Paulo Almeida
Enide Andrade Martins
Sofia Pinheiro
Maria Raquel Pinto
Rosália Rodrigues
Rita Simões

Apontamentos de Álgebra Linear

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
Janeiro de 2012

Conteúdo

1 Matrizes. Noções gerais **2**

1.1 Definição. Algumas matrizes especiais 3

1.2 Operações com matrizes e suas propriedades 5

1.2.1 Adição de matrizes 5

1.2.2 Multiplicação por um escalar 7

1.2.3 Multiplicação de matrizes 9

1.2.4 Transposta de uma matriz 12

2 Sistemas de equações lineares **16**

2.1 Sistemas e matrizes 17

2.2 Método de eliminação de Gauss 21

2.3 Discussão de sistemas 28

2.4 Sistemas homogéneos 31

3 Matrizes invertíveis. Determinantes **35**

3.1 Matrizes invertíveis 36

3.1.1 Propriedades da inversa 37

3.1.2 Algoritmo de inversão 39

3.2 Determinantes. Conceitos gerais 42

3.2.1 Propriedades do determinante 46

3.2.2 Teorema de Laplace 49

3.3 Condições de invertibilidade 52

3.4 Cálculo da inversa a partir da matriz adjunta 55

3.5 Sistemas de Cramer 57

4 Espaços vectoriais sobre um corpo **60**

4.1 Definição e propriedades 61

4.2 Subespaços vectoriais 66

4.3 Combinação linear de vectores 69

4.4 Independência e dependência linear 71

4.5 Subespaço gerado por vectores 78

4.6 Sistema de geradores 80

4.7 Base e dimensão 81

4.8 Coordenadas de um vector relativamente a uma base 90

4.9 Intersecção, reunião e soma de subespaços 92
4.10 Teorema das dimensões 97
4.11 Subespaço complementar 103

5 Aplicações lineares 106
5.1 Definição e propriedades 107
5.1.1 Classificação de aplicações lineares 111
5.1.2 Propriedades das aplicações lineares 112
5.2 Imagem e imagem recíproca 116
5.3 Núcleo e imagem 118
5.4 Isomorfismos 126
5.5 Matriz de uma aplicação linear 128
5.5.1 Isomorfismo entre $\mathcal{L}(E, E')$ e $M_{p \times n}(\mathbb{K})$ 134
5.5.2 Matrizes invertíveis e isomorfismos 134
5.6 Matriz de mudança de base 135
5.7 Relação entre matrizes de uma mesma aplicação linear 137

6 Valores e vectores próprios 142
6.1 Valores e vectores próprios 143
6.2 Endomorfismos diagonalizáveis 151

7 Produto interno 163
7.1 Definição e exemplos 164
7.2 Norma de um vector 166
7.3 Ângulo entre vectores 169
7.4 Vectores ortogonais 173
7.5 Sistema ortogonal e sistema ortonormado 174
7.6 Base ortogonal e base ortonormada 175
7.6.1 Método de ortonormalização de Gram-Schmidt 176
7.7 Matriz da métrica 179
7.8 Complemento ortogonal e projecções ortogonais 182
7.9 Subespaço ortogonal de um subespaço vectorial 184
7.10 Distância entre vectores 186

1. Matrizes. Noções gerais

1.1 Definição. Algumas matrizes especiais

Suponha-se que se está a trabalhar em estruturas algébricas conhecidas, como por exemplo, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação. Considere $\mathbb{K}$ um desses conjuntos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ chamam-se *escalares*.

Definição 1.1. *Uma* ***matriz do tipo*** *(ou* ***de tamanho****)* $p \times q$ ***sobre*** $\mathbb{K}$ *é uma tabela de dupla entrada com* p *linhas e* q *colunas cujas entradas pertencem a* $\mathbb{K}$.

Em termos de notação representam-se matrizes por letras maiúsculas e usa-se a tabela de números dentro de parênteses rectos como indicado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}.$$

Os escalares a_{ij}, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$ dizem-se *entradas* (ou *elementos*) de A. Em termos gerais, também se escreve

$$A = \left[a_{ij}\right], \quad \text{com } i \in \{1, \ldots, p\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, q\}.$$

O termo genérico a_{ij} representa a entrada da matriz A que se encontra na linha i e na coluna j e é usual referir como sendo a entrada (ou o elemento) (i, j).

Exemplo 1.2. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

é uma matriz do tipo 3×2 *pois é composta por* 3 *linhas e* 2 *colunas. A entrada* a_{31} *(ou entrada* $(3,1)$*) é* 6.

Seja A uma matriz do tipo $p \times q$. Quando $p = q$ diz-se que A é uma *matriz quadrada de ordem* p. Quando se tem uma matriz com uma só coluna (linha) chama-se *matriz coluna* (*matriz linha*).

Exemplo 1.3. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A *é quadrada de ordem* 2, B *é uma matriz coluna e* C *é uma matriz linha.*

Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, uma matriz quadrada. As entradas a_{ij} com $i = j$, isto é, as entradas da forma a_{ii}, formam a *diagonal principal* de A. Os elementos a_{ij} e a_{ji}, com $i \neq j$, estão dispostos simetricamente em relação à diagonal principal, e por isso dizem-se *opostos*.

Exemplo 1.4. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 4 \\ \boxed{2} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são 2, 1 *e* 0 *e estão assinalados por* $\bigcirc$. *As entradas marcadas por* $\square$ *são um exemplo de elementos opostos.*

Definição 1.5. *Chama-se* ***matriz diagonal*** *a uma matriz quadrada em que os elementos que não são da diagonal principal são iguais a zero, ou seja,* $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$.

Exemplo 1.6. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Definição 1.7. *Chama-se* ***matriz escalar*** *a uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais entre si.*

Exemplo 1.8. *As matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

são matrizes escalares.

Um caso especial de uma matriz escalar é a matriz em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Essa matriz chama-se *matriz identidade*. Assim, a matriz identidade de ordem n, representa-se por I_n, e é a matriz

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se a sua ordem for depreendida do contexto, representa-se simplesmente por I. Observe-se que $I_n = \left[\delta_{ij}\right]$, sendo δ_{ij} o símbolo de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}.$$

A *matriz nula* do tipo $p \times q$ é uma matriz em que todas as suas entradas são iguais a zero e representa-se por $0_{p \times q}$. Por vezes representa-se apenas por 0 (zero), quando no contexto está subentendido o tipo da matriz.

Definição 1.9. *Uma matriz quadrada diz-se matriz* ***triangular superior*** *se* $a_{ij} = 0$ *quando* $i > j$*, isto é, os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Analogamente, uma matriz quadrada diz-se matriz* ***triangular inferior*** *se* $a_{ij} = 0$ *quando* $i < j$*, isto é, os elementos acima da diagonal principal são nulos.*

Exemplo 1.10. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A *é triangular superior e* B *é uma matriz triangular inferior.*

Definição 1.11. *Duas matrizes* $A = \left[a_{ij}\right]$ *e* $B = \left[b_{ij}\right]$ *do tipo* $p \times q$ *dizem-se* ***iguais*** *se* $a_{ij} = b_{ij}$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, q\}$*.*

1.2 Operações com matrizes e suas propriedades

1.2.1 Adição de matrizes

Seja $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo $p \times q$ com elementos em $\mathbb{K}$.
A adição de matrizes é uma aplicação definida no produto cartesiano

$$M_{p\times q}(\mathbb{K}) \times M_{p\times q}(\mathbb{K})$$ [1]

que, a cada par de matrizes (A, B), faz corresponder uma e uma só matriz de $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ geralmente denotada por $A + B$. Também se diz que esta é uma operação interna em $M_{p\times q}(\mathbb{K})$. Em termos de representação das entradas da matriz que resulta da adição de duas matrizes quaisquer apresenta-se a seguinte definição.

Definição 1.12. *Sejam* $A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ *tais que* $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$*. A* ***matriz soma*** $A + B$ *é a matriz de* $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ *definida por:*

$$A + B = \left[c_{ij}\right],$$

com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, q\}$*. Por vezes escreve-se simplesmente* $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$*.*

Exemplo 1.13. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+6 & -2+(-1) & 3+2 \\ 4+7 & 5+8 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 11 & 13 & 9 \end{bmatrix}.$$

[1] $M_{p\times q}(\mathbb{K}) \times M_{p\times q}(\mathbb{K}) = \{(A, B) \ : \ A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})\}$

Propriedades da adição de matrizes

Apresentam-se agora algumas propriedades da adição de matrizes. Ir-se-á provar algumas destas propriedades e as restantes demonstrações são deixadas como exercício.

Sejam $A, B, C \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ matrizes quaisquer.

- **Comutatividade:** $A + B = B + A$.

  Demonstração. Sejam $A = \big[a_{ij}\big]$ e $B = \big[b_{ij}\big]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} A + B &= \big[a_{ij} + b_{ij}\big] && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \big[b_{ij} + a_{ij}\big] && \text{pela comutatividade em } \mathbb{K} \\ &= B + A \end{aligned}$$

  $\square$

- **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

  Demonstração. Sejam $A = \big[a_{ij}\big]$, $B = \big[b_{ij}\big]$ e $C = \big[c_{ij}\big]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \big[a_{ij} + b_{ij}\big] + \big[c_{ij}\big] && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \big[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\big] && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \big[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\big] && \text{pela associatividade em } \mathbb{K} \\ &= \big[a_{ij}\big] + \big[b_{ij} + c_{ij}\big] && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \big[a_{ij}\big] + \big(\big[b_{ij}\big] + \big[c_{ij}\big]\big) && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$

  $\square$

- **Existência de elemento neutro:** $0_{p\times q} + A = A$.
- **Existência de elemento simétrico:** $A + (-A) = 0_{p\times q}$, onde, sendo $A = \big[a_{ij}\big]$ então $-A = \big[-a_{ij}\big]$.

As demonstrações da existência do elemento neutro e simétrico ficam como exercício.

Uma vez que são válidas estas quatro propriedades, diz-se que $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ munido da adição de matrizes é um *grupo abeliano* (ou *comutativo)*.

Observação 1.14. *Dadas duas matrizes $A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$, denota-se a matriz $A + (-B)$ por $A - B$.*

Exercício 1.15. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 10 \\ 5 & -5 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 9 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $A - B$*.*

1.2.2 Multiplicação por um escalar

Pode também definir-se uma operação externa entre o conjunto das matrizes e o conjunto $\mathbb{K}$. A multiplicação por um escalar é uma aplicação definida no produto cartesiano $\mathbb{K} \times M_{p\times q}(\mathbb{K})$ que a cada par (α, A) faz corresponder uma e uma só matriz de $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ geralmente denotada por αA.

Definição 1.16. *Seja* $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ *tal que* $A = \left[a_{ij}\right]$ *e seja* $\alpha \in \mathbb{K}$ *um escalar. A* ***matriz*** αA *é a matriz do tipo* $p \times q$ *que se obtém de* A *multiplicando todas as entradas de* A *pelo escalar* α*, ou seja:*

$$\alpha A = \left[c_{ij}\right],$$

com $c_{ij} = \alpha a_{ij}$*, para todo* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, q\}$*.*

Exemplo 1.17. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$*, então*

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.18. *Calcule* $2A - 3B$*, sabendo que*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da multiplicação por um escalar

Sejam α, β escalares quaisquer de $\mathbb{K}$ e sejam $A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ matrizes quaisquer.

- **Distributividade da multiplicação por um escalar em relação à adição de matrizes:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Demonstração. Represente-se $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha(A+B) &= \alpha\left[a_{ij} + b_{ij}\right] && \text{por definição de adição de matrizes}\\
&= \left[\alpha(a_{ij} + b_{ij})\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \left[\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}\right] && \text{pela distributividade da multiplicação em}\\
& && \text{relação à adição em } \mathbb{K}\\
&= \left[\alpha a_{ij}\right] + \left[\alpha b_{ij}\right] && \text{por definição de adição de matrizes}\\
&= \alpha\left[a_{ij}\right] + \alpha\left[b_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \alpha A + \alpha B.
\end{aligned}$$

□

- **Distributividade da multiplicação por uma matriz em relação à adição de escalares:** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

  Demonstração. Represente-se $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)\left[a_{ij}\right]\\
&= \left[(\alpha+\beta)a_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \left[\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}\right] && \text{pela distributividade da multiplicação em}\\
& && \text{relação à adição em } \mathbb{K}\\
&= \left[\alpha a_{ij}\right] + \left[\beta a_{ij}\right] && \text{pela definição de adição de matrizes}\\
&= \alpha\left[a_{ij}\right] + \beta\left[a_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \alpha A + \beta A
\end{aligned}$$

□

- **Associatividade mista:** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- **Existência de Elemento Neutro:** $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}A = A$, onde $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{K}$ (note-se que em $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ é 1).

As demonstrações das Propriedades 3 e 4 ficam como exercício.

Exercício 1.19. *Considere as matrizes A e B do tipo 1×3 tais que:*

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule, aplicando as propriedades, $5(A+B) + 2\left(\frac{1}{2}A + B\right)$.

Prova-se também que é válida um tipo de "lei do anulamento" na multiplicação de uma matriz por um escalar.

Teorema 1.20. *Sejam* $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Então*

$$\alpha A = 0_{p\times q} \quad \textit{se e só se} \quad \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } A = 0_{p\times q},$$

onde $0_{\mathbb{K}}$ *é o elemento neutro da adição usual em* $\mathbb{K}$ *(ou seja, em* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{C}$ *é* 0*).*

Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1,\ldots,p\}$ e $j \in \{1,\ldots,q\}$.
Então $\alpha A = 0_{p\times q}$ é equivalente a

$\left[\alpha a_{ij}\right] = 0_{p\times q}$	por definição de multiplicação escalar
$\Leftrightarrow \alpha a_{ij} = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,p\}, j \in \{1,\ldots,q\}$	por definição de igualdade de matrizes
$\Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee a_{ij} = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,p\}, j \in \{1,\ldots,q\}$	pela lei do anulamento do produto em $\mathbb{K}$
$\Leftrightarrow \alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee A = \left[a_{ij}\right] = 0_{p\times q}$	

□

1.2.3 Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes A e B, a multiplicação $A \times B$ só é possível se o número de colunas da primeira matriz coincide com o número de linhas da segunda matriz. A matrizes que satisfazem esta relação chamam-se *matrizes encadeadas*. Assim, dadas duas matrizes A e B, se queremos efectuar a multiplicação $A \times B$ e se A é uma matriz do tipo $p \times q$ então B tem de ser uma matriz do tipo $q \times m$. Nesse caso a matriz resultante, que se representa por AB, é uma matriz do tipo $p \times m$. Esquematicamente

$$\underbrace{A}_{p\times q} \times \underbrace{B}_{q\times m} = \underbrace{AB}_{p\times m}.$$

Sejam A uma matriz do tipo $p \times q$ e B uma matriz do tipo $q \times m$. Note-se que AB está definido. Relativamente a BA, três hipóteses poderão ocorrer:

- BA poderá não estar definido; isso acontece se $m \neq p$;
- BA está definido (isto é, $p = m$) e BA será uma matriz do tipo $q \times q$ e AB será uma matriz do tipo $m \times m$; e neste caso podem surgir duas situações:
  - se $q \neq m$, AB e BA são de tipos diferentes e, consequentemente, $AB \neq BA$;
  - se $q = m$, AB e BA são do mesmo tipo mas poderão ser diferentes.

