Análise Matemática I

Luís Castro

♣ ♠ ♣

Aveiro/2010

Prefácio

O presente texto serve de apoio às aulas de *Análise Matemática I* na Universidade de Aveiro. Os conteúdos aqui tratados são os estabelecidos para o Programa da Disciplina desde o ano de 2006.

Recomenda-se fortemente aos alunos inscritos na disciplina (e mesmo aos que já tenham frequentado anteriormente a disciplina sem terem obtido aproveitamento) a assistência do máximo número possível de aulas. Tal recomendação deve-se à constatação (ano após ano) de que (em geral) os alunos não conseguem por si só interiorizar os detalhes, as diferenças e a importância relativa dos diversos tópicos da disciplina. Tais nuances inerentes a uma disciplina com um certo grau de intuição e abstracção muitas vezes só aparecem clarificadas com uma discussão dinâmica entre aluno e professor ou mesmo entre alunos mas sob a supervisão do docente. Além desta perspectiva, nas aulas da disciplina os assuntos aqui versados vão ser explanados ao ritmo dos alunos e com a possibilidade natural de discutir as eventuais dúvidas que possam em cada momento surgir (havendo portanto a possibilidade mais do que positiva de uma correspondente discussão surgir no momento mais oportuno para esse efeito).

Apesar deste texto seguir exactamente o plano das aulas e a correspondente sequência dos seus conteúdos da disciplina de *Análise Matemática I* da Universidade de Aveiro, é recomendável que os alunos consultem outros textos que contenham os tópicos do curso *Análise Matemática I*. No final deste texto existe uma lista de bibliografia associada e todos os items desta bibliografia podem ser considerados de qualidade muito boa (e portanto de recomendável consulta). Em especial, para os nossos propósitos, as referências [4] e [6] assumem uma relevância significativa. É igualmente recomendável um contacto com a secção de *Análise Matemática* da Biblioteca Geral da Universidade de Aveiro, onde uma extensa variedade de livros sobre os temas em questão pode ser encontrada.

Índice

Capítulo 1

Funções reais de variável real

1.1 Noções elementares

Iniciamos este texto recordando algumas noções básicas associadas às funções reais de variável real.

Definição 1.1.1 (Função)
Dados dois conjuntos A e B (diferentes do vazio), chama-se FUNÇÃO definida com valores de A para B a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B. Ao considerarmos a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} ,$$

a x chama-se a variável independente (e toma valores em A), enquanto que y toma valores em B e é chamada variável dependente (dado que os seus valores dependem dos valores que a variável x toma).

À expressão ou fórmula que traduz o modo como a variável y depende da variável x chama-se expressão analítica da função f. A função f diz-se real de variável real quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.2 (Domínio e contradomínio)
Seja f uma função real de variável real. Chama-se DOMÍNIO de f ao conjunto

dos valores reais que têm imagem pela função f, isto é, ao conjunto dos números reais para os quais a expressão analítica de f está bem definida. Chama-se CONTRADOMÍNIO de f ao conjunto dos valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio, denotando-se tal conjunto por $f(D)$ – onde D representa o domínio de f (e que por vezes também será neste texto denotado por D_f para reforçar a sua dependência da função f).

Definição 1.1.3 (Gráfico de uma função)
Dada uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chama-se GRÁFICO DA FUNÇÃO f ao conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in D_f, \; y = f(x) \in \mathbb{R}\} \; .$$

Decorre da definição de cima que G_f é o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f. Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo 1.1.4
Seja $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos como exemplos de funções:

(a) a função constante: $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$;

(b) a função identidade: $f(x) = x$;

(c) a função linear: $f(x) = ax$, para um certo $a \in \mathbb{R}$;

(d) a função afim: $f(x) = ax + b$, para determinados $a, b \in \mathbb{R}$;

(e) a função polinomial: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$; em particular, se $n = 2$; $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática, se $n = 3$; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é uma função cúbica;

(f) função potência: $f(x) = x^a$; onde a é uma constante; em particular, se $a = \frac{1}{n}$, então $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; onde n é um inteiro positivo, é uma função raiz; temos que $D_f = [0, +\infty)$ se n é par e $D_f = \mathbb{R}$ se n é ímpar;

(g) a função racional: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, onde p e q são funções polinomiais. Note que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \; : \; q(x) \neq 0\}$;

(h) *a função algébrica: função construída usando operações algébricas começando com polinómios; por exemplo,* $f(x) = \sqrt{x^2+5}$*;* $D_f = \mathbb{R}$*;*

(i) *função definida por ramos: definida de forma diversa em diferentes partes de seu domínio; por exemplo,* $f(x) = \begin{cases} 50-2x & \text{se } x \geq 20 \\ (x+1)^4 & \text{se } x < 20 \end{cases}$.

Definição 1.1.5 (Zeros)

Chamam-se ZEROS DA FUNÇÃO f os elementos x do domínio de f tais que $f(x) = 0$.

Definição 1.1.6

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se:

- CRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) \geq f(y)$;
- DECRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) \leq f(y)$;
- ESTRITAMENTE CRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) > f(y)$;
- ESTRITAMENTE DECRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) < f(y)$;
- MONÓTONA quando é crescente ou decrescente;
- ESTRITAMENTE MONÓTONA quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente;
- PAR quando, para todo o $x \in D$, se tem $-x \in D$ e $f(x) = f(-x)$;
- ÍMPAR quando, para todo o $x \in D$, se tem $-x \in D$ e $f(x) = -f(-x)$.

Definição 1.1.7 (Função limitada)

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se LIMITADA se

$$\exists_{c \in \mathbb{R}^+} \; : \; |f(x)| < c \,, \quad \forall x \in D.$$

Definição 1.1.8 (Restrição de uma função a um conjunto)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S \subset D$. A RESTRIÇÃO de f a S, designada por $f_{|S}$, é a aplicação de S em $\mathbb{R}$ tal que $f_{|S}(x) = f(x)$ para cada $x \in S$.

Definição 1.1.9 (Função injectiva, sobrejectiva e bijectiva)
Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se:

INJECTIVA quando $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, $\forall_{x,y \in A}$;

SOBREJECTIVA quando $\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \ : \ f(x) = y$;

BIJECTIVA quando é injectiva e sobrejectiva.

Definição 1.1.10 (Operações com funções)
Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ e dado $x \in D_f \cap D_g$, podemos definir algumas operações com funções:

(a) SOMA: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

(b) PRODUTO: $(fg)(x) = f(x)g(x)$;

(c) QUOCIENTE: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, se $g(x) \neq 0$.

Definição 1.1.11 (Função composta)
Sendo $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ e $g : Z \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$ duas funções, a COMPOSTA de f após g, denotada por $f \circ g$, é a função definida do seguinte modo: 1. o domínio de $f \circ g$ é o conjunto $S = \{x \in Z \ : \ g(x) \in X\}$; 2. para cada $x \in S$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Definição 1.1.12 (Função inversa)
A INVERSA de uma função injectiva $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação

$$\begin{array}{rccl} g & : & f(D) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) = x \ , \end{array}$$

para cada $x \in D$ (tornando-se assim verdade que $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$). Representaremos a inversa de f por f^{-1}.

Pensando no gráfico de f^{-1},

$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) \in G_f\} \ ,$$

torna-se evidente que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à recta $y = x$ (ou seja, um é obtido a partir do outro por troca do eixo dos xx's com o eixo dos yy's), pois

$$(x_0, y_0) \in G_f \Leftrightarrow (y_0, x_0) \in G_{f^{-1}} \ .$$

1.2 Funções trigonométricas

Considere-se a circunferência de centro na origem do plano e possuindo raio unitário (descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$).

Vamos denotar por P_θ (para $\theta \in [0, 2\pi[$) o ponto da circunferência tal que o ângulo $< P_0 O P_\theta$ (para $P_0 = (1, 0)$) é θ (medido em radianos e no sentido anti-horário).

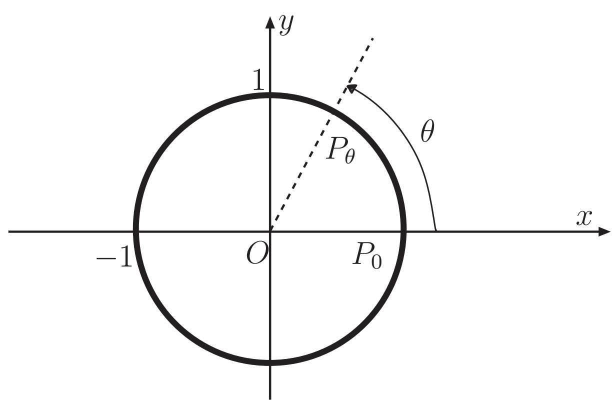

Figura 1.1: Construção associada ao seno e co-seno.

De forma equivalente, podemos dizer que $\theta/2$ é a área do sector $P_0 O P_\theta$ (orientação anti-horário), ou que θ é a medida do comprimento do arco de circulo $P_0 P_\theta$ (medida no sentido anti-horário).

As coordenadas de P_θ são definidas por

$$P_\theta =: (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

Definição 1.2.1 (Função periódica e período de uma função)
Diz-se que uma função f real de variável real com domínio D é PERIÓDICA se existe um número real positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$, para todo o $x \in D$ (inferindo-se naturalmente desta última igualdade que os respectivos pontos $x + p$ também

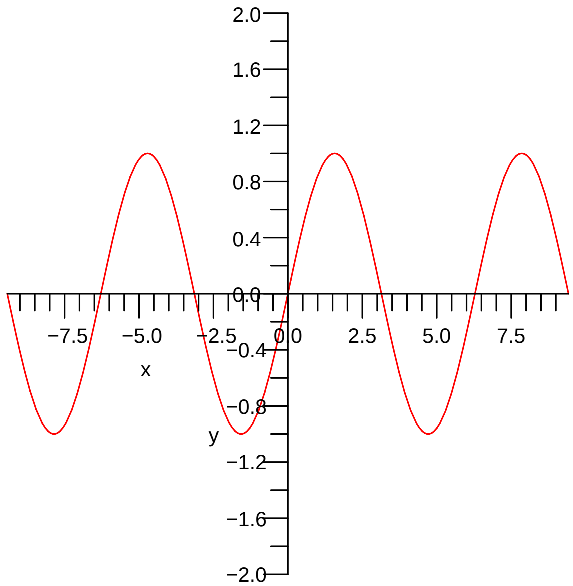

Figura 1.2: A função seno.

pertencem a D). Neste caso, ao número p dá-se a designação de PERÍODO da função f.

As duas funções seno (ver Figura 1.2) e co-seno (cf. Figura 1.3) consideradas em $[0, 2\pi[$ em cima (possuindo imagem $[-1, 1]$) são estendidas periodicamente a todo o $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x - 2k\pi) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ & 2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi\,, \\ \sin x = \sin(x - 2k\pi) & \text{para algum } k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Recordemos as relações:

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}\,;$

(ii) $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

(iv) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

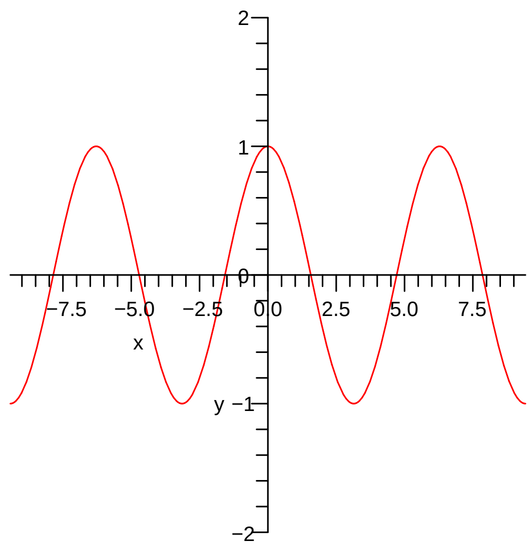

Figura 1.3: A função co-seno.

(v) sin é uma função ímpar: $\sin(-x) = -\sin x\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ;$

cos é uma função par: $\cos(-x) = \cos x\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ;$

(vi) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ;$

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ;$

(vii) $\sin x = \sin(\pi - x)\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ; \qquad \cos x = -\cos(\pi - x)\ , \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\ ;$

(viii) sin é crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Partindo das *fórmulas de adição* para o seno e o co-seno

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\ , \quad \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \end{cases}$$

é possível deduzir directamente as:

- *Fórmulas de ângulo-duplo*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

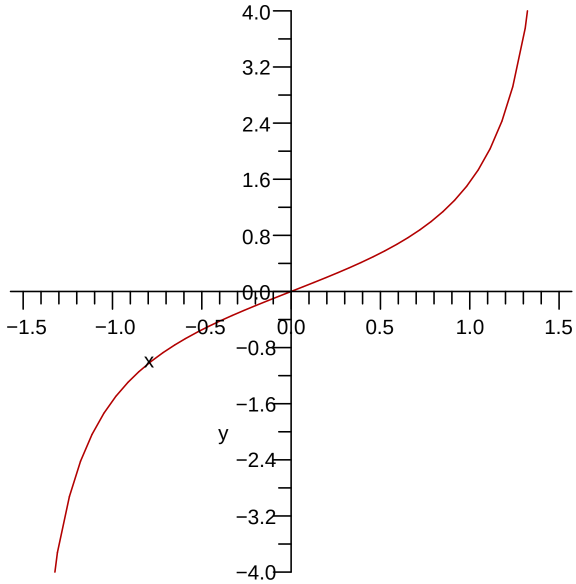

Figura 1.4: A função tangente.

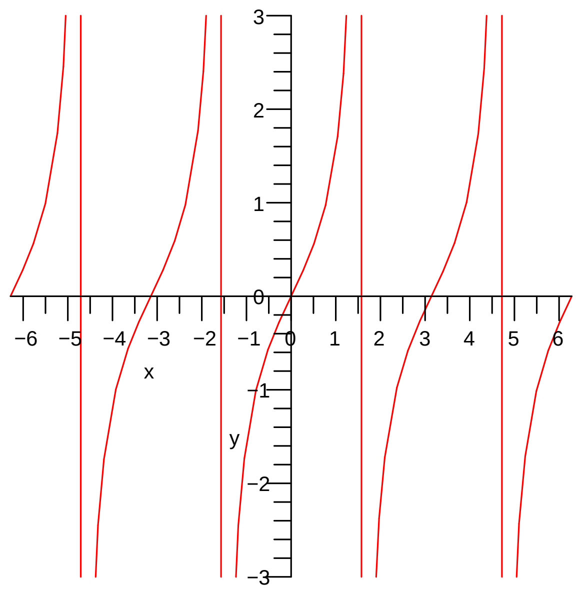

Figura 1.5: A função tangente numa região maior (e incluindo algumas das suas assímptotas).

- *Fórmulas de metade-do-ângulo*

$$|\cos x| = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$
$$|\sin x| = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

- *Fórmulas do produto*

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

A função tangente (ver Figuras 1.4 e 1.5)

$$\begin{array}{rcccl}
\tan & : & \mathbb{R}\setminus\left\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & & x & \longmapsto & \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\ ,
\end{array}$$

é obviamente periódica com período π e ímpar.

Veremos mais tarde (por uso de novos métodos a apreender) que a função tan é estritamente crescente em cada intervalo de periodicidade $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k\in\mathbb{Z})$ e é sobrejectiva (sobre $\mathbb{R}$).

Tem-se adicionalmente que:

- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
- $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

Considerando a função cotangente (ver Figuras 1.6 e 1.7)

$$\begin{array}{rcccl}
\cot & : & \mathbb{R}\setminus\{x\in\mathbb{R}\ :\ x=k\pi\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
 & & x & \longmapsto & \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}\ ,
\end{array}$$

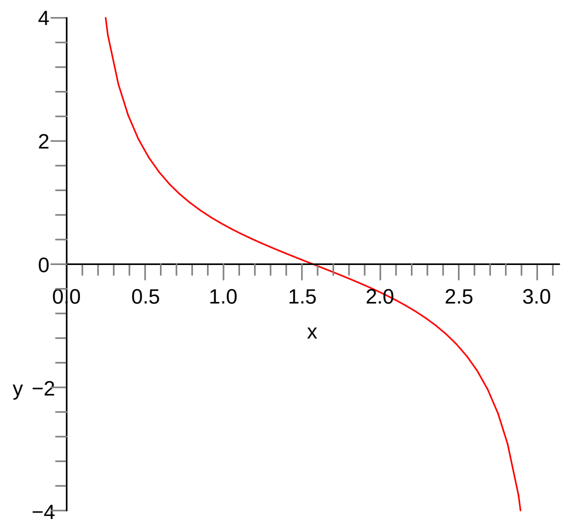

Figura 1.6: A função cotangente.

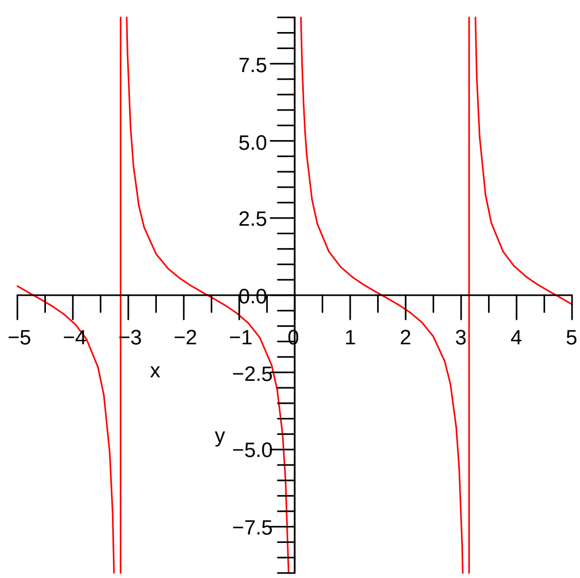

Figura 1.7: A função cotangente numa região maior (e incluindo algumas das suas assímptotas).

é imediato que

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \ , \quad \alpha \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\tan\beta\ , \quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

e portanto

$$\tan\alpha\ \ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1$$
$$\cot\alpha\ \ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1\ .$$

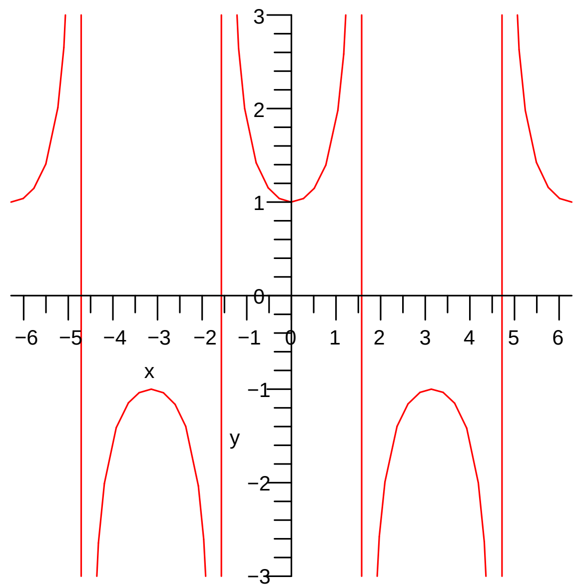

Figura 1.8: A função secante (e algumas das suas assímptotas).

Por fim, definem-se adicionalmente as funções cosec e sec (ver Figura 1.8) da seguinte forma:

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}\ , \qquad \sec x=\frac{1}{\cos x}\ ,$$

para os valores de x que não anulam os anteriores denominadores (respectivamente).

1.3 Funções inversas das funções trigonométricas

Dado que a *restrição principal* da função seno, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, é sobrejectiva e estritamente crescente, então é invertível.

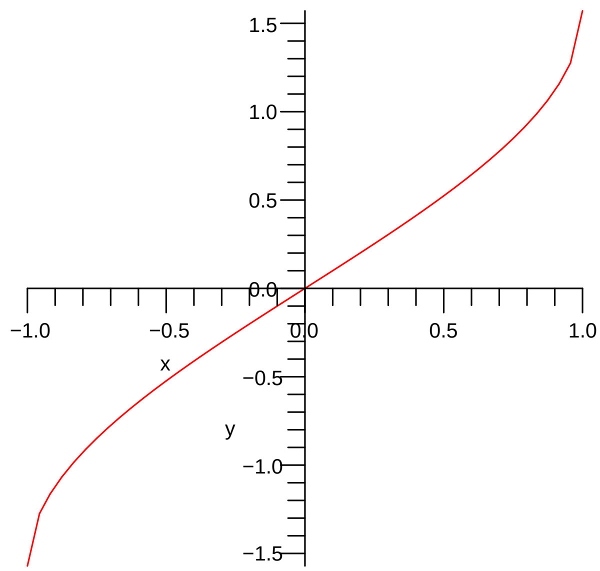

Figura 1.9: A função arcsin.

A sua função inversa $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é crescente (por ser a inversa de uma função crescente; ver Figura 1.9) e, por definição, satisfaz

$$\arcsin(\sin x) = x \ , \quad \forall_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \qquad \text{e} \qquad \sin(\arcsin y) = y \ , \quad \forall_{y \in [-1,1]}$$

ou

$$\begin{cases} \arcsin y = x \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = y \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Faz-se notar que se podem naturalmente definir inversas da função sin com outros domínios (diferentes da restrição principal).

A função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é sobrejectiva e estritamente decrescente e assim sendo é invertível.

A sua função inversa $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (ver Figura 1.10) é definida por

$$\arccos(\cos x) = x \ , \quad \forall_{x \in [0,\pi]} \qquad \text{e} \qquad \cos(\arccos y) = y \ , \quad \forall_{y \in [-1,1]}$$

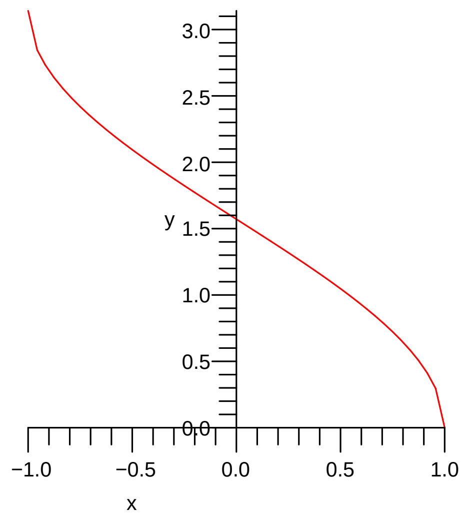

Figura 1.10: A função arccos.

ou

$$\begin{cases} \arccos y = x \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Dado que $x - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se e só se $x \in [0,\pi]$ e

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(h(x)) \ , \quad h(x) := \frac{\pi}{2} - x \ ,$$

vem

$$\arccos y = h^{-1}(\arcsin y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin y \ , \quad \forall_{y \in [-1,1]} \ .$$

Dado que a *restrição principal* da função tangente, $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, é sobrejectiva e estritamente crescente, então existe a sua função inversa $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ que por definição satisfaz

$$\begin{cases} \arctan(\tan x) = x \ , & \forall_{x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \\ \tan(\arctan y) = y \ , & \forall_{y \in \mathbb{R}} \end{cases} ,$$

ver Figura 1.11.

Perante as definições de cima, podemos imediatamente deduzir a seguinte relação entre arctan e arcsin: sendo $y \in]-1,1[$ e $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tais que $\sin x = y$, ou

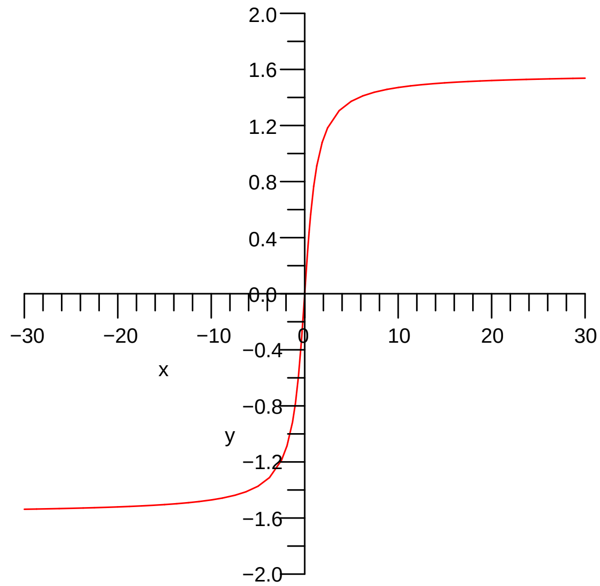

Figura 1.11: A função arctan.

equivalentemente, $x = \arcsin y$, temos

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

i.e.,

$$\arcsin y = x = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) .$$

Dado que a *restrição principal* da função cotangente, $\cot :]0,\pi[\to \mathbb{R}$, é sobrejectiva e estritamente decrescente, existe a sua função inversa $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ definida por

$$\operatorname{arccot} x = y \quad \text{se e só se} \quad \cot y = x \quad , \quad \forall_{y\in]0,\pi[} \ .$$

Dado que $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan f(x)$, $f(x) := \frac{\pi}{2} - x$, $x \in]0,\pi[$, tem-se

$$\operatorname{arccot} x = f^{-1}(\arctan x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x \ , \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

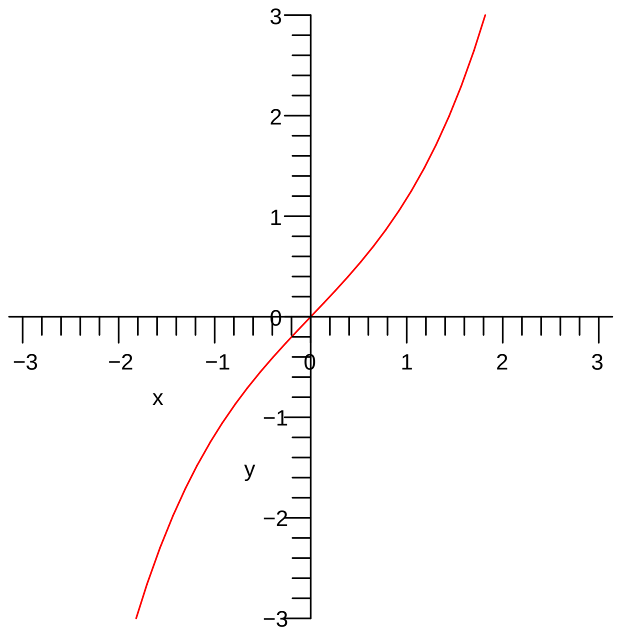

Figura 1.12: Gráfico da função sinh.

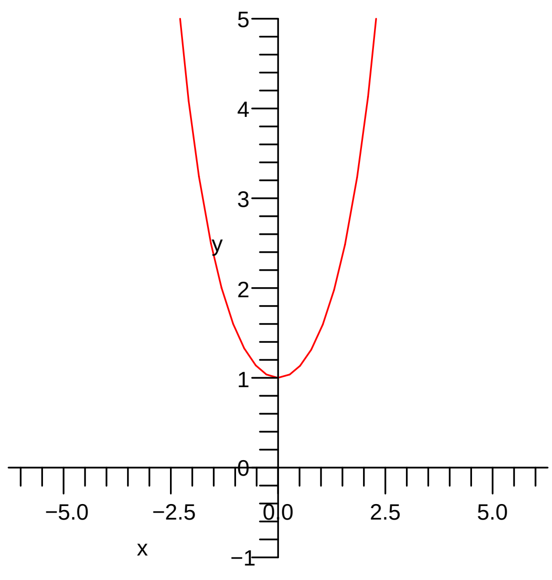

Figura 1.13: Gráfico da função cosh.

1.4 Funções hiperbólicas

Designa-se por SENO HIPERBÓLICO (ver Figura 1.12) a função

$$\begin{array}{rcccl} \sinh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} ,$$

e chama-se CO-SENO HIPERBÓLICO (ver Figura 1.13) à função

$$\begin{array}{rcccl} \cosh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} .$$

É simples de observar que sinh é uma função ímpar com contradomínio $\mathbb{R}$ e cosh é uma função par com contradomínio $[1, +\infty[$. Adicionalmente,

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 .$$

Na realidade, é desta última relação que provém o nome das funções hiperbólicas dado que se escolhermos $x = \cosh \alpha$ e $y = \sinh \alpha$ obtemos a equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

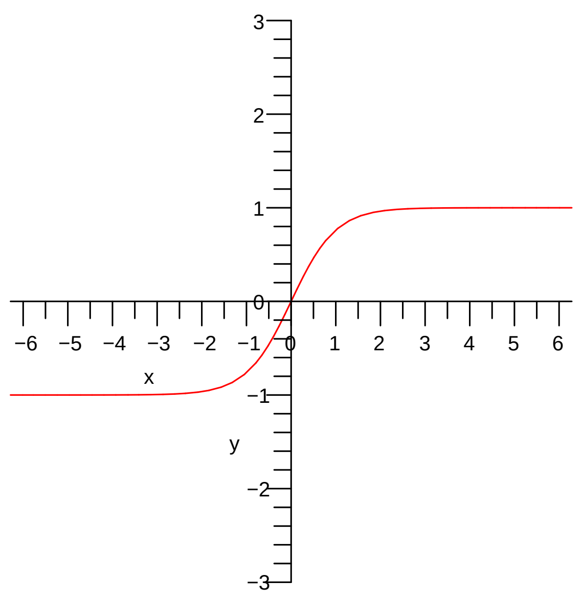

Figura 1.14: A função tangente hiperbólica.

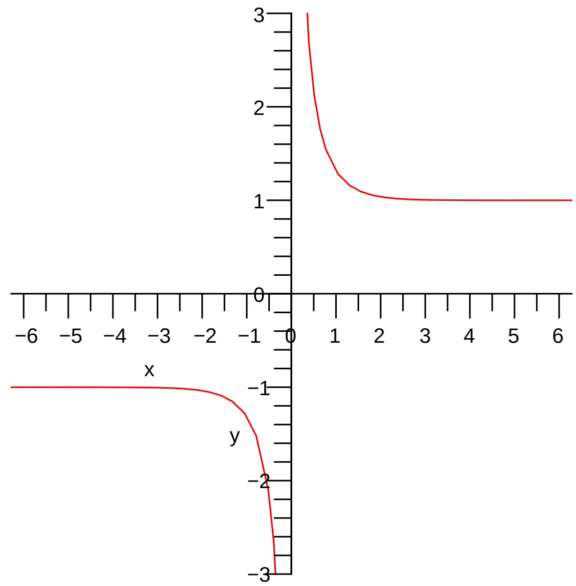

Figura 1.15: A função cotangente hiperbólica.

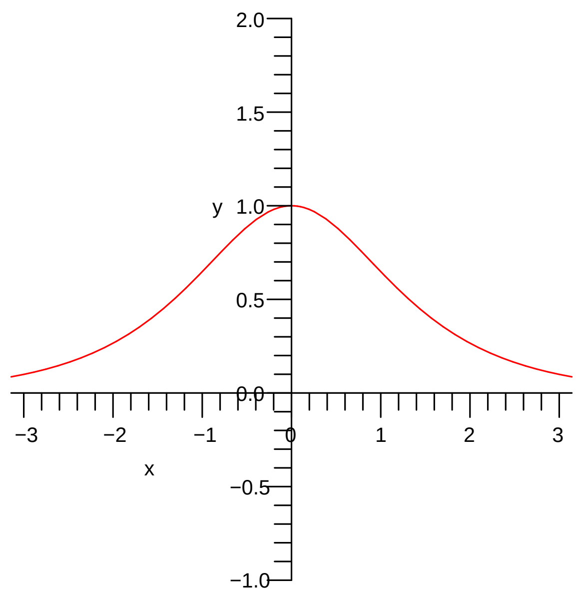

Figura 1.16: A função secante hiperbólica.

Com o uso destas duas últimas funções pode-se ainda considerar as novas funções (cf. Figuras 1.14, 1.15, 1.16 e 1.17):

- TANGENTE HIPERBÓLICA: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- COTANGENTE HIPERBÓLICA: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}\,, \qquad x \neq 0$

- SECANTE HIPERBÓLICA: $\mathrm{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

- CO-SECANTE HIPERBÓLICA: $\mathrm{cosech} x = \dfrac{1}{\sinh x}\,, \qquad x \neq 0$

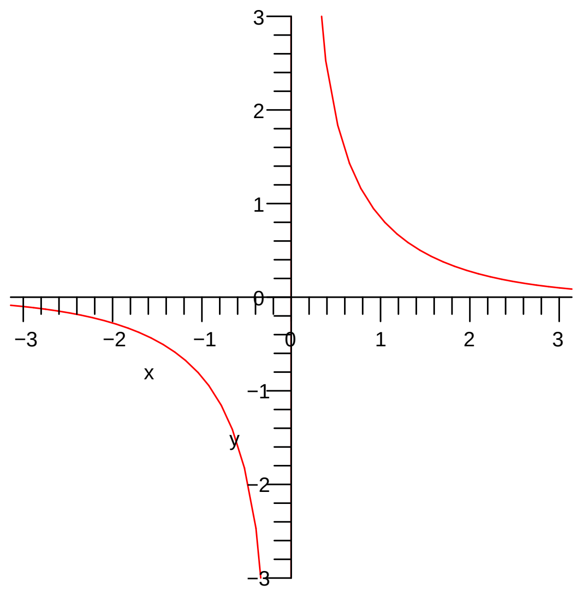

Figura 1.17: A função co-secante hiperbólica.

Tal como ocorre nas funções trigonométricas, existem várias relações entre as função hiperbólicas:

$$1 - \tanh^2 x = \mathrm{sech}^2 x \qquad \coth^2 x - 1 = \mathrm{cosech}^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x\, \cosh y \pm \cosh x \sinh y \qquad \sinh(2x) = 2 \sinh x\, \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x\, \cosh y \pm \sinh x \sinh y \qquad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x\, \tanh y} \qquad \tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

1.5 Noções topológicas básicas da recta real

Definição 1.5.1 (Vizinhança de um ponto)
Seja $p \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Chama-se VIZINHANÇA de centro p e raio ϵ – ou vizinhança ϵ de p – ao intervalo $]p - \epsilon, p + \epsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \epsilon\}$. Tal representa-se por $\mathscr{V}_\epsilon(p)$.

Definição 1.5.2 (Ponto interior e exterior)

Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$ (i.e., $C \subset \mathbb{R}$) e $p \in \mathbb{R}$. Diz-se que p é um PONTO INTERIOR a C se existir uma vizinhança de p contida em C.

Diz-se que p é um PONTO EXTERIOR a C se existir uma vizinhança de p contida no complementar de C, i.e. contida em $\mathbb{R} \setminus C$.

