departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Das aplicações lineares do exercício 4 da folha de exercícios "5.2. *núcleo e imagem de uma aplicação linear*", indique quais são:

   i. monomorfismos;

   ii. epimorfismos;

   iii. isomorfismos;

   iv. endomorfismos;

   v. automorfismos.

2. Mostre que a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(x, y) = (2x+y, x-y, x)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um monomorfismo.

3. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\varphi(1,1,0) = (0,1,1) \quad \varphi(1,0,1) = (1,1,1) \quad \text{e} \quad \varphi(0,1,1) = (2,1,-1).$$

   Mostre que φ é um automorfismo.

4. Considere a aplicação linear ψ de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^4$ definida por:

$$\psi(1,1,1) = (1,0,0,0) \quad \psi(1,1,0) = (0,1,1,0) \quad \text{e} \quad \psi(1,0,0) = (k,1,k,k-1),$$

   onde k é um parâmetro real. Diga para que valores de k a aplicação ψ é:

   (a) monomorfismo;

   (b) epimorfismo.

5. Seja $\mathcal{B} = ((1,2), (-1,3))$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(x, y) = (x, 2x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Mostre que $\mathcal{B}' = (\varphi(1,2), \varphi(-1,3))$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Classifique φ quanto à injectividade e à sobrejectividade, usando a alínea anterior.

6. Seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\varphi(x, y, z) = (x, x + \alpha y + \alpha^2 z, -x + y - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

   onde α é um parâmetro real. Determine os valores de α para os quais φ é um automorfismo.

7. Sejam E um espaço vectorial real e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de E. Considere a aplicação $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por:

$$\varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x + y + z)e_1 + (x + y + 3z)e_2 + (x + y + k)e_3, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

onde k é um parâmetro real.

   (a) Para que valores de k, φ é uma aplicação linear?

   (b) Considere $k = 0$.

      i. Classifique o endomorfismo quanto à injectividade e à sobrejectividade.

      ii. Determine $\varphi^{-1}(\{e_1 + e_2 + e_3\})$.

8. Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e φ uma aplicação linear de E em E'. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:

   (a) Se $v_1, \ldots, v_k \in E$ são vectores linearmente independentes então $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \in E'$ são vectores linearmente independentes.

   (b) Se $v_1, \ldots, v_k \in E$ são vectores linearmente dependentes então $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \in E'$ são vectores linearmente dependentes.

   (c) Se $\dim E = \dim E'$ então φ é um isomorfismo.

   (d) Se φ é um monomorfismo então $\dim E \leq \dim E'$.

   (e) Se φ é um epimorfismo então $\dim E \geq \dim E'$.

9. Sejam V e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e φ uma aplicação linear de E em E'. Sejam ainda F e G dois subespaços vectoriais de E.

   (a) Suponha que $E = F \oplus G$. Mostre que:

      i. Se φ é um monomorfismo então $\varphi(F) \cap \varphi(G) = \{0_{E'}\}$;

      ii. $\varphi(F) + \varphi(G) = E'$ se e só se φ é um epimorfismo.

   (b) Suponha que $E' = \varphi(F) \oplus \varphi(G)$. Mostre que:

      i. φ é um epimorfismo;

      ii. Se φ é um monomorfismo então $E = F \oplus G$.

1. i. (d), (e) e (h); ii. (e), (f), (g) e (j); iii. (e); iv. (a), (c), (d) e (e); v. (e).

4. (a) $k \neq 1$; (b) não existe nenhum valor de k.

5. (b) φ não é um monomorfismo nem epimorfismo.

6. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

7. (a) $k = 0$; (b) i. φ não é monomorfismo nem epimorfismo;
   ii. $\{(1 - z)e_1 + ze_3 : z \in \mathbb{R}\}$.

8. (a) F; (b) V; (c) V; (d) V; (e) V.