线性代数总复习

——行百里者半九十——

整理: MatNoble

微信公众号:数学思维探究社 | **博客:**`blog.matnoble.top`

目 录

1 第一阶段:基础运算与代数结构 (重点攻克计算准确度)

1.1 1. 行列式 (Determinants)

核心考点:n 阶规律型行列式、抽象行列式计算、代数余子式。

1.1.1 知识点精讲

1. **行(列)和相等模型**:
   - 若每一行(或列)的元素之和都等于常数 k, 操作:$C_1 + C_2 + \cdots + C_n$(所有列加到第 1 列),提取公因子 k, 第一列全变为 1, 然后 $R_i - R_1$ 化简。
2. **"爪形"/"箭形"行列式**:
   - 特征:只有第一行、第一列及主对角线有非零元素,其余全为 0。
   - **万能解法**:利用主对角线的元素将第一行(或第一列)的非对角线元素消为 0, 化为三角行列式。
3. **范德蒙德 (Vandermonde) 行列式**:
   - 形态:第一行全 1, 第二行 $x_1, \ldots, x_n$, 第三行平方, ..., 第 n 行 $n-1$ 次方。
   - 公式:$D_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$ (所有下角标大的减去小的之积)。
4. **分块行列式**(重要计算性质):
   - $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$
   - $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$ (其中 A 为 m 阶, B 为 n 阶)。
5. **代数余子式求和**:
   - 公式:$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$。
   - **技巧**:若题目要求 $\sum k_j A_{ij}$, 则构造一个新行列式 D', 将原行列式 A 的第 i 行替换为 $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, 则 $D' = \sum k_j A_{ij}$。

1.1.2 典型例题与计算技巧

【例 1】准"箭形"行列式 (加边法典型应用) 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$。

解题技巧 (**解析**):

1. **转换思路**: 该行列式虽然不是标准"箭形", 但通过**加边法**可以转化。
2. **加边逻辑**: 构造 $n+1$ 阶行列式, 保持原行列式值不变的同时, 创造出全 1 的行或列, 进而通过行变换造出"箭形"。

具体计算过程:

1. **加边**: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$。
2. **消元**: $R_i - R_1 (i = 2, \ldots, n+1)$, 得: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_n - 1 \end{vmatrix}$。
3. **结果展开** (**按定义或公式**):
   - Case 1: 若 $a_i \neq 1$, 利用公式 $D = A_{11} \prod d_{ii} - \ldots$: $D_n = (a_1 - 1)(a_2 - 1)\ldots(a_n - 1)[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{-(-1)}{a_i - 1}] = \prod_{i=1}^{n}(a_i - 1)(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - 1})$。
   - Case 2: 恰有一 $a_k = 1 \Rightarrow$ 代入展开式, 仅剩含 $\frac{1}{a_k - 1}$ 的项有效, 结果为 $\prod_{i \neq k}(a_i - 1)$。
   - Case 3: 至少两 $a_k = 1 \Rightarrow$ 出现多行全-1, 故 $D_n = 0$。

【例 2】代数余子式设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, 求 $M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14}$。

解析:

1. **对应关系**: 注意到求的是余子式 M_{ij} 之和, 利用 $A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$。
2. **公式代换**: $M_{11} = A_{11}, M_{12} = -A_{12}, M_{13} = A_{13}, M_{14} = -A_{14}$。
3. **构造核心**: 目标式 $= \sum (k_j) A_{1j}$, 对应将第一行替换为系数 $(1, -1, 1, -1)$。

具体计算过程:

1. **构造** D': $D' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$。
2. **展开**: 按第 3 行展开: $D' = (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$。
3. **计算** 3×3: $R_2 - R_1, R_3 - 2R_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 = 3$。

【例 3】(抽象行列式计算技巧) 已知 A 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 求 $|2A^{-1}(3A)^T|$。

解析 (**公式运用**):

1. 常数 k 提原行列式外需 n 次方: $|kM| = k^n|M|$。
2. 利用性质: $|M^T| = |M|$, $|M^{-1}| = 1/|M|$。