Exemplo 1.21. *Sejam A uma matriz do tipo 2×3, B uma matriz do tipo 3×4, C uma matriz do tipo 3×2 e D e E matrizes do tipo 2×2. Então:*

- *AB é do tipo 2×4 e BA não está definida;*
- *AC é do tipo 2×2 e CA é do tipo 3×3;*
- *DE é do tipo 2×2 e ED é do tipo 2×2.*

Veja-se então como se multiplicam matrizes. Considere-se primeiro o caso particular do produto de uma matriz linha por uma matriz coluna.

Definição 1.22. *Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$. Então o **produto da matriz linha** A **pela matriz coluna** B é:*

$$AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p \end{bmatrix}.$$

Observe-se que se A é uma matriz do tipo $1\times p$ e B é uma matriz do tipo $p\times 1$, então AB é uma matriz do tipo 1×1.

Exemplo 1.23. *Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Então*

$$AB = \begin{bmatrix} 1\times 5 + 0\times 3 + (-2)\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}.$$

Agora define-se o produto entre duas matrizes encadeadas quaisquer tendo por base a definição do caso particular anterior.

Definição 1.24. *Sejam A e B matrizes do tipo $p\times q$ e $q\times m$, respectivamente. O **produto de** A **por** B, que se representa por AB, é a matriz do tipo $p\times m$ que se obtém considerando para elemento (i,j) a multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.*

Formalmente tem-se que, para $A = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{kj} \end{bmatrix}$, com $i \in \{1,\ldots,p\}$, $k \in \{1,\ldots,q\}$ e $j \in \{1,\ldots,m\}$, o produto de A por B é a matriz AB do tipo $p\times m$ definida por:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}, \qquad \text{com } i \in \{1,\ldots,p\} \text{ e } j \in \{1,\ldots,m\}$$

onde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}.$$

Esquematicamente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iq} \\ & & & \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{qj} & \end{bmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{bmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \\ & & & \end{bmatrix}}_{AB}$$

Exemplo 1.25. *Sejam* $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Então*

$$AB=\begin{bmatrix} 2\times 5+3\times(-1) & 2\times 0+3\times 2 \\ 0\times 5+(-1)\times(-1) & 0\times 0+(-1)\times 2 \\ 1\times 5+4\times(-1) & 1\times 0+4\times 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.26. *Calcule, se possível, o produto* AB*, sabendo que*

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que dada uma matriz A do tipo $p\times q$, com $p\neq q$, não está definido o produto $A^2=AA$. Facilmente se conclui que só se pode definir *potência de uma matriz* para matrizes quadradas. De uma forma geral, se A é uma matriz quadrada de ordem n, A^k, com $k\geq 1$, representa a matriz quadrada de ordem n definida por:

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ factores}}.$$

Por convenção, $A^0=I_n$.

Observe-se que pode ter-se $A^2=0_{p\times p}$ e, no entanto, $A\neq 0_{p\times p}$.

Exemplo 1.27. *Dada a matriz* $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*, tem-se que*

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=0_{2\times 2}.$$

Pode então concluir-se que não é válida a lei do anulamento do produto no conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Exercício 1.28. *Sejam* $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule* AB.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam α um escalar e A, B, C matrizes quaisquer com tamanhos adequados.

- **Existência de elemento neutro:** Se A for do tipo $p \times q$, então $I_p A = A$ e $AI_q = A$;
- **Associatividade:** $A(BC) = (AB)C$;
- **Associatividade mista:** $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- **Distributividade da multiplicação em relação à adição:** $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$.

As demonstrações das propriedades enunciadas ficam como exercício.

Observação 1.29. *Recorde-se que a multiplicação de matrizes* <u>*não é comutativa*</u> *e, consequentemente, multiplicar à direita ou à esquerda por uma matriz (não nula) não é a mesma coisa!*

Exemplo 1.30. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2.4 Transposta de uma matriz

Definição 1.31. *Seja $A = \left[a_{ij}\right]$ uma matriz do tipo $p \times q$. Chama-se* ***transposta*** *da matriz A, e representa-se por A^T, à matriz do tipo $q \times p$ tal que*

$$A^T = \left[a'_{ji}\right].$$

com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$ e $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, as linhas da matriz A^T são as colunas da matriz A.

Exemplo 1.32. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. *A transposta de A é a seguinte matriz:*

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da transposta de uma matriz

Seja α um escalar e sejam A, B matrizes quaisquer com os tamanhos adequados.

- **Transposta da transposta:** $\left(A^T\right)^T = A$.

  Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Por definição, $A^T = \left[a'_{ji}\right]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$. Assim,

  $$\left(A^T\right)^T = \left[a'_{ji}\right]^T = \left[a''_{ij}\right]$$

  onde $a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Logo $\left(A^T\right)^T = A$. □

- **Transposta do produto de uma matriz por um escalar:** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

  Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Ora, sendo $A^T = \left[a'_{ji}\right]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$, então

  $$(\alpha A)^T = \left[\alpha a_{ij}\right]^T = \left[\alpha a'_{ji}\right] = \alpha \left[a'_{ji}\right] = \alpha A^T.$$

  □

- **Transposta da soma de duas matrizes:** $(A+B)^T = A^T + B^T$.

  Demonstração. Sejam $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Por definição de adição de matrizes, $A + B = \left[c_{ij}\right]$, com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Assim,

  $$(A+B)^T = \left[c'_{ji}\right]$$

  com $c'_{ji} = c_{ij}$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$.

  Por outro lado, como $A^T = \left[a'_{ji}\right]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, e $B^T = \left[b'_{ji}\right]$, com $b'_{ji} = b_{ij}$, vem que $A^T + B^T = \left[a'_{ji}\right] + \left[b'_{ji}\right] = \left[a'_{ji} + b'_{ji}\right] = \left[d_{ji}\right]$, onde a entrada (j, i) é

  $$d_{ji} = a'_{ji} + b'_{ji} = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} = c'_{ji}.$$

  E, portanto, $A^T + B^T = (A+B)^T$. □

- **Transposta do produto de duas matrizes:** $(AB)^T = B^T A^T$.

  Demonstração. Sejam $A = \left[a_{ik}\right]$ e $B = \left[b_{kj}\right]$, com $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Tem-se que

  $$AB = \left[c_{ij}\right], \quad \text{onde } c_{ij} = \sum_{l=1}^{q} a_{il} b_{lj}$$

  para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Assim

  $$(AB)^T = \left[c'_{ji}\right], \quad \text{onde } c'_{ji} = c_{ij}.$$

  Por outro lado, $A^T = \left[a'_{ki}\right]$, com $a'_{ki} = a_{ik}$, e $B^T = \left[b'_{jk}\right]$, com $b'_{jk} = b_{kj}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Assim,

  $$B^T A^T = \left[d_{ji}\right], \quad \text{onde a entrada } (j,i) \text{ é}$$

  $$d_{ji} = \sum_{l=1}^{q} b'_{jl} a'_{li} = \sum_{l=1}^{q} b_{lj} a_{il} = \sum_{l=1}^{q} a_{il} b_{lj} = c_{ij} = c'_{ji}.$$

  Logo $(AB)^T = B^T A^T$. □

Definição 1.33. *Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$.*

Observe-se que esta definição obriga a que a matriz A seja uma matriz quadrada. Além disso, uma matriz quadrada A de ordem p é simétrica se existir simetria relativamente à diagonal principal, isto é, se é da forma

$$A = \left[a_{ij}\right], \text{ com } a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemplo 1.34. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *é simétrica.*

Definição 1.35. *Uma matriz A diz-se **anti-simétrica** se $A^T = -A$.*

Assim, a definição obriga a que A, para ser anti-simétrica, seja quadrada e os elementos da sua diagonal principal sejam todos nulos. Além disso, em posições opostas em relação à diagonal principal, estão elementos simétricos entre si.

Exemplo 1.36. *A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *é anti-simétrica.*

Exercícios 1.37. *1. Seja A uma matriz quadrada. Prove que:*

a) $A + A^T$ é simétrica;

   b) $A - A^T$ *é anti-simétrica.*

2. *Mostre que qualquer matriz quadrada se pode decompor na soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.*

3. *Em cada caso, prove que a afirmação é verdadeira ou apresente um contra--exemplo mostrando que é falsa. Sejam* A, B *e* C *matrizes de tamanhos adequados.*

   a) *Se* $A + B = A + C$ *então* B *e* C *são do mesmo tipo.*
   b) *Se* $A + B = 0$, *então* $B = 0$.
   c) *Se a entrada* $(2, 3)$ *da matriz* A *é* 7, *então a entrada* $(3, 2)$ *de* A^T *é* -7.
   d) *Se* $A = -A$, *então* $A = 0$.
   e) *Para toda a matriz* A, *as matrizes* A *e* A^T *têm a mesma diagonal.*
   f) *A igualdade* $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ *é sempre válida para quaisquer matrizes.*
   g) *Se* $A^2 = A$ *então* $A = 0$ *ou* $A = I$.

4. *Sejam* $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ *e* $B, C \in M_{q\times m}(\mathbb{K})$ *matrizes quaisquer. Aplicando as propriedades das operações entre matrizes, mostre, de duas formas distintas, que*
$$(A(B + C))^T = B^T A^T + C^T A^T.$$

2. Sistemas de equações lineares

2.1 Sistemas e matrizes

Nesta secção apresentam-se algumas definições e nomenclatura básicas associadas aos sistemas de equações lineares e a sua relação com as matrizes.

Definição 2.1. *Uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$, *para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $b \in \mathbb{K}$, *é chamada uma* ***equação linear*** *nas incógnitas (ou indeterminadas)* $x_1, \ldots, x_n$. *A cada* a_i *chama-se* ***coeficiente*** *da equação e ao* b *chama-se* ***termo independente*** *da equação.*

Exemplo 2.2. *A equação* $-x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 11$ *é uma equação linear nas incógnitas* x_1, x_2 *e* x_3 *de coeficientes* -1, 4 *e* -7 *e termo independente* 11.
A equação $4x_1 - 5x_2 = x_1x_3$ <u>*não é*</u> *uma equação linear.*

Recordando o produto de uma matriz linha por uma matriz coluna, note-se que a equação (2.1) pode ser representada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Definição 2.3. *Diz-se que o* $n-$*uplo* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, *ou de forma equivalente,* $\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix}^T$, *é* ***solução da equação*** (2.1) *(ou de* (2.2)*) se*

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

Ao conjunto de todas as soluções de (2.1) *chama-se* ***conjunto solução*** *de* (2.1).

Exemplo 2.4. *Considere a equação* $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$. *Esta pode representar-se matricialmente como*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Como $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1 + 4x_3 - 5$, *o conjunto solução da equação dada é*

$$S = \{(x_1, 3x_1 + 4x_3 - 5, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Algumas soluções são, por exemplo, $(0, -5, 0)$, $(1, -2, 0)$ *e* $(0, -1, 1)$.

A uma "colecção" de um número finito de equações lineares chama-se sistema de equações lineares. Em seguida apresenta-se a definição formal:

Definição 2.5. *À conjunção de m equações lineares em n incógnitas, com $m, n \in \mathbb{N}$, chama-se **sistema de equações lineares** e pode ser representado por*

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \right. \tag{2.3}$$

*onde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, são chamados **coeficientes** do sistema, os $b_i \in \mathbb{K}$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, são os **termos independentes** do sistema e $x_1, \ldots, x_n$ são as incógnitas do sistema.*

Se $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, então diz-se que o sistema é *homogéneo*; caso contrário, isto é, se $b_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ então o sistema diz-se *completo*.

Exemplo 2.6. *Considere os seguintes sistemas lineares*

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} \boxed{2}x_1 + \boxed{3}x_2 + \boxed{4}x_3 = 1 \\ \\ \boxed{-1}x_1 + \boxed{5}x_2 + \boxed{0}x_3 = 2 \end{array} \right. \quad e \quad (S_2) \left\{ \begin{array}{l} \boxed{1}x_1 - \boxed{2}x_2 = 0 \\ \\ \boxed{-1}x_1 + \boxed{3}x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

O sistema (S_1) é um sistema completo com 2 equações e 3 incógnitas e (S_2) é um sistema homogéneo com 2 equações e 2 incógnitas. Em ambos os sistemas os termos independentes estão marcados por ◯ e os coeficientes por $\boxed{}$.

Atendendo à definição de solução de uma equação linear pode definir-se solução de um sistema de equações lineares.

Definição 2.7. *O $n-$uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é **solução** do sistema de equações lineares na forma (2.3) se for solução de todas as equações que constituem esse sistema. Ao conjunto de todas as soluções de (2.3) chama-se **conjunto solução** desse sistema.*

Exemplo 2.8. *Considere o sistema linear (S_1) do exemplo anterior, o terno $\left(-2, 0, \frac{5}{4}\right)$ é uma solução desse sistema; de facto,*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \times (-2) + 3 \times 0 + 4 \times \frac{5}{4} = 1 \\ -1 \times (-2) + 5 \times 0 + 0 \times \frac{5}{4} = 2 \end{array} \right. .$$

Para a determinação do conjunto solução de um sistema, podem aplicar-se diversos métodos que permitem obter um sistema equivalente mais simples.

Definição 2.9. *Dois sistemas são **equivalentes** se tiverem o mesmo conjunto solução.*

Um dos métodos para determinar o conjunto solução de um sistema consiste em aplicar determinadas operações sobre as equações do sistema. Essas operações são chamadas *operações elementares sobre equações*. Represente-se por e_i, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, a i-ésima equação de um sistema de equações lineares na forma (2.3). As operações elementares sobre equações são:

I. trocar duas equações
(representa-se por $e_i \leftrightarrow e_j$);

II. multiplicar uma equação por um escalar não nulo
(representa-se por $e_i' := \alpha e_i$, com $\alpha \neq 0$);

III. adicionar a uma equação outra multiplicada por um escalar
(representa-se por $e_i' := e_i + \beta e_j$, com $\beta \in \mathbb{K}$ e $i \neq j$).

Exercício 2.10. *Mostre que se se efectuar operações elementares sobre equações nas equações* $e_1, \ldots, e_n$ *de um sistema de equações lineares obtém-se um sistema equivalente.*

Veja-se um exemplo:

Exemplo 2.11. *Dado o sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array} \right.$ *, efectuando operações elementares acima descritas, obtém-se:*

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array} \right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2':=e_2+e_1} \left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x=3 \end{array} \right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2':=\frac{1}{2}e_2} \left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e_1':=e_1-e_2} \left\{ \begin{array}{l} y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

O conjunto solução é $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Atendendo ao número de soluções que um sistema de equações lineares admite, este pode ser classificado da seguinte forma:

- **impossível**: quando não tem solução;
- **possível**: quando admite uma ou mais soluções; neste caso pode dizer-se que é:
    - **possível e determinado**: quando tem apenas uma única solução;
    - **possível e indeterminado**: quando tem uma infinidade de soluções; neste caso atribui-se ainda um *grau de indeterminação* ao sistema que é o número de variáveis livres do sistema.

Vejam-se alguns exemplos.

