ O & (A_{21}A_{12})^5 \end{pmatrix}$ 。

2. A^{-1} 直接套用副对角分块求逆公式, 注意分别计算二阶矩阵 A_{12}^{-1} 和 A_{21}^{-1} 。

【例 5】矩阵多项式求逆技巧已知 $A^2 - 2A + 2E = O$, 求 $(A + E)^{-1}$ 。

技巧: 通过因式分解或待定系数法构造出 $A + E$ 。原式 $\Rightarrow A^2 - 2A = -2E$ 。我们需要出现 $(A + E)$, 尝试设 $(A + E)(A + kE) = A^2 + (k + 1)A + kE$ 。这种凑法比较慢。**推荐方法(除法思想):** 由 $A^2 - 2A + 2E = O$, 我们想求 $(A + E)^{-1}$ 。令 $X = A + E \Rightarrow A = X - E$ 。代入原方程: $(X - E)^2 - 2(X - E) + 2E = O$ $X^2 - 2X + E - 2X + 2E + 2E = O$ $X^2 - 4X + 5E = O$ $X(X - 4E) = -5E$ $X[-\frac{1}{5}(X - 4E)] = E$ 所以 $X^{-1} = -\frac{1}{5}(X - 4E) = -\frac{1}{5}(A + E - 4E) = -\frac{1}{5}(A - 3E)$ 。

2 第二阶段:核心应用与综合大题 (重难点突破)

2.1 3. 向量组与线性方程组 (Linear Systems)

核心目标: 对照流程图, 掌握判定解的“生死线”(秩的关系), 并能熟练写出通解。

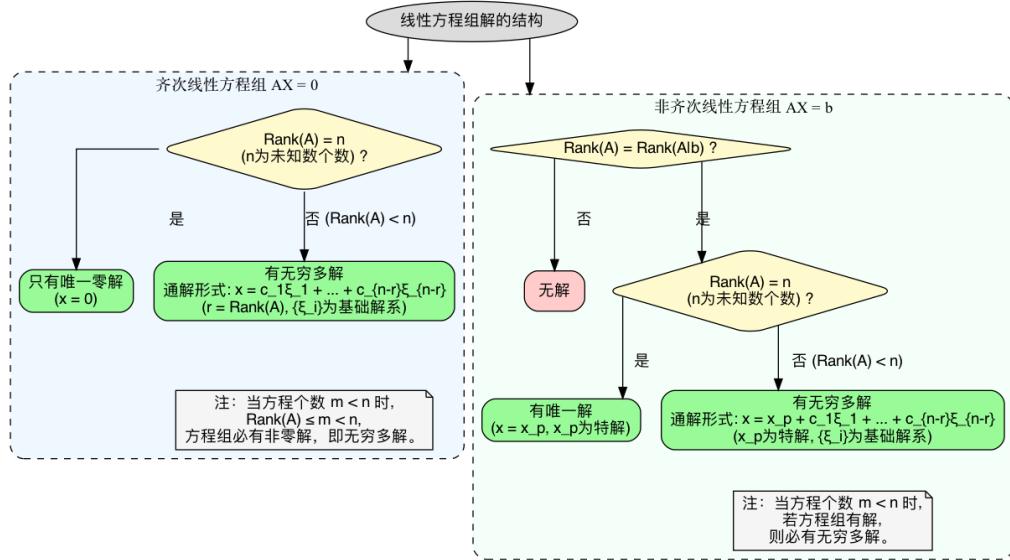


Figure 1: 线性方程组解的结构

2.1.1 知识点图解与判定流程 (必背逻辑)

解方程组的核心在于秩 (Rank) 与 未知数个数 (n) 的比对。请脑海中时刻浮现这张判定网：

第一步：判断有无解 (仅针对非齐次 $Ax = b$)