Definição 1.5.3 (Interior e exterior de um conjunto)

O conjunto dos pontos interiores de um conjunto C designa-se por INTERIOR DE C e representa-se por $\operatorname{int}(C)$.

O conjunto dos pontos exteriores de um conjunto C designa-se por EXTERIOR DE C e representa-se por $\operatorname{ext}(C)$.

Definição 1.5.4 (Ponto fronteiro)

Diz-se que p é um PONTO FRONTEIRO do conjunto C se toda a vizinhança de p intersecta C e $\mathbb{R} \setminus C$.

Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de um conjunto C chama-se FRONTEIRA de C e representa-se por $\operatorname{fr}(C)$.

Proposição 1.5.5

Seja C um qualquer subconjunto da recta real. Tem-se:

(i) $\operatorname{int}(C) \cap \operatorname{ext}(C) = \emptyset$

(ii) $\operatorname{int}(C) \cap \operatorname{fr}(C) = \emptyset$

(iii) $\operatorname{fr}(C) \cap \operatorname{ext}(C) = \emptyset$

(iv) $\operatorname{int}(C) \cup \operatorname{fr}(C) \cup \operatorname{ext}(C) = \mathbb{R}$.

Definição 1.5.6 (Fecho ou aderência)

Ao conjunto $\overline{C} = C \cup \operatorname{fr}(C)$ chama-se FECHO ou ADERÊNCIA de C. Diz-se que p é um ponto aderente a C se $p \in \overline{C}$.

Observe-se que $\overline{C} = \operatorname{int}(C) \cup \operatorname{fr}(C)$.

Definição 1.5.7 (Conjuntos abertos e fechados)

Seja $C \subset \mathbb{R}$. Diz-se que C é ABERTO se $C = \operatorname{int}(C)$. Diz-se que C é FECHADO se $\overline{C} = C$.

Proposição 1.5.8
Seja C um subconjunto da recta real.

(i) *C é fechado se e só se* $\operatorname{fr}(C) \subset C$.

(ii) *C é fechado se e só se* $\mathbb{R} \setminus C$ *é aberto.*

(iii) *C é aberto se e só se* $\mathbb{R} \setminus C$ *é fechado.*

Definição 1.5.9 (Ponto de acumulação; derivado)
Seja $p \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$. Diz-se que p é PONTO DE ACUMULAÇÃO de C se toda a vizinhança de p intersecta $C \setminus \{p\}$, ou por outras palavras, se em qualquer vizinhança de p existe pelo menos um elemento de C diferente de p.

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de C dá-se a designação de DERIVADO de C e representa-se por C'.

Definição 1.5.10 (Ponto isolado)
Diz-se que p é um ponto isolado de um subconjunto C de $\mathbb{R}$ se $p \in C$ e existe (pelo menos) uma vizinhança V de p tal que $V \cap C = \{p\}$.

Proposição 1.5.11
Seja C um qualquer subconjunto da recta real. Tem-se:

(i) $\overline{C} = C \cup C'$

(ii) *Todo o ponto interior de C pertence a C*

(iii) *Nenhum ponto exterior a C pertence a C*

(iv) *Todo o ponto de C é aderente a C*

(v) *Um ponto fronteiro a C pode ou não pertencer a C*

(vi) *Um ponto aderente a C pode ou não pertencer a C*

(vii) *Um ponto de acumulação de C pode ou não pertencer a C*

(viii) *Se $a \in \operatorname{int}(C)$, então a é ponto de acumulação de C*

(ix) *Um ponto isolado de C pertence a C*

(x) *Nenhum ponto isolado é ponto de acumulação.*

Definição 1.5.12 (Majorantes e minorantes)
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que a é um MAJORANTE de C se $a \geq x, \forall x \in C$.

Diz-se que b é um MINORANTE de C se $b \leq x, \forall x \in C$.

Definição 1.5.13 (Conjunto majorado, minorado e limitado)
Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que C é MAJORADO se admitir majorantes. Diz-se que C é MINORADO se admitir minorantes. Se C for majorado e minorado diz-se LIMITADO.

Definição 1.5.14 (Supremo e máximo)
Seja C um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que s é o supremo de C se s for o menor dos majorantes de C e representa-se por $\sup(C)$.

Se $\sup(C)$ pertencer a C, diz-se que $\sup(C)$ é o MÁXIMO de C e neste caso representa-se tal número por $\max(C)$.

O conceito de supremo de um conjunto C é portanto caracterizado por duas condições:
(i) "$\sup(C)$ é um majorante de C": $\quad c \leq \sup(C)\ , \quad \forall c \in C$;
(ii) "propriedade de aproximação": $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_1 \in C \quad : \quad \sup(C) - \varepsilon < c_1\, .$

Teorema 1.5.15 (Propriedade aditiva do supremo)
Seja $\varnothing \subsetneqq A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $B \subseteqq \mathbb{R}$. *Considere-se*

$$A + B = \{x + y : (x, y) \in A \times B\}$$

e suponha-se que ambos A *e* B *possuem supremo. Então* $A + B$ *também possui supremo e*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Demonstração. Se $t \in A + B$ então $t = x + y$ com $(x, y) \in A \times B$. Então $t = x+y \leq \sup A+\sup B$ e consequentemente $\sup A+\sup B$ é um majorante para $A+B$. Portanto, atendendo à definição de supremo, temos $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.

Iremos agora provar que $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$. Pela propriedade de aproximação, $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A$ e $b \in B$ tais que $\sup A - \dfrac{\varepsilon}{2} < a$ e $\sup B - \dfrac{\varepsilon}{2} < b$. Observe que $a + b \in A + B$ e portanto $a + b \leq \sup(A + B)$. Então,

$$\sup A + \sup B - \varepsilon < a + b \leq \sup(A + B),$$

e portanto temos de ter

$$\sup A + \sup B \leq \sup(A + B).$$

□

Definição 1.5.16 (Ínfimo e mínimo)
Seja C um subconjunto minorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que i é o ÍNFIMO de C se i for o maior dos minorantes de C, representando-se por $\inf(C)$.

Se o ínfimo de C pertencer a C, diz-se que i é o MÍNIMO de C e representa-se por $\min(C)$.

O conceito de ínfimo de um conjunto C é assim igualmente caracterizado pelas seguintes duas condições:
(i) "$\inf(C)$ é um minorante de C": $\inf(C) \leq c\,, \quad \forall c \in C$;
(ii) "propriedade de aproximação": $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_1 \in C \quad : \quad c_1 < \inf(C) + \varepsilon\,.$

Teorema 1.5.17 (Princípio do supremo)
Em $\mathbb{R}$, todo o subconjunto X majorado (e não vazio) tem supremo.

Demonstração. Fixemos $x \in X$ e seja b um majorante de X. Consideremos o intervalo $I = [a, b]$, sendo $a < x$, de modo que a não é um majorante de X. Um dos intervalos $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ tem as mesmas características do intervalo I, isto é, a extremidade superior é um majorante de X e a extremidade inferior não. Denotemos por $I_1 = [a_1, b_1]$ tal intervalo. Repetindo o processo com o intervalo I_1 no lugar do intervalo I, produzimos um intervalo I_2 nas condições de I_1 e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos uma família de intervalos encaixados $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$, onde $I_n = [a_n, b_n]$ é tal que: (i) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tende para zero (quando n tende para infinito) e (ii) b_n é majorante de X e a_n não é. Se s é o único ponto comum a todos os intervalos I_n, então $a_n \to s$ e $b_n \to s$ e afirmamos que $s = \sup(X)$. De facto: (a) dado $x \in X$, então $x \leq b_n$, $\forall n$, e fazendo n tender para infinito encontramos $x \leq s$; (b) se s' for um majorante de X tem-se $a_n \leq s'$, $\forall n$, e fazendo n tende para infinito, obtemos $s \leq s'$. □

É claro que a demonstração acabada de fazer se deve ler com maior cuidado após a constatação da próxima secção e as correspondentes propriedades inerentes à convergência de sucessões. Optamos no entanto por colocar aqui desde já o presente resultado pela pertinência que este tem para com a presente secção. Há também um *Princípio do Ínfimo* que se pode obter devido a uma certa *dualidade* para com o anterior teorema.

Corolário 1.5.18 (Princípio do ínfimo)
Em $\mathbb{R}$, todo o conjunto minorado (e não vazio) tem ínfimo.

Exercício 1.5.19
Partindo da utilização de um qualquer conjunto M minorado e não vazio, construa um segundo conjunto N relacionado com M e ao qual possa aplicar o Teorema 1.5.17 de tal forma que lhe possibilite obter a conclusão de que M possui ínfimo (e assim demonstrar o corolário anterior).

Teorema 1.5.20 (Propriedade Arquimediana dos números reais)
Se $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 0$, então existe um número natural n tal que $nx > y$.

Demonstração. Consideremos o conjunto

$$A := \{nx : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dado que $1 \cdot x \in A$, temos que A não é vazio. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ tivéssemos $nx \leq y$, então A seria majorado por y. Logo, pelo Princípio do Supremo, A teria supremo $\sup A$. Em consequência, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $nx \leq \sup A$. Dado que $(n+1)x \in A$, também teríamos

$$(n+1)x \leq \sup A \implies nx \leq \sup A - x.$$

Tal significa que $\sup A - x$ é um majorante de A que é menor que o seu supremo, chegando-se assim a uma contradição. Portanto, tem de existir um n para o qual $nx > y$. □

Propriedade Arquimediana dos números reais permite concluir a *densidade* dos números racionais em $\mathbb{R}$, bem como a *densidade* dos irracionais em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5.21

Entre dois quaisquer diferentes números reais existe sempre um número racional.

Demonstração. Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}$ com $y - x > 0$. Temos de encontrar dois números inteiros m e $n \neq 0$ tais que

$$x < \frac{m}{n} < y\,,$$

ou seja,

$$x < \frac{m}{n} < x + (y - x)\,.$$

Pela propriedade Arquimediana dos números reais, sabemos que existe um inteiro positivo n tal que $n(y-x) > 1$. Assim sendo, podemos encontrar um número inteiro m entre nx e $ny = nx + n(y - x)$. Isto prova o resultado. □

Teorema 1.5.22

Entre dois quaisquer diferentes números reais existe sempre um número irracional.

Demonstração. Suponhamos que $x, y \geq 0$, com $y - x > 0$. Então

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,x < \frac{1}{\sqrt{2}}\,y\,.$$

Pelo Teorema 1.5.21, existe um número racional r tal que

$$x < r\sqrt{2} < y\,. \tag{1.5.1}$$

Tal permite concluir o resultado desejado. □

Exercício 1.5.23

Justifique todos os detalhes na última demonstração. Por exemplo: (i) justifique porque é que o explanado implica o resultado para todos os $x, y \in \mathbb{R}$ (quando só se está a fazer referência a $x, y \geq 0$); (ii) justifique porque é que (1.5.1) permite concluir o resultado desejado.

1.6 Sucessões: Funções reais de variável natural

1.6.1 Definições básicas, sucessões monótonas e sucessões limitadas

Definição 1.6.1 (Sucessão)

Chama-se SUCESSÃO DE NÚMEROS REAIS a toda a função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Uma sucessão

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & u_n := u(n) \end{array}$$

pode-se simplesmente denotar por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde à expressão algébrica u_n (que define a sucessão) dá-se a designação de TERMO GERAL DA SUCESSÃO. Por outro lado, a $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} := \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ dá-se a designação de CONJUNTO DOS TERMOS DA SUCESSÃO.

Adicionalmente, faz-se notar que as sucessões podem ser também definidas por recorrência. Tal consiste em somente dar a conhecer explicitamente alguns dos primeiros termos, sendo o termo de ordem n definido através de alguns termos de outras ordens. Um exemplo de uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de tal forma é a dada pelo termo geral

$$u_n = \begin{cases} u_1 = -1/2 \\ u_2 = 5 \\ u_3 = 6 \\ u_n = -4 + u_{n-2} + 2u_{n-1}\,, \quad n \geq 4\,. \end{cases}$$

Definição 1.6.2 (Subsucessão)

Sendo $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões, diz-se que v é uma SUBSUCESSÃO de u se existir uma sucessão estritamente crescente $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (com $w_n \in \mathbb{N}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$) tal que $v = u \circ w$.

Definição 1.6.3 (Sucessão limitada inferiormente, limitada superiormente, limitada)
Uma sucessão diz-se LIMITADA SUPERIORMENTE, se o conjunto dos seus termos for majorado; diz-se LIMITADA INFERIORMENTE, se o conjunto dos seus termos for minorado; diz-se LIMITADA, se o conjunto dos seus termos for limitado.

Definição 1.6.4 (Operações elementares)
Dadas duas sucessões de números reais $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chama-se soma, diferença e produto de u e v às sucessões $u+v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u-v = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Se $v_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, chama-se quociente de u por v à sucessão $\frac{u}{v} = (\frac{u_n}{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 1.6.5 (Sucessão monótona, monótona crescente, monótona decrescente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se MONÓTONA CRESCENTE se $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se MONÓTONA DECRESCENTE se $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão diz-se MONÓTONA se for monótona crescente ou monótona decrescente.

1.6.2 Convergência e sucessões de Cauchy

Definição 1.6.6 (Sucessão convergente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se CONVERGENTE para um número real c (ou diz-se que o limite da sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $c \in \mathbb{R}$) e escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = c \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\,,$$

se

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n \in \mathscr{V}_\epsilon(c) =]c-\epsilon, c+\epsilon[\,, \quad \forall_{n>p}\,.$$

Note-se que do ponto de vista da última definição e consequentes resultados, é indiferente colocarmos $\forall_{n>p}$ tal como acabamos de fazer ou usar "$\forall_{n\geq p}$". Precisamente por este motivo, tanto nas aulas como no presente texto não iremos usar somente uma destas situações.

Teorema 1.6.7

O limite de uma sucessão convergente é único.

Exercício 1.6.8 Demonstre o resultado anterior seguindo o seguinte plano: suponha inicialmente que existem dois distintos limites de uma mesma sucessão convergente e chegue a uma contradição (por uso da definição de convergência).

Teorema 1.6.9

O limite de uma sucessão constante é essa própria constante.

Exercício 1.6.10 Realize a demonstração do resultado anterior por uso directo da definição de convergência de sucessões.

Teorema 1.6.11

Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

Demonstração. Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão monótona e limitada.
Caso 1: Suponhamos que a sucessão x é não decrescente. Denotemos por $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto dos termos da sucessão. Dado que a sucessão x é limitada, então o conjunto A possui um majorante. Adicionalmente, como $x_1 \in A$, então A não é vazio. Portanto, $\sup A$ existe (em $\mathbb{R}$) e passemos a chamar-lhe b.

Vamos mostrar que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para b. Seja $\epsilon > 0$. Então $b - \epsilon < b$, e portanto $b - \epsilon$ não é um majorante de A; consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ a ser tal que $x_{n_0} > b - \epsilon$. Se $n \geq n_0$, então

$$b - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq b < b + \epsilon$$

(onde $x_{n_0} \leq x_n$ se deve ao facto de a sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser não decrescente e $n_0 \leq n$; já o facto de $x_n \leq b$ sucede porque $x_n \in A$ e b é um majorante de A).

Portanto, $x_n \in]b - \epsilon, b + \epsilon[$ e $|x_n - b| < \epsilon$. Uma vez que ϵ foi escolhido arbitrariamente (e não lhe foram impostas condições), temos $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ e portanto a sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente (neste caso para $b = \sup A$).

Caso 2: Suponhamos agora que a sucessão é não crescente.

Primeiro método: Escolha-se $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado que x é limitada, A possui um minorante. Como $x_1 \in A$, temos que A não é vazio. Então $\inf A$ existe (em $\mathbb{R}$) e passemos a chamar este ínfimo por b.

Sendo $\epsilon > 0$, temos $b + \epsilon > b$, e portanto $b + \epsilon$ não é um minorante de A; seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} < b + \epsilon$. Se $n \geq n_0$, então

$$b + \epsilon > x_{n_0} \geq x_n \geq b > b - \epsilon\,.$$

Portanto, $x_n \in]b - \epsilon, b + \epsilon[$ e $|x_n - b| < \epsilon$. Dado que ϵ é arbitrário, obtemos que $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ e que a sucessão x é convergente (neste caso para $b = \inf A$).

Segundo método: A sucessão $-x = (-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente e limitada. Portanto, pelo primeiro caso já estudado, concluímos que existe um b tal que

$$\lim_{n\to\infty} (-x_n) = b\,.$$

Assim sendo, vem $\lim_{n\to\infty} x_n = -b$ e portanto conclui-se que a sucessão x é convergente. □

É claro que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira [pense por exemplo no caso de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$.]

Definição 1.6.12 (Sucessão divergente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se DIVERGENTE se não for convergente.

Definição 1.6.13 (Sucessão de Cauchy) [1]
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ é dita ser uma SUCESSÃO DE CAUCHY se para todo o $\epsilon > 0$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $|u_n - u_m| < \epsilon$, para todo o n e m tais que $n \geq N(\epsilon)$ e $m \geq N(\epsilon)$.

Teorema 1.6.14
Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

[1] Augustin Louis Cauchy nasceu a 21 de Agosto de 1789 em Paris, França e faleceu em 23 de Maio de 1857 em Sceaux (perto de Paris), França. Teve uma grande influência na introdução do rigor na Análise Matemática.

Demonstração. Seja $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_m - u_n| < 1$ para todo o m, $n \geq n_0$; em particular, $|u_n - u_{n_0}| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Escolha-se

$$M = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0}|, |u_{n_0}| + 1\}\,;$$

note-se que sendo M o máximo de um conjunto finito de números reais, M existe e portanto é ele próprio um número real. Se $n \leq n_0$, então $|u_n| \leq M$ porque $|u_n|$ pertence ao conjunto finito acima considerado. Se $n \geq n_0$, então

$$|u_n| \leq |u_{n_0}| + |u_n - u_{n_0}| < |u_{n_0}| + 1 \leq M\,.$$

Portanto, $|u_n| < M$, ou seja, $-M < u_n < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluindo-se assim que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado (conforme era desejado). □

Teorema 1.6.15

Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes.

Demonstração. Sendo $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão limitada, consideremos o conjunto de todos os índices $n \in \mathbb{N}$ tais que o correspondente termo (da sucessão) u_n é maior do que todos os outros termos u_m com índices m maiores que n:

$$\mathscr{N} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, u_n > u_m\,,\ \forall m > n\}\,.$$

Existem naturalmente só duas possibilidades: ou $\mathscr{N}$ é infinito ou $\mathscr{N}$ é finito.

No caso de $\mathscr{N}$ ser infinito, escrevamos $\mathscr{N} = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$, com $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots$. Desta forma, se $i < j$ então $n_i < n_j$ e, como $n_i \in \mathscr{N}$, obtemos que $u_{n_i} > u_{n_j}$. Concluímos assim que a subsucessão $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é (estritamente) decrescente. Uma vez que por hipótese também sabemos que a subsucessão é limitada, o Teorema 1.6.11 garante-nos que ela é convergente.

No caso de $\mathscr{N}$ ser finito, existe naturalmente um $n_1 \in \mathbb{N} \setminus \mathscr{N}$ que é majorante de $\mathscr{N}$. Portanto, $n_1 \notin \mathscr{N}$ e daí existe $n_2 > n_1$ (e consequentemente $n_2 \notin \mathscr{N}$) tal que $u_{n_1} \leq u_{n_2}$. De forma análoga, de $n_2 \notin \mathscr{N}$ decorre que existe $n_3 > n_2$ (e portanto $n_3 \notin \mathscr{N}$) tal que $u_{n_2} \leq u_{n_3}$. Por indução, definimos também neste caso uma subsucessão $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que é crescente (em sentido lato). Uma vez que por hipótese também sabemos que esta subsucessão é limitada, o Teorema 1.6.11 garante-nos também aqui que ela é convergente. $\square$

Teorema 1.6.16
Uma sucessão (real) é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente, para o limite $b \in \mathbb{R}$. Consideremos $\epsilon > 0$. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo o $n \geq n_0$. Se m, $n \geq n_0$, então

$$|u_m - u_n| = |(u_m - b) + (-(u_n - b))| \leq |u_m - b| + |u_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

Dado que ϵ foi escolhido arbitrariamente, decorre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.

($\Leftarrow$) Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy. Então, pelo Teorema 1.6.14, sabemos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Existem portanto a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq v_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina-se $A_n = \{v_i : i \geq n\}$. Então, a é um minorante para A_n e $v_n \in A_n$. Portanto, A_n é um conjunto não vazio que possui um minorante. Em consequência, A_n possui ínfimo $y_n = \inf A_n$, com $a \leq y_n \leq v_n$. Note-se agora que $A_{n+1} \subseteq A_n$ (de facto, $A_n = A_{n+1} \cup \{v_n\}$), e portanto y_n é também um minorante para A_{n+1} e $y_n \leq y_{n+1}$.

Tal é válido para todo o $n \in \mathbb{N}$ e então concluímos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão não decrescente. Adicionalmente,

$$a \leq y_n \leq v_n \leq b \qquad \text{(para todo } n\text{)} \tag{1.6.2}$$

e portanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Assim sendo, por uso do Teorema 1.6.11, concluímos que é convergente; seja c o seu limite.

A ideia inerente à construção da sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prende-se com o facto de $\lim_{n\to\infty}(v_n - y_n) = 0$. Vamos então de seguida verificar este facto. Para o efeito, consideremos $\epsilon > 0$. Existe (por hipótese) um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|v_i - v_n| < \epsilon$ sempre que $n, i \geq n_0$. Seja $n \geq n_0$. Então, para quaisquer $i \geq n$, $|v_i - v_n| < \epsilon$, logo $v_i > v_n - \epsilon$. Isto significa que $v_n - \epsilon$ é um minorante de A_n; dado que y_n é o maior dos minorantes, temos $v_n - \epsilon \leq y_n$. No entanto já sabemos (ver (1.6.2) que $y_n \leq v_n$, e daí $|v_n - y_n| \leq \epsilon$, sendo tal válido para $n \geq n_0$. Uma vez que ϵ foi escolhido arbitrariamente, temos de facto que $\lim_{n\to\infty}(v_n - y_n) = 0$.

Tendo-se $\lim_{n\to\infty}(v_n - y_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = c$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} (v_n - y_n + y_n) = 0 + c = c\,.$$

Consequentemente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Dado que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ foi escolhida arbitrariamente, o teorema está provado.

□

Propositadamente, não usamos o Teorema 1.6.15 na última demonstração. No entanto, a última parte da demonstração anterior (i.e., a parte "$\Leftarrow$") pode ser realizada de forma mais rápida se usarmos tal teorema. A ideia é ir buscar o limite c a uma subsucessão convergente da sucessão de Cauchy (subsucessão convergente esta que terá de existir pelo que nos é dito no Teorema 1.6.14 e no Teorema 1.6.15) e, então, provar que esse limite c é precisamente o valor para o qual a sucessão de Cauchy converge.

Exercício 1.6.17

Realize a demonstração de que

se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy então $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão convergente

usando a estratégia de demonstração acabada de sugerir.

Corolário 1.6.18

Toda a sucessão convergente é limitada.

Demonstração. O presente resultado decorre directamente da aplicação conjunta do Teorema 1.6.14 e Teorema 1.6.16. □

Observe que a proposição recíproca do último resultado não é verdadeira [pense por exemplo no caso de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = 0$ se n é ímpar, e $u_n = 500000000$ se n é par.]

Definição 1.6.19 (Ponto de acumulação de uma sucessão)
Um número real b diz-se um PONTO DE ACUMULAÇÃO DE UMA SUCESSÃO $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se para qualquer $\epsilon > 0$ temos

$$|x_n - b| < \epsilon$$

para infinitos n.

Também iremos admitir que números não reais $b = \pm\infty$ se possam designar pontos de acumulação desde que se verifique a correspondente condição para este caso.

1.6.3 Infinitamente grandes, infinitésimos, limite superior, limite inferior e demais operações com sucessões

Definição 1.6.20 (Infinitamente grandes)
Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE POSITIVO (OU QUE TENDE PARA $+\infty$), representando-se por $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n > c\ ,\ \ \forall n > p$$

Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE NEGATIVO (OU QUE TENDE PARA $-\infty$), representando-se por $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ se

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n < c\ ,\ \ \forall n > p$$

Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE EM MÓDULO (OU QUE $|u_n|$ TENDE PARA $+\infty$), se $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitamente grande positivo.

Em relação a esta última definição aplica-se a mesma observação colocada na Definição 1.6.6, relativa ao indiferente uso de "$\forall n > p$" ou "$\forall n \geq p$".

A seguinte proposição pode ser encarada como um exercício de aplicação das correspondentes definições.

Proposição 1.6.21

1. *Se* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é tal que* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *ou* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, *ou* $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *então* u *não é limitada.*

2. *O recíproco da afirmação anterior não é verdadeiro: se* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é limitada, nada nos garante que* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, *ou* $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. *[Sugestão: considere o exemplo de* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n = n$ *se* n *é par, e* $u_n = 1/n$ *se* n *é ímpar.]*

3. *Se para uma dada sucessão* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *temos* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *nada nos garante que* u *seja crescente (nem que a partir de certa ordem seja crescente). [Sugestão: pense no exemplo de* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n = (-1)^n + n$.*]*

Definição 1.6.22 (Infinitésimo)
Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitésimo se $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema 1.6.23 (Teorema das sucessões enquadradas)
Sejam $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucessões tais que* $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ *e, a partir de certa ordem,*

$$u_n \leq w_n \leq v_n \,,$$

então $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.

Demonstração. Consideremos um qualquer $\epsilon > 0$. Por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \exists_{p_1\in\mathbb{N}} &: \quad n > p_1 \Longrightarrow c - \epsilon < u_n < c + \epsilon \,, \\ \exists_{p_2\in\mathbb{N}} &: \quad n > p_2 \Longrightarrow c - \epsilon < v_n < c + \epsilon \,, \\ \exists_{p_3\in\mathbb{N}} &: \quad n > p_3 \Longrightarrow u_n \leq w_n \leq v_n \,. \end{aligned}$$

Se escolhermos $p = \max\{p_1, p_2, p_3\}$, então para $n > p$ temos $c - \epsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < c + \epsilon$. Ou seja, $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ como era pretendido. □

Exemplo 1.6.24

Dado que $|\sin(n)| \leq 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}) .$$

Adicionalmente, uma vez que $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas (i.e., Teorema 1.6.23) fica justificado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0 .$$

Teorema 1.6.25 (Operações com sucessões convergentes)

Sejam $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes e $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$. Então:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + \lim_{n\to\infty} v_n = a + b$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n = a - b$

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (c \cdot u_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} u_n = c \cdot a \ , \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(iv) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n \cdot \lim_{n\to\infty} v_n = ab$

(v) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n} = \frac{a}{b} \ , \quad se \quad v_n \neq 0 \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} v_n \neq 0 \ .$

Demonstração. As primeiras três proposições ((i)–(iii)) são bastante simples de se provar e em consequência de tal estas ficam como exercício. Vamos então de seguida demonstrar a proposição (iv) (e posteriormente também a proposição (v)).

Seja dado $\epsilon > 0$, escolha-se

$$\eta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1 + |a| + |b|}\right) > 0 .$$

Por hipótese, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n - a| \leq \eta$ sempre que $n \geq n_1$; adicionalmente, há também um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|v_n - b| \leq \eta$, sempre que $n \geq n_2$.

Se tomarmos $n_0 = \max(n_1, n_2)$ e considerarmos $n \geq n_0$, então $n \geq n_1$ e $n \geq n_2$

e portanto tem-se tanto $|u_n - a| \leq \eta$, como $|v_n - b| \leq \eta$ e

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ab| &= |(u_n - a)(v_n - b) + a(v_n - b) + b(u_n - a)| \\
&\leq |(u_n - a)(v_n - b)| + |a(v_n - b)| + |b(u_n - a)| \\
&= |u_n - a||v_n - b| + |a||v_n - b| + |b||u_n - a| \\
&\leq \eta \cdot \eta + |a|\eta + |b|\eta \\
&= \eta(\eta + |a| + |b|) \\
&\leq \eta(1 + |a| + |b|) \qquad (\text{porque } \ \eta \leq 1) \\
&\leq \epsilon \qquad (\text{porque } \ \eta \leq \frac{\epsilon}{1 + |a| + |b|}) \, .
\end{aligned}$$

Tal revela que $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = bc$, conforme era desejado.

Quanto à proposição (v), vamos encarar o quociente u_n/v_n como o produto de u_n por $\frac{1}{v_n}$). Em tal caso, provando-se que

$$\text{“ se} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = b \neq 0 \, , \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b} \text{ ”},$$

usando de seguida a proposição (iv) acabada de demonstrar ficará concluída a demonstração de (v).

Vamos então demonstrar que se $\lim_{n\to\infty} v_n = b \neq 0$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$.

Seja $\epsilon > 0$ e escolha-se

$$\eta = \min\left(\frac{|b|}{2}, \frac{1}{2}b^2\epsilon\right) > 0 \, .$$

Então, existe por hipótese um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|v_n - b| \leq \eta$ para todo $n \geq n_0$. Se $n \geq n_0$, então dado que $|v_n| + |v_n - b| = |v_n| + |b - v_n| \geq |v_n + b - v_n| = |b|$ temos

$$\begin{aligned}
|v_n| &\geq |b| - |v_n - b| \\
&\geq |b| - \eta \\
&\geq |b| - \frac{1}{2}|b| \\
&= \frac{1}{2}|b| > 0 \, .
\end{aligned}$$

Adicionalmente, dado que $v_n \neq 0$ e $\frac{1}{v_n}$ está portanto bem definido, vem

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b - v_n}{v_n b}\right| \\
&= \frac{|b - v_n|}{|v_n||b|} \\
&\leq \frac{\eta}{|v_n||b|} \qquad \text{(pois } |b - v_n| = |v_n - b| \leq \eta\text{)} \\
&\leq \frac{\eta}{\frac{1}{2}|b||b|} \qquad \text{(porque } |v_n| \geq \frac{1}{2}|b|\text{)} \\
&= \frac{2\eta}{b^2} \\
&\leq \frac{2}{b^2} \cdot \frac{1}{2} b^2 \epsilon \\
&= \epsilon\,.
\end{aligned}$$

Dado que ϵ foi escolhido arbitrariamente, temos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$. □

Definição 1.6.26 (Limite superior e limite inferior de uma sucessão) Seja $\mathscr{A}$ o conjunto (não vazio) de todos os pontos de acumulação de uma dada sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, contendo $\sup \mathscr{A}$ e $\inf \mathscr{A}$.

A $\sup \mathscr{A}$ e $\inf \mathscr{A}$ chamamos LIMITE SUPERIOR e LIMITE INFERIOR da sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Tais números serão denotados por

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \qquad \text{e} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\ ,$$

respectivamente.

Os números $\overline{a} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ e $\underline{a} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ são caracterizados pelas seguintes propriedades:

- Para qualquer $\epsilon > 0$, $x_n > \overline{a} - \epsilon$ para infinitos n e $x_n > \overline{a} + \epsilon$ somente para um número finito de n's.
- Para qualquer $\epsilon > 0$, $x_n < \underline{a} + \epsilon$ para infinitos n e $x_n < \underline{a} - \epsilon$ somente para um número finito de n's.

Exemplo: Considerando a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = 2 \qquad \text{e} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = 0\ .$$

Teorema 1.6.27

O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.

Demonstração. Consideremos uma qualquer sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e uma qualquer sucessão $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que seja limitada e portanto tal que exista $K > 0$ por forma a que

$$|v_n| \leq K\ , \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.6.3}$$

Dado um qualquer $\epsilon > 0$, pela hipótese ($u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) sabemos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $|u_n| < \epsilon/K$, para $n > p$. Então, por (1.6.3) decorre que $|u_n v_n| < \epsilon$, para todo $n > p$. □

1.7 Limites de funções reais de variável real

Definição 1.7.1 (Limite de uma função num ponto)

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D. Diz-se que ℓ é limite da função f no ponto p, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$, se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in D\ \wedge\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\ .$$

Noutra notação, podemos escrever

$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in \mathscr{V}_\delta(p)\setminus\{p\} \cap D \Rightarrow f(x) \in \mathscr{V}_\epsilon(\ell)\ .$$

Exemplo 1.7.2

$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ para todo o $a \in \mathbb{R}$.

Vamos provar tal recorrendo à definição de limite. Antes de mais, deve estar claro para o leitor que a função $f(x) = x^2$ está bem definida em todo o $x \in \mathbb{R}$.

Então, $D_f = \mathbb{R}$, e todos os pontos a são pontos de acumulação de D_f. Fica assim claro que o limite em consideração faz sentido.

Iremos realizar uma estimativa para $|f(x) - \ell|$, que neste caso em concreto é $|x^2 - a^2|$:

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\,|x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a|.$$

Consideremos um qualquer $\epsilon > 0$. De forma a tornar o lado esquerdo da desigualdade de cima mais pequeno do que ϵ, vamos tornar pequeno $|x - a|$ (i.e. tornar x perto a). Então tal estimativa deve chegar desde que $|x| + |a|$ não se torne demasiado grande. De qualquer modo, se x estiver perto de a, então x deve assumir uma quantidade comparável com a de a. Para tornarmos estas ideias matematicamente precisas, comecemos por estimar $|x|$ em termos de $|x - a|$ já que na realidade é esta última que vamos conseguir controlar:

$$|x| = |x - a + a| \leq |x - a| + |a|.$$

Então, desde que $|x - a| < 1$, obtemos $|x| + |a| \leq |x - a| + 2|a| < 2|a| + 1$. Assim sendo, desde que $|x - a|$ seja <u>também</u> menor que $\epsilon/(2|a| + 1)$, teremos a garantia que $|x^2 - a^2|$ é mais pequeno que ϵ.

Portanto, temos tudo para escolher um δ que sirva os nossos propósitos. Dado que precisamos que $|x - a|$ seja mais pequeno que 1 e que $\epsilon/(2|a| + 1)$, então basta escolhermos

$$\delta = \min\{1, \epsilon/(2|a| + 1)\}.$$

Do acima exposto, fica demonstrado que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|x^2 - a^2| < \epsilon$.

Será útil o leitor fazer uma comparação do argumento seguido no desenvolvimento do último exemplo, com a estratégia da demonstração realizada para a proposição (iv) do Teorema 1.6.25.