Exemplos 2.12. *1. O sistema do Exemplo 2.11 é possível e determinado.*

2. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2' := e_2 + e_1} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e_1' := e_1 + e_2} \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

tem o seguinte conjunto solução $\{(4 - x_3, 3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$*. Logo trata-se de um sistema possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a* 1 *(neste caso, a única variável livre é* x_3*).*

3. O sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2' := e_2 + e_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

é impossível. O seu conjunto solução é o conjunto vazio $\emptyset$*.*

A informação de um sistema de equações lineares pode ser resumida numa única matriz. Recordando o produto entre matrizes, note-se que é possível representar o sistema de equações lineares da forma (2.3) na seguinte forma matricial:

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

onde à matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz dos coeficientes* (ou matriz simples), à matriz $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz das incógnitas* e à matriz $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz dos termos independentes*.

Pode ainda escrever-se uma única matriz com os coeficientes e os termos independentes do sistema:

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

A esta matriz chama-se *matriz ampliada* do sistema (2.3).

Exemplo 2.13. *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 7 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

A sua forma matricial é $AX = B$, *com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

e a sua matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right].$$

2.2 Método de eliminação de Gauss

Recorde-se que nos exemplos anteriores usaram-se determinadas operações elementares sobre equações. Efectuar operações elementares sobre as equações de um sistema é equivalente a efectuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada associada ao sistema. Represente-se por L_i, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, a i-ésima linha da matriz ampliada. Veja-se um exemplo de como resolver um sistema usando a respectiva matriz ampliada.

Exemplo 2.14.

Sistema	***Matriz ampliada***
$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{rrr:r} -2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$
1º passo: $e_1 \leftrightarrow e_2$	$L_1 \leftrightarrow L_2$
$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$

2º passo: $e_2' := e_2 + 2e_1$ $\qquad$ $L_2' := L_2 + 2L_1$

$e_3' := e_3 - 4e_1$ $\qquad$ $L_3' := L_3 - 4L_1$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - 6x_3 = 2 \\ -2x_2 + 15x_3 = -5 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{array}\right]$$

3º passo: $e_3' := e_3 + 2e_2$ $\qquad$ $L_3' := L_3 + 2L_2$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_3 = -1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

4º passo: $e_3' := \frac{1}{3}e_3$ $\qquad$ $L_3' := \frac{1}{3}L_3$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Assim, obtém-se um sistema equivalente ao inicial, que se resolve facilmente por substituição,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 3 - 0 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \\ x_2 = 2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

E o conjunto solução do sistema é $\left\{\left(2, 0, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

É mais fácil trabalhar com a matriz ampliada. Pode-se então resolver um sistema $AX = B$ considerando a sua matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ e executando nela de forma criteriosa operações sobre as linhas. Este tipo de operações chamam-se *operações elementares sobre as linhas* e são correspondentes às operações elementares sobre equações:

I. trocar linhas
(representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$, com $i \neq j$);

II. multiplicar uma linha por um escalar não nulo
(representa-se por $L_i' := \alpha L_i$, com $\alpha \neq 0$);

III. adicionar a uma linha um múltiplo de uma outra linha
(representa-se por $L_i' := L_i + \beta L_j$, com $\beta \in \mathbb{K}$ e $i \neq j$).

Exemplo 2.15. *Resolva-se o sistema* $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ *, usando a técnica descrita anteriormente.*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - 3L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -14 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_2' := -\frac{1}{4}L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array}\right]$$

Logo

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + yy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{7}{2} = \frac{10-7}{4} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

e o seu conjunto solução é $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)\right\}$.

O que se fez foi um caso particular do **método de eliminação de Gauss** para a resolução de sistemas de equações lineares. Antes de formalizar este método apresentam-se algumas definições necessárias.

Definição 2.16. *Diz-se que uma matriz está na* ***forma escalonada por linhas*** *se satisfizer as seguintes condições:*

- *se há linhas nulas elas situam-se abaixo das linhas não nulas;*
- *o primeiro elemento não nulo de cada linha (com excepção da primeira) situa-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.*

Aos primeiros elementos não nulos de cada linha da forma escalonada por linhas chamam-se *pivots*.

Observe-se que, atendendo à definição, os elementos que se situam na mesma coluna e abaixo de um pivot na forma escalonada por linhas são todos nulos.

Exemplo 2.17. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes A e B estão na forma escalonada; mas a matriz C não está.

Definição 2.18. *Diz-se que uma matriz está na* ***forma escalonada reduzida*** *se estiver na forma escalonada por linhas, isto é, satisfizer as condições anteriores da definição 2.16 e, além disso, cada pivot é igual a 1 e é o único elemento não nulo da sua coluna.*

Observação 2.19. *Repare-se que a forma escalonada reduzida é a forma escalonada por linhas onde cada pivot é* 1 *e, acima destes, os elementos da matriz são nulos.*

Exemplo 2.20. *Sejam*

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&3\end{bmatrix}\qquad\qquad B=\begin{bmatrix}1&4&0&0&3\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$$

As matrizes A e B estão na forma escalonada reduzida.

Teorema 2.21. *Toda a matriz pode ser colocada na forma escalonada mediante uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas.*

Para conseguir transformar uma matriz numa matriz na forma escalonada por linhas executa-se o método de eliminação de Gauss.

Definição 2.22. *O* ***método de eliminação de Gauss*** *consiste nos seguintes passos.*
Passo 1: *Se a matriz tiver todos os elementos nulos, pára. A matriz já está na forma escalonada por linhas.*

Passo 2: *Caso contrário, encontre-se a primeira coluna, da esquerda para a direita, que tenha um elemento não nulo, u. Mova-se a linha que o contém para o topo da matriz. O pivot da primeira linha é u.*

Passo 3: *Anule-se cada elemento abaixo do pivot adicionando às linhas correspondentes múltiplos adequados da primeira linha.*

(Até aqui completa-se o processo no que diz respeito à primeira linha. No que se segue, usam-se as restantes linhas, ignorando a primeira linha.)

Passo 4: *Repita-se os passos 1 a 3 na matriz formada pelas restantes linhas, até esgotar as linhas todas da matriz.*

Para obter a forma escalonada reduzida de uma matriz aplica-se o *método de eliminação de Gauss-Jordan.*

Definição 2.23. *O* ***método de eliminação de Gauss-Jordan*** *é composto por duas fases.*
1ª fase: *Aplicar o método de eliminação de Gauss até produzir a forma escalonada por linhas.*

2ª fase: *Transformar todos os pivots em 1, multiplicando cada linha não nula pelo inverso do respectivo pivot. Aplicar o método de eliminação de Gauss de baixo para cima por forma a anular todos os elementos da matriz situados acima e na mesma coluna dos pivots. Para isso, bastará começar na última linha não nula e, de baixo para cima, adicionar a cada linha múltiplos adequados das linhas inferiores.*

Exemplo 2.24. *Suponha-se que a matriz ampliada de um sistema tem a forma:*

$$\left[\begin{array}{cccc:c}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&2&-5&2&4\\2&0&-6&9&7\end{array}\right]$$

O Passo 1, do método de eliminação de Gauss, é ignorado uma vez que as entradas da matriz não são todas nulas. No Passo 2 tem-se que encontrar a primeira coluna (da esquerda para a direita) com o primeiro elemento não nulo. Neste caso é a primeira coluna e o pivot pode ser a entrada $(3,1)$*. Mova-se a terceira linha (a linha que o contém) para o topo.*

$$\xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{cccr|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{array}\right]$$

Agora basta operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot (Passo 3):

$$\xrightarrow[L_4' := L_4 - L_1]{} \left[\begin{array}{rrrr|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

O Passo 4 manda considerar a submatriz obtida eliminando a primeira linha e aplicar os Passos 1 a 3 até esgotar as linhas todas:

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{rrrr|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4' := L_4 + L_2]{} \left[\begin{array}{cccr|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 := L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccr|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O método da eliminação de Gauss termina aqui e, como tal, poder-se-ia já determinar a solução do sistema obtido, que é equivalente ao sistema inicial, resolvendo-o por substituição.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 5z + 2t = 4 \\ 2y + 3z - 4t = 1 \\ 2z + 3t = 4 \end{cases}$$

No entanto, pode continuar-se a aplicar o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada escalonada por linhas obtida e só depois determinar a solução. A segunda fase desse método manda multiplicar cada linha não nula pelo inverso do pivot correspondente e operar com as linhas da matriz de modo a obter zeros acima dos pivots.

Obtém-se assim

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_1' := \frac{1}{2}L_1 \\ L_2' := \frac{1}{2}L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 + \frac{5}{2}L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{3}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1' := L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz ampliada obtida já está na forma escalonada reduzida. Agora basta passar novamente para sistema e resolver "de baixo para cima", por substituição:

$$\begin{cases} x + 9t = \frac{19}{2} \\ y - \frac{17}{4}t = -\frac{5}{2} \\ z + \frac{3}{2}t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{2} - 9t \\ y = -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}t \\ z = 2 - \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O conjunto solução é $\left\{\left(\frac{19}{2} - 9t, -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}t, 2 - \frac{3}{2}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$. *Observe-se que existe uma variável livre, a variável* t*, pelo que o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a um.*

Exercício Resolvido 2.25. *Seja* (S) *o seguinte sistema de equações lineares*

$$S: \quad \begin{cases} -x + 4z = 0 \\ y = -1 \\ -x + y + 4z = -1 \end{cases}.$$

Determine, caso exista, o seu conjunto solução.

<u>Resolução:</u> *A sua matriz ampliada é:*

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

Passo 1: Anular os elementos da 1ª coluna que se encontram abaixo do pivot da 1ª linha. Para isso efectua-se a operação $L_3' := L_3 - L_1$*, obtendo-se*

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Passo 2: Anular o elemento da 2^a coluna que se encontram abaixo do pivot da 2^a linha. Para isso efectua-se a operação $L_3' := L_3 - L_2$ e obtém-se

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Passo 3: Transformar os pivots de cada linha em 1; para isso basta fazer a operação $L_1' := -L_1$, obtendo-se

$$M_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A matriz M_3 é a matriz ampliada de um sistema (S') equivalente a (S):

$$S': \quad \begin{cases} x - 4z = 0 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

que é um sistema possível e indeterminado; qualquer terno da forma $(4z, -1, z)$, com $z \in \mathbb{R}$, é solução de (S') e, consequentemente, o conjunto solução de (S) é $\{(4z, -1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Veja-se agora um exemplo em que a transformação dos pivots é feito no final para evitar trabalhar com números fraccionários.

Exercício Resolvido 2.26. *Resolva o sistema* $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ -4x + 2y + z = -5 \end{cases}$, *aplicando o método de eliminação de Gauss.*

Resolução: *A sua matriz ampliada é:* $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right]$. *Aplica-se o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 + 2L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A matriz resultante é a matriz ampliada do sistema seguinte, equivalente ao dado:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3z = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

O sistema é impossível.

Exercício 2.27. *Resolva o sistema* $\begin{cases} 3y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$*, usando o método de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan.*

2.3 Discussão de sistemas

No método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) obtém-se, para uma dada matriz, sempre o mesmo número de pivots. Isto é, matrizes escalonadas obtidas de uma mesma matriz têm o mesmo número de pivots.

Definição 2.28. *A **característica** de uma matriz A é o número de pivots de uma qualquer matriz escalonada obtida de A por aplicação sucessiva de operações elementares sobre as linhas de A. Representa-se por $r(A)$ ou $\operatorname{car}(A)$.*

Note-se que se A é uma matriz do tipo $m \times n$ então $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é dada por $AX = B$, com A uma matriz do tipo $m \times n$ e B uma matriz do tipo $m \times 1$. Na resolução pelo método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) faz-se:

Passo 1: Forma-se a matriz ampliada $M = \left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]$.

Passo 2: Aplicar a M o método em causa. No decurso da aplicação do método, podem acontecer duas situações:

- **a)** se surgir uma linha do tipo $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}\right]$, com $\alpha \neq 0$, então o sistema é impossível. Assim, qualquer matriz escalonada obtida a partir de M teria um pivot na última coluna, pelo que $r(A) < r(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right])$.
- **b)** se não surgir, terminar o processo até obter uma matrix escalonada por linhas (ou reduzida). Represente-se essa matriz por $\widetilde{M}$. Neste caso, $r(A) = r(\widetilde{M}) = r(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right])$, pois todos os pivots de $\widetilde{M}$ se encontram nas primeiras n colunas.

Passo 3: (somente no caso **b)**) Na matriz $\widetilde{M}$, o número de colunas sem pivot corresponde ao número de variáveis livres a considerar. Isto é, o número de variáveis livres é dado por:

$$n - r(A) = n - r(\widetilde{M})$$

Para escolher as variáveis dependentes e as livres pode-se efectuar o seguinte raciocínio:

- *variáveis livres* são as que correspondem a colunas sem pivot;
- *variáveis dependentes* são as outras, isto é, as que correspondem a colunas com pivot.

Se $\widetilde{M}$ tiver pivots em todas as colunas correspondentes às incógnitas, isto é, $r(A) = r(\widetilde{M}) = n$ então não existem variáveis livres e o sistema é possível e determinado.

Pode então enunciar-se o seguinte teorema:

Teorema 2.29. *Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, onde A é uma matriz do tipo $m \times n$ e B é uma matriz do tipo $m \times 1$. Há exactamente três possibilidades para a sua classificação:*

1. *$AX = B$ é possível e determinado se e só se $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) = n$;*
2. *$AX = B$ é possível e indeterminado se e só se $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) < n$ e, nesse caso, diz-se que o sistema tem grau de indeterminação $n - r(A)$;*
3. *$AX = B$ é impossível se e só se $r(A) \neq r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right)$.*

Exemplo 2.30. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = -2 \\ y + z = a \\ z = b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais. Para determinar a relação entre os valores de a e b para que o sistema seja possível, comece-se por construir a matriz ampliada do sistema e aplique-se o método de eliminação de Gauss à matriz obtida:

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2' := \frac{1}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{rrr:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4' := L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{rrr:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a-1 \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja possível $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right)$, isto é:

$$b - a - 1 = 0 \Leftrightarrow b - a = 1.$$

Exercício Resolvido 2.31. *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-2z+2t=0 \\ x+2z-2t=0 \\ -x-2z+at=b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais.

1. *Determine os valores de a e b para os quais o sistema é*
   - *i) impossível;*
   - *ii) possível e determinado.*
2. *Resolva-o, pelo método da eliminação de Gauss, para $a=2$ e $b=0$.*

Resolução:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & a & b \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3' := L_3 - L_1 \\ L_4' := L_4 + L_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a+1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3' := L_3 + L_2 \\ L_4' := L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4' := L_4 + L_3]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b \end{array}\right]$$

1. *i) O sistema é impossível se e só se $r(A) \neq r\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]\right)$, isto é, se e só se $a=2$ e $b \neq 0$.*

   ii) O sistema é possível e determinado se e só se

   $$r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]\right) = 4,$$

   isto é, se e só se $a \neq 2$ (b pode tomar qualquer valor).

2. *Se $a=2$ e $b=0$ então, pelo que foi feito anteriormente,*

   $$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   é uma forma escalonada da matriz, ou seja, o sistema inicial é equivalente ao sistema:

   $$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y-2z+2t=0 \\ -z-t=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4t \\ y=-4t \\ z=-t \end{cases}$$

Assim o conjunto solução é $\{(4t, -4t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

2.4 Sistemas homogéneos

Foi visto anteriormente que um sistema de equações lineares homogéneo é um sistema cujos termos independentes são todos nulos, ou seja, é um sistema com forma matricial $AX = 0$, onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e 0 é uma matriz coluna nula.