- 计算系数矩阵秩 $r(A)$ 和增广矩阵秩 $r(A, b)$ 。
- 无解判定:**若 $r(A) < r(A, b)$ ——矛盾方程, 直接写“无解”。
- 有解判定:**若 $r(A) = r(A, b) = r$ ——进入下一步讨论。

第二步：判断解的多少 (齐次与非齐次通用) 设 n 为未知数个数(即 A 的列数)：

- 唯一解 (单点):**若 $r = n$ 。
 - 齐次方程:只有零解 $x = 0$ 。
 - 非齐次方程:只有唯一非零解。
- 无穷多解 (直线/平面):**若 $r < n$ 。
 - 这是考试最喜欢考的情况!
 - 需要求**基础解系**。
 - 基础解系中包含的向量个数 $s = n - r$ 。

第三步:通解的构造(书写规范)

- 齐次 ($Ax = 0$):
 - 通解 $x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_{n-r} \xi_{n-r}$ 。
 - 其中 ξ_i 是基础解系。
- 非齐次 ($Ax = b$):
 - 通解 $x = x_p + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_{n-r} \xi_{n-r}$ 。
 - 即:特解 + 齐次通解。

2.1.2 核心操作:如何快速求基础解系(高分秘籍)

当 $r < n$ 时, 如何找那 $n - r$ 个线性无关的解向量?

1. 化简: 将矩阵化为行最简形(RREF)(对角线是 1, 主元所在列其余全为 0)。

2. 定身份:

- 主元变量: 每一行第一个非零元素对应的未知数(x_1, x_2 等)。
- 自由变量: 没有主元的列对应的未知数。
- 自由变量个数 = $n - r$ 。

3. 赋值法(黄金技巧):

- 若有 2 个自由变量(例如 x_3, x_4), 分别赋值:
 - 令 $(x_3, x_4) = (1, 0)$, 解出主元变量, 得到 ξ_1 。
 - 令 $(x_3, x_4) = (0, 1)$, 解出主元变量, 得到 ξ_2 。
- 这样得到的 ξ_1, ξ_2 必然线性无关。

2.1.3 典型例题

【例 6】从解的组合恢复通解 已知 $R(A) = R(A, b) = 3$ (A 为 4 阶), η_1, η_2, η_3 是 $Ax = b$ 的解。已知 $\eta_1 + \eta_2 = (2, 0, -2, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, -1, -3, 0)^T$ 等。

解题思路:

1. 判定结构: $n = 4, r = 3$ 。根据流程图, $r < n$, 故有无穷多解。基础解系含有 $n - r = 4 - 3 = 1$ 个向量。

2. 构造通解: $Ax = b$ 的通解 = (齐次通解) + (特解)。由于 η_1, η_2 都是解, 则 $\eta_1 - \eta_2$ 是 $Ax = 0$ 的解。若 $\eta_1 \neq \eta_2$, 则 $k(\eta_1 - \eta_2)$ 就是齐次方程的通解。最终结果: $x = k(\eta_1 - \eta_2) + \eta_3$ 。

【补充例题】含参方程组的规范求解 设方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 a 及通解。

步骤演示:

1. 判定: 这是齐次方程 $n = 3$ 。根据左侧流程图, “有非零解/无穷多解” \iff

$$r(A) < n = 3 \iff |A| = 0.$$

2. 计算行列式: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix}$ 。技巧: 这是范德蒙德行列式变体, 或者直接化简。
 $= 1(2a^2 - 4a) - 1(a^2 - 4) + 1(a - 2) = (a - 1)(a - 2)$ 。令 $|A| = 0$, 得 $a = 1$ 或 $a = 2$ 。

3. 分类讨论 (代入求基础解系):

- 当 $a = 1$ 时: $A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (行最简)。 $r = 2 < 3$, 自由变量是 x_3 。令 $x_3 = 1$, 由第二行 $x_2 = 0$, 由第一行 $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ 。基础解系 $\xi = (-1, 0, 1)^T$ 。通解 $x = c(-1, 0, 1)^T$ 。
- 当 $a = 2$ 时: 同理代入计算。