具体计算过程:

1. **外层常数**: $|2A^{-1}(3A)^T| = 2^3 \cdot |A^{-1}| \cdot |(3A)^T|$。
2. **转置与逆**: 原式 $= 8 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot |3A|$。
3. **内层常数**: $|3A| = 3^3|A| = 27 \cdot 2 = 54$。
4. **代入求值**: 原式 $= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 54 = 4 \cdot 54 = 216$。

1.2 2. **矩阵运算** (Matrix Operations)

核心考点: 必背运算性质、伴随矩阵、分块矩阵、矩阵方程。

1.2.1 **知识点精讲** (**必背公式与性质清单**)

1. **矩阵基本运算与转置** (T)

- $(AB)^T = B^T A^T$ (反序定律, 必考)。
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$。

- $|A^T| = |A|$。

2. **逆矩阵** (A^{-1})

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$（反序定律）。
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$。
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$。
- **多项式求逆法**：若 $A^2 - 3A + 2E = O$，求 A^{-1}？
  - 移项得 $A^2 - 3A = -2E$。
  - 提公因式 $A(A - 3E) = -2E$。
  - 两边除以-2：$A \cdot [-\frac{1}{2}(A - 3E)] = E$。
  - 故 $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A - 3E)$。

3. **伴随矩阵** (A^*)

- **基本定义**：$AA^* = A^*A = |A|E$（解题核心）。
- **行列式**：$|A^*| = |A|^{n-1}$。
- **逆矩阵**：$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A$。
- **套娃公式**：$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$。

4. **秩** $(r(A))$ **的性质**

- $r(A) = r(A^T) = r(AA^T)$。
- **乘积秩**：$r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$。
- **零矩阵结论**：若 $AB = O$ (A 是 $m \times n$, B 是 $n \times s$)，则 $r(A) + r(B) \leqslant n$（必考选择题结论）。
- **伴随秩**：
  - $r(A) = n \Rightarrow r(A^*) = n$
  - $r(A) = n - 1 \Rightarrow r(A^*) = 1$
  - $r(A) < n - 1 \Rightarrow r(A^*) = 0$

5. **分块矩阵求逆**

- 准对角形:$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$。
- **副对角形**:$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$(注意位置和逆的对应)。

1.2.2 典型例题

【例 4】副对角分块矩阵已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 求 $|A|^{10}$ 和 A^{-1}。

解析 (**分块思维**):

1. **观察结构**:矩阵呈现 $\begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix}$ 的分块形式。
2. **公式运用**:
   - 行列式:$|A| = (-1)^{mn}|A_{12}||A_{21}|$。
   - 逆矩阵:$A^{-1} = \begin{pmatrix} O & A_{21}^{-1} \\ A_{12}^{-1} & O \end{pmatrix}$。

具体计算过程:

1. **提取子块**:$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$。
2. **计算行列式**:
   - $|A_{12}| = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) = 5$。
   - $|A_{21}| = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = -2$。
   - $|A| = (-1)^{2\times 2} \cdot 5 \cdot (-2) = -10 \Rightarrow |A|^{10} = (-10)^{10} = 10^{10}$。
3. **计算子块逆矩阵**:
   - $A_{12}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$。
   - $A_{21}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}$。

4. **组合结果**: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

【例 5】矩阵多项式求逆技巧已知 $A^2 - 2A + 2E = O$, 求 $(A+E)^{-1}$。

解析 (**算子法/除法思想**):

1. **核心目标**: 构造 $(A+E) \cdot B = E$。
2. **技巧**: 若 A 满足多项式 $\phi(A) = O$, 则求 $(A+kE)^{-1}$ 可通过令 $X = A + kE$ 变换得到。

具体计算过程:

1. **变量转换**: 令 $X = A + E \Rightarrow A = X - E$。
2. **代入原式**: $(X-E)^2 - 2(X-E) + 2E = O$。
3. **展开化简**: $(X^2 - 2X + E) - (2X - 2E) + 2E = O$ $X^2 - 4X + 5E = O$。
4. **分离单位阵**: $X(4E - X) = 5E \Rightarrow X[\frac{1}{5}(4E - X)] = E$。
5. **得出结论**: $(A+E)^{-1} = \frac{1}{5}(4E - (A+E)) = \frac{1}{5}(3E - A)$。