Exemplo 1.7.3
Seja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Então o $\lim_{x \to a} f(x)$ não existe para nenhum $a \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos tal. Assim como no anterior exemplo a função está bem definida em $\mathbb{R}$ e portanto o limite pode ser considerado em cada $a \in \mathbb{R}$. Pretendemos no entanto mostrar que tal limite na realidade não existe em nenhum $a \in \mathbb{R}$. Então agora não basta provar que o limite não se iguala a um determinado valor particular; temos de mostrar que nenhum valor ℓ vai satisfazer a condição enunciada na definição de limite acima exposta agora para a presente função f. Em tal caso, faz sentido que se proceda por contradição.

Com vista a se tentar obter uma contradição, suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe e é igual a ℓ. Então, se escolhermos $\epsilon = 1/2$, deveremos conseguir escolher um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \ell| < 1/2$ para todo o x tal que $0 < |x - a| < \delta$. Em particular,

$$\ell - \frac{1}{2} < f(x) < \ell + \frac{1}{2}$$

para todo $x \in (a, a + \delta)$. Neste último intervalo temos simultaneamente números racionais e números irracionais. Seja q um racional em $(a, a + \delta)$ e s um irracional em $(a, a + \delta)$. Então

$$\ell - \frac{1}{2} < f(s) = 0 \quad \text{e} \quad 1 = f(q) < \ell + \frac{1}{2}$$

o que implica $\ell < \frac{1}{2} < \ell$, ou seja, uma contradição.

Definição 1.7.4

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que D não é majorado. Diz-se que o limite da função f quando $x \to +\infty$ é b, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, se

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M>0} \ : \ x \in D \wedge x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \, .$$

Definição 1.7.5

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que D não é minorado. Diz-se que o limite da função f quando $x \to -\infty$ é b, e escreve-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, se

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{M>0} \ : \ x \in D \wedge x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon \, .$$

Definição 1.7.6
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que p é um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite da função f no ponto p é $+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$, se

$$\forall_{N>0}\exists_{\delta>0} \ : \ x \in D \wedge 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) > N \ .$$

Definição 1.7.7
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que p é um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite da função f no ponto p é $-\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$, se

$$\forall_{N>0}\exists_{\delta>0} \ : \ x \in D \wedge 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) < -N \ .$$

De forma análoga se podem considerar as noções de

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ .$$

Teorema 1.7.8
Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p é um ponto de acumulação de D, então $\lim_{x\to p} f(x) = b$ se e só se para cada sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite p, com $u_n \in D\setminus\{p\}$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), a sucessão $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem por limite b.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão que converge para p em D e em que nenhum dos seus termos é igual a p. Pretendemos demonstrar que $f(x_n) \to b$. Seja $\epsilon > 0$. Queremos justificar a existência de um $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_n) - b| < \epsilon$ para todo $n \geq N$.

Dado que $f(x) \to b$ quando $x \to p$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \epsilon \text{ para todo o } x \in D \text{ com } 0 < |x-p| < \delta \tag{1.7.4}$$

Por outro lado, dado que $x_n \to p$, então existe um N tal que $|x_n - p| < \delta$ para todo $n \geq N$. Adicionalmente, dado que sabemos que $x_n \neq p$, podemos afirmar que $0 < |x_n - p| < \delta$ e $x_n \in D$, para todo $n \geq N$. Assim sendo, $|f(x_n) - b| < \epsilon$ quando $n \geq N$, atendendo a (1.7.4).

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $f(x)$ não converge para b quando $x \to p$. Para se obter a demonstração, a ideia passa então por encontrar uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D que converge para p, sem ter termos iguais a p, e tal que $f(x_n) \not\to b$. A circunstância de que $f(x)$ não converge para b pode ser traduzida da seguinte forma:

> *Existe um $\epsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $\delta > 0$, existe pelo menos um $x \in D$ com $0 < |x - p| < \delta$ e $|f(x) - b| \geq \epsilon_0$.*

Em consequência, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher um $x_n \in D$ com $0 < |x_n - p| < 1/n$ tal que $|f(x_n) - b| \geq \epsilon_0$. A sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p (para perceber tal basta por exemplo usar o Teorema das Sucessões Enquadradas, Teorema 1.6.23). Por outro lado, por construção, os elementos da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertencem a D e nenhum x_n é igual a p. Finalmente, do exposto, tem-se $f(x_n) \not\to b$ e tal permite concluir a demonstração.

□

Teorema 1.7.9

O limite de uma função num determinado ponto, quando existe, é único.

Exercício 1.7.10

Use alguns resultados já estudados para realizar (de uma forma rápida) a demonstração do último teorema.

Teorema 1.7.11

Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c\,;$$
$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c\,;$$
$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c\,;$$
$$se \quad c \neq 0\,, \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}\,.$$

Demonstração. Vamos aqui mostrar somente a igualdade $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = b\cdot c$. Designemos por D o domínio de f e g, e saliente-se que a é um ponto de acumulação de D.

Consideremos um dado $\epsilon > 0$. Devemos nos concentrar em obter uma estimativa para

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - bc| &= |f(x)g(x) - bg(x) + bg(x) - bc| \\ &\leq |f(x)g(x) - bg(x)| + |bg(x) - bc| \\ &= |g(x)|\,|f(x) - b| + |b|\,|g(x) - c| \end{aligned}$$

Dado que por hipótese $g(x) \to c$ quando $x \to a$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x)| - |c| \leq |g(x) - c| < 1 \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Tal fornece o majorante $|c| + 1$ para $g(x)$ no subconjunto dos $x \in D$ tais que $0 < |x - a| < \delta_1$.

Dado que $f(x) \to b$ quando $x \to a$, então existe um $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x) - b| < \frac{\epsilon}{2(|c| + 1)} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Adicionalmente, dado que $g(x) \to c$ quando $x \to a$, existe um $\delta_3 > 0$ tal que

$$|g(x) - c| < \frac{\epsilon}{2|b| + 1} \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta_3$$

Escolha-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Deste modo, quando $x \in D$ e satisfaz $0 < |x - a| < \delta$, então todas as anteriores três desigualdades são satisfeitas. Assim, usando a primeira desigualdade, temos

$$|f(x)g(x) - bc| < \frac{(|c| + 1)\epsilon}{2(|c| + 1)} + \frac{|b|\epsilon}{2|b| + 1} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Note-se que a demonstração realizada acima poderia ser feita por completa analogia com o realizado na demonstração do Teorema 1.6.25; optamos por escolher uma outra estratégia meramente para haver maior diversificação das demonstrações. O leitor (como exercício) pode recriar a demonstração de cima, de modo diferente, por uso do tipo de majorantes escolhidos na demonstração do Teorema 1.6.25.

Teorema 1.7.12
Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *e* g *é uma função limitada numa vizinhança de* a*, então*

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = 0\,.$$

Exercício 1.7.13
Empregue directamente a definição de limite de função e a definição de função limitada para (em duas linhas) demonstrar o teorema anterior.

Observe-se que o facto de a função g ser limitada no teorema anterior é fundamental. Se considerarmos o exemplo de $f(x) = x$ e $g(x) = 1/x$, temos

$$\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)] = 1 \neq 0\,.$$

Teorema 1.7.14
Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tais que* $g(S) \subset D$*. Se* $\lim_{x\to a} g(x) = b$ *e* $\lim_{x\to b} f(x) = c = f(b)$*, então* $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = c$*.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese $b \in D$, b é um ponto de acumulação de D e existe um $\eta > 0$ tal que $|f(y) - f(b)| < \epsilon$ sempre que $y \in D$ e $0 < |y - b| < \eta$. Também por hipótese, a é um ponto de acumulação de S e existe um $\delta > 0$ tal que $|g(x) - b| < \eta$ sempre que $x \in S$ e $0 < |x - a| < \delta$. Dado que $g(S) \subset D$, decorre então que nas presentes condições

$$|(f\circ g)(x) - c| = |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon\,,$$

ou seja, $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = c$. □

Definição 1.7.15 (Limite relativo a um conjunto)
Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, S um subconjunto próprio de D (isto é, $S \subset D$ e $S \neq D$) e p um ponto de acumulação de S. Diz-se que b é o limite de f relativo a S quando

x tende para p, se o limite da restrição de f a S quando x tende para p é igual a b. Tal limite representa-se por

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\in S}} f(x) = b \ .$$

Definição 1.7.16 (Limite laterais)
Nas condições da última definição:

(i) Se $S = \{x : x \in D \wedge x < p\}$, diz-se que b é o limite à esquerda de f no ponto p e representa-se por $\lim_{x\to p^-} f(x) = b$;

(ii) Se $S = \{x : x \in D \wedge x > p\}$, diz-se que b é o limite à direita de f no ponto p e representa-se por $\lim_{x\to p^+} f(x) = b$.

1.8 Continuidade de funções reais de variável real

Definição 1.8.1 (Continuidade)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D \cap D'$. Dizemos que f é CONTÍNUA em p se e só se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0} \ : \ x \in D \wedge |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon \ .$$

Os pontos onde a função não é contínua dizem-se pontos de descontinuidade.

Perante a definição acabada de enunciar, vemos que f é contínua em $p \in D \cap D'$ se e só se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Definição 1.8.2 (Continuidade lateral)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D \cap D'$.

Dizemos que f é CONTÍNUA À ESQUERDA de p se $\lim_{x\to p^-} f(x) = f(p)$.

Dizemos que f é CONTÍNUA À DIREITA de p se $\lim_{x\to p^+} f(x) = f(p)$.

A seguinte proposição é uma consequência directa das correspondentes definições.

Proposição 1.8.3
Se f é contínua à esquerda e à direita de p, então f é contínua em p.

Definição 1.8.4 (Continuidade num conjunto)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subset D \cap D'$. Diz-se que f é CONTÍNUA EM C se f é contínua em todos os pontos de C. Em especial, se $C = D \cap D'$ diz-se simplesmente que f é CONTÍNUA.

Exemplo 1.8.5
Tendo em conta o Exemplo 1.7.2 é agora fácil perspectivar que as funções $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ e $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g(x) = x$, são contínuas em D.

Exemplo 1.8.6
Um outro exemplo clássico de função contínua é $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 1/x$ que é contínua em todo o seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O leitor deve observar que o anterior exemplo não é tão inocente quanto parece. E.g., com este exemplo podemos acabar com o mito que diz que "funções contínuas são aquelas cujos gráficos são traçados sem tirar o lápis do papel".

Proposição 1.8.7
(i) *Toda a função constante é contínua.*

(ii) *Se f e g são contínuas no ponto p, então $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (neste último caso para funções g com $g(p) \neq 0$) são contínuas nesse mesmo ponto p.*

(iii) *Sendo $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ e $g : Z \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$ duas funções tais que $g(Z) \subset X$, se g é contínua no ponto p e f é contínua no ponto $g(p)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.*

Exercício 1.8.8
Use as propriedades estudadas na secção anterior sobre limites de funções (ver o Teorema 1.7.11 e o Teorema 1.7.14) para demonstrar a Proposição 1.8.7.

Teorema 1.8.9
Seja f uma função real definida e contínua em todos os postos de um intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \leq b$. Se k está compreendido (em sentido lato) entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

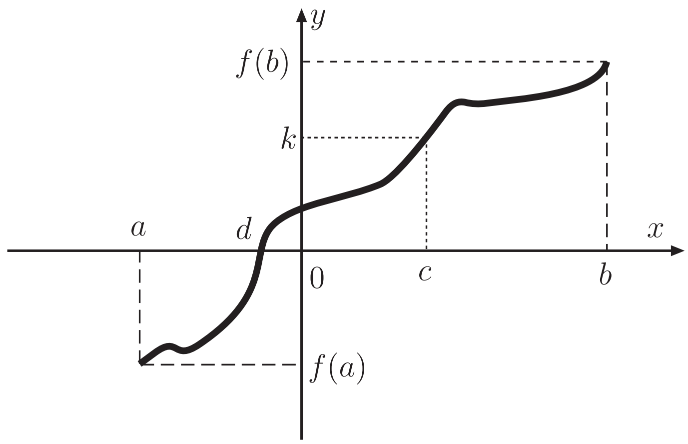

Figura 1.18: Exemplificação do Teorema de Bolzano e do consequente Corolário 1.8.12.

Demonstração. Comecemos por supor que $f(a) \leq k \leq f(b)$. Defina-se

$$A = \{x : x \in [a, b],\ f(x) \leq k\}\,.$$

Então A é majorado por b e $a \in A$. Portanto, existe

$$c = \sup A$$

e $a \leq c \leq b$. Dado que $c \in [a, b]$, temos que f é contínua em c.

Se supusermos que $f(c) < k$, então $k - f(c) > 0$, e portanto existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| \leq k - f(c) \qquad \text{sempre que} \quad |x - c| \leq \delta \tag{1.8.5}$$

(e x pertença ao domínio de f). Consideremos $x = \min(b, c+\delta)$. Então $a \leq c \leq x \leq b$ e portanto $f(x)$ está bem definida e $c \leq x \leq c+\delta$. Consequentemente, por (1.8.5), temos que $f(x) \leq f(c) + (k - f(c)) = k$. Pela definição de A, tal significa que $x \in A$. Por outro lado, dado que $f(c) < k \leq f(b)$, temos que c não pode ser igual a b e assim $c < b$ e (da definição de x) $c < x$, sendo que então c não é um majorante de A – obtendo-se assim uma contradição em face de termos definido $c = \sup A$. Em consequência, a realizada suposição $f(c) < k$ é falsa.

Suponhamos agora que $f(c) > k$. Então, $\frac{1}{2}(f(c)-k) > 0$, e portanto existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(c)| \leq \frac{1}{2}(f(c)-k)$ sempre que x pertença ao domínio de f e $|x-c| \leq \delta$. Atendendo à suposição feita e à definição de A, tem de existir um $x \in A$ tal que $c-\delta \leq x < c$, e em tal caso $f(x) \leq k$ (por definição de A) e $|x-c| \leq \delta$. Portanto,

$$f(c)-k \leq f(c)-f(x) \leq |f(x)-f(c)| \leq \frac{1}{2}(f(c)-k)\,,$$

o que é impossível (dado que pela presente suposição $f(c) > k$ e portanto $f(c)-k \neq 0$).

Somos pois forçados a concluir que $f(c) = k$; mas tal é precisamente o que pretendíamos, ficando assim o teorema demonstrado no caso em que $f(a) \leq k \leq f(b)$.

Falta portanto realizar a demonstração para o caso em que $f(b) \leq k \leq f(a)$.

Tal pode ser realizado (por exemplo) por repetição dos argumentos usados no primeiro caso, ou então da seguinte forma alternativa: defina-se a nova função g por

$$g(x) = -f(x)\,, \quad \text{para todo o } x \text{ no domínio de } f\,.$$

Deste modo, g está bem definida e é continua para os mesmos pontos onde tal sucede para a função f (e em particular, em todos os pontos do intervalo $[a,b]$). Note-se agora que no presente caso temos

$$g(a) = -f(a) \leq -k \leq -f(b) = g(b)\,.$$

Consequentemente, pela primeira parte da demonstração, já sabemos que existe um $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = -k$, ou seja, $f(c) = k$. □

Do último teorema decorre de forma imediata a seguinte versão do teorema dos valores intermédios (e que na realidade é a versão mais popular devido ao seu contexto histórico).

Corolário 1.8.10 (Teorema dos valores intermédios ou de Bolzano) [2]
Seja f uma função contínua num intervalo I e a e b dois pontos de I tais que

[2]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu a 5 de Outubro de 1781 em Praga (presentemente, cidade da República Checa) e faleceu a 18 de Dezembro de 1848 também em Praga.

$f(a) \neq f(b)$. Então, qualquer que seja o número k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um ponto c, estritamente compreendido entre a e b, tal que $f(c) = k$.

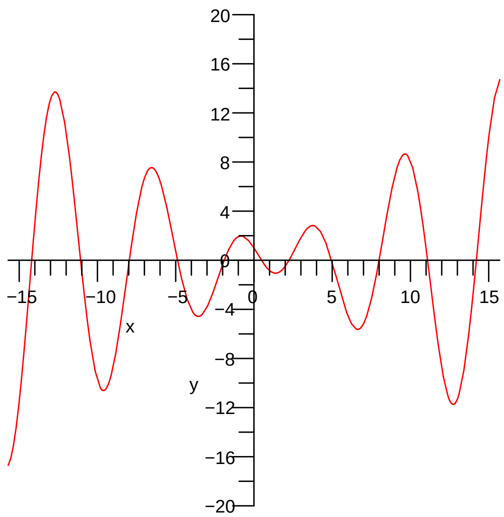

Figura 1.19: Gráfico da função h.

Exemplo 1.8.11

Por utilização do resultado anterior podemos por exemplo mostrar que a equação

$$(1-x)\cos x = \sin x$$

possui pelo menos uma solução no intervalo $]0,1[$.

De facto, se definirmos $h(x) = (1-x)\cos x - \sin x$ então temos que h é contínua em todo o $\mathbb{R}$ (justifique porquê), $h(0) = 1$ e $h(1) = -\sin 1 < 0$. Assim sendo, pelo corolário anterior fica garantido que existe um $x_0 \in]0,1[$ tal que $h(x_0) = 0$.

O gráfico da função h está ilustrado na Figura 1.19.

Do corolário anterior resulta em particular a seguinte conclusão (escrita aqui na forma de corolário).

Corolário 1.8.12

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b) < 0$, então existe um d em $]a,b[$ tal que $f(d) = 0$ (i.e., a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$).

Corolário 1.8.13

Se f é uma função contínua num determinado intervalo I, então a imagem de I por f, ou seja $f(I)$, é também um intervalo.

Demonstração. Considere-se $i = \inf_{x \in I} f(x)$, caso $f(I)$ seja minorado, e $i = -\infty$ no caso de $f(I)$ não ser minorado. Adicionalmente, seja $s = \sup_{x \in I} f(x)$ se $f(I)$ for majorado e $s = +\infty$ se $f(I)$ não for majorado.

Vejamos que para qualquer $k \in]i, s[$ existe um $c \in I$ tal que $f(c) = k$. Na realidade, dado que $i < k < s$, tem-se que existem $a, b \in I$ tais que

$$i = f(a) < k < f(b) = s\,.$$

Com efeito, se para todo o $x \in I$ tivéssemos $f(x) \geq k$, então k seria um minorante de f em I maior que o respectivo ínfimo, o que é impossível; e se para todo o $x \in I$ fosse $f(x) \leq k$, então k seria um majorante de f em I menor que o respectivo supremo, o que é também impossível.

Logo, pelo Corolário 1.8.10, existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = k$. Assim sendo, concluímos que a $f(I)$ pertencem todos os valores entre o ínfimo i e o supremo s deste conjunto. □

Teorema 1.8.14 (Teorema de Weierstrass) [3]

Se f é uma função contínua num intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$, com $a \leq b$, então $f(I) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ é também um intervalo fechado e limitado e de tal modo que f atinge o seu máximo e o seu mínimo em $[a, b]$ (ou seja, existem pontos z_1, $z_2 \in [a, b]$ tais que $f(z_1) \leq f(x) \leq f(z_2)$ para todo $x \in [a, b]$).

Demonstração. Saliente-se antes de mais que pelo Corolário 1.8.13 já sabemos que $f(I)$ é um intervalo.

(i) Comecemos por provar que f é limitada em $[a, b]$ (ou seja, que o intervalo $f(I)$ é um conjunto limitado).

Vamos para o efeito considerar $A = \{x : x \in [a, b],\ f \text{ é limitada em } [a, x]\}$. Então, A é majorado por b e além disso $a \in A$ (note-se que $[a, a] = \{a\}$ e portanto

[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu a 31 de Outubro de 1815 em Ostenfelde, Westphalia (presentemente Alemanha) e faleceu em 19 de Fevereiro de 1897, em Berlim.

$\{f(y) : y \in [a, a]\} = \{f(a)\}$ é limitado). Assim sendo, A possui um supremo que passaremos a designar por c; adicionalmente, $a \leq c \leq b$.

Por hipótese, f é contínua em c e portanto existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| \leq 1 \quad \text{sempre que} \quad x \in [c - \delta, c + \delta] \tag{1.8.6}$$

e x pertença ao domínio de f. Considere-se

$$z = \min(b, c + \delta)\,.$$

Então $a \leq c \leq z \leq b$ e portanto $z \in [a, b]$.

Por outro lado, é obvio que $c-\delta < c$, existindo assim um $x \in A$ tal que $c-\delta \leq x$. Sabemos que $\{f(y) : y \in [a, x]\}$ é limitado; consideremos M_0, $M_1 \in \mathbb{R}$ a serem tais que $M_0 \leq f(y) \leq M_1$ sempre que $y \in [a, x]$. Defina-se $M_0' = \min\{M_0, f(x) - 1\}$, $M_1' = \max\{M_1, f(c) + 1\}$. Se $y \in [a, z]$, então ou $y \leq x$ e $y \in [a, x]$ e

$$M_0' \leq M_0 \leq f(y) \leq M_1 \leq M_1'\,,$$

ou, em alternativa, $x \leq y$ e $c - \delta \leq x \leq y \leq z \leq c + \delta$ e $y \in [c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$ (logo também pertencente ao domínio de f), portanto $|f(y) - c| \leq 1$ (recordar (1.8.6)) e

$$M_0' \leq f(c) - 1 \leq f(y) \leq f(c) + 1 \leq M_1'\,.$$

Tal mostra que M_0', M_1' são (respectivamente) um minorante e um majorante de $\{f(y) : y \in [a, z]\}$ e daí $z \in A$. No entanto, isto significa que $z \leq c$ (atendendo à definição de c). Dado que $z = \min(b, c + \delta)$, temos de ter $z = b$ e portanto $b \in A$. Assim sendo, obtemos que f é limitada em $[a, b]$ que era precisamente o que desejávamos provar neste primeiro passo.

(ii) Para provarmos a restante parte da tese, vamos utilizar o conjunto B definido por $B = \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Observe-se que B não é vazio (dado que contém $f(a)$) e é limitado (sendo tal garantido pelo primeiro passo (i) de cima). Portanto, $c_1 = \inf B$ e $c_2 = \sup B$ existem em $\mathbb{R}$.

Suponha-se, se possível, que $f(x) \neq c_1$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, que $c_1 \notin B$.

Então, $f(x) > c_1$ para todo $x \in [a,b]$. Fixemos

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - c_1}$$

para todos os x's que tornam tal bem definido, ou seja, para x's pertencentes ao domínio de f e tais que $f(x) \neq c_1$. Nestas condições, g é contínua em todo o ponto onde f é contínua e $f(x) \neq c_1$ (dado que a função $y \mapsto \frac{1}{y-c_1}$ é contínua). Em particular, g é contínua em todo o ponto de $[a,b]$. Existe então um K tal que $g(x) \leq K$ para todo $x \in [a,b]$, pois já sabemos que as funções contínuas em intervalos limitados e fechados são limitadas. Tal significa então que $f(x) - c_1 \geq \frac{1}{K}$ para todo $x \in [a,b]$, ou seja, $f(x) \geq c_1 + \frac{1}{K}$ para todo $x \in [a,b]$. Assim sendo, $c_1 + \frac{1}{K}$ é um minorante de B e consequentemente c_1 não poderia ser o ínfimo de B.

Concluímos assim que existe um $z_1 \in [a,b]$ tal que $f(z_1) = c_1$, e agora temos $f(z_1) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Falta agora garantir a existência de um $z_2 \in [a,b]$ tal que $f(z_2) = c_2$. Para tal podemos repetir (com as correspondentes naturais alterações os argumentos agora mesmo usados), ou então podemos fazer um equivalente processo se introduzirmos uma nova função, digamos h, definida por $h(x) = -f(x)$ para todo o x no domínio de f. Em tal situação, temos h como uma função definida e contínua em todos os pontos onde f também o é (justifique porquê). Em particular, tal sucede em todo o ponto de $[a,b]$. Pelo argumento anterior, já sabemos que existe um ponto $z_2 \in [a,b]$ tal que $-f(z_2) = h(z_2) \leq h(x) = -f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, ou seja, $f(x) \leq f(z_2)$ para todo $x \in [a,b]$. $\square$

Note-se que uma das informações constantes no Teorema de Weierstrass é que toda a função contínua num intervalo fechado e limitado, tem nesse intervalo, um máximo e um mínimo.

Exercício 1.8.15

Através do uso de alguns dos resultados já estudados, justifique que se f é uma função contínua e injectiva num intervalo I, então a sua função inversa também é contínua.

Definição 1.8.16

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subset D$. Dizemos que f é UNIFORMEMENTE CONTÍNUA

EM C se

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in C}\,,\ \ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon\ .$$

Quando comparamos as definições de continuidade uniforme e de continuidade, fica evidente que a continuidade uniforme implica a continuidade. No entanto, o recíproco não é verdadeiro. Vejamos o próximo esclarecedor exemplo.

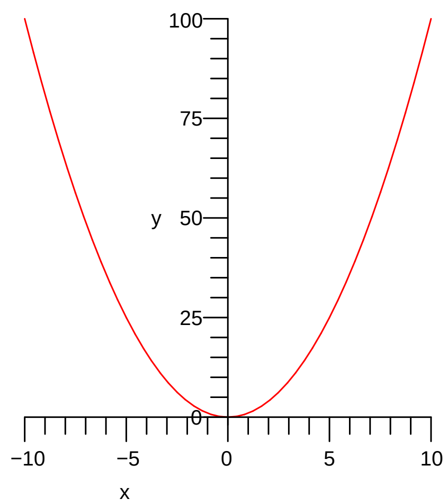

Figura 1.20: Gráfico da função f, dada por $f(x)=x^2$, para $x\in[-10,10]$.

Exemplo 1.8.17

Já sabemos que a função f definida por $f(x)=x^2$ (ver Figura 1.20) é contínua em todo o $\mathbb{R}$ (cf. Exemplo 1.8.6). No entanto, f não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Tentemos perceber o porquê de tal suceder, ou seja, o porquê de não se verificar

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in \mathbb{R}}\,,\ \ |x-y|<\delta \Rightarrow |x^2-y^2|<\epsilon\ .$$

O que sucede é que da igualdade $|x^2-y^2|=|x-y||x+y|$ decorre que x e y podem estar tão próximos quanto se queira e a diferença entre as suas imagens ser arbitrariamente grande (basta pensar em pontos x e y cuja diferença seja sempre inferior a δ, mas que estejam arbitrariamente longe da origem; cf. a Figura 1.21).

Esta é de facto a essência da situação. Vamos no entanto traduzir tal em linguagem matemática. Para o efeito, pensemos por exemplo em $\epsilon=2$. Se f fosse

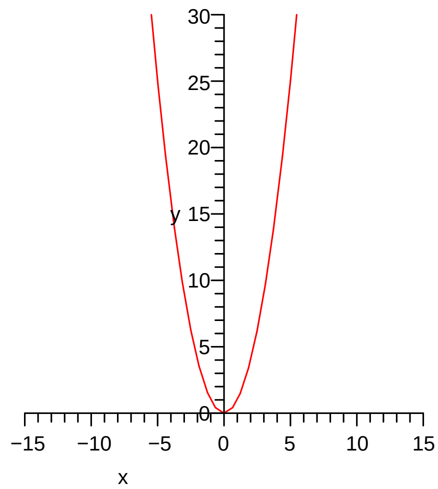

Figura 1.21: Gráfico da função f, dada por $f(x) = x^2$, em que o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas estão representados na mesma escala.

uniformemente contínua, então teria de existir um $\delta > 0$ tal que para todo o $x, y \in \mathbb{R}$ se teria

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < 2 \, .$$

Sendo $x \in \mathbb{R}$, considere-se $y = x + \delta/2$. Dado que $|x - y| < \delta$, por hipótese decorre que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y| \, |x + y| \\ &= \delta/2 \, |2x + \delta/2| \\ &= |\delta x + \delta^2/4| \\ &< 2 \, . \end{aligned}$$

Isto implica que $\delta x < 2$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ – o que é obviamente falso.

Há no entanto classes de funções que são sempre uniformemente contínuas.

Definição 1.8.18

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subset D$. Dizemos que f é LIPSCHITZIANA EM C se

$$\exists_{K>0} \ : \ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \, , \quad \forall_{x,y \in C} \, .$$

Proposição 1.8.19

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subset D$. Se f é lipschitziana em C, então f é uniformemente contínua em C.

Demonstração. Por hipótese temos que existe um $K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \,, \quad \forall_{x,y \in C} \,.$$

Seja $\epsilon > 0$. Então, escolhendo $\delta = \epsilon/K$, concluímos que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < \epsilon$, sempre que $|x - y| < \delta$. $\square$

1.9 Exercícios

1. Considere as funções dadas por:

   $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2$,

   $g(x) = 2 - 3e^{x-1}$,

   $h(x) = 1 - \ln(x + e)$,

   $i(x) = \ln(4 - x^2)$,

   $j(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln x + 1}$.

   (a) Determine o domínio de cada uma das funções.

   (b) Caracterize $f^{^{-1}}$, $g^{^{-1}}$ e $h^{^{-1}}$.

   (c) Calcule os zeros de i e de j.

   (d) Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de intersecção do gráfico de j com a recta de equação $y = 1$.

2. Em $\mathbb{R}$, as funções f e g são dadas por $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Caracterize $f \circ g$.

3. Caracterize a função inversa da *restrição principal* da função f, sendo

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) .$$

4. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das funções dadas por:

   (a) $f(x) = \pi - \arccos(2x + 1)$

   (b) $g(x) = -\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{arccot}(-3x)$

   (c) $h(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$

   (d) $m(x) = \arcsin\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

5. Seja f a função dada por $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Indique as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

6. Considere a função g tal que $g(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$.
Indique o domínio, o contradomínio e os zeros de g.

7. (a) Seja f uma função real de variável real. Observe que $f = g + h$, onde

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Mostre que g é uma função par e que h é ímpar.

(b) Expresse cada uma das funções seguintes como soma de uma função par e outra ímpar: $f_1(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$,
$f_2(x) = (x+2)\sin x - x^3 \sin(5x)$, $f_3(x) = \sin(x + \pi/3)$.

(c) Demonstre que a soma de duas funções pares é uma função par e que a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

(d) O que pode afirmar acerca do produto de duas funções pares? E de duas ímpares? E de uma par e outra ímpar?

8. Resolva cada uma das seguintes equações:

(a) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, com $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) $\dfrac{x^2 \cot x}{\sin x} = 0$.

(c) $\sin x = \tan x$.

(d) $\dfrac{(x^2 - 1)\sin(2x)}{x} = 0$.

9. Determine o domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{3 + 2x^2}{\cot x - 1}$.

10. Considere a função dada por

$$f(x) = \arcsin \frac{x+3}{x-2}.$$

Determine:

(a) o domínio de f;

(b) os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

11. Determine o domínio e os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

12. Seja $A =]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

(a) o interior de A,

(b) o complementar de A,

(c) o exterior de A,

(d) a fronteira de A,

(e) a aderência de A.

13. Determine, em $\mathbb{R}$, o interior, a aderência e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $\{1, \sin 1, \sin 2\}$

(b) $[0, 1] \cup]2, 3] \cup \{6, 10\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$

(e) $(\mathbb{R} \setminus]-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}$

(f) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(g) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

14. Seja $\mathscr{V}_\delta(p)$ uma vizinhança com centro em p e raio δ. Mostre que para cada ponto $q \in \mathscr{V}_\delta(p)$ existe uma vizinhança V de centro em q que está contida em $\mathscr{V}_\delta(p)$.

15. Verifique se a união de dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ ainda é um conjunto aberto.

16. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\overline{A}$ é o menor subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ que contém A.

17. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Verifique que $p \in \overline{A}$ se e só se toda a vizinhança de p intersecta A.

18. Mostre que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}$. O que se pode dizer sobre uma correspondente igualdade para o caso da intersecção em lugar da reunião?

19. Averigue, justificando, quais são os pontos isolados e os pontos de acumulação do subconjunto $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$.

20. Seja $\mathscr{A}$ um conjunto de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que
$$C = \bigcup_{S \in \mathscr{A}} S$$
é um aberto em $\mathbb{R}$.

21. Sejam A e B conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que $A \cap B$ é aberto em $\mathbb{R}$.

22. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que
$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{B \subset \mathbb{R} \,:\, B \text{ é aberto, } B \subset A\}.$$

23. Seja A um conjunto não vazio de números reais e $-A := \{-x \,:\, x \in A\}$. Verifique que:
    (a) b é majorante de $A \Leftrightarrow$ -b é minorante de $-A$
    (b) b é supremo de $A \Leftrightarrow$ -b é ínfimo de $-A$
    (c) b é máximo de $A \Leftrightarrow$ -b é mínimo de $-A$

24. Determine, caso seja possível, o ínfimo, o mínimo, o supremo e o máximo de cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |1 - x| \leq 2\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

(c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1-n}{n}\}$

(e) $\mathbb{Q} \cap]-1, 2]$

(f) $\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \cap [1, 3[$

25. Indique se são majorados, minorados ou limitados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| = 2|x|\} \ ,$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^{-1}} < \frac{x^{-1}}{x}\right\} \ .$$

26. Sejam $A = \{-3, -2\} \cup (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ e $B =]-4, 2] \cup ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$. Indique, caso existam, os supremos e os ínfimos dos conjuntos A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$.

27. Suponha que A e B são conjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados. Seja

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

Prove que:

(a) $A + B$ é limitado

(b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

(c) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

28. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão cujo termo geral é $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n + 1}$.

(a) Determine os cinco primeiros termos da sucessão.

(b) Indique, justificando, o valor lógico das proposições:

i. $\exists n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{14}{15}$

ii. $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

29. Considere a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $x_n = \frac{n+1}{n+2} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

    (a) Verifique que a sucessão é monótona e que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{3} \leq x_n < 0$.

    (b) A sucessão é convergente?

30. Calcule os limites das seguintes sucessões:

    (a) $\left(\dfrac{(-1)^n + n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (b) $\left(e^n + e^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (c) $\left(\dfrac{3n^3 + n^2 + 1}{2n^3 - n - 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (d) $\left(\dfrac{n+5}{1+n^2} \sin \dfrac{\pi n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

31. Calcule, caso existam, o limite das seguintes sucessões:

    (a) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (b) $\left(\cos \dfrac{n\pi}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (c) $\left(\cos(n\pi) + (-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

    (d) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

32. Quando possível, dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e que verifiquem:

    (a) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

    (b) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

    (c) $x_n + z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

(d) $x_n z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(e) $\frac{x_n}{z_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

33. Mostre que a simples existência de limite das sucessões $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ obriga a que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente.

34. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to a} \dfrac{x-a}{|x-a|}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} \cot \dfrac{2}{x}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \arctan(1-x)$

(e) $\lim_{x\to -\infty} \arccos \dfrac{1}{x}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

35. Dê um exemplo de duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) \neq f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

36. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x^{2/3}-3x^{1/2}}{4-\dfrac{16}{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^2+x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-8x^3}{2-3x^3}$

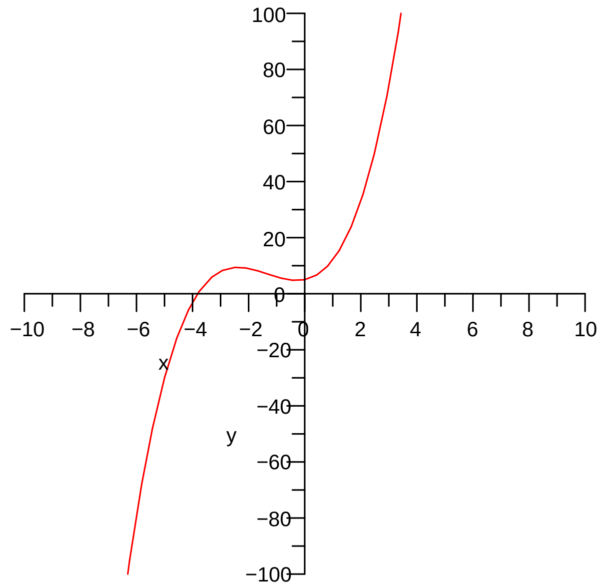

Figura 1.22: Gráfico da função g definida por $g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

37. Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

    (a) $f(x) = \begin{cases} x^5 \sin \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} + 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ k & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} \arccos \frac{2}{x}, & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 2ke^{x-2} & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$

38. Mostre que a função composta de duas funções contínuas é contínua.

39. Mostre que a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$ (cf. Figura 1.22).

40. Verifique que a função ϕ dada por $\phi(x) = 1/x$ não é uniformemente contínua no intervalo $]0, 2[$ (ver Figura 1.23).

41. Será que a função $\varphi : [0, 5] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = x^2$ (ver Figura 1.24) é uniformemente contínua? Justifique a sua resposta.

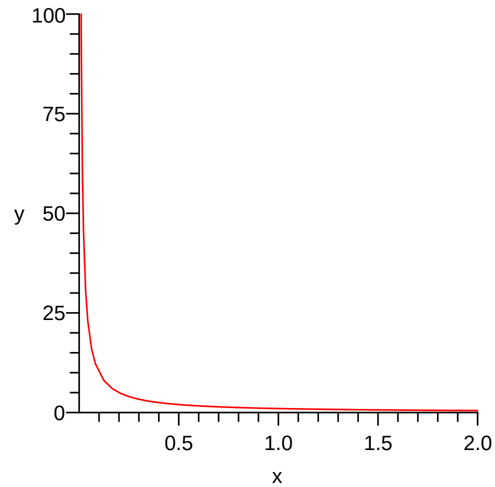

Figura 1.23: Gráfico da função ϕ.

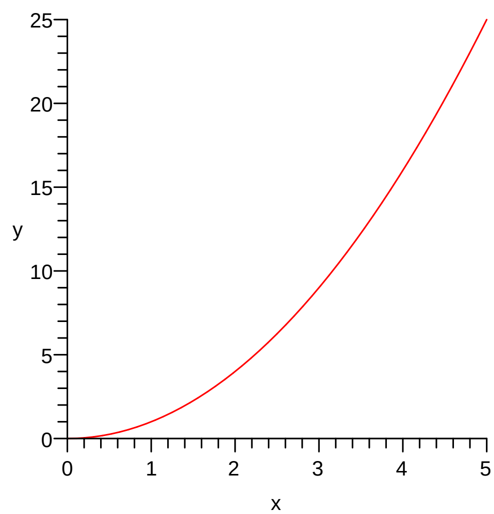

Figura 1.24: Gráfico da função φ.

Capítulo 2

Séries numéricas

2.1 Definições iniciais, convergência e divergência

Definição 2.1.1 (Série)
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A SÉRIE gerada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e denotada por

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= s_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_k &= s_{k-1} + x_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definição 2.1.2 (Série convergente; soma da série; termos da série; somas parciais da série)
Ainda no âmbito da última definição, se a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (i.e., se existe um número real c tal que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$), então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diz-se CONVERGENTE,

c diz-se ser a SOMA DA SÉRIE e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = c \; .$$

Os elementos x_n chamam-se TERMOS DA SÉRIE e s_k são designados por SOMAS PARCIAIS DA SÉRIE.

Exemplo 2.1.3

Temos $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$.

Para se perspectivar tal, comecemos por perceber quais são os primeiros termos da sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \; . \end{aligned}$$

Em geral,

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \; . \tag{2.1.1}$$

Podemos provar esta última identidade pelo método de indução ou, em alternativa, usar a factorização:

$$(1-a)(1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n) = 1 - a^{n+1}$$

de tal modo que

$$1 + s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

e de onde a fórmula (2.1.1) decorre.

Agora, do conhecimento que detemos para sucessões, decorre que

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

e portanto, de acordo com a definição acabada de apresentar, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\,.$$

Definição 2.1.4 (Série divergente)
Uma série diz-se DIVERGENTE se a sua sucessão das somas parciais não convergir.

Exemplo 2.1.5
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão constante onde $x_n = 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é divergente.

Na realidade, neste caso temos que a série é dada por $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

A sucessão de termo geral $s_n = n$ não converge e portanto, de facto, a série em causa é divergente.

Teorema 2.1.6
Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes com somas A e B, respectivamente. Se α e β são dois números reais, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

converge e tem soma $\alpha A + \beta B$.

Demonstração. O resultado é uma consequência directa da definição de série e do Teorema 1.6.25. □

Apesar do resultado anterior, saliente-se que (em geral) se tem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n) \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) .$$

2.2 Critérios de convergência

Nesta secção vamos apresentar vários resultados que nos vão permitir na prática decidir se uma série é convergente ou divergente.

Teorema 2.2.1
A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e só se

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ :\ \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \epsilon\ ,\quad se\ \ m \geq n \geq n_0\ . \tag{2.2.2}$$

Demonstração. A condição apresentada em (2.2.2) diz meramente que a sucessão das somas parciais é de Cauchy. Logo, o resultado é uma aplicação directa do Teorema 1.6.16 □

Teorema 2.2.2 (Condição necessária de convergência de uma série)
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série convergente. Então

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Demonstração. O resultado é uma aplicação directa do Teorema 2.2.1 para o caso particular $m = n$ em (2.2.2). □

A convergência de algumas classes de séries pode ser estudada de uma só vez. Este é o caso para as chamadas séries geométricas.

Teorema 2.2.3
Seja $c \in \mathbb{R}$. A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} c^n$ converge se e só se $|c| < 1$.

Demonstração. Caso $|c| \geq 1$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} c^n \neq 0$$

e portanto por aplicação do Teorema 2.2.2 concluímos que neste caso a série diverge.

Suponhamos agora que $|c| < 1$. Neste caso iremos usar a técnica de factorização tal como foi realizado no Exemplo 2.1.3:

$$(1-c)(1+c+c^2+c^3+\cdots+c^n) = 1-c^{n+1}\,.$$

Dado que $c \neq 1$, podemos realizar a divisão por $1-c$ e assim obter

$$s_n = c+c^2+c^3+\cdots+c^n = \frac{1-c^{n+1}}{1-c} - 1\,.$$

Dado que $|c| < 1$, $c^n \to 0$ e assim

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n = \lim s_n = \frac{1}{1-c} - 1 = \frac{c}{1-c}$$

□

Exemplo 2.2.4

Decorrente do teorema anterior, podemos então por exemplo afirmar imediatamente que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-7)^n}$$

é convergente.

Teorema 2.2.5

A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é convergente se e só se a série dos termos após* m *(com* $m \in \mathbb{N}$*), i.e.,*

$$R_m = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$$

é convergente. Adicionalmente, se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é convergente, então* $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Demonstração. O resultado é uma consequência do facto da convergência/divergência de uma qualquer sucessão não depender dos primeiros termos dessa sucessão. □

Teorema 2.2.6
Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é uma série de* *termos não negativos* *e*

$$s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *é convergente se e só se a sucessão* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

Demonstração. Atendendo à definição de série, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se, e somente se, a sucessão de suas somas parciais $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Então, pelo Corolário 1.6.18 concluímos que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Como $x_n \geq 0$, temos imediatamente que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, pelo Teorema 1.6.11 temos a garantia que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seja convergente.

□

Teorema 2.2.7 (Condensação de Cauchy)
Seja $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$*. A série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge se e só se a seguinte série converge*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \cdots$$

Demonstração. Sejam $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ e $T_k = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^k x_{2^k}$. Note-se que dada a circunstância de $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$, temos que ambas as sucessões $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (associadas às séries em estudo) são monótonas crescentes e minoradas por zero.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Para um n fixo, escolha-se k tal que $2^k \geq n$. Então, atendendo a que $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &\leq x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \cdots + (x_{2^k} + \cdots + x_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^k x_{2^k} \\ &= T_k\,. \end{aligned}$$

Tal mostra que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é majorada e portanto (usando o Teorema 1.6.11) concluímos que é convergente.

(⇒) Suponhamos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Para um k fixo, escolha-se n tal que $n \geq 2^k$. Perante tal, temos

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) \cdots + (x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}T_k \,. \end{aligned}$$

Isto mostra que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma majorada e, portanto, mais uma vez usando o usando o Teorema 1.6.11, concluímos agora que $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente.

□

Exemplo 2.2.8 (Série Harmónica)
As designadas séries harmónicas $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ convergem para $\alpha > 1$ e divergem para $\alpha \leq 1$.

Verifique este facto usando o Teorema da Condensação de Cauchy.

Teorema 2.2.9 (Comparação)

(i) *Se $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é um inteiro fixo e se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.*

(ii) *Se $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é um inteiro fixo e se $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.*

Demonstração. Iremos somente realizar a prova da proposição (i); a proposição (ii) demonstra-se de forma similar.

Comecemos por escrever

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{e} \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \,.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge por hipótese e portanto a sua sucessão das somas parciais, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, também converge. Tal significa que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Com esta propriedade, iremos mostrar que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sucessão de Cauchy e portanto $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (ficando então nesse momento concluída a veracidade da tese).

Seja $\epsilon > 0$ dado e consideremos um $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s_m| < \epsilon$ para todo $m, n \geq m_0$. Se $n \geq m$, então

$$s_n - s_m = \sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{m} c_k = \sum_{k=m+1}^{n} c_k \,.$$

Analogamente, $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$, e portanto, se $n \geq m \geq \max\{m_0, n_0\}$, vem

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k \quad \text{dado que } |a_k| \leq c_k \text{ quando } k \geq n_0 \\
&= s_n - s_m < \epsilon \,.
\end{aligned}$$

Apesar de termos realizado a prova sob a condição de que $n \geq m$, é claro que o raciocínio se passa da mesma forma para $m \geq n$, e portanto na realidade temos

$$|S_n - S_m| < \epsilon \quad \text{para todo } m, n \geq \max\{m_0, n_0\} \,.$$

$\square$

Teorema 2.2.10 (Comparação do limite)

Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de números reais positivos.

(i) *Se $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Exercício 2.2.11

Utilize o Teorema 2.2.9 para demonstrar o presente resultado. As demonstrações das seguintes duas proposições também ficam para exercício.

Proposição 2.2.12

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$*, respectivamente, uma série convergente e uma série divergente, de termos positivos. Nestas condições:*

(i) *se a sucessão de termos positivos* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada, então* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n c_n$ *converge;*

(ii) *se a sucessão de termos positivos* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada inferiormente por um número positivo* δ*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n d_n$ *diverge.*

Proposição 2.2.13

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$*, respectivamente, uma série convergente e uma série divergente, de termos positivos. Se os termos de uma dada série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *de termos positivos satisfazem, para todo* $n \geq n_0$*, com* n_0 *fixo,*

(i) *a condição* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente*

(ii) *a condição* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$*, então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Teorema 2.2.14 (Critério de D'Alembert)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos reais não nulos e suponha-se que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \, .$$

(i) *Se* $L < 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

(ii) *Se* $L > 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração.

(i) Tomemos $r \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r < 1$. Então, pela definição de limite, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r$ para todo $n \geq N$. Temos assim que

$$\begin{array}{rcl} |a_{N+1}| & < & r\,|a_N| \\ |a_{N+2}| & < & r\,|a_{N+1}| < r^2\,|a_N| \\ |a_{N+3}| & < & r\,|a_{N+2}| < r^3\,|a_N| \\ & \vdots & \end{array}$$

Tal processo, leva a concluir que $|a_n| < r^{n-N}|a_N|$, para todo $n \geq N$. Tomando $y_n = r^{n-N}|a_N|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$|a_n| \leq y_n\,, \qquad \text{para} \quad n \geq N\,.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é a série geométrica de razão $r\,\in]0,1[$ ela é convergente (cf. Teorema 2.2.3). Logo, pelo Teorema 2.1.6, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \left(r^{-N}|a_N|\right)\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

também é uma série convergente. Assim sendo, o resultado decorre agora da aplicação do Critério de Comparação (cf. Teorema 2.2.9).

(ii) De forma análoga ao início da prova de (ii), concluímos agora que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ para todo $n \geq N$. Portanto, $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ para todo $n \geq N$. Decorre então daqui que a sucessão $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ (dos termos gerais da série $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$) é crescente a partir do N-ésimo termo e, portanto, $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para zero. Logo, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também não converge para zero. Assim sendo, pela *condição necessária de convergência de uma série* (Teorema 2.2.2) concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$\square$

Exemplo 2.2.15

Estudemos a natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Designando-se $a_n := \frac{n}{2^n}$, temos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n}\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\,.$$

Deste modo, o Critério de D'Alembert permite-nos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ converge.

Exemplo 2.2.16

Consideremos agora a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Perspectivando-se o uso do Critério de D'Alembert, temos

$$\frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Portando (de acordo com o Critério de D'Alembert), temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Na realidade, em Análise Matemática II verificar-se-á que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Por este último motivo, também há autores que optam por introduzir a definição do número e (de Neper) como sendo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

2.3 Convergência absoluta e simples

Definição 2.3.1 (Série absolutamente convergente)

A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diz-se ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é convergente.

Se tivermos em conta o Teorema 2.2.9 (da comparação), conclui-se que a convergência absoluta implica a convergência.

Definição 2.3.2 (Série simplesmente convergente)

A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diz-se SIMPLESMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente.

Proposição 2.3.3 (Teste da Raiz ou de Cauchy)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ uma série de termos reais.

(i) *Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, a série converge absolutamente.*

(ii) *Se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, *a série diverge.*

Demonstração. Comecemos por demonstrar (i). Por hipótese (tenha em mente a definição de limite), existe um número R tal que $|c_n| \leq R^n < 1$ para n's a partir de certa ordem N: $n \geq N$. Dado $R < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} R^n$ converge (pois é uma série geométrica de razão inferior a 1). Logo, pelo Teorema da Comparação, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge.

Em relação a (ii), se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, então para uma infinidade de n's tem-se $|c_n| > 1$ e portanto $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tende para zero (não satisfazendo assim a condição necessária de convergência de uma série). □

Saliente-se que quando $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, o Teste da Raiz nada permite concluir (nem convergência nem divergência).

De referir que há outras versões do Teste da Raiz. A apresentada acima não é a mais geral de todas. Por exemplo, (i) pode-se generalizar se substituirmos o símbolo de limite pelo símbolo de limite superior. Analogamente, em (ii), podemos substituirmos o símbolo de limite pelo de limite inferior.

O Teste da Raiz é mais eficiente que o Teste da Razão. Quer-se com isto dizer que em todos os casos nos quais o Teste da Razão permite concluir convergência ou divergência o Teste da Raiz também é concludente. No entanto, o Teste da Razão é, em geral, mais fácil de ser aplicado.

2.4 Séries alternadas

Definição 2.4.1
Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diz-se ALTERNADA quando os valores de x_n alternam entre números positivos e negativos, ou seja, quando é possível escrever x_n na forma $x_n = (-1)^n b_n$, em que $b_n > 0$ ou $b_n < 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ são portanto exemplos de (diferentes) séries alternadas.

Teorema 2.4.3 (Teste de Leibniz para séries alternadas) [1]
Se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *e* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

converge.

Demonstração. Vamos realizar a demonstração com base num apropriado estudo sobre a seguinte soma finita:

$$S_{k,p} = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - a_{k+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{k+p}\,.$$

Antes de mais, note-se que $S_{k,p}$ é sempre um número não negativo, quaisquer que sejam $k, p \in \mathbb{N}$. Na verdade, uma vez que por hipótese temos $a_{k+j} \geq a_{k+j+1}$, associando cada parcela não negativa com a seguinte obtém-se um número não negativo e então: (i) se o número de parcelas p for par, da associação referida resultam $p/2$ parcelas não negativas que quando somadas dão naturalmente um número não negativo; (ii) se p for ímpar, da associação antes mencionada decorrem $(p-1)/2$ parcelas não negativas, sobrando ainda uma última (isolada no final) que é também não negativa (pois se p é ímpar então $p-1$ é par e assim sendo vem $(-1)^{p-1} > 0$).

Sabendo-se então que $S_{k,p} \geq 0$ para quaisquer $k, p \in \mathbb{N}$, temos como consequência que

$$S_{k+1,p-1} = a_{k+2} - a_{k+3} + \cdots + (-1)^{p-2} a_{k+p} \geq 0\,.$$

No entanto, pela definição de $S_{k,p}$ vem $S_{k,p} = a_{k+1} - S_{k+1,p-1}$ e assim sendo, decorre que $0 \leq S_{k,p} \leq a_{k+1}$, ou seja,

$$|S_{k,p}| \leq a_{k+1}\,. \tag{2.4.3}$$

Após esta análise das somas $S_{k,p}$ estamos agora em condições de rapidamente verificar que a restante condição $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ implica a convergência da série do

[1]Gottfried Wilhelm von Leibniz viveu entre 1 de Julho de 1646 e 14 de Novembro de 1716, tendo nascido em Leipzig, Alemanha.

enunciado. Com efeito, usando (2.4.3), para $n > m$, temos

$$\begin{aligned}&|(-1)^m a_{m+1} + (-1)^{m+1} a_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n| \\ &\qquad = |a_{m+1} - a_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-m-1} a_{m+(n-m)}| = |S_{m,n-m}| \leq a_{m+1}\end{aligned}$$

e de $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ decorre que, sendo $\epsilon > 0$, existe uma ordem n_0 tal que, $n > n_0 \Rightarrow 0 \leq a_n < \epsilon$ e então,

$$n > m > n_0 \quad \Longrightarrow \quad n > m \ \wedge\ m+1 > n_0 \quad \Longrightarrow \quad |S_{m,n-m}| \leq a_{m+1} < \epsilon\,,$$

ou seja, tem-se para $n > m > n_0$,

$$\left|(-1)^m a_{m+1} + (-1)^{m+1} a_{m+2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_n\right| < \epsilon\,,$$

que é (segundo o Teorema 2.2.1) condição necessária e suficiente de convergência para a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$. □

Corolário 2.4.4
Se $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *e* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge.

Demonstração. Com a presente hipótese concluímos pelo Teorema 2.4.3 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ é convergente. Então, por uso do Teorema 2.1.6, decorre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = (-1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

também converge. □

Exercício 2.4.5 Justifique que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=30}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

são séries convergentes.

2.5 Exercícios

1. Para cada uma das seguintes séries numéricas, determine a sucessão das somas parciais associada, calcule alguns dos primeiros termos dessa sucessão e, se possível, determine a soma da série:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi)}{3^n}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

2. Estude a natureza das seguintes séries de termos não negativos:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{2n^4-n+3}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^{\frac{10}{9}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{\sqrt[3]{n^9+n^2+1}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, e^{-n}}{2n+3}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n + n^2}{n^4}$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\ln n}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

3. Estude as seguintes séries quanto à sua natureza:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{10}{9}\right)^{n^2}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n \sin\frac{2}{n}\right)^{2n}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}} e^n$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(n \sin\frac{k}{n}\right)^{2n}, \quad |k| \neq 1$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}\, e^{-n}$

4. Estude a natureza das seguintes séries numéricas alternadas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

5. Verifique se as seguintes séries numéricas são absolutamente convergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+2)}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}+n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos\pi n}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+\cos 3n}{n^2+n}$

6. Estude a natureza das seguintes séries numéricas. No caso de haver convergência, indique se ela é simples ou absoluta:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+4}{(-2)^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{10^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n^2+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n+1}$

7. Mostre que, se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$ também converge.

8. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$ converge.

   Sugestão: Comece por mostrar que

$$\forall x, y \geq 0 \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Capítulo 3

Cálculo diferencial

3.1 Derivação e diferenciabilidade

Consideremos uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto p do interior de D. Denotemos por s a recta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $P(p, f(p))$ e $Q(x, f(x))$, de equação $y = m_s x + b$. O declive da recta secante s vai ser dado pela razão incremental

$$m_s = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \ .$$

Se escolhermos pontos Q cada vez mais próximos do ponto P, formamos uma sucessão de rectas secantes s_1, s_2, ..., s_n, ... que se aproximam cada vez mais da posição de uma recta que intersecta o gráfico de f num único ponto: $x = p$ (cf. Definição 3.1.4). Designa-se por *derivada da função f* no ponto de abcissa $x = p$ ao limite, se existir, da razão incremental quando x tende para p. Mais detalhadamente:

Definição 3.1.1 (Derivada)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} .$$

Para além de $f'(p)$, outros exemplos de notações usadas para indicar o valor da derivada de f em p são: $\frac{df}{dx}(p)$, $Df(p)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=p}$ e $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=p}$.

Definição 3.1.2 (Função diferenciável num ponto)
Note-se que a definição anterior inclui a possibilidade de $f'(p) = \infty$. Por isto mesmo, quando $f'(p)$ existir e for finito, diremos que a função f é DIFERENCIÁVEL NO PONTO p.

Exemplo 3.1.3
Seja f a função linear $f(x) = ax + b$ para $x \in \mathbb{R}$ e com constantes $a, b \in \mathbb{R}$. Verifiquemos que f é diferenciável em qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ e que $f'(x_0) = a$.

Utilizando directamente a definição de derivada de f, temos

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} a \\ &= a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Definição 3.1.4 (Recta tangente ao gráfico de uma função)
Quando f é diferenciável num ponto p, chama-se RECTA TANGENTE ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, à recta que passa por este ponto e tem declive igual a $f'(p)$, isto é, à recta de equação

$$y = f(p) + f'(p)(x - p) .$$

Definição 3.1.5 (Derivada à esquerda)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rccl} f : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA À ESQUERDA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p^-) := \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Definição 3.1.6 (Derivada à direita)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rccl} f & : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA À DIREITA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p^+) := \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Perante o exposto, é claro que a derivada de f no ponto p, $f'(p)$, existe se e só se existem e são iguais $f'(p^-)$ e $f'(p^+)$.

Sugestão: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ e após calcular as derivadas laterais de f para $x = 0$ elabore uma conclusão sobre a eventual existência de $f'(0)$.

Definição 3.1.7 (Derivada de ordem n)
Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de $B \subset A$, podemos definir a função que a cada x de B faz corresponder $f'(x)$. Surge, assim, uma nova função, de domínio B, que representamos por f' e a que chamamos FUNÇÃO DERIVADA DE f EM B.

Considerando f' diferenciável em $C \subset B$, definimos $f'' = (f')' : C \to \mathbb{R}$ como a SEGUNDA DERIVADA DE f EM C.

Se f'' for diferenciável em $D \subset C$, definimos $f''' = (f'')' : D \to \mathbb{R}$ como sendo a TERCEIRA DERIVADA DE f EM D.

Em geral, se a derivada de ordem $n-1$, $f^{(n-1)} : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for diferenciável em $Y \subset X$, definimos $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' : Y \to \mathbb{R}$ como sendo a DERIVADA DE ORDEM n DE f EM Y.

Definição 3.1.8 (Classe C^n (com $n \in \mathbb{N}$) e C^∞)
Se f' for contínua em X, diz-se que f é de CLASSE C^1 EM X e representa-se por $f \in C^1(X)$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $f^{(n)}$ for contínua em Y diz-se que f é de CLASSE C^n EM Y e representa-se por $f \in C^n(Y)$.

Se $f \in C^n(Z)$, $\forall_{n\in\mathbb{N}}$, diz-se que f é de CLASSE C^∞ EM Z e representa-se por $f \in C^\infty(Z)$.

Sugestão: Verifique que a função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.9
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 um elemento do interior de D. Se f é diferenciável no ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Demonstração. Por hipótese sabemos que $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Considerando-se

$$\psi(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) &= \lim_{x\to x_0} \big(\psi(x)(x - x_0)\big) \\
&= f'(x_0) \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Note-se que uma função pode ser contínua num dado ponto e não ter derivada nesse ponto. Pense no exemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ que é contínua (em todo o $\mathbb{R}$) mas não é diferenciável em $x = 0$.

Teorema 3.1.10
Se f e g são funções diferenciáveis em x_0, então $f \pm g$ e $f \cdot g$ são igualmente funções diferenciáveis em x_0 e

$$\begin{aligned}
&(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \\
&(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Se, além disso, $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\,.$$

Demonstração. Com vista a se demonstrar a primeira igualdade (inerente a $f \pm g$), podemos começar por notar que:

$$\frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Deste modo, atendendo à definição de derivada e ao Teorema 1.7.11, temos

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0) \pm g'(x_0).
\end{aligned}$$

Em relação à identidade para o diferenciação do produto fg, temos neste caso em primeiro lugar que:

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,. \qquad (3.1.1)
\end{aligned}$$

Adicionalmente, dado que g é diferenciável em x_0 então o Teorema 3.1.9 garante-nos que g é contínua em x_0 e assim sendo $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Em consequência, de

(3.1.1) e por uso do Teorema 1.7.11, concluímos que

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) \right) + \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Por fim, relativamente à diferenciabilidade do quociente de duas funções f e g nas condições assumidas, temos que:

$$
\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \right) \\
&= \frac{1}{x - x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \right) \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right).
\end{aligned}
$$

Uma vez mais, o Teorema 3.1.9 garante-nos que g é contínua em x_0 (pois é aí diferenciável). Temos portanto que $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. O uso do Teorema 1.7.11 e a definição de derivada, permitem agora a pretendida conclusão:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.
\end{aligned}
$$

□

Corolário 3.1.11

Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções diferenciáveis no ponto a, a sua soma e o seu produto *também o são e verificam-se as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(a) &= f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_n'(a)\\ (f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n)'(a) &= f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a) \cdot f_3(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a)\\ &\quad + \cdots + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \cdots \cdot f_n'(a) \ .\end{aligned}$$

Exercício 3.1.12

Demonstre este último corolário, através do uso do Teorema 3.1.10.

Corolário 3.1.13

Se $k \in \mathbb{N}$ e f é diferenciável em p, então também é diferenciável em p a função h, dada por $h(x) = (f(x))^k$ e tem-se

$$h'(p) = k \cdot (f(p))^{k-1} f'(p) \ .$$

Observe-se que este último corolário é somente um caso particular do Corolário 3.1.11.

Teorema 3.1.14 (Regra de derivação das funções compostas)

Se $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a, $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $b := g(a)$ e $g(A) \subset B$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e

$$(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))\, g'(a) \ .$$

Demonstração. Como já se torna usual, um passo importante da demonstração passa pela reescrita do quociente das diferenças interveniente na definição de derivada e que no presente caso será para $f \circ g$ escrito da seguinte forma:

$$\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{g(x) - g(a)}\ \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Perspectivado o quociente deste modo, poderemos pensar que quando x tende para a, $g(x)$ tende para $g(a)$ e portanto o primeiro termo converge para $f'(g(a))$ e o segundo termo converge para $g'(a)$. O único obstáculo em se pensar desta forma reside na circunstância da igualdade de cima só ser válida quando $g(x) \neq g(a)$. No entanto, apesar de $x \neq a$ em termos do limite, não há razão para justificar que $g(x)$

não possa ser igual a $g(a)$. Para ultrapassar esta dificuldade avançaremos com uma técnica que resolve a situação.

Vamos definir a função ϕ em B como sendo

$$\phi(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}, & y \neq g(a); \\ \\ f'(g(a)), & y = g(a). \end{cases}$$

Então, tendo presente que o limite quando y tende para $g(a)$ envolve somente valores de y diferentes de $g(a)$, temos

$$\lim_{y \to g(a)} \phi(y) = \lim_{y \to g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = f'(g(a)) = \phi(g(a)).$$

Assim, ϕ é contínua em $g(a)$. Além disso,

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \phi(g(x)) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

para todo $x \in A \setminus \{a\}$ (independentemente de $g(x) = g(a)$ ou não). Então,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} &= \lim_{x \to a} (\phi(g(x)) \, \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} \phi(g(x)) \, \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \phi(g(a)) \, g'(a). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.15 (Regra de derivação da função inversa)
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua (onde I é um intervalo) e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ a sua inversa. Se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \, .$$

Demonstração. Para cada $x \in I$, seja $y = f(x)$. Dado que decorrente da hipótese temos que f é injectiva, então $y \neq b \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$ e portanto podemos escrever

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\dfrac{y - b}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} .$$

Uma vez que $f : I \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona, então a função inversa f^{-1} é também estritamente monótona no intervalo $f(I)$ (sendo que f^{-1} é crescente se f for crescente e é decrescente se f for decrescente). Temos, assim, que f^{-1} é estritamente monótona no intervalo $f(I)$ e a sua imagem, I, é também um intervalo no qual f é contínua. Logo, f^{-1} é contínua em $f(I)$ (relembre-se do Exercício 1.8.15). Assim sendo, o facto de $y \to b$ implica que $f^{-1}(y) \to a$ e então obtemos

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y \to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)} ,$$

conforme era desejado. □

3.2 Teoremas fundamentais da derivação

Definição 3.2.1 (Mínimos e máximos; extremos)

(i) Diz-se que uma determinada função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÍNIMO LOCAL (OU RELATIVO) EM $a \in D$ se existir uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a tal que

$$f(x) \geq f(a) , \quad \forall_{x \in D \cap \mathscr{V}} .$$

Neste caso, ao ponto a dá-se a designação de PONTO DE MÍNIMO LOCAL.

(ii) Diz-se que uma determinada função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÍNIMO GLOBAL EM $a \in D$ se

$$f(x) \geq f(a) , \quad \forall_{x \in D} .$$

Neste caso, ao ponto a dá-se a designação de PONTO DE MÍNIMO GLOBAL.

(iii) Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÁXIMO LOCAL (OU RELA-

TIVO) EM $a \in D$ se existir uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a tal que

$$f(x) \leq f(a) \ , \quad \forall_{x \in D \cap \mathscr{V}} \ .$$

Neste caso, ao ponto a dá-se a designação de PONTO DE MÁXIMO LOCAL.

(iv) Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÁXIMO GLOBAL EM $a \in D$ se

$$f(x) \leq f(a) \ , \quad \forall_{x \in D} \ .$$

Neste caso, ao ponto a dá-se a designação de PONTO DE MÁXIMO GLOBAL.

(v) Os máximos e mínimos relativos designam-se por EXTREMOS RELATIVOS.

(vi) Os máximos e mínimos globais designam-se por EXTREMOS GLOBAIS.

As seguintes duas proposições são consequências directas das correspondentes definições.

Proposição 3.2.2
Considere-se a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f(a)$ for um mínimo relativo e existirem derivadas laterais em a, então $f'(a^-) \leq 0$ e $f'(a^+) \geq 0$. Se f for diferenciável em a, então $f'(a) = 0$.

Proposição 3.2.3
Considere-se a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f(a)$ for um máximo relativo e existirem derivadas laterais em a, então $f'(a^-) \geq 0$ e $f'(a^+) \leq 0$. Se f for diferenciável em a, então $f'(a) = 0$.

Salienta-se que se f é diferenciável, $f'(a) = 0$ é uma condição necessária mas não suficiente para que a função f tenha um extremo em a. Para visualizar tal, sugere-se que considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^3$ – que não tem extremo em $x = 0$, apesar de $h'(0) = 0$ (veja a Figura 3.1).

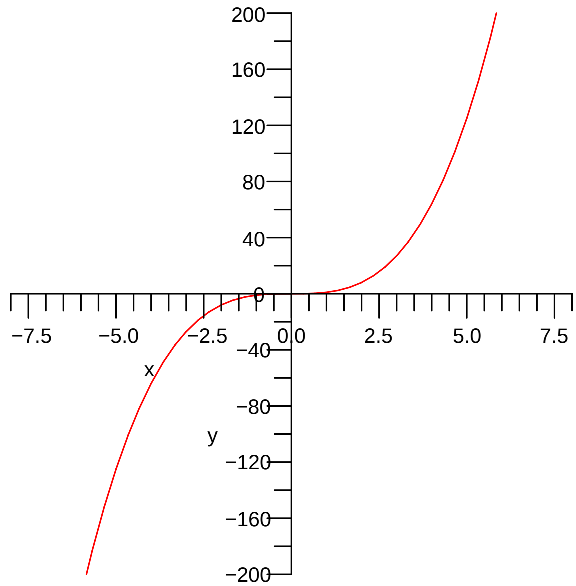

Figura 3.1: Gráfico da função f dada por $f(x) = x^3$.

Teorema 3.2.4 (Teorema de Rolle) [1]

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ (com $a < b$) e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe (pelo menos um) $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se f for constante em $[a, b]$ então $f'(x) = 0$ (para todo $x \in]a, b[$). Logo, neste caso, pode ser tomado qualquer número $c \in]a, b[$.

Suponhamos então agora que f não é constante em $[a, b]$. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, existem x_1 e x_2 tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, para todo $x \in [a, b]$. Dado que f não é constante, $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo, x_1 ou x_2 pertence ao intervalo $]a, b[$ e como são pontos de extremos, $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$ (cf. as proposições 3.2.2 e 3.2.3). Consequentemente, existe neste caso (pelo menos) um $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$. □

Atendendo à interpretação geométrica da função derivada, anteriormente perspectivada, temos então que – nas condições do teorema de Rolle – a existência de $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$ significa que a tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é horizontal (ver Figura 3.2).

[1] Michel Rolle (1652–1719) foi um matemático francês que publicou o *Traité d'Algèbre* (Tratado sobre Álgebra) em 1690, onde para além de ter introduzido a notação $\sqrt[n]{a}$, demonstrou uma versão polinomial do presente teorema.