É fácil verificar que este tipo de sistemas tem pelo menos uma solução, a solução nula

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Esta solução é designada *solução trivial* do sistema homogéneo. Assim, um sistema homogéneo é sempre possível.

Exemplos 2.32. 1. *O sistema homogéneo* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ *tem uma única solução, a solução nula* $(0, 0)$.

2. *O sistema* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ *é um sistema homogéneo possível e indeterminado, cujo conjunto solução é* $\{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$*, ao qual pertence a solução trivial* $(0, 0, 0)$.

Note-se que, nos exemplos anteriores, o primeiro tem o mesmo número de equações e incógnitas enquanto que o segundo exemplo tem mais incógnitas do que equações.

Exercício Resolvido 2.33. *Se um sistema de equações lineares homogéneo tem mais incógnitas do que equações, então existe uma solução não trivial.*
Resolução: *Seja* $AX = 0$*, onde* A *é uma matriz do tipo* $m \times n$ *com* $n > m$ *(que significa que há mais incógnitas que equações). Como* $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & 0 \end{array}\right]\right) \leq m < n$*, o sistema é possível e indeterminado e, consequentemente, existe uma solução não trivial.*

Os sistemas de equações lineares homogéneos possuem propriedades muito simples mas bastante úteis.

Proposição 2.34. *Seja* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_h \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *é uma solução do sistema homogéneo* $AX = 0$*, então* αX_h *também é solução, para qualquer* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Se X_h é uma solução do sistema homogéneo $AX = 0$, então $AX_h = 0$. Logo

$$A(\alpha X_h) = \alpha (AX_h) = \alpha 0 = 0,$$

ou seja, αX_h é solução do sistema $AX = 0$. □

Exemplo 2.35. *O sistema homogéneo* $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$ *admite como solução o terno* $(0,1,-1)$*, logo também são solução os ternos*

$$2(0,1,-1)=(0,2,-2),\ -(0,1,-1)=(0,-1,1),\ 10(0,1,-1)=(0,10,-10),\cdots$$

Proposição 2.36. *Seja* $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_1,X_2\in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *são duas soluções do sistema homogéneo* $AX=0$*, então* X_1+X_2 *também é solução.*

Demonstração. Se X_1 e X_2 são soluções do sistema homogéneo $AX=0$, então $AX_1=0$ e $AX_2=0$. Logo

$$A\left(X_1+X_2\right)=AX_1+AX_2=0+0=0,$$

ou seja, X_1+X_2 é solução do sistema $AX=0$. □

Exemplo 2.37. *O sistema homogéneo* $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z-w=0 \\ x+y+z+w=0 \end{array}\right.$ *admite como soluções os quadruplos* $(0,1,-1,0)$ *e* $(0,3,-2,-1)$*, logo também*

$$(0,1,-1,0)+(0,3,-2,-1)=(0,4,-3,-1)$$

é uma solução do sistema.

As duas proposições anteriores podem-se generalizar como segue:

Proposição 2.38. *Seja* $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_1,\ldots,X_p\in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *são soluções do sistema homogéneo* $AX=0$*, então* $\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_pX_p$ *também é solução, para todos* $\alpha_1,\ldots,\alpha_p\in\mathbb{K}$*.*

A demonstração fica como exercício.

Observe-se que este facto não é válido para sistemas de equações lineares completos.

Exemplo 2.39. *O sistema* $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ x+y+z=3 \end{array}\right.$ *admite como soluções os ternos* $(1,1,1)$ *e* $(1,2,0)$*, mas* $(2,3,1)$ *não é solução do sistema.*

Para qualquer sistema de equações lineares completo cuja forma matricial é $AX=B$, com $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B\in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, podemos considerar o *sistema homogéneo associado* cuja forma matricial é $AX=0$.

Exemplo 2.40. *Dado o sistema*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y=3 \\ x-y-z=4 \end{array}\right.,$$

a sua forma matricial é $AX = B$ *onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

O sistema homogéneo associado é

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

cuja forma matricial é $AX = 0$.

O próximo resultado estabelece que o conjunto solução de um sistema de equações lineares completo pode ser obtido adicionando uma solução particular desse sistema aos elementos do conjunto solução do sistema homogéneo associado.

Teorema 2.41. *Sejam* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$. *Seja* $X_p \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *uma solução particular do sistema de equações lineares* $AX = B$. *Então,* $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *é solução desse sistema se e só se existe uma solução* $X_h \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *do sistema homogéneo associado* $AX = 0$ *tal que* $X_0 = X_p + X_h$.

Demonstração. Por hipótese, X_p é uma solução do sistema completo $AX = B$, ou seja, $AX_p = B$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que X_0 é também uma solução de $AX = B$, isto é, $AX_0 = B$. Então

$$AX_p = AX_0 \Leftrightarrow AX_p - AX_0 = 0 \Leftrightarrow A(X_0 - X_p) = 0$$

ou seja, $X_h = X_0 - X_p$ é uma solução do sistema homogéneo associado $AX = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que X_h é uma solução do sistema homogéneo associado ao sistema dado, ou seja, $AX_h = 0$. Seja $X_0 = X_p + X_h$. Então

$$AX_0 = A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + 0 = B.$$

Donde X_0 é uma solução do sistema completo $AX = B$.

$\square$

Observação 2.42. *Se* X_0 *é uma solução particular do sistema* $AX = B$ *e se* $S = \{X_h \ : \ AX_h = 0\}$ *é o conjunto solução do sistema* $AX = 0$, *tem-se que o conjunto solução do sistema* $AX = B$ *é* $X_0 + S = \{X_0 + X_h \ : \ X_h \in S\}$[1].

[1] A soma de um elemento a com um conjunto C define-se como sendo o conjunto formado pelas somas de a com todos os elementos de C, ou seja, $a + C = \{a + u \ : \ u \in C\}$

Exemplo 2.43. *Considere-se o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

O sistema homogéneo associado é $\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$. *Construídas as matrizes ampliadas e aplicado o método de eliminação de Gauss obtém-se:*

$$[\ A \ \vdots\ B\ ] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.4}$$

e

$$[\ A \ \vdots\ 0\ ] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.5}$$

Logo, de (2.4)*, vem que o sistema completo é equivalente a*

$$\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

e, portanto, significa que é um sistema possível e indeterminado e o seu conjunto solução é $\{(z-2, 2-3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

De (2.5)*, vem que o sistema homogéneo associado é equivalente a*

$$\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -3z \end{cases}$$

o que significa que é também um sistema possível e indeterminado e o seu conjunto solução é $\{(z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Repare-se que, se no conjunto solução do sistema completo escolhermos uma solução particular, por exemplo, aquela que corresponde a $z = 0$*, ou seja,* $(-2, 2, 0)$ *então podemos escrever o conjunto solução do sistema completo como soma desta solução particular com o conjunto solução do sistema homogéneo associado:*

$$(-2, 2, 0) + \{(z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

3. Matrizes invertíveis. Determinantes

3.1 Matrizes invertíveis

Note-se que têm sido consideradas propriedades das operações com as matrizes semelhantes às que já são familiares com os números reais. Dada uma matriz quadrada, formule-se, no conjunto das matrizes quadradas, a noção correspondente ao inverso de um número real não nulo. Considere-se então o conceito de matriz invertível.

Nesta secção consideram-se apenas matrizes quadradas.

Definição 3.1. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A matriz A diz-se* ***invertível*** *(ou* ***não singular****) se existe uma matriz quadrada $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

A matriz B designa-se por ***inversa*** *de A.*

Se não existir inversa, a matriz diz-se *singular*.

Exemplo 3.2. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Esta matriz é invertível. De facto, seja*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então $AB = BA = I$, ou seja, a matriz B é inversa de A.

Proposição 3.3. *A inversa de uma matriz quadrada é única.*

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n invertível e suponha-se que B e C são inversas de A. Por definição,

$$AB = BA = I_n = AC = CA.$$

Logo $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. Portanto, a inversa de A é única.

□

Uma vez que a inversa é única, representa-se a inversa de A por A^{-1}.

Observação 3.4. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, prova-se (ver Teorema 3.43) que se, para alguma matriz quadrada B de ordem n, $AB = I_n$ então $BA = I_n$ e, consequentemente, B é inversa de A.*
Então, para verificar se uma dada matriz B é a inversa de A apenas é necessário verificar que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, ou seja, não é necessário verificar as duas igualdades.

Exercício 3.5. *Mostre, usando a definição, que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não admite inversa.*

3.1.1 Propriedades da inversa

Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Algumas propriedades da inversa são:

- **Propriedade 1:** I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$.

- **Propriedade 2:** Se A é invertível, então A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

- **Propriedade 3:** Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  Demonstração. Como $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ são matrizes invertíveis, existem $A^{-1}, B^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AA^{-1} = I_n$ e $BB^{-1} = I_n$. Pelo que:

  $$\begin{aligned}
  (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} && \text{pela associatividade do produto de matrizes}\\
  &= AI_nA^{-1} && \text{por definição de inversa}\\
  &= AA^{-1} && \text{por definição de elemento neutro do produto de matrizes}\\
  &= I_n && \text{por definição de inversa.}
  \end{aligned}$$

  Pela observação 3.4, e como a inversa de uma matriz é única, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB, isto é, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e, portanto, AB é invertível. □

  Informalmente, pode dizer-se que a inversa do produto é o produto das inversas pela ordem inversa. Este resultado pode ser generalizado ao produto de várias matrizes (mostre):

  $$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},$$

- **Propriedade 4:** Se A é invertível, então A^k é invertível e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

  Demonstração. Pode demonstrar-se esta propriedade por dois processos distintos:

  1º processo

  Como $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n$. Donde

$$
\begin{aligned}
\left(A^k\right)\left(A^{-1}\right)^k &= \underbrace{A\cdots A(A}_{k \text{ vezes}}\underbrace{A^{-1})A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k \text{ vezes}} && \text{pela associatividade} \\
& && \text{do produto de matrizes} \\
&= \underbrace{A\cdots A}_{k-1 \text{ vezes}}\, I_n \underbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k-1 \text{ vezes}} && \text{por definição de inversa} \\
&= \underbrace{A\cdots A(A}_{k-1 \text{ vezes}}\underbrace{A^{-1})A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k-1 \text{ vezes}} && \text{pela associatividade} \\
& && \text{do produto de matrizes} \\
&\ \vdots && \vdots \\
&= AA^{-1} = I_n && \text{por definição de inversa.}
\end{aligned}
$$

Pela observação 3.4, pode-se concluir que A^k é invertível e $\left(A^{-1}\right)^k$ é a inversa de A^k, isto é, $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

<u>2º processo</u>

Demonstre-se, por indução matemática, que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{P}(k)$ é a proposição

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k, \tag{3.1}$$

ou seja, tem-se que:

a) provar que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira para $k = 1$;

b) supor $\mathcal{P}(k-1)$ verdadeira e provar que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira.

Assim

a) Para $k = 1$, a proposição (3.1) fica $(A^1)^{-1} = (A^{-1})^1 \Leftrightarrow A^{-1} = A^{-1}$, que é claramente verdadeira;

b) Suponha-se agora que a proposição (3.1) é válida para $k-1$, isto é, é válida a igualdade $\left(A^{k-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k-1}$. Então pode-se concluir que:

$$
\begin{aligned}
\left(A^k\right)^{-1} &= \left(A^{k-1}A\right)^{-1} && \text{por definição de potência de matrizes} \\
&= A^{-1}\left(A^{k-1}\right)^{-1} && \text{pela propriedade 3 da inversa} \\
&= A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{k-1} && \text{por hipótese de indução} \\
&= \left(A^{-1}\right)^k && \text{por definição de potência de uma matriz.}
\end{aligned}
$$

□

- **Propriedade 5:** Se A é invertível, então A^T é invertível e
$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Demonstração. Como A é uma matriz invertível, existe A^{-1} e tem-se que:
$$\begin{aligned} A^T\left(A^{-1}\right)^T &= \left(A^{-1}A\right)^T && \text{pela propriedade transposta do produto} \\ &= (I_n)^T && \text{por definição de inversa} \\ &= I_n && \text{por definição de transposta.} \end{aligned}$$

Pela observação 3.4, podemos concluir que A^T é invertível e $\left(A^{-1}\right)^T$ é a inversa de A^T, isto é, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. □

- **Propriedade 6:** Se A é invertível e $\alpha \neq 0$, então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

As demonstrações das propriedades 1, 2 e 6 são deixadas como exercício.

Exercício 3.6. *Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Prove que:*

a) $C^T B(AB)^{-1}\left(C^{-1}A^T\right)^T = I_n$;

b) $A^2 = I_n \Leftrightarrow A = A^{-1}$;

c) se $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$ *então* $AB = BA$.

3.1.2 Algoritmo de inversão

Veja-se agora como determinar a inversa de uma matriz ou decidir que uma matriz não é invertível.

Exemplo 3.7. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Pretende-se averiguar se A é uma matriz invertível e, em caso afirmativo, determinar a sua inversa, ou seja, determinar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ tal que $AB = I_2$.*

Recorde-se que, pela observação 3.4, basta mostrar uma das igualdades da definição de inversa. Ora
$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
ou seja,
$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ x+3z & y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x+2z \\ x+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} y+2t \\ y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema anterior é equivalente à resolução dos dois sistemas de equações lineares seguintes:

$$AX_1 = B_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$AX_2 = B_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que têm a particularidade de terem a mesma matriz dos coeficientes. Aplicando operações elementares na matriz ampliada de cada sistema obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad (3.2)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad (3.3)$$

Tem-se então para soluções dos dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Repare-se que as operações efectuadas em (3.2) e (3.3) são as mesmas. De facto, pode aglutinar-se as operações num só processo, da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e, novamente, se confirma que $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Note-se que no exemplo anterior partiu-se de uma matriz ampliada da forma $\left[\begin{array}{c|c} A & I_2 \end{array}\right]$ e chegou-se a uma matriz ampliada da forma $\left[\begin{array}{c|c} I_2 & B \end{array}\right]$, onde $B = A^{-1}$.

Apresenta-se assim um algoritmo para inverter uma matriz quadrada.

Algoritmo de inversão

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Formar a matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$;

2. Executar em $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$ uma sequência de operações elementares sobre as linhas que transformem a matriz A na matriz identidade I_n, obtendo-se no final do processo a matriz $\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$;

. Caso não seja possível obter I_n no lado esquerdo da matriz ampliada, então a matriz A não é invertível.

Exemplo 3.8. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Aplicando o algoritmo de inversão:*

$$[\ A \mid I_3\ ] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2' := \frac{1}{3}L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 + \frac{5}{3}L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{1}{3}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Conclui-se então que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Verifique que* $AA^{-1} = I_3$.

Exercícios 3.9.

