Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Segundo Teste da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 2 horas | 17 de Novembro de 2010

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

1. [4.0] Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D.
   (a) Defina a noção de *limite da função f no ponto p*.
   (b) Demonstre que $\lim_{x\to p} f(x) = b \in \mathbb{R}$ <u>se e só se</u> para cada sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite p, com $u_n \in D \setminus \{p\}$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), a sucessão $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem por limite b.

2. [1.0] Enuncie o *Teorema dos Valores Intermédios* (ou *Teorema de Bolzano*).

3. [1.0] Discuta a existência do seguinte limite: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \sin x$.

4. [2.0] Considere $p \in \mathbb{R}$. Utilize o *critério de condensação de Cauchy* para demonstrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge <u>se e só se</u> $p > 1$.

5. [3.0] Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das séries:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)\ ; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a_n}\ .$$

6. [9.0] Estude a natureza das seguintes séries numéricas, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 n}{e^n\, n^2}\ ; \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\ ; \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^n-1}\ ;$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}\ ; \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^5}+1}\ ; \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3+(-1)^n)^n}\ .$$

— **FIM** —