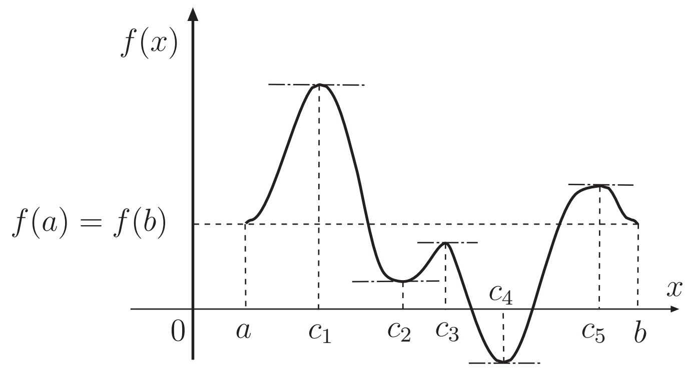

Figura 3.2: Exemplificação do Teorema de Rolle.

A mais popular interpretação física deste teorema é realizada quando os valores de $f(x)$ descrevem a posição de um corpo que se move num dado eixo, em cada instante de tempo x. Nesta situação, o Teorema de Rolle garante que se o corpo ocupou a mesma posição ($f(a) = f(b)$) em dois instantes distintos de tempo ($a \neq b$), então houve (pelo menos) um instante intermédio ($c \in]a, b[$) onde o corpo teve uma paragem ($f'(c) = 0$), ou seja, teve velocidade nula nesse instante intermédio c.

Os dois corolários seguintes podem-se considerar como conclusões directas do Teorema de Rolle.

Corolário 3.2.5
Entre dois zeros de uma função diferenciável num dado intervalo existe (pelo menos) um zero da sua derivada.

Corolário 3.2.6
Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo existe, no máximo, um zero da função.

Se ao acabado de concluir conjugarmos o Teorema de Bolzano (sobre funções contínuas), obtemos imediatamente as seguintes conclusões.

Corolário 3.2.7

(i) *Se a função (nas condições anteriores) assumir valores de sinais contrários para dois zeros consecutivos da derivada, então entre esses dois valores existe um único zero da função.*

(ii) *Se o sinal da função for o mesmo, então não há zero algum da função entre dois zeros da derivada.*

Teorema 3.2.8 (Teorema de Lagrange) [2]
Seja f uma função contínua no intervalo $[a,b]$ (onde $a<b$) e diferenciável em $]a,b[$. Então existe $c\in]a,b[$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$

Demonstração. Tendo em mente a equação da recta que passa por $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ e que é dada por

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,,$$

definamos $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ por

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

A ideia é agora aplicar o Teorema de Rolle a esta nova função h. Note-se que tal aplicação é possível, uma vez que (i) h é contínua em $[a,b]$, pois é soma da função contínua f e um polinómio de grau 1, (ii) h é diferenciável em $]a,b[$ (pelo mesmo correspondente motivo) e (iii) $h(a)=h(b)=0$. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe um $c\in]a,b[$ tal que $h'(c)=0$. Portanto,

$$0=h'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ou seja,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

conforme era desejado provar. □

Em termos geométricos, o Teorema de Lagrange garante-nos que na representação gráfica de uma função (contínua no intervalo $[a,b]$ (onde $a<b$) e diferenciável

[2] Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano nascido a 25 de Janeiro de 1736 em Turim, Itália, tendo falecido a 10 de Abril de 1813 em Paris, França.

em $]a, b[$) existe pelo menos um ponto $(c, f(c))$ em que a tangente é paralela à corda que une os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ (dado que estas rectas têm declives iguais). Cf. Figura 3.3.

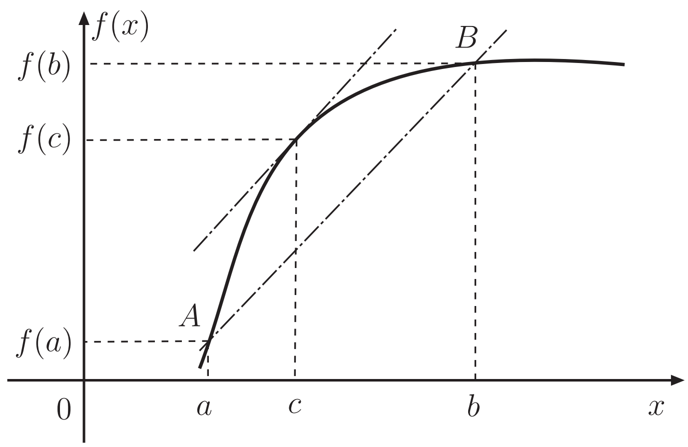

Figura 3.3: Exemplificação do Teorema de Lagrange.

Em termos físicos, continuando com a mesma associação física realizada para o Teorema de Rolle, temos que (nas condições do teorema) existe um instante de tempo c onde a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ entre os instantes de tempo indicados. Precisamente por via desta interpretação, o Teorema de Lagrange também é conhecido como o *Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial*.

É também interessante agora observar que o Teorema de Rolle é meramente um caso particular do Teorema de Lagrange em que $f(a) = f(b)$.

É claro que os teoremas de Rolle e Lagrange estão longe de serem triviais. Designadamente, as suas teses podem-se perder se por exemplo não tivermos diferenciabilidade apenas num ponto interior ao intervalo. Pense por exemplo no caso da função módulo definida no intervalo $I =]-1, 1[$:

$$\begin{array}{rcccl} |\cdot| & : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & |x| \; . \end{array}$$

Exemplo 3.2.9 O Teorema de Lagrange é também útil para se garantirem determinadas desigualdades. Por exemplo, podemos usar o Teorema de Lagrange para verificar que o facto de que se a, $b \in \mathbb{R}$, então

$$|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \,.$$

Verifiquemos tal facto. Comecemos por supor que $a < b$. Dado que sin é uma função diferenciável (e contínua) em toda a parte, pelo Teorema de Lagrange sabemos que tem de existir pelo menos um $x \in]a, b[$ tal que

$$\sin'(x) = \frac{\sin(b) - \sin(a)}{b - a} \,,$$

ou seja, $\sin b - \sin a = (b - a)\cos x$ e portanto $|\sin b - \sin a| = |b - a||\cos x|$. No entanto, sabemos que $|\cos y| \leq 1$ (para todo o y) e daí decorre que $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$.

Temos portanto o facto acima anotado já verificado para quando sucede $a < b$. No caso em que $a = b$, temos

$$|\sin b - \sin a| = 0 = |b - a| \,,$$

enquanto que se $b < a$ então

$$|\sin b - \sin a| = |\sin a - \sin b| \leq |a - b| = |b - a| \,,$$

ficando assim todas as possibilidades de a e b's cobertas.

Corolário 3.2.10

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então, f é uma função constante se e somente se f tem derivada nula em todos os pontos do intervalo $[a, b]$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que f é constante. Então, pela definição de derivada, é imediato que $f' = 0$ no intervalo em causa.

($\Leftarrow$) Seja $x \in]a, b]$. Pelo Teorema de Lagrange, existe um $c \in]a, x[$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) \,.$$

Dado que por hipótese $f'(c) = 0$, concluímos que $f(x) = f(a)$ para $x \in]a, b]$, ou seja que f é constante.

□

Exercício 3.2.11

Tente provar a proposição "se f tem derivada nula em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, então f é constante" directamente pela definição de derivada (e portanto ao contrário de utilizar o Teorema de Lagrange como foi o caso na última demonstração). Aparecem ou não grandes dificuldades?

Neste último corolário é fundamental que o domínio de f seja um intervalo para que o resultado seja válido. Pense-se por exemplo no caso de

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Temos $f'(p) = 0$ em todo ponto p do domínio. A função f não é constante e, por outro lado, o domínio de f não é um intervalo.

Corolário 3.2.12

Se f e g são duas funções diferenciáveis num intervalo I e se $f'(x) = g'(x)$, $\forall_{x \in I}$, então a função $f - g$ é constante em I.

Demonstração. Consideremos $h = f - g$. Dado que por hipótese temos $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ (em todo o $x \in I$), então pelo Corolário 3.2.10 concluímos que h é constante em I, ou seja, que $f - g$ é constante em I. □

Exemplo 3.2.13 Suponhamos que sabemos que f é uma função diferenciável definida (pelo menos) em $[0, 2]$, que a sua derivada f' é também contínua e que $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ e $f(2) = 0$. O que é possível ser dito sobre o conjunto das imagens de f'?

O Teorema de Lagrange também é útil nestas circunstâncias. Note-se que dado que

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -2\,,$$

então precisamente pelo Teorema de Lagrange sabemos que existe um $x_1 \in]0,1[$ tal que $f'(x_1) = -2$. Adicionalmente, também dado que

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1\,,$$

então podemos analogamente concluir que existe um $x_2 \in]1,2[$ tal que $f'(x_2) = 1$. Como nos informam adicionalmente que f' é contínua, o Teorema dos Valores Intermédios diz-nos que f' toma todos os valores entre -2 e 1.

Juntando estas conclusões, em resposta ao questionado, podemos afirmar que o conjunto das imagens de f' inclui o intervalo $[-2, 1]$.

Corolário 3.2.14

(i) *Se I é um intervalo e $f'(x) \geq 0$, $\forall_{x \in I}$, então f é crescente em I.*

(ii) *Se I é um intervalo e $f'(x) > 0$, $\forall_{x \in I}$, então f é estritamente crescente em I.*

(iii) *Se I é um intervalo e $f'(x) \leq 0$, $\forall_{x \in I}$, então f é decrescente em I.*

(iv) *Se I é um intervalo e $f'(x) < 0$, $\forall_{x \in I}$, então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. Vamos demonstrar a proposição (iv). Pretende-se aqui provar que se $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f em $[x_1, x_2]$, concluímos que existe um $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)\,.$$

Como $f'(c) < 0$ (por hipótese) e $x_2 - x_1 > 0$, então temos que ter $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Logo f é estritamente decrescente.

A demonstração das outras proposições decorre de forma inteiramente análoga ao acabado de realizar para a proposição (iv). □

Apesar da grande utilidade do Teorema de Lagrange ter sido já acima evidenciada, existe ainda um teorema "mais geral" do que o de Lagrange. Na verdade, o Teorema de Lagrange é só um caso particular do seguinte teorema devido a Cauchy. É no entanto curioso que usaremos o Teorema de Lagrange (ou até somente a sua versão particular acima enuncida como Teorema de Rolle) para demonstrar o Teorema de Cauchy seguinte.

Teorema 3.2.15 (Teorema de Cauchy)
Se f e g são funções contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$ e g' não se anula em $]a,b[$, então $g(b) \neq g(a)$ e existe um $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ .$$

Demonstração. Comecemos por realizar que de facto $g(b) \neq g(a)$, pois senão, pelo Teorema de Rolle, g' anular-se-ia em pelo menos um ponto de $]a,b[$. Considere a função h, definida em $[a,b]$ e dada por

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\,.$$

É simples verificar que h satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Então, existe um $c \in]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$, ou seja,

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) = 0\,,$$

ou equivalentemente, $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ (dado que por hipótese $g'(c) \neq 0$). $\square$

Anteriormente anunciamos que o Teorema de Cauchy era uma "generalização" do Teorema de Lagrange. No entanto, como antes observado, na demonstração do Teorema de Cauchy usamos o Teorema de Lagrange e este, por sua vez, foi provado por uso do Teorema de Rolle. Por outro lado, é claro que o Teorema de Cauchy implica o Teorema de Rolle. Ou seja, temos as seguintes implicações:

$$\begin{gathered}\text{Teorema de Rolle}\\ \Downarrow\\ \text{Teorema de Lagrange}\\ \Downarrow\\ \text{Teorema de Cauchy}\\ \Downarrow\\ \text{Teorema de Rolle}\end{gathered}$$

Portanto, na verdade estes três teoremas são equivalentes!

Proposição 3.2.16

$$\cos b \geq 1 - \frac{1}{2}\, b^2 \qquad \textit{para todo o} \quad b \in \mathbb{R}\,.$$

Demonstração. Comecemos por supor que $b > 0$. Se designarmos $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$ e $a = 0$ por identificação com a notação que usamos no anterior Teorema de Cauchy, decorre deste mesmo teorema que existe um $x \in]0, b[$ tal que

$$\frac{\cos b - \cos 0}{b^2 - 0^2} = \frac{\cos' x}{2x} = -\frac{\sin x}{2x}\,,$$

ou seja

$$\frac{1 - \cos b}{b^2} = \frac{\sin x}{2x}\,.$$

Pelo Exemplo 3.2.13, sabemos que

$$|\sin x - \sin 0| \leq |x - 0|\,,$$

ou equivalentemente, $|\sin x| \leq |x|$. Portanto,

$$\left|\frac{1 - \cos b}{b^2}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{2}\,,$$

e

$$1 - \cos b \leq \frac{1}{2}\, b^2\,,$$

ou seja,

$$\cos b \geq 1 - \frac{1}{2}\, b^2\,,$$

conforme era desejado.

Se $b < 0$, então $-b \geq 0$. Logo

$$\cos b = \cos(-b) \geq 1 - \frac{1}{2}\,(-b)^2 = 1 - \frac{1}{2}\, b^2\,.$$

No caso que resta de $b = 0$, temos $\cos b = 1 = 1 - \frac{1}{2}\, b^2$. O resultado fica assim demonstrado para todo o $b \in \mathbb{R}$. $\square$

3.3 Fórmulas de Taylor

Definição 3.3.1 Sendo f uma função n vezes diferenciável em x_0, definimos o POLINÓMIO DE TAYLOR DE f DE ORDEM n EM TORNO DE x_0 por

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \, . \end{aligned}$$

Saliente-se que se tomarmos $h = x - x_0$, então o polinómio de Taylor[3] de ordem n de f em torno de x_0 pode ser reescrito na forma

$$p_n(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \, .$$

Observe-se também adicionalmente que no ponto x_0 as derivadas até a ordem n de f e de p coincidem.

Teorema 3.3.2 (Resto de Peano) [4]
Consideremos uma função f a ser $n-1$ vezes diferenciável no intervalo I (se $n=1$ esta hipótese é eliminada), e n vezes diferenciável em $x_0 \in I$. Se $x_0 + h \in I$, então escrevendo $f(x_0+h) = p_n(x_0+h) + r(h)$, onde p_n é o polinómio de Taylor de grau n de f em torno de x_0, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0 \, .$$

Demonstração. Comecemos por observar que a relação $f(x_0+h) = p_n(x_0+h) - r(h)$ deve ser vista como a definição de $r(h)$, ou seja, $r(h) = f(x_0+h) - p_n(x_0+h)$.

Vamos realizar a demonstração por indução em n.

Para $n = 1$ temos $p_1(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ e portanto

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \, .$$

[3]Brook Taylor (1685–1731) foi um matemático inglês que inventou o presente método de expandir funções através de polinómios dependendo de um ponto arbitrário – tal foi publicado em *Methodus in Crementorum Directa et Inversa* (1715).

[4]Giuseppe Peano foi um matemático italiano nascido a 27/08/1858, em Piemonte, Itália e falecido a 20/04/1932 em Turim, Itália.

O resultado (para $n = 1$) decorre então imediatamente da Definição 3.1.1.

Suponhamos então agora que $n > 1$. Observamos que f' é $n-2$ vezes diferenciável em I e $n-1$ vezes diferenciável em x_0. É simples verificar que o polinómio de Taylor de grau $n-1$ de f' em torno de x_0 é dado por p'_n. De tal facto e da hipótese de indução, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - p'_n(x_0+h)}{h^{n-1}} = 0\,. \tag{3.3.2}$$

Sendo $\epsilon > 0$, (3.3.2) permite-nos concluir que existe um $\delta > 0$ tal que

$$x_0 + h \in I\,, \quad 0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(x_0+h) - p'_n(x_0+h)}{h^{n-1}} \right| < \epsilon\,.$$

Seja $h \in]0, \delta[$ tal que $x_0 + h \in I$ (não iremos considerar o caso $h \in]-\delta, 0[$ por ser análogo ao presente caso). As funções dadas por $r(t) = f(x_0+t) - p_n(x_0+t)$ e $g(t) = t^n$ são diferenciáveis em $[0, h]$ e anulam-se em 0. Além disto, g' não se anula em $]0, h[$. Pelo Teorema de Cauchy (Teorema 3.2.15), obtemos que existe $t \in]0, h[$ tal que

$$\left|\frac{r(h)}{h^n}\right| = \left|\frac{r(h) - r(0)}{g(h) - g(0)}\right| = \left|\frac{r'(t)}{g'(t)}\right| = \frac{1}{n}\left|\frac{f'(x_0+t) - p'(x_0+t)}{t^{n-1}}\right| < \frac{\epsilon}{n} < \epsilon\,,$$

concluindo-se assim a demonstração do resultado. $\square$

Note-se que no fundo o teorema anterior afirma que, numa vizinhança de x_0, podemos aproximar uma função f pelo seu Polinómio de Taylor de grau n. Adicionalmente, ao realizar tal, no ponto $x_0 + h$, cometemos um erro de valor $r(h) = f(x_0 + h) - p_n(x_0 + h)$ e que é um infinitésimo de ordem n, ou seja, que tende a zero mais rápido do que h^n quando h tende a 0. Esta última circunstância é muitas vezes expressa na seguinte forma: "r é $o(h^n)$ quando $h \to 0$".

O resultado seguinte fornece uma forma mais explicita para o erro da aproximação. Ele também pode ser visto como uma generalização do já estudado Teorema de Lagrange.

Teorema 3.3.3 (Teorema de Taylor) [5]

Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$ (onde $a<b$), com derivadas contínuas até à ordem n em $[a,b]$ e com derivada de ordem $n+1$ definida em $]a,b[$. Então, existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ &\qquad + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= p_n(b) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\,. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos utilizar a função g definida em $[a,b]$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots \\ &\qquad + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(b-x)^i + \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}\,, \end{aligned}$$

onde K é uma constante escolhida de modo que $g(a) = f(b)$ e, portanto,

$$f(b) = p_n(b) + \frac{K}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}\,.$$

Para concluir o pretendido temos portanto de mostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f^{(n+1)}(c) = K$.

Dada a estrutura de g, temos que $g \in C([a,b])$ e que g é diferenciável em $]a,b[$. Além disto, $g(b) = f(b) = g(a)$. Aplicando então o Teorema de Rolle, garantimos que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$g'(c) = 0\,. \tag{3.3.3}$$

[5] Brook Taylor (1685–1731) foi um matemático inglês que inventou o presente método de expandir funções através de polinómios dependendo de um ponto arbitrário – tal foi publicado em *Methodus in Crementorum Directa et Inversa* (1715).

Por outro lado, directamente da definição de g temos que

$$\begin{aligned} g'(c) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i+1)}(c)}{i!}(b-c)^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(c)}{(i-1)!}(b-c)^{i-1} - \frac{K}{n!}(b-c)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)-K}{n!}(b-c)^n \,. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Portanto, juntando (3.3.3) e (3.3.4) chegamos a $f^{(n+1)}(c) = K$ conforme era desejado. $\square$

Se a função f é diferenciável até à ordem $n+1$ em $]a, b[$, com derivada contínua até à ordem n em $[a, b]$, então está nas mesmas condições em qualquer intervalo $[a, x]$, com $x \in [a, b]$. Usando o teorema anterior neste intervalo, temos a chamada fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots \\ &\qquad + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x) \end{aligned}$$

para todo o $x \in [a, b]$, onde $c_x \in]a, x[$.

Ao termo

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x)$$

dá-se o nome de resto de Lagrange da fórmula de Taylor.

No caso em que $a = 0$, a fórmula de Taylor é conhecida por fórmula de MacLaurin[6]:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c_x) \,,$$

para $0 < c_x < x$ ou $x < c_x < 0$.

[6] Colin MacLaurin (1698–1746) foi um matemático escocês que se tornou discípulo de Isaac Newton (1642–1727).

3.4 Cálculo de limites

De seguida apresentamos uma regra bastante útil para o cálculo de determinados limites. Como iremos ver, tal regra aparece como uma consequência do Teorema de Cauchy (Teorema 3.2.15). A regra é muito útil no cálculo de limites que numa primeira análise possuem indeterminações do tipo "zero sobre zero" e do tipo "infinito sobre infinito" (e portanto também em todos os demais tipos de indeterminações que se podem transformar nestas duas situações por uso de manipulações algébricas com as funções em estudo).

Teorema 3.4.1 (Regra de Cauchy)
Seja x_0 pertencente ao fecho $\overline{I} = [a, b]$ (com $a < b$) de um intervalo I limitado ou $x_0 = \pm\infty$ para os casos em que tenhamos um intervalo I não limitado.

Sendo f e g funções diferenciáveis em I tais que: (i) $g'(x) \neq 0$, $\forall_{x\in]a,b[}$; (ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$. *Então, se existir* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *também existe* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e, adicionalmente,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Demonstração. Designemos

$$\ell := \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e suponhamos em primeira instância que $\ell \in \mathbb{R}$.

Por definição de limite, temos que dado um qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\ell - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \ell + \epsilon , \quad \forall x \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I . \tag{3.4.5}$$

Usando então agora o Teorema de Cauchy (Teorema 3.2.15), dados $x, y \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I$, temos a garantia de existência de c entre x e y (e consequentemente $c \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I$) tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} . \tag{3.4.6}$$

Portanto, de (3.4.5) e (3.4.6), obtemos

$$\ell - \epsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < \ell + \epsilon\,, \qquad \forall x, y \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I. \tag{3.4.7}$$

(a) No caso em que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, fixando x em (3.4.7) e tomando $y \to x_0$, vem

$$\ell - \epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \epsilon\,, \qquad x \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I\,. \tag{3.4.8}$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, a condição (3.4.8) permite concluir que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

(b) No caso em que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, existe $\delta > 0$ tal que se verifica (3.4.7) e $g(x) \neq 0$ $(\forall x, y \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I)$. Consequentemente, (3.4.7) pode ser equivalentemente reescrita na forma

$$\ell - \epsilon < \frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(y)}{g(x)}}{1 - \dfrac{g(y)}{g(x)}} < \ell + \epsilon\,, \qquad \forall x, y \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I\,. \tag{3.4.9}$$

Fixando $y \in \mathscr{V}_\delta(x_0) \cap I$, vem $\lim_{x\to x_0} \frac{g(y)}{g(x)} = 0$ e existe uma vizinhança de x_0, digamos $\mathscr{V}_\rho(x_0)$ (em que podemos naturalmente considerar $\rho < \delta$), tal que

$$1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0\,, \qquad \forall x \in \mathscr{V}_\rho(x_0) \cap I\,. \tag{3.4.10}$$

Então, deste facto e de (3.4.9), concluímos que

$$(\ell - \epsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)}{g(x)} < (\ell + \epsilon)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)\,, \qquad \forall x \in \mathscr{V}_\rho(x_0) \cap I\,,$$

ou de forma equivalente,

$$(\ell-\epsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<(\ell+\epsilon)\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)+\frac{f(y)}{g(x)}\,,$$
$$\forall x\in\mathscr{V}_\rho(x_0)\cap I\,. \quad (3.4.11)$$

Consideremos uma qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de I tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Caso consigamos provar que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\ell\,, \quad (3.4.12)$$

dado que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é arbitrária, o resultado pretendido ($\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$) ficará garantido pelo uso do Teorema 1.7.8 também para o presente caso.

Vamos então passar a mostrar que (3.4.12) é uma realidade. Por hipótese temos $g(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$ e assim sendo vem

$$\frac{f(y)}{g(x_n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \qquad \text{e} \qquad \frac{g(y)}{g(x_n)}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,. \quad (3.4.13)$$

Seja ℓ_S o limite de uma subsucessão convergente da sucessão $\left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifique o porquê possibilidade de existência deste limite). Atendendo a (3.4.10), (3.4.11) e (3.4.13), obtemos que $\ell-\epsilon\le\ell_S\le\ell+\epsilon$ e portanto

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\le\ell+\epsilon \qquad \text{e} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\ge\ell-\epsilon\,. \quad (3.4.14)$$

Uma vez que $\epsilon>0$ foi escolhido arbitrariamente, (3.4.14) permite concluir que

$$\ell \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le \ell$$

e portanto que (3.4.12) ocorre de facto.

No restante caso em que $\ell=\infty$, a demonstração decorre por um processo inteiramente análogo ao anterior (com obvias adaptações pela situação $\ell=\infty$) e portanto é aqui omitida. $\square$

Observe-se que se por exemplo surge a dificuldade de f' e g' tenderem conjuntamente para zero, quando $x \to x_0$, e se a f' e g' pode ser aplicado o teorema anterior, então obtemos a adicional informação

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \; .$$

3.5 Estacionaridade, extremos, concavidade e assímptotas

Definição 3.5.1 (Pontos de estacionaridade)
Chamam-se PONTOS DE ESTACIONARIDADE de uma função f às raízes da sua derivada, ou seja, aos pontos x tais que $f'(x) = 0$.

Pelo que se viu até aqui, para que uma função, diferenciável num determinado ponto, tenha extremo local nesse ponto é necessário (mas não suficiente) que esse ponto seja um ponto de estacionaridade. Assim, no caso dos pontos de diferenciabilidade, os extremos locais devem ser procurados dentro do conjunto dos pontos de estacionaridade.

Atente-se no entanto que para tal a condição de diferenciabilidade é fundamental: o caso da função módulo ($f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$) é ilustrativo, esta função nem sequer possui derivada em $x = 0$ e, no entanto, $x = 0$ é mínimo local (na realidade até é mínimo absoluto).

De qualquer modo – quando na presença de diferenciabilidade – como um ponto de estacionaridade não é necessariamente um ponto de extremo local torna-se necessário determinar condições em que se possa garantir a eventual existência de extremo. Tal será perspectivado de seguida.

Definição 3.5.2
Sejam f e g duas funções cujos domínios contenham o mesmo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o GRÁFICO DE f ESTÁ POR CIMA DO GRÁFICO DE g EM I se $f(x) \geq g(x)$, $\forall_{x\in I}$.

Como se analisou anteriormente, para uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$, o gráfico da função f admite no ponto de abcissa a uma recta tangente de equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Definição 3.5.3 (Função convexa num ponto)
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$. Se existe $\epsilon > 0$ tal que, em $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, o gráfico de f está por cima das rectas tangentes ao gráfico de f nos pontos de $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, a função f diz-se CONVEXA NO PONTO a ou então diz-se que o seu gráfico tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA EM a.

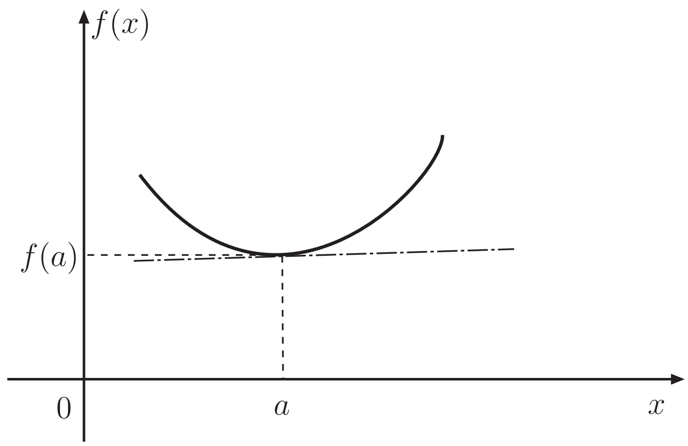

Figura 3.4: Exemplo de uma função convexa num ponto a.

Definição 3.5.4 (Função côncava num ponto)
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$. Se existe $\epsilon > 0$ tal que, em $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, as rectas tangentes ao gráfico de f estão por cima do gráfico de f, então a função f diz-se CÔNCAVA NO PONTO a ou então diz-se que o seu gráfico tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA BAIXO EM a.

Definição 3.5.5 (Inflexão)
Caso em que $f'(a) \in \mathbb{R}$: Designando por g a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, se num dos intervalos $]a-\epsilon, a[$ ou $]a, a+\epsilon[$ (para $\epsilon > 0$) o gráfico de f está por cima do de g e no outro intervalo o gráfico de g está por cima do gráfico de f, então diz-se que a é um PONTO DE INFLEXÃO de f ou que o gráfico de f tem uma INFLEXÃO EM a.

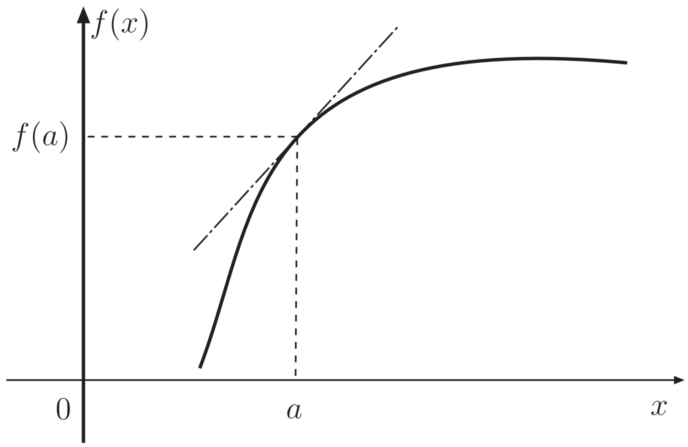

Figura 3.5: Exemplo de uma função côncava num ponto a.

Caso em que $f'(a) = \infty$ e em que $f'(p) \in \mathbb{R}$, para todo o $p \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\setminus \{a\}$:
Se para todos os pontos p de um dos intervalos $]a-\epsilon, a[$ ou $]a, a+\epsilon[$ (para $\epsilon > 0$) o gráfico de f está por cima do da recta tangente ao gráfico de f em $x = p$ e no outro intervalo a recta tangente ao gráfico de f em $x = p$ se situa por cima do gráfico de f, então também se diz que a é um PONTO DE INFLEXÃO de f ou que o gráfico de f tem uma INFLEXÃO EM a.

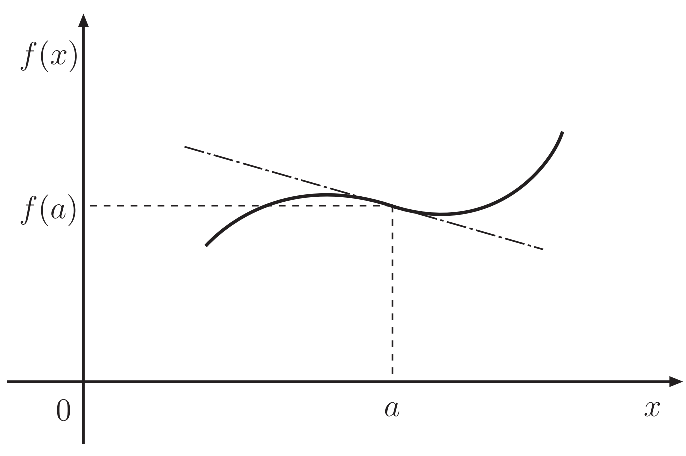

Figura 3.6: Exemplo de um ponto de inflexão de uma função.

Teorema 3.5.6 (Regra de Cauchy)
Seja f uma função com derivadas contínuas num intervalo I até à ordem 2 e $a \in$ $\mathrm{int}(I)$. Nestas condições:

(i) *se* $f''(a) > 0$, *então* f *é convexa no ponto* a*;*

(ii) *se* $f''(a) < 0$, *então* f *é côncava no ponto* a*;*

(iii) *se* f *tem uma inflexão em* a, *então* $f''(a) = 0$.

Demonstração. Consideremos em primeiro lugar a situação em que $a \in \mathrm{int}(I)$ é tal que $f''(a) \neq 0$.

Dado que f é uma função com derivadas contínuas num intervalo I até à segunda ordem e $f''(a) \neq 0$, então existe uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a, $\mathscr{V} \subset I$, onde $f''(x)$ toma o sinal de $f''(a)$, ou seja: (a) se $f''(a) > 0$ então $f''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathscr{V}$; (b) se $f''(a) < 0$ então $f''(x) < 0$, para todo o $x \in \mathscr{V}$.

Sendo $x \in \mathscr{V}$, pelo Teorema de Taylor, existe $c \in \mathscr{V}$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\,\frac{(x-a)^2}{2!}\,.$$

Pretendemos então estudar o sinal da diferença entre as imagens de f, $f(x)$, e as imagens da recta tangente a f no ponto a: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Pretendemos pois analisar a diferença

$$\begin{aligned} d(x) &:= f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!} - (f(a) + f'(a)(x-a)) \\ &= f''(c)\frac{(x-a)^2}{2!}\,. \end{aligned}$$

Portanto, o sinal de $d(x)$ depende apenas do sinal de $f''(c)$ e este tem o sinal de $f''(a)$. Assim sendo, concluímos que: (i) se $f''(a) > 0$ então $d(x) > 0$, o que significa que f é convexa; (ii) se $f''(a) < 0$ então $d(x) < 0$, o que significa que f é côncava.

Por fim, a conclusão para o caso em que $a \in \mathrm{int}(I)$ é um ponto de inflexão para f, decorre como consequência directa dos dois casos anteriores. $\square$

Uma nova aplicação do Teorema de Taylor vai-nos permitir obter o seguinte teorema bastante global sobre extremos locais, concavidades e inflexões.

Teorema 3.5.7

Seja f uma função definida num intervalo I e $n > 2$ vezes diferenciável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(i) *Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f (f é convexa no ponto x_0).*

(ii) *Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f (e f é côncava no ponto x_0).*

(iii) *Se n é ímpar, então x_0 não é extremo local de f (x_0 é ponto de inflexão).*

Demonstração. Seja $x \in I$. Uma vez que as derivadas de f se anulam até a ordem $n-1$, tomando $h = x - x_0$ na Fórmula de Taylor com resto de Peano obtemos

$$f(x) - f(x_0) = p_n(x) - f(x_0) + r(h) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + r(h) \tag{3.5.15}$$

com

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0\,.$$

Deste modo, pela definição de limite temos que existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ com $0 < |x - x_0| < \delta$, se tem

$$|r(h)| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n \right|\,. \tag{3.5.16}$$

Resulta então de (3.5.15) e (3.5.16) que o sinal de $f(x) - f(x_0)$ é o mesmo de

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,,$$

decorrendo imediatamente daqui as proposições (i)–(iii). $\square$

Se pensarmos na definição de função e considerarmos uma função f contínua em a tal que $f''(a) = +\infty$ ou $f''(a) = -\infty$, então concluímos que o gráfico de f tem necessariamente uma inflexão no ponto a.