---

2 第二阶段:核心应用与综合大题 (重难点突破)

2.1 3. 向量组与线性方程组 (Linear Systems)

核心目标: 对照**流程图**, 掌握判定解的"生死线"(秩的关系), 并能熟练写出通解。

2.1.1 知识点图解与判定流程 (必背逻辑)

解方程组的核心在于**秩** (Rank) 与 **未知数个数** (n) 的比对。请脑海中时刻浮现这张判定网:

第一步:判断有无解 (**仅针对非齐次** $Ax = b$)

- 计算系数矩阵秩 $r(A)$ 和增广矩阵秩 $r(A, b)$。
- **无解判定**: 若 $r(A) < r(A, b)$ ——矛盾方程, 直接写"无解"。
- **有解判定**: 若 $r(A) = r(A, b) = r$ ——进入下一步讨论。

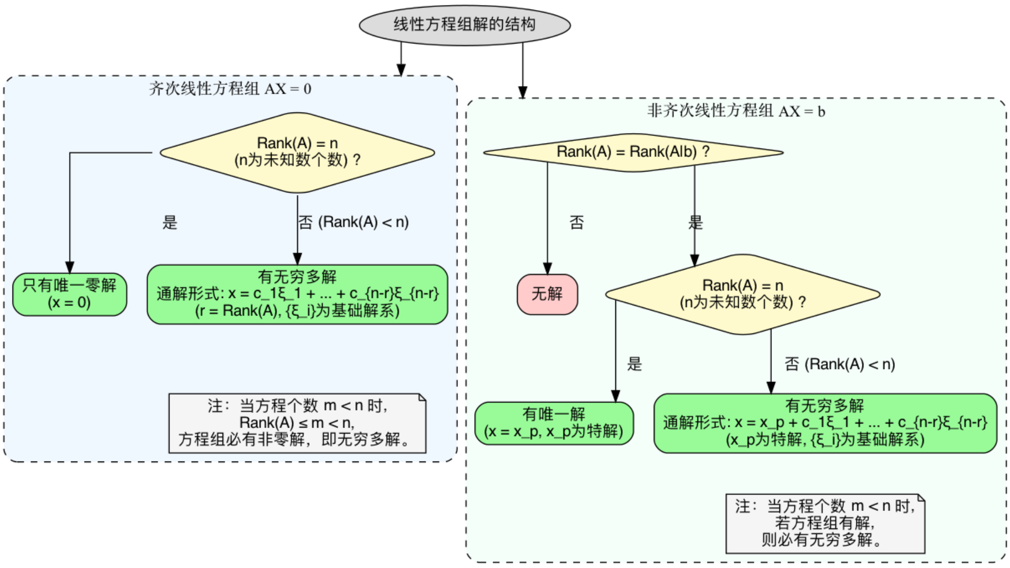

Figure 1: 线性方程组解的结构

第二步:判断解的多少 (齐次与非齐次通用) 设 n 为未知数个数(即 A 的列数):

- **唯一解 (单点)**:若 $r = n$。
  - 齐次方程:只有零解 $x = 0$。
  - 非齐次方程:只有唯一非零解。
- **无穷多解 (直线/平面)**:若 $r < n$。
  - 这是考试最喜欢考的情况!
  - 需要求**基础解系**。
  - 基础解系中包含的向量个数 $s = n - r$。

第三步:通解的构造 (书写规范)

- **齐次** $(Ax = 0)$:
  - 通解 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$。
  - 其中 ξ_i 是基础解系。
- **非齐次** $(Ax = b)$:
  - 通解 $x = x_p + c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$。
  - 即:**特解** + **齐次通解**。

2.1.2 核心操作:如何快速求基础解系 (高分秘籍)

当 $r < n$ 时,如何找那 $n - r$ 个线性无关的解向量?