1. *Mostre que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ *é invertível e calcule a sua inversa.*

2. *Uma das seguintes matrizes é singular. Calcule a inversa no caso em que é possível.*

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determine o valor de k para o qual a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ *é singular.*

3.2 Determinantes. Conceitos gerais

Definição 3.10. *Uma **permutação** dos elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ é uma lista desses n elementos apresentados por uma certa ordem. Representa--se por $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, onde $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e $i_k \neq i_j$, para todo $j \neq k$.*

Exemplo 3.11. $(6, 3, 1, 5, 2, 4)$ *é uma permutação de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, ..., n\}$ representa-se por S_n. Observe-se que a cardinalidade, isto é o número de elementos, de S_n é $n!$.

Exemplo 3.12. *S_3 é o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$ e tem $3! = 6$ elementos. De facto,*

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Observação 3.13. *Note-se que para inferir que a cardinalidade de S_4 é $4!$, ou seja, 4 vezes a cardinalidade de S_3, basta notar que, para cada permutação de $\{1, 2, 3\}$ existem 4 permutações distintas de $\{1, 2, 3, 4\}$; de facto, por exemplo, das permutações $(1, 2, 3), (3, 2, 1) \in S_3$ podem construir-se as seguintes permutações de S_4*

$$\begin{array}{llcll} (1,2,3) & (\underline{\mathbf{4}},1,2,3) & \qquad & (3,2,1) & (\underline{\mathbf{4}},3,2,1) \\ & (1,\underline{\mathbf{4}},2,3) & & & (3,\underline{\mathbf{4}},2,1) \\ & (1,2,\underline{\mathbf{4}},3) & & & (3,2,\underline{\mathbf{4}},1) \\ & (1,2,3,\underline{\mathbf{4}}) & & & (3,2,1,\underline{\mathbf{4}}) \end{array}$$

É esse o caminho para a demonstração por indução sobre n de que a cardinalidade de S_n é $n!$.

Definição 3.14. *Dada uma permutação $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$, o par (i_k, i_j), com $k < j$, designa-se uma **inversão** se $i_k > i_j$.*

Note-se que par (i_k, i_j), com $k < j$, é uma inversão se i_k e i_j aparecem na permutação por ordem decrescente.

Exemplo 3.15. *Na permutação $(2, 1, 6, 3, 5, 4) \in S_6$, o par $(2, 1)$ é uma inversão. Também os pares $(6, 3)$, $(6, 5)$, $(6, 4)$ e $(5, 4)$ são inversões. Ao todo nesta permutação ocorrem 5 inversões.*

Observação 3.16. *Para determinar todas as inversões de uma permutação* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *basta considerar o primeiro elemento da permutação* i_1 *e encontrar todos os elementos que são menores que* i_1 *e estão colocados do lado direito de* i_1*; depois repetir o processo para os restantes elementos* $i_2, \ldots, i_{n-1}$.

Definição 3.17. *Uma permutação* $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$ *é* ***par*** *(respectivamente,* ***ímpar****) se o número total de inversões que nela ocorrem é par (respectivamente, ímpar).*

Exemplos 3.18. *Vai-se estudar a paridade das permutações dos conjuntos* $\{1, 2\}$ *e* $\{1, 2, 3\}$.

i) $n = 2$

Permutação	*Total de inversões*	*Paridade*
$(1,2)$	0	*par*
$(2,1)$	1	*ímpar*

ii) $n = 3$

Permutação	*Total de inversões*	*Paridade*
$(1,2,3)$	0	*par*
$(2,3,1)$	2	*par*
$(3,1,2)$	2	*par*
$(3,2,1)$	3	*ímpar*
$(2,1,3)$	1	*ímpar*
$(1,3,2)$	1	*ímpar*

Definição 3.19. *Seja* $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *O* ***determinante*** *de* A, *representa- -se por* $\det A$ *ou* $|A|$, *é o escalar*

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

onde σ *é o número de inversões da permutação* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Resulta imediatamente da definição (e do exemplo anterior) que:

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ \quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{array}$

Exercício 3.20. *Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 2 & b+c \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & c \\ b & -a \end{bmatrix}$. *Sabendo que* $A = B^T$, *determine*

$$\begin{vmatrix} a & b & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Uma mnemónica para o cálculo de determinante de uma matriz do tipo 3×3 é conhecida por *Regra de Sarrus* e tem duas versões:

1ª versão

Repetir as duas primeiras colunas da matriz da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Feito este processo, verifica-se a presença de

- três "diagonais principais": a diagonal principal a_{11}, a_{22}, a_{33} e duas diagonais paralelas a ela: a_{12}, a_{23}, a_{31} e a_{13}, a_{21}, a_{32};
- três "diagonais secundárias": a diagonal secundária a_{13}, a_{22}, a_{31} e duas paralelas a ela: a_{11}, a_{23}, a_{32} e a_{12}, a_{21}, a_{33}.

O determinante será calculado por meio da diferença entre o somatório do produto dos elementos das três diagonais principais e o somatório do produto dos elementos das três diagonais secundárias, isto é:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}). \tag{3.4}$$

2ª versão

A regra de Sarrus pode também ser aplicada repetindo-se as duas primeiras linhas da matriz A da seguinte forma:

$$A = \begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{matrix}$$

Novamente se verifica a presença de três diagonais principais e três diagonais secundárias. O determinante é calculado da mesma forma, agora com estas diagonais:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}). \tag{3.5}$$

Note que (3.4) e (3.5) são a mesma expressão.

Exemplo 3.21. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Aplicando a regra de Sarrus,*

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ &= (1 \times 3 \times 1 + (-1) \times 1 \times 2 + 2 \times (-1) \times 1) - \\ &\quad - (2 \times 3 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times (-1) \times 1) \\ &= 3 - 2 - 2 - 12 - 1 - 1 = -15. \end{aligned}$$

Exercício 3.22. *Calcule, aplicando a Regra de Sarrus,* $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$.

3.2.1 Propriedades do determinante

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então:

(P$_1$) Se A tem uma linha (respectivamente, coluna) de zeros então $\det A = 0$;

Exemplo 3.23.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(P$_2$) Se $A = \left[a_{ij}\right]$ é uma matriz triangular (superior ou inferior), então

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Exemplo 3.24.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-2) \times 1 \times 1 = -10.$$

(P$_3$) Se a uma linha (respectivamente, coluna) de uma matriz A adicionar-se um múltiplo qualquer de uma outra linha (respectivamente, coluna), o valor do determinante não se altera;

Exemplo 3.25.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_2' := L_2 + L_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\boldsymbol{P}_2} 2.$$

(P$_4$) Se A tem duas linhas (respectivamente, colunas) iguais ou proporcionais, então $\det A = 0$;

Exemplo 3.26.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 10 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_1 = 5C_2} 0.$$

($\mathbf{P}_5$) Se se trocar entre si duas linhas (respectivamente, colunas) de A, então o valor do determinante muda de sinal;

Exemplo 3.27.

$$-46 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_1 \leftrightarrow L_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -46$$

($\mathbf{P}_6$) Se a matriz B se obtém a partir de uma matriz A multiplicando <u>uma</u> das suas linhas (respectivamente, colunas) por um escalar α, então

$$\det B = \alpha \det A$$

Isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.28. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* B *a matriz que se obtém multiplicando a última linha de* A *por* 2*, ou seja,* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Então* $\det B = 8$ *e* $\det A = 4$*, isto é,* $\det B = 2 \det A$.

($\mathbf{P}_7$) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exemplo 3.29. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Então* $\det B = 32$ *e* $\det A = 4$*, isto é,* $\det B = 2^3 \det A$.

($\mathbf{P}_8$) $\det\left(A^T\right) = \det A$.

Exemplo 3.30.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

($\mathbf{P}_9$) Sejam A' e A'' duas matrizes tais que a linha (respectivamente, coluna) i da matriz A é igual à soma das linhas (respectivamente, colunas) i das matrizes A' e A'' e as outras linhas (respectivamente, colunas) das matrizes A' e A'' são iguais às linhas (respectivamente, coluna) correspondentes da matriz A, então

$$\det A = \det(A') + \det(A'')$$

Isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.31.

$$20 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 11$$

($\mathbf{P}_{10}$) $\det(AB) = \det A \det B$.

Exemplo 3.32. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, *com* $\det A = 3$ *e* $\det B = -4$.

Então $AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *e tem-se que* $\det(AB) = -12 = \det A \det B$.

($\mathbf{P}_{11}$) Se A é uma matriz invertível então $\det A \neq 0$ e $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

Exemplo 3.33. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. *Então* $\det A = -3 \neq 0$. *Por outro lado,* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *e* $\det\left(A^{-1}\right) = -\frac{1}{3}$.

Exercício Resolvido 3.34. *Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 3 tais que* $\det A = -2$ *e* $\det B = \dfrac{1}{4}$*. Determine, usando as propriedades:*

a) $\det(3A)$ b) $\det\left(A^3B^{-1}\right)$ c) $\det\left(-BA^T\right)$ d) $\det\left(-\dfrac{1}{2}\left(B^T\right)^{-1}\right)$

Resolução:

a) $\det(3A) = 3^3 \det A = -54$;

b) $\det\left(A^3B^{-1}\right) = \det\left(A^3\right)\det\left(B^{-1}\right) = (\det A)^3 \frac{1}{\det B} = -2$;

c) $\det\left(-BA^T\right) = \det(-B)\det\left(A^T\right) = (-1)^3 \det B \det A = \frac{1}{2}$;

d) $\det\left(-\frac{1}{2}\left(B^T\right)^{-1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det\left(\left(B^T\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{8\det(B^T)} = -\frac{1}{8\det B} = -\frac{1}{2}$

Exercício 3.35. *Sejam $A, B, C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ matrizes tais que* $\det A = -2$, $\det B = 5$ *e* $\det C = -\dfrac{1}{2}$*. Determine, usando as propriedades:*

a) $\det(ABC)$ b) $\det(B^2A^TC^{-1})$ c) $\det(-2B)$ e) $\det\left(\dfrac{1}{3}C^TA^{-1}\right)$

3.2.2 Teorema de Laplace

A definição de determinante pode tornar-se pesada se a matriz for de ordem superior a 3. Observe-se que, por exemplo, existem $4! = 24$ permutações do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. O próximo resultado permite calcular o determinante de uma forma mais prática.

Definição 3.36. *Seja $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Seja $A(i|j)$ a submatriz quadrada de A, de ordem $n-1$, que se obtém desta a partir da supressão da linha i e da coluna j. Chama-se **complemento algébrico** (ou **co-factor**) de a_{ij}, e representa-se por A_{ij}, ao escalar*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j).$$

Exemplo 3.37. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*. Então*

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad e \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Teorema 3.38 (**Teorema de Laplace**). *Seja* $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs},$$

para quaisquer $i, s \in \{1, \ldots, n\}$.

Este teorema também é conhecido como o desenvolvimento em co-factores para o cálculo do determinante. Na prática, consiste em escolher uma linha (ou uma coluna) e multiplicar cada entrada dessa linha (ou coluna) escolhida pelo cofactor correspondente, e adicionar os resultados. Isto é, se escolher a linha i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Se escolher a coluna s, com $s \in \{1, \ldots, n\}$, então:

$$\det A = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \cdots + a_{ns}A_{ns} = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs}.$$

Exemplo 3.39. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Vai-se calcular o determinante de A por aplicação directa do Teorema de Laplace. Escolha-se a primeira linha:*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} &= 3A_{11} + (-2)A_{12} + 7A_{13} + 0A_{14} \\
&= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 6 & -1 & 8 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad + 7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3(4 - 48 + 16 + 80) + 2(-2 + 24 + 240 - 8 - 40 + 36) \\
&\quad + 7(16 + 96 - 16 + 24) \\
&= 1496.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.40. *Seja* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Vai-se calcular o determinante de* B*, utilizando o Teorema de Laplace e as propriedades dos determinantes.*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad & \underset{=}{\mathbf{P}_6} \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{\mathbf{P}_3} \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{T.L.}\, {}_{C_1} \quad 2 \times \left(1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \right) \\
& \underset{=}{T.L.}\, {}_{C_1} \quad 2(-3)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\
& = \quad 6(8-3) = 30.
\end{aligned}$$

Exercício Resolvido 3.41. *Sabendo que* $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 + b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10$*, calcule* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$
\begin{aligned}
10 &= \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\mathbf{P}_9}{=} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_3 & -b_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\mathbf{P}_6 \text{ e } \mathbf{P}_4}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + 0 \\
&\overset{\mathbf{P}_6}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
&\overset{\mathbf{P}_5}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5.$

Exercícios 3.42. *1. Sabendo que* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$*, calcule*

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1+a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2+a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3+a_3 \end{vmatrix}.$$

2. Para quaisquer $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$*, mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2).$$

3.3 Condições de invertibilidade

É possível estabelecer uma relação entre a existência ou não da inversa de uma matriz através do determinante, bem como classificar o sistema de equações lineares associado a essa matriz.

Teorema 3.43. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) *A é invertível;*

b) *O sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;*

c) *$r(A) = n$ e a matriz A pode ser reduzida à matriz I_n por operações elementares sobre linhas;*

d) *O sistema $AX = B$ é possível e determinado, para qualquer matriz B do tipo $n \times 1$;*

e) *Existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $AC = I_n$.*

Demonstração. Prova-se este resultado através da sequência de implicações

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow a).$$

$a) \Rightarrow b)$
Se A é invertível então existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponha-se que $X_1 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é uma solução do sistema $AX = 0$, isto é, $AX_1 = 0$. Multiplicando ambos os membros da equação anterior por A^{-1}, pode deduzir-se que:

$$\begin{aligned} AX_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(AX_1) = A^{-1}0 \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad I_n X_1 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $X_1 = 0$ e, dada a arbitrariedade de X_1, $AX = 0$ tem uma única solução que é a solução trivial.

$b) \Rightarrow c)$
Se o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial, então é um sistema possível e determinado. Logo $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & 0 \end{array}\right]\right) = n$, o que por sua vez implica que A pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas.

$c) \Rightarrow d)$
Seja $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Como A pode ser reduzida a I_n por operações elementares por linhas, então consegue-se efectuar a redução por linhas

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{c:c} I_n & B' \end{array}\right],$$

com $B' \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Logo $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) = n = r(A)$ e, portanto, o sistema $AX = B$ é possível e determinado.

$d) \Rightarrow e)$
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, defina-se $B_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ como a coluna i da matriz I_n.

Então, por hipótese, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o sistema $AX = B_i$ tem uma única solução, diga-se $X_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Seja $C = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} AC &= A\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} && \text{por definição de produto entre matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix} && \text{por definição de } X_i \ (AX_i = B_i) \\ &= I_n && \text{por definição de } B_i. \end{aligned}$$

Ou seja, existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_n$.

e) $\Rightarrow$ *a)*
Por hipótese, existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $AC = I_n$. Para mostrar que A é invertível basta mostrar que também se tem $CA = I_n$.

Primeiro mostra-se que o sistema homogéneo $CX = 0$ admite apenas a solução trivial. Seja $X' \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $CX' = 0$. Então

$$X' = I_nX' = (AC)X' = A(CX') = A0 = 0.$$

Ou seja, $X' = 0$ e, portanto, $CX = 0$ tem apenas a solução trivial. Como *b)* $\Rightarrow$ *e)*, existe uma matriz $C' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $CC' = I_n$. Mas então

$$A = AI_n = A(CC') = (AC)C' = I_nC' = C'.$$

E, portanto, $CA = AC = I_n$, ou seja, A é invertível. □

Foi visto nas propriedades dos determinantes que se uma matriz é invertível então o seu determinante é não nulo. Prova-se mesmo que esta condição é necessária e suficiente.