Definição 3.5.8 (Assímptota vertical)

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A. Diz-se que a recta de equação $x = a$ é uma ASSÍMPTOTA VERTICAL ao gráfico de f quando se verifica (pelo menos) uma das seguintes ocorrências: $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Definição 3.5.9 (Assímptota não vertical à direita)
Diz-se que o gráfico de f tem como ASSÍMPTOTA NÃO VERTICAL À DIREITA, a recta $y = mx + b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}, \exists_{C>0} \ : \ |mx + b - f(x)| < \epsilon \ , \ \ \forall_{x>C} \ .$$

Definição 3.5.10 (Assímptota não vertical à esquerda)
Diz-se que o gráfico de f tem como ASSÍMPTOTA NÃO VERTICAL À ESQUERDA, a recta $y = mx + b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}, \exists_{C>0} \ : \ |mx + b - f(x)| < \epsilon \ , \ \ \forall_{x<-C} \ .$$

Perante tais definições fica claro se a recta $y = mx + b$ é assímptota à direita, então $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - b] = 0$, ou seja, $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b$ e também $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{mx + b}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(m + \dfrac{b}{x}\right) = m$. Idênticas igualdades podem ser reproduzidas para o caso da assímptota à esquerda.

Assim sendo, temos directamente as seguintes conclusões.

Teorema 3.5.11

(i) *O gráfico da função f (cujo domínio contém necessariamente um intervalo não majorado) tem uma assímptota à direita se e somente se existirem e forem finitos os limites:*

$$m_d = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad b_d = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_d\, x] \ .$$

Nestas últimas condições, a assímptota à direita é única e tem como equação $y = m_d x + b_d$.

(ii) *O gráfico da função f (cujo domínio contém necessariamente um intervalo não minorado) tem uma assímptota à esquerda se e somente se existirem e forem* *finitos os limites:*

$$m_e = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} , \qquad b_e = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_e\, x] \, .$$

Nestas últimas condições, a assímptota à esquerda é única e tem como equação $y = m_e x + b_e$.

3.6 Exercícios

1. Calcule usando a definição, se possível, as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

   (a) $f(x) = \ln x$, $x = a \in D_f$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$

   (c) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 3$

2. Determine f', em cada um dos casos seguintes:

   (a) $f(x) = e^{\cos x} + x \sin x$

   (b) $f(x) = \frac{1-x}{x^3+2} + 2x$

   (c) $f(x) = (x+5)^4$

3. Defina as derivadas das funções trigonométricas inversas.

4. Discuta a diferenciabilidade de cada uma das funções, dadas por:

   (a) $f(x) = e^x$

   (b) $f(x) = e^{-|x|}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

5. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$.

   Mostre que f é contínua em $x = 0$ mas, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.

6. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

7. Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 e^{-x}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, defina $(g \circ f)'$.

8. Considere a função dada por $f(x) = 3x - 3 + \sin(x - 1)$.

(a) Calcule $f(1)$.

(b) Prove que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f'.
Determine a derivada de

$$f(-x)\,,\ f(e^x)\,,\ f(\ln(x^2+1))\,,\ f(f(x)).$$

10. Utilize o Teorema de Rolle para provar que:

(a) O polinómio $x^{102}+ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

(b) O polinómio $x^{101}+ax+b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

11. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x < 0 \\ \ln(e^x+1) & , \quad x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

(a) Mostre que a recta de equação $y = x$ é uma assímptota ao gráfico de f.

(b) Caracterize f'.

(c) Existe um intervalo fechado contido em $[0, +\infty[$ no qual seja possível aplicar o teorema de Rolle? Justifique.

12. Considere a função

$$g : x \longmapsto y = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Justifique as seguintes afirmações:

(a) f não verifica as condições do teorema de Lagrange em nenhum intervalo de que zero seja ponto interior.

(b) f verifica as condições do teorema de Lagrange no intervalo $[0, 1]$, sendo $\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$ o valor médio do referido teorema.

13. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \ \sin x}{1-\cos x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^x$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x \ \text{arccot} \ x)$

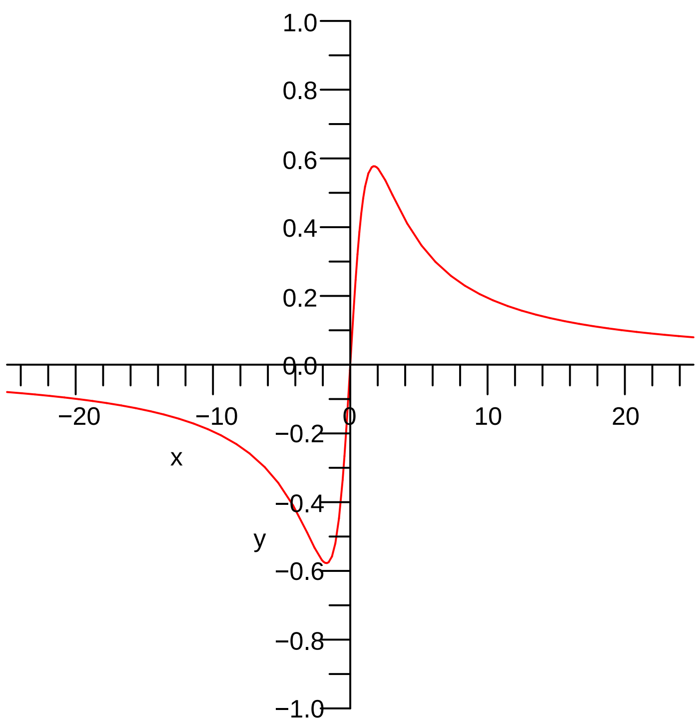

Figura 3.7: Função $h(t)$ para $t \in [-25, 25]$.

14. A Figura 3.7 contém a representação gráfica da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \frac{2\,t}{t^2+3}.$$

(a) Estude h quanto à continuidade.

(b) Verifique que $h(-t) = -h(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

(c) Determine, caso existam, assímptotas horizontais e verticais da função.

15. Considere as seguinte funções:

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{-1/x}, & x < 0 \\ (1-x)e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1}, \quad x > -1.$$

Estude-as quanto à continuidade e averigue acerca das suas assímptotas.

16. Estude quanto à existência de assímptotas a função f em cada um dos seguintes casos:

(a) $g_1(x) = x^3 - x + 1$;

(b) $g_2(x) = (x^2 - 1)^{-1}$;

(c) $g_3(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$;

(d) $g_4(x) = x \ln(x)$;

(e) $g_5(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$.

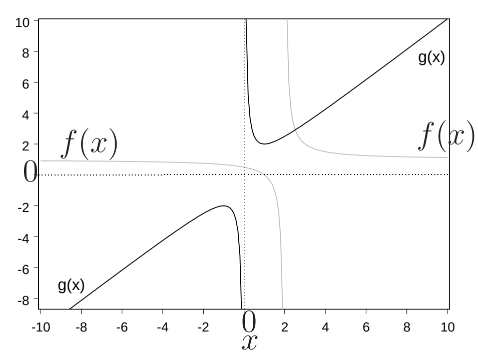

Figura 3.8: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ para $x \in [-10, 10]$.

17. Na Figura 3.8 representa-se graficamente as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}; \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Determine o domínio de cada uma destas funções e identifique eventuais assímptotas horizontais, verticais e oblíquas.

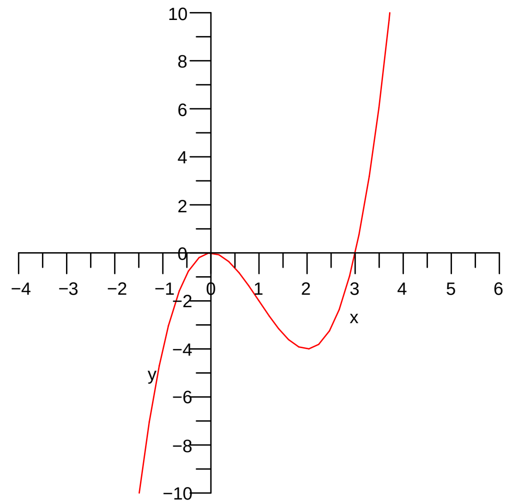

Figura 3.9: Gráfico de f_1.

18. Para cada uma das seguintes funções estude: o domínio; os zeros; as assímptotas; a primeira derivada; os extremos; os intervalos de monotonia; a segunda derivada; os pontos de inflexão; o sentido da concavidade.

    (a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2$ (ver Figura 3.9);

    (b) $f_2(x) = \frac{x^2-4}{x}$;

    (c) $f_3(x) = \ln(x^2 - 1)$;

    (d) $f_4(x) = \begin{cases} x \ln x & , \quad x > 0 \\ \sqrt{1-x} & , \quad x \leq 0 \end{cases}$.

Capítulo 4

Primitivação

4.1 Noções elementares sobre primitivas

No presente capítulo iremos trabalhar com as designadas primitivas de funções reais de variável real. Tais entidades são elas próprias funções e, em certo sentido, são obtidas como que por uma operação inversa da derivação. O seu uso é fundamental em diversos contextos. No caso do presente curso, as primitivas vão ser predominantemente usadas na integração a desenvolver nos próximos capítulos.

Mais tarde, a grande utilidade das primitivas e dos integrais definidos (e suas diversas propriedades) ficará ilustrada de forma natural.

Definição 4.1.1 (Primitiva; função primitivável)
Se f e F são funções definidas no intervalo $[a, b]$, F é diferenciável em todos os pontos de $[a, b]$ e se para todo o $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$, diz-se que F é uma PRIMITIVA de f em $[a, b]$ e que f é PRIMITIVÁVEL em $[a, b]$.

Em termos de notações, para denotar uma primitiva de uma função $y = f(x)$ é habitual utilizar a notação, $P_x f(x)$, $P_x f$, $P f(x)$, $P f$, $\int f(x)\, dx$ ou $\int f$.

Como se pode verificar, se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f.

Proposição 4.1.2
Sejam F e G duas primitivas de f no intervalo $[a, b]$. Então, $F(x) - G(x) = C$ (em que C é uma constante), isto é, F e G diferem entre si por uma constante.

Demonstração. Sejam F e G duas primitivas de f no intervalo $[a, b]$. Então

$$(F-G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Assim sendo, o Corolário 3.2.10 garante que $F - G$ é uma constante. □

Exemplo 4.1.3

Dado que $F(x) = \frac{x^3}{3} + 50$ e $G(x) = \frac{x^3}{3} + 10$ possuem a propriedade de

$$F'(x) = x^2 = G'(x)\,,$$

então temos que tanto G como F são primitivas de $h(x) = x^2$. Na realidade, dado a Proposição 4.1.2 até temos já a consciência global de que

$$\int x^2\,dx = \int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + C\,,$$

onde $C \in \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.4

Função Primitivável	**Primitiva**
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\sec x \tan x$	$\sec x + C$
$x^\alpha\,,\ \ \alpha \neq -1\,,\ x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

Função Primitivável	**Primitiva**
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\psi'(x)\sin\psi(x)$	$-\cos\psi(x) + C$
$\psi'(x)\cos\psi(x)$	$\sin\psi(x) + C$
$\psi'(x)[\psi(x)]^\alpha$, $\alpha \neq -1$, $\psi(x) > 0$	$\dfrac{[\psi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}$	$\ln\lvert\psi(x)\rvert + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{1+[\psi(x)]^2}$	$\arctan\psi(x) + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{\sqrt{1-[\psi(x)]^2}}$	$\arcsin\psi(x) + C$

Saliente-se que atendendo à regra de derivação da função composta se concluí que $[F(\phi(x))]' = \phi'(x)\,F'(\phi(x))$, o que nos ajuda na dedução da tabela anterior.

Exemplo 4.1.5

Calculemos as primitivas de $\psi(x) = \sec^4(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \sec^4 x\,dx &= \int \sec^2 x(\tan^2 x + 1)\,dx \\
&= \int \sec^2 x \tan^2 x\,dx + \int \sec^2 x\,dx \\
&= \int (\tan x)'\,(\tan x)^2\,dx + \int \sec^2 x\,dx \\
&= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C \quad \text{(em que } C \in \mathbb{R}\text{)}.
\end{aligned}$$

4.2 Propriedades das primitivas

Para simplificar a notação utilizada, iremos usar as igualdades $Pf(x) = Pg(x)$ no sentido de as indicadas primitivas serem iguais a menos de uma constante, isto é, significando que $Pf(x) - Pg(x) = C$, com $C \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.2.1
Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo $[a, b]$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então, no intervalo $[a, b]$, tem-se:

(a) $P(f + g) = Pf + Pg$;

(b) $P(\beta f) = \beta\, Pf$.

Proposição 4.2.2
Seja f uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$. Então, no intervalo $[a, b]$, $Pf'(x) = f(x) + C$.

Exercício 4.2.3
As demonstrações das duas proposições anteriores são dois exercícios elementares.

Proposição 4.2.4
Se f é uma função contínua num intervalo, então f é primitivável nesse intervalo.

No próximo capítulo sobre integração iremos demonstrar um correspondente resultado para o caso dos integrais (ver posteriormente o Teorema 5.2.3) e também por isto mesmo optamos por aqui não incluir a demonstração da última proposição. De qualquer forma quando tivermos o conhecimento do chamado *integral indefinido* este resultado passará a ser uma simples consequência da existência de tal integral. Por exemplo, teremos oportunidade de posteriormente analisar que o resultado de cima é uma consequência directa do Corolário 5.10.4.

4.3 Primitivação por partes

Atendendo à regra do produto na diferenciação podemos estabelecer a seguinte importante propriedade de primitivação por partes.

Proposição 4.3.1
Sejam f e g funções com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, neste mesmo intervalo,

$$P[f'(x)\; g(x)] = f(x)\, g(x) - P[f(x)\, g'(x)]$$

ou, em outra notação,

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Demonstração. Nas condições do resultado, por uso da regra de derivação do produto de duas funções, obtemos

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,,$$

ou equivalentemente,

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\,. \tag{4.3.1}$$

Assim sendo, da aplicação da primitivação a ambos os membros de (4.3.1) e do uso da linearidade apresentada na parte (a) da Proposição 4.2.1, decorre a desejada fórmula de primitivação por partes. $\square$

Tendo o último resultado em conta, para calcularmos $\int x \sin x\; dx$ poderíamos supor identificar $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$ (e em consequência $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$) e da proposição anterior obter:

$$\int x \sin x\; dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\; dx = -x\cos x + \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3.2

Calcule-se as primitivas de $\sec^5$ por uso da técnica de primitivação por partes:

$$\begin{aligned}
\int \sec^5 x\, dx &= \int \sec^3 x\; \sec^2 x\, dx \\
&= \int \sec^3 x\, (\tan x)'\, dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \tan^2 x\; \sec^2 x\; \sec x\, dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x\, dx \\
&= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x\, dx + 3\int \sec^3 x\, dx.
\end{aligned}$$

A última igualdade implica que

$$\begin{aligned}\int \sec^5 x\,dx &= \frac{\tan x \sec^3 x}{4} + \tfrac{3}{4}\int \sec^3 x\,dx\\ &= \frac{\tan x \sec^3 x}{4} + \frac{3\tan x \sec x}{8} + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C, \quad C \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

tendo-se em conta o cálculo nas aulas de:

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

4.4 Primitivação por mudança de variável

Iremos usar a seguinte notação para representar $f(g(t))$:

$$f(g(t)) = f(x)_{|x=g(t)}\,.$$

Proposição 4.4.1

Seja f uma função primitivável no intervalo I e ϕ função diferenciável que seja uma bijecção do intervalo J no intervalo I. Então,

$$P_x f(x) = P_t f(\phi(t))\,\phi'(t)_{|t=\phi^{-1}(x)}\ ,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}\\ &= \int f(\phi(t))\,\frac{d\phi}{dt}\,dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

Demonstração. De acordo com o enunciado, consideremos f a ser uma função primitivável no intervalo I e ϕ a ser uma função diferenciável de tal modo que $\phi(t) = x$ é uma bijecção do intervalo J no intervalo I.

A essência da demonstração passa por trabalhar com a nova função

$$h(t) := f[\phi(t)] \cdot \phi'(t)\,.$$

Vejamos em primeiro lugar que h é primitivável no intervalo J. Sendo F uma primitiva de f no intervalo I (que existe por hipótese), faça-se a composição $F[\phi(t)]$ e calcule-se a respectiva derivada:

$$(F[\phi(t)])' = f[\phi(t)] \cdot \phi'(t) = h(t)\,,$$

para todo $t \in J$, resultado que mostra ser $F[\phi(t)]$ uma primitiva de $h(t)$ em J.

Verifiquemos agora que, sendo $H(t)$ uma qualquer primitiva de $h(t)$ em J (note-se que já sabemos que h é primitivável), a função que se obtém fazendo a composição $H[\phi^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f(x)$. Para tal, comecemos por realizar que de

$$(F[\phi(t)])' = h(t) = H'(t)\,,$$

decorre que $F[\phi(t)] - H(t) = C$ em J (em que $C \in \mathbb{R}$). Adicionalmente, juntando a informação de $F[\phi(t)] - H(t) = C$ com $t = \phi^{-1}(x)$, obtemos $F(x) - H[\phi^{-1}(x)] = C$ em I. Tal significa portanto (cf. Proposição 4.1.2) que $H[\phi^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f(x)$ em I (dado que F é uma primitiva de f no mesmo intervalo). $\square$

Pensemos em calcular $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Se fizermos a substituição $u = 1 + x^4$ teremos $du = 4x^3\,dx$. No entanto, como $4x^2$ não é constante

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{4x^2}\frac{4x^3}{1+x^4}dx \neq \frac{1}{4x^2}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx.$$

Isto permite exibir que a mudança $u = 1 + x^4$ não resolve o problema. No entanto, se fizermos $u = x^2$ teremos $du = 2x\,dx$ e assim,

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}du\Big|_{u=x^2} = \frac{1}{2}\arctan(u)\Big|_{u=x^2} + C = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C.$$

Exemplo 4.4.2
Calculemos $\displaystyle\int e^{x^{1/3}}\,dx.$

Comecemos por escolher $t = x^{1/3}$. Neste caso, $t^3 = x \implies 3t^2\,dt = dx$. Então

$$\begin{aligned}\int e^{x^{1/3}}\,dx &= \int 3t^2 e^t\,dt \\ &= 3t^2e^t - 6te^t + 6e^t + C \\ &= 3x^{2/3}e^{x^{1/3}} - 6x^{1/3}e^{x^{1/3}} + 6e^{x^{1/3}} + C \quad (C \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

onde o penúltimo passo resulta de integração por partes.

Nem sempre é muito claro qual a mudança de variável mais recomendada. No entanto, em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas. Veja-se a seguinte tabela na qual f é uma função irracional dos argumentos indicados. A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivável por decomposição (ver a próxima secção).

Primitiva	**Substituição**
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ b^2 - 4ac > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ onde α é raiz de ax^2+bx+c
$P\,f(e^x)$	$x = \ln t$

Exercício 4.4.3
Calcule $P\dfrac{1}{\sqrt{x^2-50}}$ e $P\dfrac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}$.

Um exemplo interessante e que ilustra bem a existência de substanciais diferentes possibilidades de cálculo de uma mesma primitiva é o caso da primitiva da função sec.

A versão mais conhecida para tal cálculo é a seguinte

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x}\,dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\tan x + \sec x}\,dx \\
&= \int d(\ln|\tan x + \sec x|) = \ln|\tan x + \sec x| + C \quad (\text{com } C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Para um cálculo da mesma primitiva por uma diferente forma precisamos de primeiro perceber a veracidade da identidade:

$$\sec x = \frac{\cos x}{2(1+\sin x)} + \frac{\cos x}{2(1-\sin x)}.$$

Posto isto, vem

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \frac{\cos x}{2(1+\sin x)}\,dx + \int \frac{\cos x}{2(1-\sin x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| - \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C \quad (\text{com } C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Para perspectivar ainda uma terceira forma, temos:

$$\begin{aligned}
\int \csc x\,dx &= \int \frac{1}{\sin x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{du}{u} \qquad (\text{onde } u = \tan\frac{x}{2}) \\
&= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C \quad (\text{com } C \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\, dx = \int \csc\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\, d\Big(\frac{\pi}{2}+x\Big)\\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C \quad (\text{com } C\in\mathbb{R}).\end{aligned}$$

4.5 Primitivação por decomposição

Definição 4.5.1
Um polinómio diz-se MÓNICO *se o coeficiente do termo de maior grau é* 1.

A técnica de primitivação de funções racionais por decomposição consiste, numa primeira fase, em decompor em fracções elementares de primitivação imediata – ou quase imediata – a função racional que se pretende primitivar. Os seguintes resultados são relevantes para este propósito. As suas demonstrações são aqui omitidas (o conteúdo destas situa-se mais na área da disciplina de *Álgebra Linear* e poderão portanto ser tratados dentro dos conteúdos dessa disciplina).

Proposição 4.5.2
Sendo F uma qualquer função racional, é possível escrever F na forma

$$F(x) = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \tag{4.5.2}$$

em que H, P e Q representam polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico Q.

Como consequência de (4.5.2), obtemos

$$\int F(x)\, dx = \int H(x)\, dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,,$$

reduzindo-se assim a primitiva inicial à questão das primitivas no segundo membro anterior. Para estas últimas, realçamos o seguinte:

Proposição 4.5.3
Sejam P e Q polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico

Q. Então $\frac{P}{Q}$ pode decompor-se numa soma de termos elementares dos seguintes dois tipos:

(a) $\dfrac{a}{(x-r)^k}\,,\qquad a, r \in \mathbb{R}\,,\quad k \in \mathbb{N}$;

(b) $\dfrac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k},\qquad b, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\quad k \in \mathbb{N}\,.$

Desta forma, conhecendo as primitivas dos termos elementares (a) e (b), o problema do cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ fica resolvido.

Função Primitivável	**Primitiva**
$\dfrac{a}{(x-r)^k}\,,\quad k \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} a\,\ln\lvert x-r\rvert + C\,, & \text{se } k=1 \\ \dfrac{a\,(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C\,, & \text{se } k>1 \end{cases}$
$\dfrac{bx+d}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{b\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{2} + \dfrac{b\alpha+d}{\beta}\arctan\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$
$\dfrac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k},\quad k>1\,,\ k\in\mathbb{N}$	$\dfrac{b(1+t^2)^{-k+1}}{2\beta^{2k-2}(1-k)} + \dfrac{b\alpha+d}{\beta^{2k-1}}\displaystyle\int\dfrac{1}{(1+t^2)^k}\,dt + C\,,\ t=\dfrac{x-\alpha}{\beta}$
$\dfrac{1}{(1+t^2)^k}\,,\ k>1\,,\ k\in\mathbb{N}$	a primitiva aparece pelo *método por partes*, fazendo $\dfrac{1}{(1+t^2)^k} = \dfrac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \dfrac{t}{2}\dfrac{2t}{(1+t^2)^k}$

Analisemos agora como podemos decompor P/Q.

Proposição 4.5.4

Consideremos o polinómio mónico Q e todas as suas raízes reais r_k $(1 \le k \le s)$ e raízes complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \le l \le t)$ assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \le k \le s)$ das raízes reais e ν_l $(1 \le l \le p)$ das raízes complexas. O polinómio Q pode ser escrito na seguinte forma:

$$Q(x) = (x-r_1)^{\mu_1}\cdots(x-r_s)^{\mu_s}\,\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{\nu_1}\cdots\left[(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\right]^{\nu_p}\,.$$

Proposição 4.5.5

Consideremos a função racional P/Q tal que o grau de P é menor do que o grau do polinómio mónico Q. Sejam r_k $(1 \leq k \leq s)$ todas as raízes reais e $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \leq l \leq t)$ todas as raízes complexas de Q, de multiplicidades μ_k $(1 \leq k \leq s)$ para as raízes reais e ν_l $(1 \leq l \leq p)$ para as raízes complexas. Então:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{n=1}^{\mu_k} \frac{a_k^{(n)}}{(x - r_k)^n} + \sum_{l=1}^{p} \sum_{m=1}^{\nu_l} \frac{b_l^{(m)} x + d_l^{(m)}}{\left[(x - \alpha_l)^2 + \beta_l^2\right]^m} .$$

Note-se que os coeficientes desconhecidos na decomposição anterior podem ser calculados pelo método dos coeficientes indeterminados.

A título de exemplo, abordaremos de seguida o cálculo da primitiva de:

$$\psi(x) = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

Escreva-se

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

e de seguida encontremos a decomposição em fracções parciais:

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Esta última igualdade implica que

$$1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Igualando os coeficientes:

$$\begin{aligned}
x^3 &: \quad 0 = A + C \\
x^2 &: \quad 0 = B + D + \sqrt{2}(A - C) \\
x &: \quad 0 = A + C + \sqrt{2}(B - D) \\
x^0 &: \quad 1 = B + D
\end{aligned}$$

Da primeira e da terceira equações decorre que $A = -C$ e que $B = D$. Da quarta equação $B = D = \frac{1}{2}$ e da segunda equação $A = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = -C$. Em consequência, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{2}x+2}{4(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,dx - \int \frac{\sqrt{2}x-2}{4(x^2-\sqrt{2}x+1)}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&\quad -\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1) \\
&\quad +\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(-x\sqrt{2}+1)^2+1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2+x\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(x^2-x\sqrt{2}+1) \\
&\quad +\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(x\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-x\sqrt{2}+1) + C \quad (\,C \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

4.6 Exercícios

1. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int \left(5x^3 + 2\cos x\right)\ dx$

   (b) $\displaystyle\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \frac{1}{t^3}\right)\ dt$

   (c) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)^2}{x^2}\ dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x\ \cot x}\ dx$

   (e) $\displaystyle\int \left(\sqrt{3}\sin x + \frac{1}{2x}\right)\ dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx$

   (g) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\ dx$

   (h) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\ dx$

   (i) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\ dx$

   (j) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\ dx$

   (k) $\displaystyle\int \cos^3 x\ dx$

2. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int x\sec^2 x\ dx$

   (b) $\displaystyle\int e^x \sin x\ dx$

(c) $\int \ln x \; dx$

(d) $\int \arctan x \; dx$

(e) $\int \sec^3 x \; dx$

(f) $\int \sin(5x)\cos(3x) \; dx$

3. Calcule:

(a) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} \; dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \; dx$

(c) $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \; dx$

(d) $\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)} \; dx$

(e) $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)} \; dx$

(f) $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}} \; dx$

4. A corrente i num circuito RCL é dada por

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega}+\omega\right)e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

São **constantes** a força electromotriz E, ligada no instante $t=0$, a capacidade C (em farads), a resistência R (em ohms), a indutância L (em henrys),

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C-R^2}}.$$

A carga Q (em coulombs) é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = i,$$

com $Q(0) = 0$. Determine a expressão de $Q(t)$.

5. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{9 - x^2}\ \ dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4 - e^{2x}}}\ dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}\ dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(3 + \ln x)^3}\ dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}\ dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\ dx$

   (g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5 - x^2}}\ dx$

   (h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 2}}\ dx$

   (a) $\displaystyle\int \sqrt{4 + 5x^2}\ dx$

   (b) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1 - x}\ dx$

6. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\ \ dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3}\ dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+15}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+12x^2+14x+10}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2}\,dx$

Capítulo 5

Integral de Riemann

5.1 Partições de intervalos e somas de Riemann

Definição 5.1.1

Seja $[a, b]$ um intervalo em que $a \leq b$ (podendo-se portanto ter inclusivamente aqui o caso $a = b$ e em consequência a situação de um intervalo degenerado $[a, a] = \{a\}$). Uma PARTIÇÃO de $[a, b]$ é um conjunto de pontos

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

tal que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n = b \ .$$

Um REFINAMENTO DA PARTIÇÃO $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição Q de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$. Nesta situação diz-se que Q é MAIS FINA do que P.

Vamos denotar por $\mathscr{P}[a, b]$ o conjunto de todas as partições de $[a, b]$.

É claro que no caso do intervalo degenerado $[a, a]$ só existe uma única partição: $P = \{a\}$.

É também imediato que se $P, Q \in \mathscr{P}[a, b]$, então $P \cup Q \in \mathscr{P}[a, b]$.

Definição 5.1.2

Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Então para uma qualquer partição P de $[a, b]$, definimos SOMA DE RIEMANN SUPERIOR DE f RELATIVAMENTE A P como sendo

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

onde x_i são os elementos da partição P. De forma análoga definimos A SOMA DE RIEMANN INFERIOR a ser

$$I(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \, .$$

Observemos que se $M_1 \leq f(x) \leq M_2$ em $[a,b]$ (i.e., M_1 é um minorante e M_2 é um majorante de f) então

$$M_1 \leq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq M_2$$

e daí

$$M_1(b-a) = \sum_{i=1}^{n} M_1(x_i - x_{i-1}) \leq I(f;P) \leq S(f;P) \leq \sum_{i=1}^{n} M_2(x_i - x_{i-1}) = M_2(b-a) \, .$$

Exemplo 5.1.3

Se a é um elemento do domínio de f, então f é limitada em $\{a\}$ e

$$I(f;\{a\}) = S(f;\{a\}) = 0 \, .$$

Lema 5.1.4

Se $P \subseteq P'$ são duas partições de $[a,b]$, então $I(f;P) \leq I(f;P')$.

Demonstração. Dado que P' é um conjunto finito que contém P, então P' pode ser obtido de P por adição de um número finito de pontos (um de cada vez). Em consequência, se tivermos oportunidade de mostrar que (em geral) adicionar um único ponto numa partição P tem como consequência que a soma Riemann inferior não diminui, então quando se adiciona um número finito de pontos (um após o outro) também não vai diminuir a soma de Riemann inferior em relação ao seu valor inicial.

Assim sendo, sem perca de generalidade, suponhamos que P' é obtida de P pela adição de um único ponto adicional y. Se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, então tem de existir um k entre 1 e n tal que $x_{k-1} < y < x_k$. Em consequência, escrevendo $m_i = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

$$I(f;P) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e adicionalmente

$$m_k = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

é mais pequeno ou igual a ambos

$$m^{(1)} = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, y]\} \quad \text{e} \quad m^{(2)} = \inf\{f(x) \,:\, x \in [y, x_k]\}\,.$$

Nestas circunstâncias, vem

$$m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(x_k - y) + m_k(y - x_{k-1}) \leq m^{(1)}(x_k - y) + m^{(2)}(y - x_{k-1})$$

Então $I(f;P)$ é majorado por

$$\sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m^{(1)}(x_k - y) + m^{(2)}(y - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

e este último valor é precisamente $I(f;P')$. □

Corolário 5.1.5

Se $P \subseteq P'$ são duas partições de $[a,b]$ então $S(f;P) \geq S(f;P')$.

Demonstração. Dado que para qualquer conjunto C, se tem

$$\inf\{-x \,:\, x \in C\} = -\sup\{x \,:\, x \in C\}\,,$$

decorre daqui que $I(-f;P) = -S(f;P)$ para qualquer partição P e função limitada f. Então, por uso do Lema 5.1.4 aplicado a $-f$, temos que

$$S(f;P) = -I(-f;P) \geq -I(-f;P') = S(f;P')\,.$$

□

Definição 5.1.6

Diremos que $I(f;P) \to l$, ou que $\lim_P I(f;P) = l$, se para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma partição P_0 tal que $|I(f;P) - l| < \epsilon$ para todas as partições $P \supseteq P_0$ em $\mathscr{P}[a,b]$.

Corolário 5.1.7

Para toda a função limitada f em $[a,b]$, $\lim_P I(f;P)$ existe e é igual a

$$\sup\{I(f;P) \ : \ P \in \mathscr{P}[a,b]\}\,.$$

Demonstração. No caso particular do intervalo degenerado $[a,b] = \{a\}$ o resultado é obvio. Podemos portanto assumir que $a < b$ e desenvolver a demonstração neste caso.

Dado que f é limitada, para qualquer partição P, temos

$$I(f;P) \leq S(f;P) \leq S(f;P_0) = \sup\{f(x) \ : \ x \in [a,b]\}\ (b-a)$$

onde $P_0 = \{a,b\}$ (uma vez que no caso em análise qualquer outra partição de $[a,b]$ tem de conter P_0). Então, conclui-se daqui que a colecção $I(f;P)$ é majorada. Seja $\eta = \sup\{I(f;P) \ : \ P \in \mathscr{P}[a,b]\}$. Iremos verificar que $I(f;P)$ converge de facto para η.

Seja $\epsilon > 0$ dado. Atendendo à definição de η e à definição de supremo, resulta que existe uma P' tal que $I(f;P') > \eta - \epsilon$. Mas então dada uma qualquer $P \supseteq P'$, por uso do Lema 5.1.4 temos

$$\eta \geq I(f;P) \geq I(f;P') > \eta - \epsilon$$

e assim $|I(f;P') - \eta| < \epsilon$ para toda $P \supseteq P'$, ficando deste modo demonstrada a convergência. □

Corolário 5.1.8

Para funções limitadas f em $[a,b]$, o limite $\lim_P S(f;P)$ existe e é igual a

$$\inf\{S(f;P) \ : \ P \in \mathscr{P}[a,b]\}$$

Demonstração. Já anteriormente observamos que $S(f;P) = -I(-f;P)$ para quaisquer funções limitadas f e todas as partições P. Em consequência, por uso do Corolário 5.1.7, tem-se $-S(f;P) = I(-f;P)$ a convergir para

$$\begin{aligned} \sup\{I(-f;P) \,:\, P \in \mathscr{P}[a,b]\} &= \sup\{-S(f;P) \,:\, P \in \mathscr{P}[a,b]\} \\ &= -\inf\{S(f;P) \,:\, P \in \mathscr{P}[a,b]\} \end{aligned}$$

e assim sendo conclui-se que $S(f;P)$ converge para $\inf\{S(f;P) \,:\, P \in \mathscr{P}[a,b]\}$. □

5.2 Funções integráveis à Riemann

Definição 5.2.1

Uma função definida e limitada em $[a,b]$ diz-se INTEGRÁVEL À RIEMANN se

$$\lim_P S(f;P) = \lim_P I(f;P)$$

e neste caso o integral de Riemann de f em $[a,b]$ é definido por este valor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_P S(f;P) = \lim_P I(f;P)\,.$$

Dizemos neste caso que $\int_a^b f(x)\,dx$ é o integral definido de f entre a e b; f representa a chamada FUNÇÃO INTEGRANDA, x designa-se por VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO, dx o ACRÉSCIMO INFINITÉSIMAL associado a $\lim_P (x_j - x_{j-1})$ e a e b denominam-se por LIMITE INFERIOR E LIMITE SUPERIOR DE INTEGRAÇÃO, respectivamente.