2.2 4. 特征值与相似对角化 (Eigenvalues)

核心考点: 特征值计算、相似判定、实对称矩阵正交对角化。

2.2.1 知识点精讲

1. 特征值性质 (验证计算结果的神器):

- $\sum \lambda_i = \sum a_{ii} = \text{tr}(A)$ (迹: 主对角线元素之和)。
- $\prod \lambda_i = |A|$ 。
- 应用: 算出特征值后, 立马用这两个公式验算, 防止算错。

2. 相似矩阵的性质:

- 若 $A \sim B$, 则 $|A| = |B|$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, 特征值完全相同。

3. 实对称矩阵:

- 必可对角化。
- 不同特征值对应的特征向量天然正交。
- 重特征值需 Schmidt 正交化。

2.2.2 典型例题

【例 7】相似对角化判定下列矩阵中, 不能与对角阵相似的是?

秒杀法:

1. 实对称矩阵 ($A_{ij} = A_{ji}$) 一定可以对角化 \rightarrow 排除。
2. 若特征值互不相同, 一定可以对角化 \rightarrow 排除。
3. **重点检查:** 有重特征值的非对称矩阵。计算其 k 重特征值 λ_0 对应的特征向量个数 (即 $n - r(\lambda_0 E - A)$)。**结论:** 若 (特征向量个数) $<$ (特征值重数), 则不可对角化。

2.3 5. 二次型 (Quadratic Forms)

核心考点: 正交变换化标准形(必考大题)。

2.3.1 知识点精讲

1. 标准流程 (必须熟练):

- Step 1: 写出二次型矩阵 A (注意 $x_i x_j$ 系数要除以 2)。
- Step 2: 求 $|\lambda E - A| = 0$ 得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 。
- Step 3: 对每个 λ , 求 $(\lambda E - A)x = 0$ 的基础解系。
- Step 4 (关键):
 - 若 λ 是单根 \rightarrow 单位化。
 - 若 λ 是重根 \rightarrow 得到的向量先 Schmidt 正交化, 再单位化。
- Step 5: 将处理好的向量拼成正交矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 。
- Step 6: 结论 $x = Qy$, 标准形为 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$ 。

2.3.2 典型例题

【例 8】二次型标准化 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 。

避坑指南：

1. 矩阵写法: $a_{11} = 1, a_{22} = 4, a_{33} = 4$ 。 x_1x_2 系数是 -4, 所以 $a_{12} = a_{21} = -2$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. 观察法求特征值 (计算加速): 观察行之间关系: 第 2 行是第 1 行的 -2 倍, 第 3 行是第 1 行的 2 倍。 $\Rightarrow r(A) = 1$ 。说明有 $n - r = 3 - 1 = 2$ 个特征值为 0。利用迹 $\text{tr}(A) = 1 + 4 + 4 = 9 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 。故特征值为 9, 0, 0。(这个技巧在考试中能节省大量时间! 如果硬算行列式会非常慢)

3 考场工具箱 & 避坑指南

3.1 符号与书写规范 (扣分点)

1. 转置: 向量默认为列向量。题目中若出现 $\alpha = (1, 2, 3)$, 在运算时必须写成 α^\top 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 参与矩阵乘法。
2. 解向量: 基础解系写成向量形式 ξ_1, ξ_2 , 通解必须写 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数)。
3. 单位矩阵: 矩阵运算中, 常数不能直接加减矩阵。例如 $A^2 - 1 = 0$ 是错的, 应为 $A^2 - E = O$ 。

3.2 高频应试技巧

1. 选择题代值法: 题目问“对于任意... 成立”, 可以尝试取特殊值(如 $n = 2$, 单位阵, 零阵)排除错误选项。
2. 正定判定:
 - 顺序主子式全大于 0。
 - 特征值全大于 0。
 - 必要条件: 主对角线元素全 > 0 (若出现 ≤ 0 直接判断非正定)。