1. **化简**:将矩阵化为**行最简形** (RREF)(对角线是 1,主元所在列其余全是 0)。
2. **定身份**:
   - **主元变量**:每一行第一个非零元素对应的未知数(x_1, x_2 等)。
   - **自由变量**:没有主元的列对应的未知数。
   - 自由变量个数 $= n - r$。
3. **赋值法** (**黄金技巧**):
   - 若有 2 个自由变量(例如 x_3, x_4),分别赋值:
     - 令 $(x_3, x_4) = (1, 0)$,解出主元变量,得到 ξ_1。
     - 令 $(x_3, x_4) = (0, 1)$,解出主元变量,得到 ξ_2。
   - 这样得到的 ξ_1, ξ_2 必然线性无关。

2.1.3 典型例题

【例 6】从解的组合恢复通解已知 $R(A) = R(A, b) = 3$ (A 为 4 阶), η_1, η_2, η_3 是 $Ax = b$ 的解。已知 $\eta_1 + \eta_2 = (2, 0, -2, 4)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (2, -1, -3, 0)^T$, $\eta_1 + \eta_3 = (2, -1, -3, 4)^T$。

解析 (**解的结构理论**):

1. **判定**:$n = 4, r = 3 \Rightarrow$ 自由变量个数 $n - r = 1$。
2. **结构**:非齐次方程通解 $= k \cdot (\text{基础解系}) + \text{特解}$。
3. **核心结论**:两个非齐次解之差 $\eta_i - \eta_j$ 是齐次方程 $Ax = 0$ 的解。

具体计算过程:

1. **求单个特解**: $(\eta_1 + \eta_2) + (\eta_2 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_3) = 2\eta_2$ $2\eta_2 = (2, 0, -2, 4)^T + (2, -1, -3, 0)^T - (2, -1, -3, 4)^T = (2, 0, -2, 0)^T$。故 $\eta_2 = (1, 0, -1, 0)^T$。
2. **求齐次解** (**基础解系**): $\eta_1 - \eta_3 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = (2, 0, -2, 4)^T - (2, -1, -3, 0)^T = (0, 1, 1, 4)^T$。因为 $n - r = 1$,所以 $\xi = \eta_1 - \eta_3$ 即可作为基础解系。

3. **写出通解**：$x = k\begin{pmatrix}0\\1\\1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$（$k$ 为任意常数）。

【补充例题】含参方程组的规范求解设方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 有非零解, 求 a 及通解。

具体计算过程:

1. **列行列式**：$|A| = \begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{vmatrix} = (a-1)(a-2)$。令 $|A|=0 \Rightarrow a=1$ 或 $a=2$。
2. **分类求解**：
   - **当 $a=1$ 时**：$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&4&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1,R_3-R_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&3&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$。
     基础解系：令 $x_3=1 \Rightarrow x_2=0, x_1=-1 \Rightarrow \xi_1=(-1,0,1)^T$。通解：$x=c(-1,0,1)^T$。
   - **当 $a=2$ 时**：$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1,R_3-R_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&3&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$。
     基础解系：令 $x_3=1 \Rightarrow x_2=-1, x_1=0 \Rightarrow \xi_2=(0,-1,1)^T$。通解：$x=c(0,-1,1)^T$。

2.2 4. 特征值与相似对角化 (Eigenvalues)

核心考点：特征值计算、相似判定、实对称矩阵正交对角化。

2.2.1 知识点精讲

1. **特征值性质** (**验证计算结果的神器**)：
   - $\sum \lambda_i = \sum a_{ii} = \mathrm{tr}(A)$（迹：主对角线元素之和）。
   - $\prod \lambda_i = |A|$。

- **应用**:算出特征值后,立马用这两个公式验算,防止算错。

2. **相似矩阵的性质**:
   - 若 $A \sim B$,则 $|A| = |B|$, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$,特征值完全相同。
3. **实对称矩阵**:
   - 必可对角化。
   - 不同特征值对应的特征向量天然正交。
   - 重特征值需 Schmidt 正交化。