Exemplo 5.2.2

Sejam f e $\{a\}$ tal como no Exemplo 5.1.3. Naturalmente, segundo a definição acabada de introduzir, temos que f é integrável em $\{a\}$ e

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Teorema 5.2.3

As funções contínuas num intervalo $[a,b]$ são integráveis à Riemann em $[a,b]$.

Demonstração. Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Dado que f é contínua em $[a, b]$ então f é uniformemente contínua. Consequentemente, dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ para todo } |x - y| < \delta\,.$$

Seja agora P_0 uma qualquer partição de $[a, b]$ onde a distância entre pontos consecutivos é sempre menor que δ. Note-se que tal sucede se, por exemplo, tomarmos $n > (b - a)/\delta$ e sendo

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Fixando P_0, decorre que se $P \supseteq P_0$ então a distância entre pontos consecutivos de P é sempre menor que δ. Então, para quaisquer $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, vem

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \epsilon\,.$$

Se fixarmos $y \in [x_{i-1}, x_i]$, enquanto deixamos x variar, tem-se

$$\sup\{f(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\} - f(y) \leq \epsilon\,.$$

Isto é válido para todo $y \in [x_{i-1}, x_i]$ e portanto podemos agora deixar y variar;

$$\sup\{f(x) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\} - \inf\{f(y) \;:\; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \leq \epsilon\,.$$

Multiplicando por $x_i - x_{i-1}$ e somando, obtemos

$$S(f; P) - I(f; P) \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a)\,.$$

Isto mostra que $\lim_P (S(f; P) - I(f; P)) = 0$. Decorre daqui que

$$\begin{aligned}
\lim_P S(f; P) &= \lim_P (S(f; P) - I(f; P) + I(f; P)) \\
&= \lim_P (S(f; P) - I(f; P)) + \lim_P I(f; P) \\
&= \lim_P I(f; P)\,.
\end{aligned}$$

Tal significa que f é integrável à Riemann. $\square$

O integral de Riemann de uma função contínua e positiva entre a e b pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 5.2.4
A função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável à Riemann em nenhum intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

Vamos verificar a afirmação realizada no anterior exemplo.

Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma qualquer partição do intervalo $[a, b]$. Então para cada i, o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contém tanto racionais como irracionais, de tal modo que

$$\inf\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \quad \text{e} \quad \sup\{f(x) \ : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1\,.$$

Então

$$I(f; P) = 0$$

e

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a\,.$$

Consequentemente, a soma inferior de Riemann é 0 e a soma superior de Riemann é $b-a$. Portanto, de acordo com a definição de integral de Riemann, f não é integrável à Riemann em $[a, b]$.

Exercício 5.2.5
Justifique que a função g real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável à Riemann em nenhum intervalo $[a, b]$, com $a < b$.

Como observação, gostaríamos de salientar que existem outros conceitos de integração (mais gerais do que a presente definição de integração segundo Riemann, como por exemplo a *integração segundo Lebesgue*) onde a função do exemplo anterior é integrável e o seu integral em $[a, b]$ é o mesmo da função constante igual a -1. Isto ocorre porque o conjunto onde g difere da função constante -1 (no caso, $\mathbb{Q}$) é, em certo sentido, "pequeno". Por outras palavras, estas duas funções são iguais "em quase todo o ponto", logo, é razoável que tenham o mesmo integral. Note-se no entanto que o aqui referido sentido de "pequeno" e "quase todo o ponto" não é o de cardinalidade mas estes estão relacionados.

Exemplo 5.2.6
A função $f(x) = x$ é integrável em $[0, 1]$ e

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

Verifiquemos a afirmação contida no exemplo anterior. A circunstância de f ser integrável em $[0, 1]$ decorre directamente do facto de f ser uma função contínua e do Teorema 5.2.3. Provemos então que o correspondente integral tem por valor $1/2$.

Fixemos temporariamente $n \in \mathbb{N}$ e consideremos a partição P obtida pela divisão de $[a, b] = [0, 1]$ em n intervalos de igual amplitude. É claro que

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_i \qquad \text{e} \qquad \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = x_{i-1}$$

e assim (dado que $x_i = a + i(b-a)/n = i/n$) vem

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}$$

e de forma análoga

$$I(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}\,.$$

Sabemos que para todo $P' \supseteq P$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{n-1}{n} \leq I(f;P') \leq S(f;P') \leq \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\,.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos n o suficientemente grande para garantir que

$$\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} < \frac{1}{2} + \epsilon$$

e isto mostra que as somas superior e inferior de Riemann convergem ambas para $1/2$.

5.3 Redes indexadas por partições

Definição 5.3.1

Suponhamos que $\{x_P \,:\, P \in \mathscr{P}[a,b]\}$ é uma família de números reais indexada por partições P de $[a,b]$. Dizemos que $x_P \to x$, ou $\lim_P x_P = x$ se, dado um qualquer $\epsilon > 0$ existe uma $P_0 \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que

$$|x_P - x| < \epsilon$$

para todo $P \supseteq P_0$ em $\mathscr{P}[a,b]$. Adicionalmente, uma família de números reais indexada por $\mathscr{P}[a,b]$ é designada por rede.

Lema 5.3.2

Suponhamos que x_P e y_P são redes indexadas por $P \in \mathscr{P}[a,b]$ e que $x_P \to x$ e $y_P \to y$. Então

(i) $x_P + y_P \to x + y$,

(ii) $x_P\, y_P \to xy$,

(iii) $c\, x_P \to c\, x$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$, *e*

(iv) $x_P/y_P \to x/y$ *(desde que* $y \neq 0$*).*

Demonstração. A prova é verdadeiramente semelhante ao que ocorre nas sucessões com a mera diferença entre os conceitos de sucessão e de rede. Realizaremos neste texto somente o primeiro caso (os demais ficam como exercício para os alunos).

Dado $\epsilon > 0$, atendendo à hipótese podemos encontrar partições P_0 e P_1 tais que

$$|x_P - x| < \epsilon/2 \text{ para todo } P \supseteq P_0$$

e

$$|y_P - y| < \epsilon/2 \text{ para todo } P \supseteq P_1\,.$$

Assim sendo, note-se que o conjunto de pontos $P_2 = P_0 \cup P_1$ também é uma partição de $[a, b]$, e, obviamente, qualquer conjunto que contém P_2, contém também P_0 e P_1. Então

$$|x_P - x| < \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad |y_P - y| < \epsilon/2$$

são ambas verificadas quando $P \supseteq P_2$ e então

$$|(x_P + y_P) - (x + y)| \leq |x_P - x| + |y_P - y| < \epsilon$$

para toda $P \supseteq P_2$, o que prova a primeira proposição. □

Lema 5.3.3 (Lema das Redes Enquadradas)
Suponhamos que x_P e y_P são duas redes indexadas por $P \in \mathscr{P}[a, b]$ e que ambas convergem para $c \in \mathbb{R}$, e que

$$x_P \leq z_P \leq y_P$$

para todo $P \in \mathscr{P}[a, b]$. Então, também sucede que $z_P \to c$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese existem partições P_0 e P_1 tais que

$$|x_P - c| < \epsilon/2 \text{ para todo } P \supseteq P_0$$

e

$$|y_P - c| < \epsilon/2 \text{ para todo } P \supseteq P_1\,.$$

O conjunto dos pontos $P_2 = P_0 \cup P_1$ também é uma partição de $[a, b]$ e naturalmente qualquer conjunto que contenha P_2 também contém P_0 e P_1. Então

$$|x_P - c| < \epsilon/2 \qquad \text{e} \qquad |y_P - c| < \epsilon/2$$

são ambos válidos para qualquer $P \supseteq P_2$ e assim

$$c - \epsilon < x_P \leq z_P \leq y_P < c + \epsilon\,.$$

Então, para todo $P \supseteq P_2$, temos $|z_P - c| < \epsilon$, conforme era desejado. $\square$

Como resultado da definição de integral segundo Riemann, observemos que se f é integrável à Riemann então a rede

$$r_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

converge para $\int_a^b f(x)\,dx$.

5.4 Linearidade do integral de Riemann

Proposição 5.4.1

Se f e g são integráveis à Riemann em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável à Riemann e

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Comecemos por observar que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x) + g(x)] \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$$

e que

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x) + g(x)] \geq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)\,.$$

Portanto,

$$I(f;P)+I(g;P)\le I(f+g;P)\le S(f+g;P)\le S(f;P)+S(g;P) \qquad (5.4.1)$$

para toda a partição P. Dado que f e g são integráveis à Riemann, usando o Lema 5.3.2 concluímos que $I(f;P)+I(g;P)$ e $S(f;P)+S(g;P)$ convergem ambas para o mesmo valor (que é $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$). Usando agora o Lema 5.3.3, temos que $S(f+g;P)$ e $I(f+g;P)$ convergem ambas para esse mesmo valor. Pela definição, tal significa que $f+g$ é integrável à Riemann e que $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)+g(x)\,dx$. □

Proposição 5.4.2

Se f é integrável à Riemann em $[a,b]$ e $c\in\mathbb{R}$, então cf é também integrável à Riemann e

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Se $c=0$, a propriedade é trivial.

No caso em que $c>0$, temos

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} c\,f(x) = c\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} c\,f(x) = c\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,.$$

Se $c<0$, então

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} c\,f(x) = c\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} c\,f(x) = c\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,.$$

Na primeira situação, vem

$$c\,I(f;P)\le I(c\,f;P)\le S(c\,f;P)\le c\,S(f;P)\,,$$

enquanto que na segunda temos

$$c\,S(f;P)\le I(c\,f;P)\le S(c\,f;P)\le c\,I(f;P)\,.$$

Em qualquer um do casos, o Lema 5.3.3 (dado que f é integrável) garante que as somas de Riemann superior e inferior de $c\,f$ convergem para $c\,\lim_P S(f;P) =$

$c \int_a^b f(x)\,dx$. Por definição, $\lim_P S(c\,f;P) = \int_a^b c\,f(x)\,dx$, e portanto a demonstração fica concluída. □

Após as últimas duas proposições, o mais natural é questionarmo-nos sobre o que se passará com o produto e o quociente de funções integráveis. Observamos, desde já, que o quociente de funções limitadas pode não ser limitado (quando o denominador tende a zero em algum ponto). Tal invalida portanto um resultado que garanta a integrabilidade do quociente de duas funções integráveis. Sobre o produto, será preferível adiar um pouco esta questão (e tal será tratada na Proposição 5.9.7).

5.5 Integrabilidade de funções escada

Definição 5.5.1

Uma função f definida em $[a,b]$ é designada por FUNÇÃO ESCADA se existe uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ e números reais c_i tais que

$$f(x) = c_i \text{ para todo } x \in (x_{i-1}, x_i)\,.$$

Nos pontos x_i, $f(x_i)$ pode tomar ou o valor c_i ou c_{i+1}.

Proposição 5.5.2

As funções escada são integráveis à Riemann e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})\,.$$

Demonstração. Qualquer função escada pode ser escrita como uma combinação linear de funções escada com um único "degrau" (ou seja, a correspondente partição possui somente três pontos). Atendendo a tal, basta realizar a demonstração neste caso e aplicar as Proposições 5.4.1 e 5.4.2.

Suponhamos então que $f(x) = c_1$ em $[a,p[$ e $f(x) = c_2$ em $]p,b]$ e que $f(p)$ é ou c_1 ou c_2. Teremos então de tratar da descontinuidade no ponto p. Seja dado $\epsilon > 0$ e escolham-se pontos $p' < p < p''$ tais que $p'' - p' < \epsilon$ no caso em que $p \neq a, b$ (no caso extremo de $p = a$, tomamos $p' = a$ e no segundo caso extremo $p = b$ tomamos

$p'' = b$). Seja P_0 a partição $\{a, p', p'', b\}$. Observemos que

$$\begin{aligned} S(f; P_0) &= c_1(p' - a) + \max\{c_1, c_2\}(p'' - p') + c_2(b - p'') \\ &= c_1(p - a) + c_2(b - p) - c_1(p - p') - c_2(p'' - p) + \max\{c_1, c_2\}(p'' - p') \\ &\leq c_1(p - a) + c_2(b - p) + 3C\epsilon\,, \end{aligned}$$

onde $C = \max\{|c_1|, |c_2|\}$. Analogamente

$$I(f; P_0) \geq c_1(p - a) + c_2(b - p) - 3C\epsilon\,.$$

Tendo em conta o Lema 5.1.4 e o Corolário 5.1.5, decorre que

$$c_1(p - a) + c_2(b - p) - 3C\epsilon < I(f; P) \leq S(f; P) < c_1(p - a) + c_2(b - p) + 3C\epsilon$$

para todo $P \supseteq P_0$. Então f é integrável à Riemann e

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_1(p - a) + c_2(b - p)\,.$$

□

Exemplo 5.5.3
Através da definição é imediato verificar que

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)\,.$$

5.6 Teorema fundamental do cálculo integral

Teorema 5.6.1 (Teorema fundamental do cálculo integral)
Seja f uma função integrável à Riemann em $[a, b]$ e suponha que existe uma função diferenciável F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,. \tag{5.6.2}$$

Note-se que na última fórmula, $F(x)\Big|_a^b$ é uma mera notação para abreviar $F(b) - F(a)$. Em alternativa, também é usual utilizar-se a notação $[F(x)]_a^b$ para o mesmo valor.

A identidade (5.6.2) também é conhecida por *Fórmula de Barrow*.

Demonstração. Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Dado que F é diferenciável em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então, pelo Teorema de Lagrange, existe um $x_i' \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i')(x_i - x_{i-1}) = f(x_i')(x_i - x_{i-1})\,. \tag{5.6.3}$$

Seja c_P a rede que se obtém através da formação de

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1})$$

para cada partição P. Naturalmente, $I(f;P) \leq c_P \leq S(f;P)$ e então pelo Lema 5.3.3, dado que f é integrável à Riemann, vem

$$\lim_P c_P = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

No entanto, atendendo a (5.6.3), temos

$$c_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big)$$

que é uma soma telescópica, igual a $F(b) - F(a)$ para toda a partição P. Então $c_P = F(b) - F(a)$ para toda P, ficando assim o resultado demonstrado. □

As condições do teorema anterior devem ser lidas com cuidado. Por exemplo, saliente-se que o teorema anterior não diz que se F é diferenciável, então $f = F'$ é integrável. De facto, Vito Volterra[1] encontrou um exemplo de função diferenciável, porém, não integrável.

[1] Vito Volterra: nascido a 03/05/1860, em Ancona, Itália e falecido a 11/10/1940, em Roma, Itália.

Exemplo 5.6.2

Para se calcular por exemplo $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$, como sabemos que $(\sin(x))' = \cos(x)$ (sendo cos uma função contínua logo integrável), por uso do Teorema 5.6.1 sai directamente que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx &= \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \sin(\pi/2) - \sin 0 \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Exemplo 5.6.3

Para calcular $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$, pode-se começar por observar que $-\cos(x)$ é uma primitiva de $\sin(x)$. Então, por uso do Teorema 5.6.1, vem

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx &= -\cos(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) - (-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

5.7 Integração por partes

Uma importante técnica de integração que é frequentemente usada no cálculo de integrais é a designada "integração por partes". Tal passa por encarar a função integranda como o produto de duas funções (muitas vezes até interpretando muito simplesmente que $h = 1 \cdot h$) e por isso mesmo tal propriedade baseia-se basicamente na regra de derivação do produto de duas funções, conforme iremos observar de seguida.

Teorema 5.7.1 (Integração por partes para o integral de Riemann)
Sejam f e g diferenciáveis em $[a,b]$, com f' e g' integráveis em $[a,b]$. Então,

$$\int_a^b f'(x)g(x)\;dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\;dx\;.$$

Demonstração. Este resultado segue directamente do uso da regra de derivação do produto de duas funções ($(fg)' = f'g + fg'$), do Teorema Fundamental do Cálculo e da linearidade do integral de Riemann (neste caso pela Proposição 5.4.1), pois atendendo a tal obtém-se:

$$
\begin{aligned}
f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b [f(x)g(x)]' \, dx \\
&= \int_a^b \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) \, dx \\
&= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \,.
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 5.7.2 Para calcularmos $\int_1^{50} \ln(x) \, dx$ podemos começar por imaginar que a nossa função integranda é o produto de $f(x) = 1$ por $g(x) = \ln x$. Em tal situação estamos em condições de aplicar o Teorema 5.7.1 (justifique porquê). Assim sendo, temos

$$
\begin{aligned}
\int_1^{50} \ln(x) \, dx &= x \; \ln(x)|_1^{50} - \int_1^{50} x \frac{1}{x} \, dx \\
&= 50 \; \ln(50) - 0 - \int_1^{50} 1 \, dx \\
&= 50 \; \ln(50) - 49 \,.
\end{aligned}
$$

5.8 Teoremas de média para o integral de Riemann

Teorema 5.8.1 (Primeiro teorema de valor médio integral)
Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, em que g possui sinal constante em $[a, b]$. Nestas condições existe um $c \in \,]a \;, b[$ tal que

$$
\int_a^b f(x)g(x) \, dx = f(c) \int_a^b g(x) \, dx.
$$

Demonstração. Se g é identicamente nula então não há nada a provar. Analogamente, se f é constante em $[a, b]$ não resta nada para provar (a identidade é trivial).

Nas restantes possibilidades, g é sempre estritamente positiva ou estritamente negativa no intervalo $[a, b]$. Consideremos

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x)\,, \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Então

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} < M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, existe um $c \in]a, b[$ tal que

$$f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx},$$

ficando assim o resultado demonstrado. $\square$

Corolário 5.8.2 (Teorema da média)
Se f é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\ .$$

Demonstração. Usando-se o Teorema 5.8.1 no caso particular em que $g(x) = 1$, obtém-se o presente resultado. $\square$

Teorema 5.8.3 (Segundo teorema de valor médio integral)
Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$, e com g a ser monótona em $[a, b]$. Então existe um $c \in\ ]a\ , b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Demonstração. Construa-se $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Temos por construção que $F'(x) = f(x)$. Assim,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

e consequentemente

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Pelo Primeiro Teorema de Valor Médio Integral e pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe um $c \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(c)\int_a^b g'(x)\,dx = F(c)(g(b) - g(a)).$$

Reunindo agora todos os dados já obtidos, tem-se

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(c)(g(b) - g(a))\\ &= g(b)(F(b) - F(c)) + g(a)(F(c) - F(a))\\ &= g(b)\textstyle\int_c^b f(x)\,dx + g(a)\int_a^c f(x)\,dx,\end{aligned}$$

conforme era desejado. $\square$

5.9 Propriedades adicionais do integral de Riemann

Iremos usar as notações:

$$\lim_P S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e

$$\lim_P I(f;P) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,.$$

Observe-se que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e que os dois são iguais se e só se f é integrável à Riemann (e em tal caso estes valores são iguais ao integral de Riemann de f).

Proposição 5.9.1

Se f é integrável à Riemann em $[a,b]$ e $a < c < b$, então f é integrável à Riemann *em* $[a,c]$ *e em* $[c,b]$, *e*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{5.9.4}$$

Demonstração. Dada uma partição P de $[a,b]$, podemos adicionar-lhe o ponto c, no caso deste já não estar em P, obtendo assim uma nova partição P' a qual inclui c. Note-se que $S(f;P')$ é a soma das somas superiores de Riemann de f em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Então

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx \le S(f;P') \le S(f;P)\,. \tag{5.9.5}$$

Analogamente,

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx \ge I(f;P') \ge I(f;P)\,. \tag{5.9.6}$$

Consequentemente,

$$0 \le \left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right) \le S(f;P) - I(f;P)\,. \tag{5.9.7}$$

Atendendo a que por hipótese f é integrável à Riemann, tomando o limite da rede $S(f;P) - I(f;P)$ que aparece em (5.9.7), vem que este limite é igual a zero. Assim sendo, de (5.9.7) decorre que

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx\right) + \left(\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx\right) = 0\,. \tag{5.9.8}$$

No entanto, dado que tanto $\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx$ como $\overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$ são não negativos, a condição (5.9.8) implica na realidade que

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_c^b} f(x)\,dx - \underline{\int_c^b} f(x)\,dx = 0\,.$$

Tal significa portanto que f é integrável à Riemann em $[a,c]$ e em $[c,b]$. Adicionalmente, tomando novamente em conta (5.9.5) e (5.9.6), temos

$$I(f;P) \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq S(f;P)$$

e portanto, tomando o limite, observamos que a soma destes integrais é igual a $\int_a^b f(x)\,dx$. □

Seja f uma função limitada e integrável à Riemann em $[0,b]$. Se $0 < a < b$, então, pela proposição anterior,

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx\,. \tag{5.9.9}$$

Do resultado obtido no Exemplo 5.1.3, obtemos que (5.9.9) também é válida para $a = 0$ ou $a = b$. Suponhamos agora que $0 < b < a$. Neste caso, (5.9.9) perde o sentido pois o segundo termo do lado direito não está definido. Entretanto, se f é limitada e integrável à Riemann em $[0,a]$, então, novamente pela proposição anterior, podemos dizer que

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx\,,$$

ou seja,

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_b^a f(x)dx\,. \tag{5.9.10}$$

Comparando (5.9.10) com (5.9.9), concluímos que só existe uma forma de definir o integral de a até b, com $b < a$, para que (5.9.9) faça sentido também em tal caso. Esta constatação serve portanto de motivação para a próxima definição.

Definição 5.9.2
Seja f integrável em $[a,b]$ (com $a < b$). O integral à Riemann de f de b até a é definido por

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,.$$

Realizada esta definição, temos a seguinte generalização para (5.9.4).

Proposição 5.9.3

Seja f integrável em $[\alpha, \beta]$. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in [\alpha, \beta]$.

Este resultado é uma consequência da Proposição 5.9.1 e da Definição 5.9.2 (verifique tal).

Proposição 5.9.4

Se f e g são funções integráveis à Riemann em $[a, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, então $f(x_i) \leq g(x_i)$ para todo i e consequentemente

$$c_P(f) := \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(x_i)(x_i - x_{i-1}) =: c_P(g)\,.$$

Dado que f e g são integráveis à Riemann, aquelas duas redes convergem respectivamente para os integrais de f e g, obtendo-se assim o resultado. □

Proposição 5.9.5

Se f é integrável à Riemann em $[a, b]$, então $|f|$ também é integrável à Riemann em $[a, b]$ e

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Demonstração. Iremos usar a seguinte forma da desigualdade triangular:

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,.$$

Se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$, então para todo $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, tem-se

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

e daí,

$$\sup_{s\in[x_{i-1},x_i]} |f(s)| - \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} |f(t)| \le \sup_{s\in[x_{i-1},x_i]} f(s) - \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)\,.$$

Multiplicando por $x_i - x_{i-1}$ e somando (em ordem a i), obtemos

$$0 \le S(|f|;P) - I(|f|;P) \le S(f;P) - I(f;P)\,.$$

Dado que f é integrável à Riemann, a rede da direita converge para zero, e então (por uso do Lema 5.3.3) concluímos que a rede do meio converge para zero. Tal significa que

$$\lim_P S(|f|;P) = \lim_P I(|f|;P)$$

e portanto que $|f|$ é integrável à Riemann.

Adicionalmente, $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ e assim (atendendo à Proposição 5.9.4), temos

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

o que é equivalente à desigualdade exibida na tese. $\square$

Note-se que a recíproca da proposição anterior é falsa. Ou seja, $|f|$ pode ser limitada e integrável em $[a,b]$, sem que f seja integrável neste intervalo (no sentido de Riemann). Por exemplo, considere a função f dada por $f(x)=1$, se $x\in\mathbb{Q}$, e $f(x)=-1$ se $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Já sabemos (cf. Exercício 5.2.5) que f não é integrável segundo Riemann (por exemplo) em $[0,1]$. Porém, a função $|f|$ é constante (igual a 1) e, portanto, integrável segundo Riemann neste intervalo. Este é um exemplo de desvantagem do integral de Riemann em relação à integração no sentido de Lebesgue: f é integrável a Lebesgue se, e somente se, $|f|$ também é.

Proposição 5.9.6

Todas as funções monótonas são integráveis à Riemann.

Demonstração. Relativamente às funções constantes, já sabemos que estas são integráveis (cf. Exemplo 5.5.3). Suponhamos por simplicidade de tratamento (e que não afecta a generalidade do resultado) que f é uma função não constante e monótona crescente em $[a,b]$.

Dado $\epsilon > 0$, seja P_0 uma partição de $[a,b]$ onde as amplitudes dos intervalos definidos pela partição são todas menores do que $\epsilon/(|f(b)-f(a)|)$. Note-se que $|f(b)-f(a)| \neq 0$ dada a circunstância de estarmos a trabalhar com funções não constantes e monótonas.

Se $P \supseteq P_0$, então

$$\begin{aligned} S(f;P) - I(f;P) &\leq S(f;P_0) - I(f;P_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\epsilon}{|f(b)-f(a)|} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \epsilon\,, \end{aligned}$$

ficando assim provado o que se desejava. □

Proposição 5.9.7

Se f e g são ambas integráveis à Riemann no intervalo $[a,b]$, então fg também é integrável à Riemann em $[a,b]$.

Demonstração. Vamos começar por demonstrar que o quadrado de uma função integrável à Riemann é também integrável à Riemann. Observe-se que

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x)]^2 = \left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right]^2$$

e

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} [f(x)]^2 = \left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right]^2 .$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} S(f^2;P) - I(f^2;P) &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right]^2 - \left[\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right]^2 \right\} (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right) \\ &\quad \times \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)| \right) (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq 2M \left[S(|f|;P) - I(|f|;P) \right] \end{aligned}$$

(onde M é um majorante para f). Pela Proposição 5.9.5 já sabemos que $|f|$ é integrável e, em consequência, a rede $S(|f|;P)-I(|f|;P)$ converge para zero. Usando agora o Lema 5.3.3, concluímos que a rede $S(f;P)-I(f;P)$ também converge para zero.

Demonstramos até agora que o quadrado de uma função integrável à Riemann é também integrável à Riemann. Adicionalmente, também já sabemos que se f e g são integráveis à Riemann, então f, g e $f+g$ são também integráveis à Riemann. Decorre então daqui que

$$(f+g)^2 - f^2 - g^2 = 2fg$$

é integrável à Riemann, e portanto fg é integrável à Riemann, conforme pretendíamos provar. $\square$

Apesar da importância do resultado anterior, deve-se notar que é errado afirmar que o integral do produto é o produto dos integrais (procure um contra-exemplo).

5.10 Integral indefinido

Definição 5.10.1

Seja f uma função integrável à Riemann no intervalo $[a,b]$. Para cada $x \in [a,b]$ defina-se a nova função F como sendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,.$$

A esta função F chamaremos INTEGRAL INDEFINIDO DE f EM $[a,b]$.

Proposição 5.10.2

Seja f uma função integrável à Riemann no intervalo $[a,b]$. Então o seu integral indefinido, F, é uma função contínua em $[a,b]$.

Demonstração. Se f é uma função integrável à Riemann no intervalo $[a,b]$, então tem de aí ser limitada. Suponhamos então que $|f(x)| \leq M$ para todo o $x \in [a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/M$ e suponhamos que $a \leq x \leq y \leq b$ e $|x-y| < \delta$. Então, a

Proposição 5.9.1 permite-nos concluir que

$$\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt = \int_a^y f(t)\,dt$$

e portanto

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt\,.$$

Tendo adicionalmente em conta a Proposição 5.9.5, decorre ainda que

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt = M(y-x) < M\delta = \epsilon\,.$$

Para o caso em que $y < x$, o correspondente resultado também se verifica por troca dos papeis de de x e y. $\square$

Teorema 5.10.3

Seja f uma função integrável à Riemann no intervalo $[a,b]$ e denote-se por F o seu integral indefinido em $[a,b]$. Para um qualquer ponto $x_0 \in [a,b]$, se f contínua em x_0 então F é diferenciável em x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstração. Iremos trabalhar com a quantidade

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)$$

e mostrar que o seu limite é zero quando x tende para x_0 (ficando assim o resultado demonstrado). Suponhamos inicialmente que $x > x_0$ e observemos que

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

pela Proposição 5.9.1, de tal modo que se tem

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt\,.$$

Por outro lado,

$$\int_{x_0}^x f(x_0)\,dt = f(x_0)(x - x_0)$$

e assim,

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t)-f(x_0))\,dt\,.$$

Adicionalmente, pela Proposição 5.9.5, vem

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t)-f(x_0)|\,dt\,.$$

Assim sendo, atendendo a que por hipótese f é contínua em x_0, para um qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < \delta$. Então, para $x_0 < x < x_0 + \delta$, pela Proposição 5.9.4, decorre que

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \epsilon\,dt = \epsilon\,.$$

Um argumento similar baseado em $\int_x^{x_0}(f(t) - f(x_0))\,dt$ permite mostrar o correspondente resultado quando se supõe $x_0 - \delta < x < x_0$. □

Do último resultado decorre imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 5.10.4

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$. Então $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(t) = c + \int_a^t f(x)\,dx \qquad (t \in [a, b])$$

é diferenciável em $[a, b]$ e $G' = f$.

5.11 Integração à Riemann por mudança de variável

Teorema 5.11.1 (Integração por mudança de variável)

Seja φ uma função com derivada contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Se f é contínua em $\varphi([a, b])$, então $f \circ \varphi$ também é contínua em $[a, b]$ e

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Demonstração. Escolha-se $c \in]a, b[$ e construa-se $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(u)\,du$. Do Corolário 5.10.4 decorre que $F'(x) = f(x)$, para todo o x no intervalo em causa.

Consideremos agora $\omega(t) := F(\varphi(t))$. Pela regra da cadeia, vem $\omega' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Em consequência, usando a Proposição 5.9.3 e a Definição 5.9.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)\,dt &= \int_a^b \omega'(t)\,dt \\
&= \omega(b) - \omega(a) \\
&= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\
&= \int_c^{\varphi(b)} f(x)\,dx - \int_c^{\varphi(a)} f(x)\,dx \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

conforme era desejado. $\square$

5.12 Exercícios

1. Estude quanto à integrabilidade, nos respectivos domínios, as seguintes funções:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} \ln|x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

   (d) $i(x) = \begin{cases} \tan x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

   (e) $j(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1, 5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1, 5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Seja $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

   A função g é integrável em $[0, 2]$? Em caso afirmativo calcule $\displaystyle\int_0^2 g(x)\, dx$.

3. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

4. Determine a derivada da função F_j $(j = 1, \ldots, 9)$ dada por:

$$F_1(x) = \int_1^x \ln t\, dt$$

$$F_2(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\, dt$$

$$F_3(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$$

$$F_4(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt$$

$$F_5(x) = \int_{x^2+1}^{\sin x} t \cos t\, dt$$

$$F_6(x) = x^3 \int_1^x e^{-s^2}\, ds$$

$$F_7(x) = \int_0^x (x-s)e^{-s^2}\, ds$$

$$F_8(x) = \int_1^x \left(\sin(s^2) + e^{-s^2}\right) ds$$

$$F_9(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(s^2+1)\, ds$$

5. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} (x+1)^2 \arcsin t\, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Calcule $F'(x)$.

6. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

7. Seja F a função dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

8. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
   Mostre que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$

   admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

9. A probabilidade P de que um frequencímetro digital manufacturado por uma companhia electrónica dure entre 2 e 3 anos, com um uso normal, é dada aproximadamente por

$$P = \int_2^3 12t^{-3}\, dt.$$

   (a) Calcule a probabilidade P.

   (b) Calcule x tal que

$$\int_2^x 12t^{-3}\, dt = 1.$$

10. Considere a função f dada por

$$f(x) = \int_x^{x^3} h(t)\, dt,$$

   onde h é uma função par. Mostre que f é uma função ímpar.

11. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \cos x \right)^2 dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x\sin(3x^2)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

(f) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_2^{\frac{7}{2}} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

(n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x\ln(3x)}\,dx$

(r) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int_1^{e} x\ln x\,dx$

(t) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

Capítulo 6

Integral de Riemann-Stieltjes

6.1 Definições básicas

Definição 6.1.1

Seja $P = \{x_0, x_2, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Um conjunto de pontos $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ tal que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, é designado por CONJUNTO DE PONTOS TESTE PARA P.

Definição 6.1.2

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, b]$. Consideremos uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ e seja $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ um conjunto de pontos teste para P. A SOMA PARCIAL DE RIEMANN-STIELTJES DE f EM RELAÇÃO A g é dada por

$$s_{P,\Xi}(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))\,.$$

Definição 6.1.3

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, b]$. Dizemos que f É INTEGRÁVEL À RIEMANN-STIELTJES EM RELAÇÃO A g EM $[a, b]$ se existir um $I \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, podemos sempre encontrar uma partição P_0 tal que para todas as partições $P \supseteq P_0$ se tem

$$|S_{P,\Xi}(f, g) - I| < \epsilon$$

para todo o conjunto Ξ de pontos teste de P. Neste caso, o valor de I é designado por INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES DE f EM RELAÇÃO A g, e escreveremos

$$I = \int_a^b f(x)\, dg(x)\,.$$

6.2 Integral de Riemann-Stieltjes versus Riemann

Proposição 6.2.1

Seja $g(x) = x$ em $[a, b]$. A função f é integrável segundo Riemann-Stieltjes em $[a, b]$ em relação à função g se e só se f é integrável em $[a, b]$ (segundo Riemann). Nestas circunstâncias e no caso de integrabilidade, as duas definições de integral coincidem.

Demonstração.

($\Leftarrow$) Suponhamos que f é integrável à Riemann em $[a, b]$ e designemos por A o valor do seu integral. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar uma partição P_0 tal que

$$A - \epsilon < I(f; P) \leq S(f; P) < A + \epsilon$$

para todo $P \supseteq P_0$. Se $P \supseteq P_0$ e $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é um qualquer conjunto de pontos teste para P, então é claro que

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq f(\xi_i) \leq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = M_i$$

para cada i. Dado que $x_i - x_{i-1} \geq 0$,

$$I(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f; P)$$

e portanto $|s_{P,\Xi}(f, g) - A| < \epsilon$. Tal mostra que f é integrável segundo Riemann-Stieltjes (em relação a $g(x) = x$) e que o seu integral segundo Riemann-Stieltjes é igual a A, que é o valor do integral de Riemann de f.