Teorema 3.44. *Uma matriz quadrada A é invertível se e só se* $\det A \neq 0$.

Demonstração. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

"$\Rightarrow$" Suponha-se que A é uma matriz invertível. Então existe uma matriz $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n$. Como o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes de cada uma das matrizes, tem-se pela propriedade ($\mathbf{P}_{10}$)

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(I_n) = 1. \tag{3.6}$$

Logo $\det A \neq 0$.

"$\Leftarrow$" A demonstração da implicação recíproca é mais complicada e não será efectuada. □

Exercício Resolvido 3.45. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, *onde α é um parâmetro real. Determine os valores de α para os quais a matriz A é invertível.*

Resolução: *Comece-se por calcular o determinante de A.*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{vmatrix} &\underset{C_4}{\overset{T.L.}{=}} 1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1}{\overset{T.L.}{=}} (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2\alpha + \alpha^2) \\
&= \alpha(\alpha - 2).
\end{aligned}$$

Por teorema anterior, A é invertível se e só se $\det A \neq 0$. Portanto, A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $2 - \alpha \neq 0$, ou seja, A é invertível para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

Exercício 3.46. *Seja $A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix}$, onde β é um parâmetro real. Determine os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ admite apenas a solução trivial.*

3.4 Cálculo da inversa a partir da matriz adjunta

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se *matriz dos complementos algébricos de A*, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz quadrada de ordem n definida por:

$$\hat{A} = [A_{ij}]$$

onde A_{ij} é o complemento algébrico da entrada a_{ij}, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definição 3.47. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***matriz adjunta de*** *A, e representa-se por* $\operatorname{adj} A$, *à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é,*

$$\operatorname{adj} A = (\hat{A})^T.$$

Exemplo 3.48. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Então*

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -8 \\ -5 & -7 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\operatorname{adj} A = (\hat{A})^T = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.49. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. *Verifique que* $A = \operatorname{adj} A$.

O próximo resultado estabelece uma propriedade que permitirá calcular a inversa de uma matriz a partir da sua matriz adjunta.

Teorema 3.50. *Seja* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I_n.$$

Mais, se A *é invertível então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Demonstração. Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, tem-se que

$$\begin{aligned} A\,(\operatorname{adj} A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela definição de produto de matrizes, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a entrada (i,i) da matriz $A\,(\operatorname{adj} A)$ é

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \det A,$$

pelo Teorema de Laplace aplicado à linha i da matriz A.

Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$ e considere-se a matriz B que se obtém da matriz A, substituindo a linha j por uma linha igual à linha i de A. Então $\det B = 0$, porque a matriz B tem duas linhas iguais. Pelo Teorema de Laplace, aplicado à linha j da matriz B, tem-se

$$0 = \det B = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn},$$

que é a entrada (i,j) da matriz $A\,(\operatorname{adj} A)$. Portanto,

$$A\,(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)\, I_n.$$

Se A é invertível, então existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\det A \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^{-1}\left(\frac{\det A}{\det A}\right) I_n \\ &= \frac{1}{\det A} A^{-1} A\,(\operatorname{adj} A) && \text{pela primeira parte do teorema} \\ &= \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A && \text{por definição de inversa} \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.51. *Considere-se a matriz A do Exemplo 3.48. Como* $\det A = -6$, *então*

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3.52. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule A^{-1}, usando a matriz adjunta.*

3.5 Sistemas de Cramer

Definição 3.53. *Sejam $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Diz-se que um sistema de equações lineares na forma matricial $AX = B$ é um* ***sistema de Cramer*** *se a matriz A é invertível.*

Repare-se que se existe A^{-1} então

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ou seja, um sistema de Cramer é sempre possível e determinado e a sua única solução é dada por:

$$X = A^{-1}B.$$

Observe-se que, neste tipo de sistemas, basta calcular a matriz inversa de A e efectuar o produto $A^{-1}B$ para obter a solução. No entanto existe um método, denominado Regra de Cramer, que permite a obtenção da solução destes sistemas de uma forma mais eficiente.

Teorema 3.54 (Regra de Cramer). *Sejam* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *matrizes tais que o sistema de equações lineares na forma matricial* $AX = B$ *é um sistema de Cramer. Para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$*, seja* A_j *a matriz que se obtém de* A *substituindo a coluna* j *pela única coluna da matriz* B*.*

A solução (única) do sistema $AX = B$ *é o* n*-uplo* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, onde*

$$\alpha_j = \frac{\det(A_j)}{\det A}, \qquad \textit{para todo } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstração. Note-se que, sendo $AX = B$ um sistema de Cramer, então A é uma matriz invertível e a solução do sistema é dada por $X = A^{-1}B$. Seja $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_n\end{bmatrix}^T$ essa solução e suponha-se que $B = \begin{bmatrix}b_1 & \cdots & b_n\end{bmatrix}^T$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix} &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)\,B. \end{aligned}$$

Repare-se que a entrada $(j, 1)$ da matriz coluna $(\operatorname{adj} A)\,B$ é

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n = \det A_j,$$

por aplicação do Teorema de Laplace à coluna j da matriz A_j. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad \text{para qualquer } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

□

Exemplo 3.55. *Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é* $AX = B$*, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que é um sistema de Cramer uma vez que $\det A = -2 \neq 0$ *e, portanto,* A *é invertível.*

De acordo com o teorema anterior, a solução deste sistema é o terno (x, y, z) *onde*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -1 \;\; e \;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

Ou seja, a solução do sistema dado é $(1, -1, 0)$ *(verifique!).*

Exercício 3.56. *Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é $AX = B$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Mostre que este sistema só admite uma solução e calcule-a, aplicando a regra de Cramer.

4. Espaços vectoriais sobre um corpo

4.1 Definição e propriedades

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto não vazio onde estão definidas duas operações internas, representadas por $+$ e por $\cdot$, isto é, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, existe um e um só $\alpha + \beta \in \mathbb{K}$ e um e um só $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{K}$.

À operação $+$ chama-se *adição em* $\mathbb{K}$ e à operação $\cdot$ chama-se *multiplicação em* $\mathbb{K}$.

Estas operações internas conferem a $\mathbb{K}$ o que habitualmente se chama *estrutura algébrica*, cuja designação depende das propriedades que estas operações satisfazem.

Se a operação adição $+$ verificar as propriedades (P_1) a (P_4), onde

(P_1) comutatividade: $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(P_2) associatividade: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

(P_3) existência de elemento neutro: $\exists \mathbf{0}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad \mathbf{0}_{\mathbb{K}} + \alpha = \alpha$

(P_4) existência de elemento simétrico: $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists -\alpha \in \mathbb{K}: \quad \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$

diz-se que a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, +)$ é um *grupo abeliano*.

Se a operação multiplicação $\cdot$ verificar as propriedades (P_5) a (P_8), onde

(P_5) comutatividade: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

(P_6) associatividade: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$

(P_7) existência de elemento neutro: $\exists \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad \mathbf{1}_{\mathbb{K}} \cdot \alpha = \alpha$

(P_8) existência de elemento inverso: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}, \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$: $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$

diz-se que a estrutura algébrica $(\mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.

Definição 4.1. *Seja $\mathbb{K}$ um conjunto munido de duas operações internas, representadas por $+$ e por $\cdot$, tais que são válidas as propriedades (P_1) a (P_8). Se também for válida a propriedade distributiva de $\cdot$ em relação $+$, isto é, se*

$$(P_9) \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \ \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

*diz-se que a estrutura algébrica $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um **corpo**.*

Ao elemento neutro da adição, $\mathbf{0}_{\mathbb{K}}$, chama-se *zero do corpo* $\mathbb{K}$ e ao elemento neutro da multiplicação, $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, chama-se *identidade do corpo* $\mathbb{K}$.

Exemplo 4.2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *são corpos, onde $+$ e $\cdot$ representam, respectivamente, a adição e a multiplicação usuais entre números.*

Definição 4.3. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja E um conjunto não vazio onde estão definidas duas operações:*

- *uma operação interna, representada por $\oplus$ e designada por adição em E, tal que a todos $u, v \in E$ faz corresponder o elemento $u \oplus v \in E$;*
- *e uma operação externa, representada por $\otimes$ e designada por multiplicação por escalar em E, tal que a todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e a todo $u \in E$ faz corresponder o elemento $\alpha \otimes u \in E$.*

Diz-se que a estrutura algébrica $(E, \oplus, \otimes)$ é um ***espaço vectorial sobre o corpo*** *$\mathbb{K}$ se são satisfeitas as seguintes propriedades, para quaisquer $u, v, w \in E$ e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:*

(A_1) $u \oplus v = v \oplus u$ *(comutatividade de $\oplus$)*

(A_2) $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ *(associatividade de $\oplus$)*

(A_3) $\exists \mathbf{0}_E \in E, \quad u \oplus \mathbf{0}_E = u$ *(existência de elemento neutro de $\oplus$)*

(A_4) $\exists - u \in E, \quad u \oplus (-u) = \mathbf{0}_E$ *(existência de elemento simétrico em $\oplus$)*

e ainda

(M_1) $(\alpha + \beta) \otimes u = (\alpha \otimes u) \oplus (\beta \otimes u)$ *(distributividade de $\otimes$ em relação a $+$)*

(M_2) $\alpha \otimes (u \oplus v) = \alpha \otimes u \oplus \alpha \otimes v$ *(distributividade de $\otimes$ em relação a $\oplus$)*

(M_3) $\alpha \otimes (\beta \otimes u) = (\alpha \cdot \beta) \otimes u$ *(associatividade mista)*

(M_4) $\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \otimes u = u$ *(existência de elemento neutro de $\otimes$)*

Aos elementos de E chamam-se *vectores* e aos elementos de $\mathbb{K}$ chamam-se *escalares*. O elemento neutro para a adição de E toma o nome de *vector nulo* (representado por 0_E). Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), diz-se que E é um *espaço vectorial real* (respectivamente, *complexo*).

Os escalares são aqui representados por letras gregas $\alpha, \beta, \lambda, \ldots$ e os vectores por letras minúsculas do alfabeto $u, v, w, \ldots$. Como as operações entre vectores e entre um escalar e um vector não se confundem facilmente, em vez de $\oplus$ e $\otimes$ usaremos simplesmente a notação $+$ e $\cdot$ (sendo este último símbolo omitido). O contexto determinará qual a operação que está em causa.

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de espaços vectoriais reais.

Exemplos 4.4. *1. O conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais entre pares ordenados:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é um espaço vectorial real.

O vector nulo é $(0, 0)$ e o simétrico do vector $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ é o vector $(-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. *Generalizando o exemplo anterior, para* $n \in \mathbb{N}$*, o conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

com as operações usuais entre n*-uplos:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*, é um espaço vectorial real.*

O vector nulo é $(0, 0, \ldots, 0)$ *e o simétrico do vector* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *é o vector* $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

3. *O conjunto*

$$\begin{aligned} P[x] &= \{p(x) : p(x) \text{ é um polinómio com coeficientes reais }\} \\ &= \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0\} \end{aligned}$$

com a adição usual de polinómios e a multiplicação de um polinómio por um número real é um espaço vectorial real. Note-se que, dados dois polinómios $p(x), q(x) \in P[x]$ *de graus* n *e* m*, respectivamente, tais que*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

a adição e a multiplicação por um número real estão definidas da seguinte forma: supondo, sem perda de generalidade, que $n \leq m$ *então*

$$p(x) = 0x^m + \cdots + 0x^m + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) = {} & (0 + b_m)x^m + \cdots + (0 + b_{n+1})x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + \\ & + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

e, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*,*

$$\alpha p(x) = \alpha a_n x^n + \cdots + \alpha a_1 x + \alpha a_0$$

O vector nulo é o polinómio nulo $0(x) = 0$ *e o simétrico do polinómio* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ *é o polinómio*

$$-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0 \in P[x].$$

4. *O conjunto* $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{A : A$ *é uma matriz real do tipo* $m \times n\}$*, com a adição usual de matrizes e a multiplicação por um escalar, é um espaço vectorial real.*

O vector nulo é a matriz nula do tipo $m \times n$ *e o simétrico da matriz* $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *é a matriz* $-A = [-a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*.*

5. *O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real com domínio $\mathbb{R}$, munido da adição usual de funções e multiplicação duma função por um número real é um espaço vectorial real. Note-se que, dadas as funções $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $f+g$ é uma função real de variável real tal que*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \textit{para todo o } x \in \mathbb{R}$$

e αf é uma função real de variável real tal que

$$(\alpha f)(x) = \alpha\,(f(x))\,, \qquad \textit{para todo o } x \in \mathbb{R}$$

O vector nulo é a função identicamente nula, isto é, $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e o simétrico de uma função $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é a função $-f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que $(-f)(x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vejam-se agora algumas propriedades dos espaços vectoriais.

Proposição 4.5. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Então, para quaisquer vectores $u, v \in E$ e quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se que:*

(a) $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u = 0_E$ **(b)** $\alpha 0_E = 0_E$

(c) $(-\alpha)u = -(\alpha u)$ **(d)** $\alpha(-u) = -(\alpha u)$

(e) $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$ **(f)** $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v.$

Notação: $u - v = u + (-v)$ e $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Demonstração. Prove-se **(a)**. Por definição de zero do corpo, sabe-se que

$$\mathbf{0}_{\mathbb{K}} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$$

e, portanto, $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u = (\mathbf{0}_{\mathbb{K}} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}})u$. Por (M_1), obtém-se

$$\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u.$$

Por (A_4), existe simétrico de $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u$, isto é, existe $-(\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u)$. Somando a ambos os membros da equação, esse simétrico e utilizando (A_2), tem-se que:

$$\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u + (-\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u) = (\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u) + (-\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u + (\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u - \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u)\,.$$

Logo, pelas condições (A_3) e (A_4), vem que:

$$0_E = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u + 0_E \Leftrightarrow 0_E = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u.$$

Prove-se **(b)**, analogamente. Por (A_3), $0_E = 0_E + 0_E$, logo $\alpha 0_E = \alpha(0_E + 0_E)$. Pela condição (M_2), vem que:

$$\alpha 0_E = \alpha 0_E + \alpha 0_E.$$

Somando a ambos os membros o simétrico de $\alpha 0_E$, isto é, somando $-\alpha 0_E$, usando (A_1), (A_4) e (A_3), tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha 0_E + (-\alpha 0_E) &= (\alpha 0_E + \alpha 0_E) + (-\alpha 0_E) \\ \Leftrightarrow 0_E &= \alpha 0_E + (\alpha 0_E + (-\alpha 0_E)) \\ \Leftrightarrow 0_E &= \alpha 0_E. \end{aligned}$$

Prove-se **(c)**. Repare-se que $(-\alpha)u = -(\alpha u)$ significa que $(-\alpha)u$ é o simétrico de αu. Então, tem que se mostrar que $(-\alpha)u + \alpha u = 0_E$. Ora

$$\begin{aligned} (-\alpha)u + \alpha u &= (-\alpha+\alpha)u && \text{por } (M_1) \\ &= \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u && \text{por definição de simétrico em } \mathbb{K} \\ &= 0_E && \text{por } \textbf{(a)}. \end{aligned}$$

Prove-se **(d)**, de forma análoga. Repare-se que $\alpha(-u) = -(\alpha u)$ significa que $\alpha(-u)$ é o simétrico de αu, ou seja, mostre-se que $\alpha(-u) + \alpha u = 0_E$. Ora

$$\begin{aligned} \alpha(-u) + \alpha u &= \alpha(-u+u) && \text{por } (M_2) \\ &= \alpha 0_E && \text{por } (A_1) \text{ e } (A_4) \\ &= 0_E && \text{por } \textbf{(b)}. \end{aligned}$$

Prove-se **(e)**. Repare-se que

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)u &= (\alpha+(-\beta))u && \text{por notação} \\ &= \alpha u + (-\beta)u && \text{por } (M_1) \\ &= \alpha u + (-\beta u) && \text{por } \textbf{(c)} \\ &= \alpha u - \beta u && \text{por notação} \end{aligned}$$

Prove-se **(f)**, analogamente. Repare-se que

$$\begin{aligned} \alpha(u-v) &= \alpha(u+(-v)) && \text{por notação} \\ &= \alpha u + \alpha(-v) && \text{por } (M_2) \\ &= \alpha u + (-\alpha v) && \text{por } \textbf{(d)} \\ &= \alpha u - \alpha v && \text{por notação} \end{aligned}$$

□

Exercício 4.6. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Prove que, para quaisquer vectores $u, v, w \in E$ e para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se que:*

(a) $-(-u) = u$;

(b) *se* $\alpha u = 0_E$ *então* $\alpha = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ *ou* $u = 0_E$;

(c) *se* $u + v = u + w$ *então* $v = w$;

(d) *se* $\alpha u = \beta u$ *e* $u \neq 0_E$ *então* $\alpha = \beta$.