2.2.2 典型例题

【例 7】相似对角化判定下列矩阵中,不能与对角阵相似的是? (A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$。

解析 (**判定准则**):

1. **必可对角化**:实对称矩阵、特征值互不相同的矩阵。
2. **未必对角化**:有重特征值的非对称矩阵。
3. **核心判据**:对于 k 重特征值 λ_0,若满足 $n - r(\lambda_0 E - A) = k$,则可对角化。

具体计算过程 (**以** A **为例**):

1. **求特征值**: $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (2 重), $\lambda_3 = 2$。
2. **检查重根** $\lambda = 1$: $E - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to r(E - A) = 2$。
3. **结论**:特征向量个数 $n - r = 3 - 2 = 1$。由于 $1 < 2$ (特征向量数 $<$ 重数),故 (A) 不可对角化。

2.3 5. **二次型** (Quadratic Forms)

核心考点:正交变换化标准形(必考大题)。

2.3.1 知识点精讲

1. **标准流程** (**必须熟练**):

- Step 1: 写出二次型矩阵 A(注意 x_ix_j 系数要除以 2)。
- Step 2: 求 $|\lambda E - A| = 0$ 得到特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$。
- Step 3: 对每个 λ, 求 $(\lambda E - A)\mathbf{x} = 0$ 的基础解系。
- Step 4 (**关键**):
  - 若 λ 是单根 → 单位化。
  - 若 λ 是重根 → 得到的向量先 Schmidt **正交化**, 再单位化。
- Step 5: 将处理好的向量拼成正交矩阵 $Q = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$。
- Step 6: 结论 $x = Qy$, 标准形为 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$。

2.3.2 典型例题

【例 8】二次型标准化 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$。

解析 (**避坑指南**):

1. **矩阵写法**:注意交叉项 x_ix_j 系数要除以 2。
2. **观察法**:实对称矩阵必可对角化,通过迹和秩快速锁定特征值。

具体计算过程:

1. **构造矩阵**: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$。
2. **求特征值**: 观察发现 $R_2 = -2R_1, R_3 = 2R_1 \Rightarrow r(A) = 1$。故 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。由 $\mathrm{tr}(A) = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow \lambda_3 = 9$。
3. **求特征向量**:
   - **对于** $\lambda = 9$: $(9E - A)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。单位化得 $q_3 = \frac{1}{3}(1, -2, 2)^T$。
   - **对于** $\lambda = 0$: $(0E - A)\mathbf{x} = 0 \Rightarrow x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$。基础解系: $\xi_1 = (2, 1, 0)^T, \xi_2 = (-2, 0, 1)^T$。Schmidt **正交化**: $\eta_1 = (2, 1, 0)^T$; $\eta_2 = \xi_2 - \frac{(\xi_2, \eta_1)}{\|\eta_1\|^2}\eta_1 = (-2, 0, 1)^T - \frac{-4}{5}(2, 1, 0)^T = (-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1)^T \to (-2, 4, 5)^T$。单位化后拼成 Q。

4. **结论**:标准形 $f = 9y_3^2$。

3 考场工具箱 & 避坑指南

3.1 符号与书写规范 (扣分点)

1. **转置**:向量默认为列向量。题目中若出现 $\alpha = (1, 2, 3)$, 在运算时必须写成 α^T 或 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 参与矩阵乘法。
2. **解向量**:基础解系写成向量形式 ξ_1, ξ_2, 通解必须写 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$(其中 k_1, k_2 为任意常数)。
3. **单位矩阵**: 矩阵运算中, 常数不能直接加减矩阵。例如 $A^2 - 1 = 0$ 是错的, 应为 $A^2 - E = O$。

3.2 高频应试技巧

1. **选择题代值法**:题目问“对于任意... 成立”, 可以尝试取特殊值(如 $n = 2$, 单位阵, 零阵)排除错误选项。
2. **正定判定**:
   - 顺序主子式全大于 0。
   - 特征值全大于 0。
   - **必要条件**:主对角线元素全 > 0(若出现 $\leqslant 0$ 直接判断非正定)。