($\Rightarrow$) Suponhamos agora que f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a $g(x) = x$ em $[a, b]$, e denote-se por A o valor do correspondente integral de Riemann-

Stieltjes. Dado $\epsilon > 0$, existe uma partição P_0 tal que

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon$$

para qualquer partição $P \supseteq P_0$ e qualquer conjunto de pontos teste $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ para P. Fixemos temporariamente uma partição $P \supseteq P_0$. Dado que somos livres de tomar um qualquer conjunto de pontos teste para P, podemos pensar nos números ξ_i variando independentemente e considerar o ínfimo e o supremo das resultantes somas parciais de Riemann-Stieltjes em relação às variações dos ξ_i's. Dado que os termos $x_i - x_{i-1}$ são positivos, aumentando um qualquer $f(\xi_i)$ pela variação do ξ_i resulta num aumento da soma parcial de Riemann-Stieltjes. Consequentemente, o supremo de $s_{P,\Xi}(f, g)$ quando consideramos todas as possibilidades de escolha entre todos os possíveis conjuntos de pontos teste é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1})$$

o que é precisamente a soma de Riemann superior. Procedendo de forma análoga, chega-se também à conclusão que o ínfimo sobre todos os conjuntos de pontos teste coincide com a soma de Riemann inferior. Uma vez que sabemos que

$$A - \epsilon < s_{P,\Xi}(f, g) < A + \epsilon$$

para todo o conjunto Ξ de pontos teste de P, decorre que

$$A - \epsilon \leq I(f; P) \leq S(f; P) \leq A + \epsilon\,.$$

Permitindo agora que P varie, tal mostra que

$$\lim_P I(f; P) = \lim_P S(f; P) = A.$$

Logo, f é integrável à Riemann, e o integral de Riemann de f coincide com A, o qual é o integral de Riemann-Stieltjes (de f em relação a g).

□

6.3 Propriedades do integral de Riemann-Stieltjes

6.3.1 Cálculo com base na função de Heaviside

Definição 6.3.1

A FUNÇÃO DE HEAVISIDE é a função definida por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposição 6.3.2

Suponhamos que f é contínua à direita num ponto $c \in [a,b)$ (i.e. $\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$). Então f é integrável segundo Riemann-Stieltjes em relação a $g(x) = H(x-c)$ e

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(c)\,.$$

Demonstração. Seja dado $\epsilon > 0$. Por hipótese, sabemos que existe um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ para todo $c < x < c+\delta$. Seja $P_0 = \{a, c, c', b\}$ onde c' é um ponto em (c,b) com $c' < c+\delta$. Consideremos agora $P \supseteq P_0$ e seja Ξ um qualquer conjunto de pontos teste para P. Se $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, então existe um k com $1 \leq k \leq n$ e tal que $x_{k-1} = c$ e portanto $x_k \leq c' < c+\delta$.

Naturalmente, se $i < k$ então $x_i \leq c$ e portanto $g(x_i) = H(x_i - c) = 0$. Então $g(x_i) = g(x_{i-1}) = 0$ para todo $i < k$. Analogamente, se $i > k$ então $x_{i-1} > x_k = c$ (dado que $i-1 \geq k$) de tal modo que $g(x_i) - g(x_{i-1}) = 1-1 = 0$. Consequentemente, todos os termos de $s_{P,\Xi}(f,g)$ são zero, com excepção do termo para $i = k$, que toma o valor

$$f(\xi_k)(H(x_k - c) - H(0))\,.$$

Dado que $x_k > c$, tal significa que a soma parcial de Riemann-Stieltjes é igual a $f(\xi_k)$. Uma vez que $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \subset [c, c+\delta)$, decorre que

$$|s_{P,\Xi}(f,g) - f(c)| = |f(\xi_k) - f(c)| < \epsilon\,.$$

Atendendo à definição de integral de Riemann-Stieltjes, a anterior desigualdade permite-nos afirmar que f é integrável segundo Riemann-Stieltjes em relação a g e que o correspondente integral é igual a $f(c)$. □

6.3.2 Linearidade

A demonstração dos resultados desta subsecção são fortemente baseados nas correspondentes definições em uso e portanto ficam como exercício.

Proposição 6.3.3

Consideremos uma função f definida em $[a, b]$.

(i) *Se f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a g_1 e também em relação a uma segunda função g_2, então f também é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a $g_1 + g_2$ e*

$$\int_a^b f(x)\, d(g_1(x) + g_2(x)) = \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \int_a^b f(x)\, dg_2(x)\,.$$

(ii) *Se f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a g, e $c \in \mathbb{R}$, então f também é integrável à Riemann-Stieltjes em relação à função $c\,g$ e*

$$\int_a^b f(x)\, d(c\,g(x)) = c \int_a^b f(x)\, dg(x)\,.$$

Corolário 6.3.4

Seja f uma função em $[a, b]$ e consideremos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontos em $[a, b)$, e números reais $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Se f é contínua em cada x_i, então f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i H(x - x_i)$$

e

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)\,.$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i \ \textit{para}\ x_k < x \le x_{k+1}$$

Proposição 6.3.5

Sejam f_1, f_2 e g funções definidas em $[a, b]$ e consideremos ainda números reais r

e s. Se f_1 e f_2 são ambas integráveis à Riemann-Stieltjes em relação a g, então $rf_1 + sf_2$ é também integrável à Riemann-Stieltjes em relação a g e

$$\int_a^b [rf_1(x) + sf_2(x)]\; dg(x) = r\int_a^b f_1(x)\,dg(x) + s\int_a^b f_2(x)\,dg(x)\,.$$

6.3.3 Segunda comparação com o integral de Riemann

Iremos necessitar do seguinte lema técnico para uso na demonstração do importante resultado que se seguirá a este lema.

Lema 6.3.6
Se f é uma função definida em $[a,b]$ e $p_1, p_2 \in [a,b]$, então

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t) - \inf_{t\in[a,b]} f(t)\,.$$

Demonstração. Decorre directamente da definição de supremo e de ínfimo que $f(p_1) \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t)$ e $f(p_2) \geq \inf_{t\in[a,b]} f(t)$. Portanto,

$$f(p_1) - f(p_2) \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t) - \inf_{t\in[a,b]} f(t)\,.$$

De forma análoga, $f(p_2) \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t)$ e $f(p_1) \geq \inf_{t\in[a,b]} f(t)$, e assim:

$$f(p_2) - f(p_1) \leq \sup_{t\in[a,b]} f(t) - \inf_{t\in[a,b]} f(t)\,.$$

Juntando as duas conclusões aqui obtidas, chegamos à tese pretendida. □

Teorema 6.3.7
Consideremos duas funções f e g definidas em $[a,b]$ e tais que:

(i) *f é integrável no sentido de Riemann;*

(ii) *g é diferenciável em $[a,b]$;*

(iii) *g' é integrável à Riemann.*

Então f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a g e

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\,.$$

Demonstração. Seja $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Dado que g é diferenciável em $[x_{i-1}, x_i]$ decorre do Teorema de Lagrange que existe um $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

O conjunto dos pontos $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ assim obtido é um conjunto de pontos teste para P. Temos assim que dada uma partição P, podemos encontrar um conjunto de pontos teste Ξ (determinados por P) tal que

$$s_{P\,\Xi}(f, g) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = s_{P,\Xi}(fg', h)$$

onde $h(x) = x$ para todo x.

Dado que f e g' são integráveis à Riemann, por uso da Proposição 5.9.7 concluímos que o seu produto fg' é também integrável à Riemann. Atendendo agora à Proposição 6.2.1, concluímos que fg' é integrável à Riemann-Stieltjes em relação à função h. Então, dado um qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar uma partição P_0 tal que

$$\left| s_{P,\Xi}(fg', h) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \right| < \epsilon$$

para todo $P \supseteq P_0$. Decorre então que para cada $P \supseteq P_0$ podemos encontrar um conjunto de pontos teste Ξ tal que

$$\left| s_{P,\Xi}(f, g) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \right| < \epsilon\,. \tag{6.3.1}$$

Note-se no entanto que o resultado ainda não está demonstrado: falta mostrar que podemos alargar P_0 e tomar de facto arbitrários conjuntos de pontos teste em vez do acima considerado Ξ que foi obtido especificamente por uso do argumento que se baseou no uso do Teorema de Lagrange.

Suponhamos que $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ são dois conjuntos de pontos teste para a partição P. Então

$$\begin{aligned}
s_{P,\Lambda}(f,g) - s_{P,\Theta}(f,g) &= \sum_{i=1}^{n} (f(\lambda_i) - f(\theta_i))\,(g(x_i) - g(x_{i-1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f(\lambda_i) - f(\theta_i))\,g'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

onde $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ é o conjunto de pontos teste que foi acima obtido por consideração do Teorema de Lagrange. Por hipótese temos que g' é integrável à Riemann, logo limitada, digamos pelo número real K. Então,

$$\begin{aligned}
|s_{P,\Lambda}(f,g) - s_{P,\Theta}(f,g)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i) - f(\theta_i)|\,|g'(\xi_i)|\,(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq K \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i) - f(\theta_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq K \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

onde $M_i = \sup\{f(t) \ : \ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $m_i = \inf\{f(t) \ : \ t \in [x_{i-1}, x_i]\}$, atendendo ao Lema 6.3.6. A última desigualdade é na verdade equivalente a

$$|s_{P,\Lambda}(f,g) - s_{P,\Theta}(f,g)| \leq K(S(f;P) - I(f;P)) \tag{6.3.2}$$

onde $S(f;P)$ e $I(f;P)$ são as somas superior e inferior de Riemann de f em relação a P.

Consideremos um $\epsilon > 0$. Dado que f é integrável à Riemann, então existe uma partição P_1 tal que $S(f;P) - I(f;P) < \epsilon/K$ para toda $P \supseteq P_1$. Em particular, atendendo a (6.3.2), temos

$$|s_{P,\Lambda}(f,g) - s_{P,\Theta}(f,g)| < \epsilon \tag{6.3.3}$$

para todo $P \supseteq P_1$ e quaisquer conjuntos Λ e Θ de pontos teste para P. Consideremos $P_2 = P_0 \cup P_1$ (onde P_0 é a partição obtida acima na primeira parte da demonstração) e suponhamos que $P \supseteq P_2$ e Λ é um conjunto de pontos teste para P. Continuando a considerar Ξ como o conjunto dos pontos teste obtido acima por uso do Teorema de Lagrange, temos:

$$\begin{aligned}
\left| s_{P,\Lambda}(f,g) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \right| &\leq |s_{P,\Lambda}(f,g) - s_{P,\Xi}(f,g)| \\
&\quad + \left| s_{P,\Xi}(f,g) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \right| \\
&< 2\epsilon\,,
\end{aligned}$$

por uso de (6.3.1) e (6.3.3).

Dada a circunstância de esta desigualdade ser válida para toda a partição $P \supseteq P_2$, e escolhas arbitrárias de pontos teste, agora sim temos a demonstração concluída. □

Exemplo 6.3.8

Consideremos $g(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $g(x) = x^2 + 1$ se $x > 0$. Pretende-se calcular o integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dg(x).$$

Podemos começar por notar que podemos reescrever a definição da função g da seguinte forma: $g(x) = x^2 + H(x)$. Então, atendendo ao até agora estudado, temos

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dg(x) &= \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,d(x^2) + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dH(x) \\
&= \int_{-1}^{1} 2xe^{-x^2}\,dx + e^0 \\
&= -e^{-x^2}\big|_{-1}^{1} + 1 \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

6.3.4 Integração à Riemann-Stieltjes por partes

Teorema 6.3.9 (Integração à Riemann-Stieltjes por partes)

Se f é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a uma função g, então g é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a f e

$$\int_a^b g(x)\,df(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\,dg(x)\,.$$

Demonstração. Se P é uma partição de $[a,b]$ e Ξ é um conjunto de pontos teste, então observe-se que

$$\sum_1^n f(x_i)g(x_i) \ - \sum_1^n f(x_{i-1})g(x_{i-1}) \ = f(b)g(b) - f(a)g(a)\,.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} &f(b)g(b) - f(a)g(a) - s_{P,\Xi}(g,f) \\ &\qquad\qquad = \sum_1^n \big[f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1}) - g(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1}))\big] \\ &\qquad\qquad = \sum_1^n f(x_i)(g(x_i) - g(\xi_i)) \ + \sum_1^n f(x_{i-1})(g(\xi_i) - g(x_{i-1})) \\ &\qquad\qquad = s_{Q,\Lambda}(f,g) \end{aligned}$$

e daí

$$s_{P,\Xi}(g,f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - s_{Q,\Lambda}(f,g) \tag{6.3.4}$$

onde $Q = P \cup \Xi$ e Λ é o conjunto de pontos teste para Q que é formado por cada menor valor de cada intervalo $[x_{i-1},\xi_i]$ e pelo maior valor de cada $[\xi_i,x_i]$.

Atendendo à definição de integral de Riemann-Stieltjes, dado $\epsilon > 0$ podemos garantir a existência de P_0 tal que

$$\left| s_{P,\Xi}(f,g) - \int_a^b f\,dg \right| < \epsilon \quad \text{ para todo } P \supseteq P_0 \text{ e } \Xi \tag{6.3.5}$$

e o resultado surge de (6.3.4) e de (6.3.4). □

6.3.5 Integração por mudança de variável

Proposição 6.3.10

Se f é integrável à Riemann-Stieltjes em $[a,b]$ em relação a g e adicionalmente considerarmos uma função contínua e estritamente crescente h tal que $h(A) = a$ e

$h(B) = b$, então $f \circ h$ é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a $g \circ h$ e

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_A^B (f \circ h)(x)\; d(g \circ h)(x)\,.$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, escolha-se P_0 tal que

$$\left| s_{\widetilde{P},\Theta}(f,g) - \int_a^b f\, dg \right| < \epsilon$$

para toda a partição $\widetilde{P} \supseteq P_0$ e conjunto de pontos teste Θ.

Pelo Teorema do Valor Intermédio, h aplica $[A,B]$ sobre todo $[a,b]$, e portanto se denotarmos por $P_0 = \{x_0,\ldots,x_n\}$ uma partição de $[a,b]$ então existem y_i's pertencentes a $[A,B]$ tais que $h(y_i) = x_i$. Seja $P_1 = \{y_0,\ldots,y_n\}$. Se $P \supseteq P_1$ e $\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ formam um conjunto de pontos teste para P, então

$$s_{P,\Xi}(f \circ h, g \circ h) = \sum_{i=1}^{n} f(h(\xi_i))(g(h(t_i)) - g(h(t_{i-1})))\,.$$

Desta feita, os pontos $h(t_i)$ são crescentes em $[a,b]$ e formam uma partição P' de $[a,b]$. Dado que a anterior P contém os pontos y_i's, P' contém os x_i's e portanto $P' \supseteq P_0$. Como h é crescente, $h(\xi_i)$ está situado entre $h(t_i)$ e $h(t_{i-1})$. Então, $\Xi' = \{h(\xi_1),\ldots,h(\xi_n)\}$ é um conjunto de pontos teste. Portanto,

$$s_{P,\Xi}(f \circ h, g \circ h) = s_{P',\Xi'}(f,g)\,.$$

□

Vamos agora apresentar um resultado (que por consequência de alguns das anteriores proposições) vai alagar as possibilidades de integração à Riemann através da técnica de mudança de variável (comparar com o Teorema 5.11.1).

Corolário 6.3.11 (Integração por mudança de variável; versão geral) *Se f é integrável à Riemann em $[\alpha,\beta]$ e φ é diferenciável em $[a,b]$ e de tal modo* *que (i) φ' é integrável à Riemann, (ii) $\varphi' \geq 0$ e (iii) $\varphi(a) = \alpha$ e $\varphi(b) = \beta$, então*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx\,.$$

Demonstração. Por hipótese conhecemos que f é integrável à Riemann em $[\alpha, \beta]$, o que por outras palavras significa que f é integrável à Riemann-Stieltjes em $[\alpha, \beta]$ em relação à função identidade g dada por $g(x) = x$ (cf. a Proposição 6.2.1). Pela Proposição 6.3.10, decorre que $f \circ \varphi$ é integrável à Riemann-Stieltjes em relação a $g \circ \varphi = \varphi$ em $[a, b]$, e

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(x))\, d\varphi(x)\,.$$

No entanto, nós também sabemos que $f \circ \varphi$ é integrável à Riemann e portanto pelo Teorema 6.3.7, $(f \circ \varphi)\, g'$ é integrável à Riemann e

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, d\varphi(x) = \int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx\,.$$

$\square$

Capítulo 7

Aplicações e integral impróprio

7.1 Deslocamento e espaço percorrido

Consideremos uma partícula que se desloca sobre o eixo dos xx's com equação de posição $x = x(t)$ e com velocidade $v = v(t)$ contínua em $[a, b]$. Sabemos que

$$\frac{dx}{dt}(t) = v(t),$$

ou seja, $x(t)$ é uma primitiva de $v(t)$. Portanto, de acordo com o anterior estudo, temos

$$\int_a^b v(t)\,dt = x(b) - x(a) \tag{7.1.1}$$

que é o DESLOCAMENTO da partícula entre os instantes a e b. Para calcular a distância percorrida durante o intervalo de tempo, teremos que considerar os intervalos quando $v(t) \geq 0$ e também quando $v(t) \leq 0$. Portanto, definimos por

$$\int_a^b |v(t)|\,dt \tag{7.1.2}$$

o ESPAÇO PERCORRIDO pela partícula entre os instantes a e b.

Note-se que se $v(t) \geq 0$, para todo $t \in [a, b]$, então (7.1.1) e (7.1.2) implicam que o espaço percorrido pela partícula e o seu deslocamento **coincidem** entre os instantes a e b e são iguais $\int_a^b v(t)\,dt$ que determina a área do conjunto limitado pelas rectas $t = a$, $t = b$, pelo eixo $0t$ e pelo gráfico de $v = v(t)$.

No caso em que por exemplo existe um $c \in [a,b]$ tal que $v(t) \geq 0$ em $[0,c]$ e $v(t) \leq 0$ em $[c,b]$, então o deslocamento da partícula é dado por (7.1.1) acima, ou seja,

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^c v(t)\,dt + \int_c^b v(t)\,dt =: A_1 - A_2$$

mas o espaço percorrido entre os instantes a e b é dado por (7.1.2), ou seja,

$$\int_a^b |v(t)|\,dt = \int_a^c v(t)\,dt - \int_c^b v(t)\,dt = A_1 + A_2$$

Logo, neste caso, deslocamento e espaço percorrido **não coincidem**.

Exemplo 7.1.1

Uma partícula desloca-se sobre o eixo dos xx's com velocidade $v(t) = 2 - t$.

(a) Para calcular o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$, obtemos

$$\int_1^3 (2-t)\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^3 = 0.$$

(b) Com vista a calcular o espaço percorrido entre os instantes 1 e 3, temos

$$\int_1^3 |(2-t)|dt = \int_1^2 (2-t)dt - \int_2^3 (2-t)dt = 1.$$

(c) Se desejarmos interpretar o movimento ocorrido, temos que em $[1,2)$ a velocidade é positiva, o que significa que neste intervalo a partícula avança no sentido positivo; em $(2,3]$ a velocidade é negativa, o que significa que neste intervalo a partícula recua e de tal modo que em $t = 3$ ela volta a ocupar a mesma posição por ela ocupada no instante $t = 1$.

7.2 Cálculo de áreas

A área $\mathscr{A}$, limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ $(a < b)$, pode calcular-se recorrendo à seguinte expressão:

$$\mathscr{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \; dx \; .$$

Saliente-se que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \; dx = \lim_P \sum_{j=1}^n |f(t_j) - g(t_j)|(x_j - x_{j-1})$$

facto cuja interpretação geométrica é coerente com a afirmação.

7.3 Cálculo de volumes de sólidos de revolução

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis não negativas) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as rectas $x = a$ e $x = b$ $(a \leq b)$, pode ser calculado pela seguinte forma:

$$V = \int_a^b \pi \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \; dx \; .$$

Note-se que

$$\int_a^b \pi \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \; dx = \lim_P \sum_{j=1}^n \pi |f^2(t_j) - g^2(t_j)|(x_j - x_{j-1})$$

e tal identidade facilita a interpretação geométrica do volume em causa.

Exemplo 7.3.1

Utilizando integração, calcule o volume de uma esfera de raio igual a um.

7.4 Comprimento de arco

Uma das utilidades do integral definido também passa pelo cálculo do comprimento de curvas. Se a curva é poligonal, é claro que podemos facilmente encontrar o seu comprimento adicionando os comprimentos dos segmentos de recta que formam a poligonal. No entanto, a situação não fica tão fácil se estivermos a supor uma situação geral em que uma curva C seja dada pela equação $y = f(x)$, onde f é diferenciável e $a \leq x \leq b$. Sendo P uma partição de $[a, b]$, então a poligonal com vértices $(x_i, f(x_i))$ é uma aproximação para C. O comprimento da curva C é assim aproximado pelo comprimento da poligonal e a aproximação torna-se tanto melhor quanto mais pontos P possuir. O comprimento da poligonal é dado por

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Aplicando o Teorema de Lagrange em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, concluímos que existe um $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f'(c_i)\Delta x_i.$$

Decorre daqui que

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i)\Delta x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x_i.$$

Neste sentido, definimos o COMPRIMENTO DA CURVA C por

$$L = \lim_{P} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Exemplo 7.4.1

Para se calcular o comprimento de arco de $y = x^{3/2}$ para $1 \leq x \leq 4$ (cf. Figura 7.1), se identificarmos $f(x) = x^{3/2}$ temos $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Em consequência,

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx.$$

Fazendo, $u = 1 + \frac{9}{4}x$, temos $du = \frac{9}{4}dx$. Adicionalmente, quando $x = 4$ temos $u = 10$ e quando $x = 1$ temos $u = \frac{13}{4}$. Portanto,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\, du = \frac{4}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right].$$

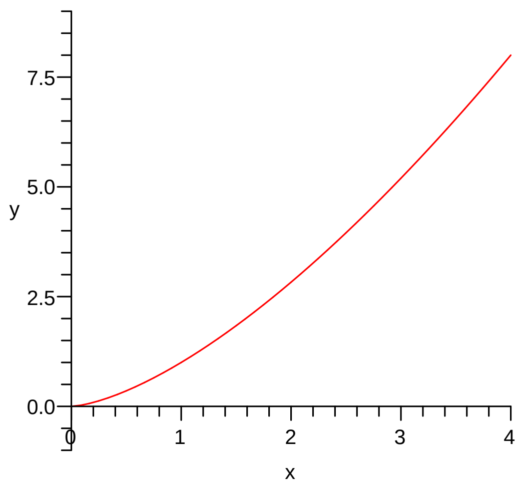

Figura 7.1: Gráfico da função $f(x) = x^{3/2}$, para $x \in [0, 4]$.

7.5 Trabalho

Iremos agora interpretar o trabalho realizado por uma força que varia com a posição por uso do integral definido. Relembra-se que no caso de uma força constante F, o trabalho realizado é definido pelo produto da força pela distância d que o objecto se move: $\tau = F \times d$.

Consideremos agora uma força F que actua sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo dos xx's. Suponhamos que esta força é paralela ao deslocamento e variável com a função da posição x. Então escrevemos

$$\overrightarrow{F}(x) = f(x)\,\overrightarrow{i}\,,$$

onde $f(x)$ é a componente de $\overrightarrow{F}(x)$ na direcção do deslocamento (isto é, na direcção de $\overrightarrow{i}$). Consideremos o deslocamento da partícula de $x = a$ até $x = b$ com $a < b$ e suponhamos que $f(x)$ seja contínua no intervalo $[a, b]$. Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$ e escolhemos por amostragem $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Se $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ for suficientemente pequeno, f será praticamente constante no intervalo, e então podemos dizer que trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ de x_{i-1} até x_i será aproximadamente

$$\tau_i = f(c_i)\Delta x_i.$$

Assim sendo podemos aproximar o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ de a até b pela soma dos trabalhos realizados nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é

$$\tau \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Neste âmbito, torna-se pertinente definir o trabalho da seguinte forma.

Definição 7.5.1

O TRABALHO τ realizado por uma força $\overrightarrow{F}(x) = f(x)\overrightarrow{i}$ sobre uma partícula no deslocamento de $x = a$ até $x = b$ é dado por

$$\tau = \lim_{P} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Note-se que na última definição $a, b \in \mathbb{R}$ são quaisquer, isto é, podemos ter $a \geq b$ ou $a \leq b$, e f é integrável em $[a, b]$, mas não necessariamente contínua. Em particular, se $a < b$ e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então o trabalho τ coincidirá com a área do conjunto limitado pelas rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 7.5.2

Sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo dos xx's actua uma força paralela ao deslocamento e de componente $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Para se calcular o trabalho realizado pela força no deslocamento de $x = 1$ até $x = 2$, basta realizar

$$\tau = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

7.6 Integrais impróprios

Na definição de integral definido exige-se que a função integranda esteja definida num intervalo limitado e fechado $[a, b]$ e que tal função seja limitada nesse intervalo.

Nesta secção estendemos o conceito de integral definido para casos mais gerais. Na realidade, a operação de integração pode ser extendida a intervalos não limitados e a funções não limitadas por recurso à noção de integral impróprio. Podem-se distinguir duas situações diferentes: (i) quando os limites de integração são infinitos, isto é, quando o intervalo de integração não é limitado (designando-se tal por INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE PRIMEIRA ESPÉCIE); (ii) quando a função integranda é não limitada no intervalo de integração (usualmente denominados por INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE SEGUNDA ESPÉCIE).

7.6.1 Limites de integração infinitos

Definição 7.6.1

Seja f uma função integrável em todo o intervalo $[a, \beta]$ com β tal que $[a, \beta] \subset [a, +\infty[$. O INTEGRAL IMPRÓPRIO, da função f em $[a, +\infty[$, é o limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação, diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ EXISTE (ou que CONVERGE). Se $\lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\,dx$ não existir ou não for finito diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ NÃO EXISTE (ou que DIVERGE).

Define-se de forma análoga,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \qquad (b \in \mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)\,dx \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

Exercício 7.6.2

Estude a existência do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$$

(onde k é um parâmetro fixo pertencente a $[0, +\infty[$).

7.6.2 Funções integrandas não limitadas

Definição 7.6.3

Seja f uma função integrável em $[a, \alpha]$ (para todo o α tal que $[a, \alpha] \subset [a, c[$) e não limitada em c. O INTEGRAL IMPRÓPRIO, da função f em $[a, c]$, é o limite

$$\int_a^c f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\, dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^c f(x)\, dx$ EXISTE (ou que CONVERGE).

Se $\lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\, dx$ não existir ou não for finito diz-se que $\int_a^c f(x)\, dx$ NÃO EXISTE (ou que DIVERGE).

Define-se de forma análoga $\int_a^b f(x)\, dx$ quando f é ilimitada em $x = a$, ou em $x = c$ pertencente ao interior do intervalo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to c^-} \int_a^\alpha f(x)\, dx + \lim_{\beta \to c^+} \int_\beta^b f(x)\, dx\, .$$

Exercício 7.6.4

Estude a existência do integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k}\, dx$ (onde k é um parâmetro fixo pertencente a $[0, +\infty[$).

7.6.3 Testes de convergência

Por vezes não é possível encontrar um valor exacto para um integral impróprio. No entanto, mesmo nestes caso, é possível saber se ele é convergente ou divergente usando outros integrais conhecidos.

Teorema 7.6.5 (Teste da Comparação)

Sejam f e g funções contínuas satisfazendo $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \geq a$. Então,

(i) *Se $\int_a^\infty f(x)\, dx$ é convergente, então $\int_a^\infty g(x)\, dx$ também é convergente.*

(ii) *Se $\int_a^\infty g(x)\, dx$ é divergente, então $\int_a^\infty f(x)\, dx$ também é divergente.*

Exemplo 7.6.6

Se desejarmos analisar se $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ é convergente temos uma dificuldade inerente ao facto de a primitiva de e^{-x^2} não ser uma função elementar. No entanto, podemos observar que se $x \geq 1$ então $x^2 \geq x$ e assim $-x^2 \leq -x$. Adicionalmente, como a função exponencial é crescente tem-se $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Assim,

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1}-e^{-t}) = e^{-1}.$$

Logo, atendendo ao Teste da Comparação podemos concluir que o integral em causa é convergente (apesar de não conhecermos o valor para o qual ele converge).

Exemplo 7.6.7

Pensemos agora em analisar a convergência de $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$. Observando que $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, para todo $x \in [1,\infty)$. Como o integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, pelo Teste da Comparação concluímos que o integral $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ também é convergente.

Exemplo 7.6.8

Para se analisar a convergência de $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$, podemos notar que $\frac{1+e^{-x}}{x} \geq \frac{1}{x}$ para todo $x \in [1,\infty)$ e que $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ diverge. Logo, o Teste da Comparação permite-nos concluir que o integral $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ é divergente.

Teorema 7.6.9 (Teste da Comparação no Limite)

Sejam $f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ funções contínuas. Se

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L\,, \qquad 0 < L < \infty,$$

então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ serão ambos convergentes ou ambos divergentes.

Exemplo 7.6.10

Para se analisar a convergência de $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ podemos considerar as funções $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ que são positivas e contínuas em $[1,+\infty)$ e ter em conta que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} = 1\,.$$

Portanto, como o integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, então $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ também é convergente.

É claro que os integrais convergem para valores diferentes e no presente caso até é possível avaliar directamente quais são esses valores:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1;\\
\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{1+x^2}\,dx\\
&= \lim_{t\to+\infty}[\arctan x]_1^t = \lim_{t\to+\infty}(\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

7.7 Exercícios

1. Determine a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela recta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

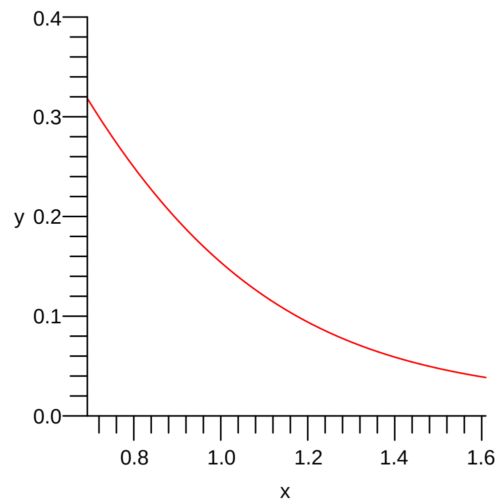

Figura 7.2: Gráfico da função $f(x) = \frac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, para $x \in [\ln 2, \ln 5]$.

2. Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ (cf. Figura 7.2) e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ (cf. Figura 7.3), em $[\ln 2, \ln 5]$.

3. Determine a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas rectas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

4. Seja $\mathscr{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$

   (a) Represente geometricamente a região $\mathscr{A}$.

   (b) Calcule a área da região $\mathscr{A}$.

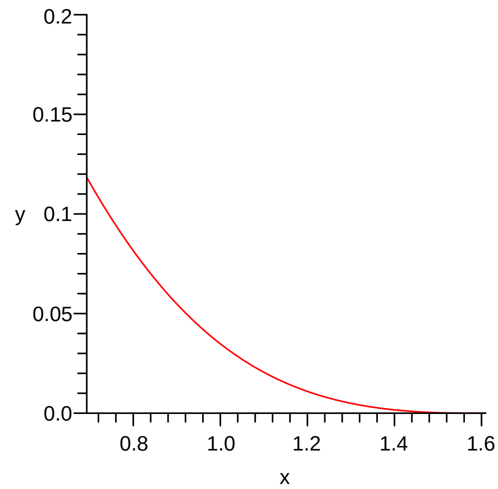

Figura 7.3: Gráfico da função $g(x) = \frac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, para $x \in [\ln 2, \ln 5]$.

5. Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas rectas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

6. Considere uma mola sobre uma superfície horizontal (paralela ao eixo dos x's) com uma das extremidades fixa num anteparo (paralelo ao eixo dos y's). Suponha que a origem $x = 0$ coincide com a extremidade livre quando a mola não está comprimida nem distendida. Suponhamos agora que a mola seja distendida e que uma partícula seja presa na sua extremidade livre. Considere que a força exercida sobre a mola obedece a Lei de Hooke: $\overrightarrow{F}(x) = -kx\overrightarrow{i}$, onde k é a constante elástica da mola. Calcule o trabalho realizado pela mola quando a partícula se desloca das posições $x = 0,5$ até $x = 0$ e de $x = 0,5$ até $x = -0,5$.

7. Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Mostre que $F(x) = \frac{\pi}{2}$ no seu domínio.

8. Verifique se os seguintes integrais impróprios convergem e, em caso de convergência, indique o seu valor numérico.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$

   (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

   (h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x - x}}\, dx$

Bibliografia

[1] Apostol, T. M.: *Calculus. Vol. I: One Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra* (segunda edição; em Inglês). Waltham, Massachusetts-Toronto-Lodnon: Blaisdell Publishing Company. XX, 666 p., 1967.

[2] Apostol, T. M.: *Mathematical Analysis* (segunda edição; em Inglês). World Student Series Edition. Reading, Mass.: Addison -Wesley Publishing Company. 483 p., 1974.

[3] Brannan, David Alexander: *A First Course in Mathematical Analysis* (em Inglês). Cambridge: Cambridge University Press. xii, 459 p., 2006.

[4] Campos Ferreira, J.: *Introdução à Análise Matemática* (seista edição). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995.

[5] Canuto, Claudio G. e Tabacco, Anita: *Mathematical Analysis I* (em Inglês). Universitext. Berlin: Springer. xii, 433 p., 2008.

[6] Giaquinta, Mariano e Modica, Giuseppe: *Mathematical Analysis. Functions of One Variable* (em Inglês). Boston, MA: Birkhäuser. xii, 353 p., 2003.

[7] Godement, Roger: *Analyse Mathématique I: Convergence, fonctions élémentaires* (em Francês). Berlin: Springer. xv, 432 p., 1998.

[8] Pugh, Charles Chapman: *Real Mathematical Analysis* (em Inglês). Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer. xi, 437 p., 2002.

[9] Robdera, Mangatiana A.: *A Concise Approach to Mathematical Analysis* (em Inglês). London: Springer. xiii, 366 p., 2003.

[10] Rudin, Walter: *Principles of Mathematical Analysis* (terceira edição; em Inglês). International Series in Pure and Applied Mathematics. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill Book Company. X, 342 p., 1976.

[11] Santos Guerreiro, J.: *Curso de Análise Matemática*. Lisboa: Livraria Escolar Editora, 1989.

[12] Schröder, Bernd S. W.: *Mathematical Analysis. A Concise Introduction* (em Inglês). Wiley-Interscience. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. xv, 562 p., 2008.

[13] Tao, Terence: *Analysis I* (em Inglês). Texts and Readings in Mathematics 37. New Delhi: Hindustan Book Agency. xviii, 402 p., 2006.