4.2 Subespaços vectoriais

Definição 4.7. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subconjunto não vazio de E. Diz-se que F é um* **subespaço vectorial de** *E, e representa-se por $F \leq E$, se F for um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ para as operações induzidas em F pelas operações de E.*

É fácil verificar que E e $\{0_E\}$ são subespaços vectoriais de E. Estes subespaços chamam-se *subespaços triviais*. Todos os outros subespaços vectoriais são não triviais.

Exemplo 4.8. *O subconjunto de $P[x]$ constituído pelos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a n , isto é, o conjunto*

$$\begin{aligned} P_n[x] &= \{p(x) \in P[x] : grau(p(x)) \leq n\} \\ &= \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}\} \end{aligned}$$

é um subespaço vectorial de $P[x]$ para as operações definidas em $P[x]$. Note-se que $P_n[x]$ é um subconjunto não vazio de $P[x]$ pois o polinómio nulo pertence a $P_n[x]$. Além disso, para as operações definidas em $P[x]$, $P_n[x]$ satisfaz todas as condições da definição de espaço vectorial. As condições (A_1), (A_2), (M_1), (M_2), (M_3) e (M_4) são válidas porque se são válidas para todos os polinómios de $P[x]$ também são válidas para os polinómios de grau menor ou igual a n. O polinómio nulo pertence a $P_n[x]$ e, portanto, é válida a condição (A_3). Por fim, o simétrico de um polinómio de grau menor ou igual a n é ainda um polinómio de grau menor ou igual a n, logo é válida (A_4).

Seguidamente apresenta-se uma caracterização para que um subconjunto dum espaço vectorial E seja um seu subespaço vectorial.

Proposição 4.9. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subconjunto de E. Então F é um subespaço vectorial de E se e só se*

(i) $F \neq \emptyset$;

(ii) $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$ *(F é fechado para a adição);*

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \quad \alpha u \in F$ *(F é fechado para a multiplicação por um escalar).*

Exemplo 4.10. *Qualquer recta que passa na origem é um subespaço vectorial (não trivial) de $\mathbb{R}^2$. De facto, seja $m \in \mathbb{N}$. O conjunto*

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\} = \{(x, mx) : x \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. De facto $F \subseteq \mathbb{R}^2$, por definição de F. Além disso,

(i) $(0, 0) \in F$ *já que* $(0, 0) = (0, m0)$ *e, portanto,* $F \neq \emptyset$;

(ii) *sejam* $(x_1, mx_1), (x_2, mx_2) \in F$ *arbitrários, então*

$$(x_1, mx_1)+(x_2, mx_2) = (x_1+x_2, mx_1+mx_2) = (x_1+x_2, m(x_1+x_2)) \in F;$$

(iii) *sejam* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $(x, mx) \in F$ *arbitrários, então*

$$\alpha(x, mx) = (\alpha x, \alpha(mx)) = (\alpha x, m(\alpha x)) \in F.$$

Pela Proposição 4.9, F *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício Resolvido 4.11. *Mostre que* $H = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c = 0\}$ *é um subespaço vectorial de* $P_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Resolução: *Note-se que*

$$H = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c = 0\} = \{ax^2 + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Ora $H \subseteq P_2[x]$, *por definição de* H. *Além disso:*

(i) *o polinómio* $x^2 - x \in H$ *pois é da forma* $ax^2 + bx$ *com* $a = 1$ *e* $b = -1$, *e, portanto,* $H \neq \emptyset$;

(ii) *sejam* $ax^2 + bx, cx^2 + dx \in H$, *então*

$$(ax^2 + bx) + (cx^2 + dx) = \underbrace{(a + c)}_{\in\mathbb{R}} x^2 + \underbrace{(b + d)}_{\in\mathbb{R}} x \in H;$$

Logo H *é fechado para a adição de polinómios.*

(iii) *seja* $ax^2 + bx \in H$ *e seja* $\alpha \in \mathbb{R}$, *então*

$$\alpha(ax^2 + bx) = \underbrace{(\alpha a)}_{\in\mathbb{R}} x^2 + \underbrace{(\alpha b)}_{\in\mathbb{R}} x \in H;$$

Logo H *é fechado para a multiplicação de um polinómio por um número real.*

Logo, pela Proposição 4.9, H *é um subespaço vectorial de* $P_2[x]$.

Exercício Resolvido 4.12. *Verifique se* $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

Resolução: *Note-se que* $(0, 0, 1), (1, 1, 1) \in S$ *e* $(0, 0, 1) + (1, 1, 1) = (1, 1, 2)$ *não pertence a* S. *Logo* S *não é fechado para a adição e portanto não é subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.13. *Averigúe se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais dos espaços vectoriais indicados.*

a) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*;*

b) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*;*

c) $S = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : a \neq 0\}$ *de* $P_2[x]$.

O próximo resultado apresenta algumas propriedades dos subespaços vectoriais.

Proposição 4.14. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subespaço vectorial de E. Então:*

(a) $0_E \in F$*;*

(b) *se $u \in F$ então $-u \in F$, para todo $u \in F$;*

(c) *se $u, v \in F$ então $u - v \in F$, para todo $u, v \in F$.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Como $\mathbb{K}$ é corpo, existe o zero do corpo, $\mathbf{0}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$. Por outro lado, como $F \neq \emptyset$, existe $u \in F$.

Logo, como F é um subespaço vectorial, pela condição **(iii)** da Proposição 4.9, vem que:

$$\mathbf{0}_{\mathbb{K}} u = 0_E \in F.$$

Prove-se **(b)**, analogamente. Como $\mathbb{K}$ é corpo, existe o simétrico da identidade do corpo, $-\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$. Seja $u \in F$.

Novamente, pela condição **(iii)** da Proposição 4.9, vem que:

$$(-\mathbf{1}_{\mathbb{K}})u \in F.$$

Como F é um subespaço vectorial, pela condição (c) da Proposição 4.5 e pela condição (M_4), vem que $(-\mathbf{1}_{\mathbb{K}})u = -(\mathbf{1}_{\mathbb{K}} u) = -u$. Logo $-u \in F$.

Prove-se **(c)**. Sejam $u, v \in F$. Por **(b)**, $-v \in F$. Assim, como F é um subespaço vectorial, pela condição **(ii)** da Proposição 4.9, tem-se que

$$u + (-v) = u - v \in F.$$

$\square$

Atendendo à proposição anterior, a condição **(i)** da Proposição 4.9 pode ser substituída por $0_E \in F$. Além disso, as condições **(ii)** e **(iii)** podem ser substituídas por uma só condição.

Proposição 4.15. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subconjunto de E. Então F é um subespaço vectorial de E se e só se*

(1) $0_E \in F$*;*

(2) $\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall u, v \in F, \quad \alpha u + \beta v \in F.$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Suponhamos que F é um subespaço vectorial de E. Pela proposição anterior, vale **(1)**. Além disso, dados $u, v \in F$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então, pela condição **(iii)** da Proposição 4.9, $\alpha u \in F$ e $\beta v \in F$. Logo, novamente pela Proposição 4.9, mas pela condição **(ii)**, $\alpha u + \beta v \in F$.

"$\Leftarrow$" Repare-se que:

(i) $F \neq \emptyset$ pois, por **(1)**, $0_E \in F$.

(ii) Sejam $u, v \in F$. Por **(2)**, fazendo $\alpha = \beta = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $u + v \in F$.

(iii) Analogamente, por **(2)**, sejam $u \in F$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, fazendo $\beta = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ e $v = 0_E$, conclui-se que $\alpha u \in F$.

Pela Proposição 4.9, F é um subespaço vectorial de E. □

4.3 Combinação linear de vectores

Definição 4.16. *Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$. Diz-se que o vector $v \in E$ é **combinação linear dos vectores** $u_1, u_2, \ldots, u_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k.$$

Exemplos 4.17. *1. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores*

$$v = (2, -1, 3),\ v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 0, 1) \ \text{ e } \ v_3 = (1, 2, 1).$$

O vector v é combinação linear dos vectores v_1, v_2 e v_3.

De facto, mostre-se que existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$(2, -1, 3) = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 2, 1).$$

Ou seja, pretende-se verificar que é possível o sistema

$$\begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -1 = 2\alpha_3 \\ 3 = \alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

Sendo assim, passando o sistema para a sua matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Note-se que $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right)$ e, portanto, o sistema anterior é possível e determinado. Ou seja, v é combinação linear de v_1, v_2, v_3.

Continuando com o escalonamento da matriz até à sua forma reduzida obtém-se:

$$\xrightarrow[L_3' := \frac{1}{2}L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_2' := L_2 - L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Donde

$$\begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = \frac{7}{2} \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, v é combinação linear de v_1, v_2 e v_3 pois $v = -v_1 + \frac{7}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$.

2. *No espaço vectorial real $P[x]$, considerem-se os vectores $v_1 = 2x^3 + x - 3$, $v_2 = x^2 + 2$ e $v_3 = 6x^3 - x^2 + 3x - 11$.*

   O vector v_3 é combinação linear de v_1 e v_2. De facto,

$$\begin{aligned} 6x^3 - x^2 + 3x - 11 &= \alpha_1(2x^3 + x - 3) + \alpha_2(x^2 + 2) \\ &= 2\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x - 3\alpha_1 + 2\alpha_2. \end{aligned}$$

   Assim $6x^3 - x^2 + 3x - 11 = 2\alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x - 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ se e só se

$$\begin{cases} 2\alpha_1 = 6 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 3 \\ 2\alpha_2 - 3\alpha_1 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 3 \\ -11 = -11 \end{cases}$$

   E, portanto, $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = -1$. Donde $v = 3v_1 - v_2$.

Exercício Resolvido 4.18. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, averigúe se o vector $v = (-1, 3, -1)$ é combinação linear dos vectores $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, 0)$.*

Resolução: *Ora, o vector $(-1, 3, -1)$ é combinação linear dos vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$ e $(0, -1, 0)$ se existirem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$(-1, 3, -1) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(0, -1, 0)$$

ou seja,

$$(-1, 3, -1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2),$$

isto é, se é possível o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Passando para a matriz ampliada associada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tem-se então $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]\right)$ *e, portanto, o sistema é possível e o vector* v *é combinação linear dos outros três vectores* v_1, v_2, v_3.

Continuando a resolução do sistema, e usando a matriz ampliada anterior obtém-se:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -4 + \alpha_3 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 \end{cases}$$

Tomando $\alpha_3 = 0$ *temos* $\alpha_1 = -4$ *e* $\alpha_2 = 3$ *Assim,*

$$(-1, 3, -1) = -4(1, 0, 1) + 3(1, 1, 1) + 0(0, -1, 0),$$

ou, fazendo $\alpha_3 = 1$ *temos* $\alpha_1 = -5$ *e* $\alpha_2 = 4$. *Assim,*

$$(-1, 3, -1) = -5(1, 0, 1) + 4(1, 1, 1) + 1(0, -1, 0).$$

Observe-se assim que v *não se escreve de forma única como combinação linear de* v_1, v_2 *e* v_3.

Exercício 4.19. *Nos espaços vectoriais indicados, verifique se:*

a) *o vector* $(-1, 3, -1)$ *é combinação linear dos vectores* $(1, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

b) *o vector* $(-2, 2, 5)$ *é combinação linear dos vectores* $(1, 1, 1), (1, 1, 0)$ *e* $(1, 0, 1)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

c) *a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *é combinação linear das matrizes* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, *em* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4.4 Independência e dependência linear

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. O vector nulo de E é sempre combinação linear de quaisquer vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$. Com efeito

$$0_E = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_1 + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_2 + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_k.$$

A esta combinação linear nula (isto é, cujo "resultado" é o vector nulo) dá-se o nome de *combinação linear nula trivial*.

Será esta a única forma de o fazer? Nem sempre!

Exemplo 4.20. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$*, considere os vectores* $v_1 = (1, 1, 1)$ *e* $v_2 = (-2, -2, -2)$*.*

Facilmente se verifica que:

$$(0, 0, 0) = 0v_1 + 0v_2 \qquad e \qquad (0, 0, 0) = 2v_1 + v_2.$$

Neste caso, o vector nulo não se escreve de forma única como combinação linear dos vectores v_1 *e* v_2*. De facto,*

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha - 2\beta, \alpha - 2\beta, \alpha - 2\beta) = (0, 0, 0)$$

é equivalente a $\alpha = 2\beta$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$*. Donde,* $(0, 0, 0) = 2\beta v_1 + \beta v_2$*, para qualquer valor de* $\beta \in \mathbb{R}$*.*

E se forem os vectores $v_1 = (1, 1, 1)$ *e* $v_3 = (1, 0, 0)$*? Neste caso,*

$$\alpha v_1 + \beta v_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + \beta, \alpha, \alpha) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Assim, $\alpha = 0$ *e* $\beta = 0$*. Então, para os vectores* v_1 *e* v_3*, o vector nulo escreve-se de forma única como a combinação linear nula trivial.*

Apresentam-se assim as seguintes definições:

Definição 4.21. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$*. Diz-se que os vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *são:*

(i) ***linearmente independentes*** *se*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_k u_k = 0_E \ \Rightarrow \ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$$

Isto é, existe apenas uma única forma de escrever o vector nulo de E *como combinação linear de* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *e que é, neste caso, a combinação linear nula trivial.*

(ii) ***linearmente dependentes*** *se*

existem $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ *não todos nulos tais que* $\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k = 0_E$

Isto é, existem escalares em que pelo menos um deles é diferente do zero do corpo que dão origem a uma combinação linear nula, ou seja, existem outras combinações lineares nulas para além da combinação linear nula trivial.

Exemplos 4.22. *1. No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$*,*

- *os vectores* $v_1 = (1, 2)$ *e* $v_2 = (2, 1)$ *são linearmente independentes. De facto, sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha(1, 2) + \beta(2, 1) = (0, 0) \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta) = (0, 0)$$

Então

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha+2\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\end{array}\right.$$

Ou seja, só existe a combinação linear nula trivial.

- *os vectores* $v_1=(1,2)$ *e* $v_2=(2,4)$ *são linearmente dependentes.* *Existe, obviamente, a combinação linear nula não trivial*

  $$2v_1-v_2=(0,0)\Leftrightarrow 2(1,2)-(2,4)=(0,0)$$

  Em termos geométricos, a dependência linear destes dois vectores é evidente pois os vectores são colineares.

2. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$,

- *os vectores* $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,0,1)$ *e* $v_3=(0,0,1)$ *são linearmente independentes.*
  De facto, sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tais que*

  $$\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(0,0,1)=(0,0,0)$$

  Então

  $$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta=0\\ \alpha=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{array}\right.$$

- *os vectores* $v_1=(1,1,1)$, $v_2=(1,0,1)$ *e* $v_3=(2,1,2)$ *são linearmente dependentes.*
  De facto, sejam $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ *tais que*

  $$\alpha(1,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(2,1,2)=(0,0,0).$$

  Então

  $$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ \alpha+\gamma=0\\ \alpha+\beta+2\gamma=0\end{array}\right.$$

  Passando à matriz ampliada

  $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&0&1&0\\1&1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{L_2':=L_2-L_1\\ L_3':=L_3-L_1}]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

  O sistema correspondente, equivalente ao inicial, é:

  $$\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+2\gamma=0\\ -\beta-\gamma=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=-\gamma\\ \beta=-\gamma\end{array}\right.$$

  Assim, para $\gamma\in\mathbb{R}$, *tem-se:*

  $$(-\gamma)(1,1,1)+(-\gamma)(1,0,1)+\gamma(2,1,2)=(0,0,0).$$

Por exemplo, para $\gamma = 1$ tem-se

$$(-1)(1,1,1) + (-1)(1,0,1) + 1(2,1,2) = (0,0,0).$$

Existe assim uma combinação linear nula não trivial, isto é, em que os escalares não são todos nulos.

Exercício 4.23. *Verifique se os vectores dados nos espaços vectoriais indicados são linearmente independentes.*

(a) $u = (1,1,1)$, $v = (1,1,0)$ *e* $w = (1,0,1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*;*

(b) $p(x) = x + x^2$ *e* $q(x) = x^3$ *de* $P_3[x]$*;*

(c) $p(x) = 1 + x$, $q(x) = x + x^2$, $r(x) = x^3$ *e* $t(x) = 1 + 2x + x^2$ *de* $P_3[x]$*;*

(d) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ *e* $h(x) = \sin^2 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *de* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

As noções de independência e dependência lineares dizem respeito a um conjunto de vectores de um espaço vectorial E. E se esse conjunto apenas tiver um elemento? Veja-se o próximo resultado.

Proposição 4.24. *Sejam* $\mathbb{K} \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$ *e* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Seja ainda* $v \in E$. *Então o vector* v *é linearmente independente se e só se* $v \neq 0_E$. *Isto é, o único vector linearmente dependente é o vector nulo* 0_E.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Note-se que $\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. De facto, suponha-se, com vista a um absurdo, que $\mathbf{1}_{\mathbb{K}} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Então, para todo $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$,

$$\alpha = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}\alpha = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}\alpha = \mathbf{0}_{\mathbb{K}},$$

o que é absurdo! Logo $\mathbf{1}_{\mathbb{K}} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Suponha-se que v é linearmente independente e, com vista a um absurdo, suponha-se que $v = 0_E$. Como $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}v = \mathbf{1}_{\mathbb{K}}0_E = 0_E$, existe uma combinação linear nula não trivial. Logo v é linearmente dependente. Absurdo! Logo $v \neq 0_E$.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que $v \neq 0_E$. Novamente, com vista a um absurdo, suponha-se que v é linearmente dependente. Então existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\}$ tal que $\alpha v = 0_E$. Como existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$, tem-se que:

$$\alpha v = 0_E \Leftrightarrow \alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}0_E,$$

que, pela associatividade mista e pelas propriedades do espaço vectorial, é equivalente a:

$$\left(\alpha^{-1}\alpha\right) v = 0_E \Leftrightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{K}}v = 0_E.$$

E, portanto, $v = 0_E$, o que é absurdo pois contraria a hipótese $v \neq 0_E$. Logo v é linearmente independente.

A combinação linear nula não trivial $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}0_E = 0_E$ mostra que o vector nulo 0_E é linearmente dependente. □

Portanto,

- o vector v é linearmente independente se e só se $v \neq 0_E$.
- o vector v é linearmente dependente se e só se $v = 0_E$.

Para conjuntos não singulares de vectores tem-se a seguinte proposição que estabelece outra caracterização de independência e dependência lineares.

Proposição 4.25. *Sejam* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$, *com* $k \in \mathbb{N}$ *e* $k \geq 2$. *Então os vectores* $v_1, \ldots, v_k$ *são linearmente dependentes se e só se pelo menos um deles é combinação linear dos restantes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha-se que $v_1, \ldots, v_k \in E$ são linearmente dependentes. Então, por definição, existem $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k = 0_E.$$

Sem perda de generalidade, suponha-se que $\beta_1 \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Então, aplicando os axiomas da definição de espaço vectorial,

$$\beta_1 v_1 = (-\beta_2 v_2) + (-\beta_3 v_3) \cdots + (-\beta_k v_k),$$

e assim, como existe β_1^{-1}, tem-se que:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-\beta_1^{-1}\beta_2)v_2 + (-\beta_1^{-1}\beta_3)v_3 \cdots (-\beta_1^{-1}\beta_k)v_k \\ &= \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_k v_k, \end{aligned}$$

com $\alpha_i = -\beta_1^{-1}\beta_i$, para todo $i \in \{2, \ldots, k\}$. Donde v_1 é combinação linear dos restantes vectores.

($\Leftarrow$) Por hipótese, suponha-se que um dos vectores dados é combinação linear dos restantes. Sem perda de generalidade, suponha-se que v_1 é combinação linear dos restantes, isto é, existem $\alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Aplicando os axiomas da definição de espaço vectorial, obtém-se

$$\mathbf{1}_{\mathbb{K}} v_1 - \alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_k v_k = 0_E.$$

Ou seja, existe uma combinação linear nula não trivial de $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Logo os vectores são linearmente dependentes. □

Exemplo 4.26. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, já se viu que os vectores $u = (1, 2)$ e $v = (2, 4)$ são linearmente dependentes. É óbvio que $v = 2u$.*

Proposição 4.27. *Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ vectores linearmente independentes. Seja ainda $w \in E$ tal que $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são linearmente dependentes. Então w é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.*

Demonstração. Como $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são linearmente dependentes, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w = 0_E.$$

Por redução ao absurdo, suponha-se que $\alpha_{k+1} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Então,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E,$$

o que implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ pois $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente independentes. Logo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$, o que contraria a hipótese. Donde $\alpha_{k+1} \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Mas então existe α_{k+1}^{-1} e

$$w = (-\alpha_{k+1}^{-1}\alpha_1)v_1 + (-\alpha_{k+1}^{-1}\alpha_2)v_2 + \cdots + (-\alpha_{k+1}^{-1}\alpha_k)v_k.$$

ou seja, w é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$. □

Observação 4.28. *Note-se que da proposição anterior, resulta que, se a um conjunto de vectores linearmente independentes $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$, juntarmos um vector $w \in E$ que não é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ então os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k, w$ são linearmente independentes.*

Exemplo 4.29. *No espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B são linearmente independentes pois

$$\alpha A + \beta B = 0_{2\times 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$$

As matrizes A, B e C são linearmente dependentes (verifique!) e $C = A - B$.

Teorema 4.30. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, \ldots, v_k \in E$. Se os vectores $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes então, para qualquer $l \in \mathbb{N}$, os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+l}$ são linearmente dependentes, onde $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+l} \in E$.*

Demonstração. Como $v_1, \ldots, v_k$ são linearmente dependentes, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E.$$

Logo

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} v_{k+1} + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} v_{k+l} = 0_E.$$

é uma combinação linear nula não trivial, ou seja, os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_{k+l}$ são linearmente dependentes. □

Corolário 4.31. *Qualquer subconjunto de um conjunto de vectores linearmente independentes é ainda linearmente independente.*

Corolário 4.32. *Qualquer conjunto de vectores que inclua o vector nulo é linearmente dependente.*

Corolário 4.33. *Qualquer conjunto de vectores que inclua dois vectores iguais é linearmente dependente.*

As demonstrações destes corolários ficam como exercício.

Observação 4.34. *Um conjunto de vectores diz-se linearmente independente (respectivamente, dependente) se os vectores que constituem esse conjunto são linearmente independentes (respectivamente, dependentes).*

4.5 Subespaço gerado por vectores

Definição 4.35. *Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Ao conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, isto é, ao conjunto*

$$G = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}$$

*chama-se **subespaço gerado por** $v_1, v_2, \ldots, v_k$ e representa-se por*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Proposição 4.36. *Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Então $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ é um subespaço vectorial de E.*

Demonstração. Seja $G = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$. Então $G \subseteq E$ por definição de G. Mais,

(i) $G \neq \emptyset$ uma vez que 0_E é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_k$:

$$0_E = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} v_1 + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} v_k.$$

(ii) Sejam $u, v \in G$. Então

$$\begin{aligned} \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K} : &\quad u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \\ \exists \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{K} : &\quad v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k \end{aligned}$$

Assim,

$$u + v = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) + (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_k v_k)$$

Aplicando os axiomas de espaço vectorial e obtém-se:

$$u + v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k,$$

onde $\lambda_i = \alpha_i + \gamma_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. E, portanto, G é fechado para a adição.

(iii) Fica como exercício mostrar, de forma análoga, que G é fechado para a multiplicação por um escalar, isto é,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall u \in G,\ \alpha u \in G.$$

Pela Proposição 4.9, $G = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ é subespaço vectorial de E. ∎

Exemplo 4.37. *Considere o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$. *Para determinar o subespaço gerado pelos vectores* $(1,1,1)$ *e* $(1,0,1)$, *ou seja,* $\langle(1,1,1),(1,0,1)\rangle$ *tem que se atender à definição:* $(x,y,z)\in\langle(1,1,1),(1,0,1)\rangle$ *se e só se existem escalares* $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ *tais que*

$$(x,y,z)=\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,0,1).$$

Ou seja, se e só se é possível o sistema nas incógnitas α_1 *e* α_2,

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=x\\ \alpha_1=y\\ \alpha_1+\alpha_2=z\end{cases}$$

Passando para a matriz ampliada, e escalonando obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\1&0&y\\1&1&z\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{L_2':=L_2-L_1\\ L_3':=L_3-L_1}]{}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-1&y-x\\0&0&z-x\end{array}\right].$$

E, portanto, o sistema é possível se e só se $z-x=0\Leftrightarrow z=x$. *Então*

$$\langle(1,1,1),(1,0,1)\rangle=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=x\}.$$

Exercício Resolvido 4.38. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$, *determine o subespaço gerado pelos vectores* $(0,1)$ *e* $(0,2)$.

Resolução: *O subespaço* $\langle(0,1),(0,2)\rangle$ *é determinado da seguinte forma: um vector* $(x,y)\in\langle(0,1),(0,2)\rangle$ *se e só se existem* $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ *tais que*

$$(x,y)=\alpha_1(0,1)+\alpha_2(0,2).$$

Ou seja, se e só se é possível o sistema nas incógnitas α_1 *e* α_2,

$$\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=y\\ 0=x\end{cases}$$

Atendendo à sua matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&y\\0&0&x\end{array}\right],$$

o sistema anterior é possível se e só se $x=0$. *Então*

$$\langle(0,1),(0,2)\rangle=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\}.$$

Exercícios 4.39.

1. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^4$, *determine o subespaço gerado pelos vectores* $(1,-1,0,2)$ *e* $(0,1,2,3)$.

2. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* X *e* Y *subconjuntos finitos de* E. *Seja ainda* S *um subespaço vectorial de* E. *Prove que:*
   - *(a)* $\langle E\rangle=E$
   - *(b)* $\langle 0_E\rangle=\{0_E\}$
   - *(c)* $X\subseteq\langle X\rangle$
   - *(d) Se* $X\subseteq Y$ *então* $\langle X\rangle\subseteq\langle Y\rangle$
   - *(e) Se* $X\subseteq S$ *então* $\langle X\rangle\subseteq S$.

4.6 Sistema de geradores

Definição 4.40. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Diz-se que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são **geradores de** E (ou **geram** E ou ainda formam um **sistema de geradores de** E) se qualquer vector de E se escreve como combinação linear dos vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, isto é:*

$$E = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Exemplo 4.41. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, considere os vectores $u = (1,1)$ e $v = (0,1)$. Mostre-se que $\mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle$, ou seja, que qualquer vector de $\mathbb{R}^2$ pode escrever-se como combinação linear de u e v.*

Seja (a,b) um vector de $\mathbb{R}^2$. Então (a,b) é combinação linear de u e v se e só se existem números reais α e β tais que $(a,b) = \alpha u + \beta v$, ou seja:

$$\begin{aligned} (a,b) &= \alpha(1,1) + \beta(0,1) \\ &= (\alpha, \alpha) + (0, \beta) \\ &= (\alpha, \alpha + \beta). \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{cases} \alpha = a \\ \alpha + \beta = b \end{cases} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \end{array}\right],$$

que é sempre um sistema possível qualquer que seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, isto é, qualquer vector de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vectores u e v da seguinte forma:

$$(a,b) = au + (b-a)v = a(1,1) + (b-a)(0,1).$$

Por exemplo, $(13,15) = 13(1,1) + 2(0,1)$.

Logo $(1,1)$ *e* $(0,1)$ *são geradores de* $\mathbb{R}^2$.

Observação 4.42. *Um espaço vectorial $E \neq \{0_E\}$ com um número infinito de vectores tem uma infinidade de sistemas de geradores.*

Por exemplo, verifique que:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \langle (1,1), (0,1) \rangle \\ &= \langle (1,0), (0,1) \rangle \\ &= \langle (1,2), (2,3), (3,4) \rangle \\ &= \langle (0,0), (2,3), (3,4), (0,1) \rangle \end{aligned}$$

Definição 4.43. *Um espaço vectorial E diz-se **finitamente gerado** se existe um número finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ que geram E, ou seja, tais que*

$$E = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle.$$

Exemplo 4.44. *Atendendo ao exemplo anterior, o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$ *é finitamente gerado.*

Exemplo 4.45. *O espaço vectorial real* $P[x]$ *não é finitamente gerado. Para provar esta afirmação, suponha-se por absurdo que* $P[x]$ *tem um sistema finito de geradores* $p_1(x), \ldots, p_k(x)$. *Seja* n *o máximo do graus de* $p_1(x), \ldots, p_k(x)$. *Claramente,* x^{n+1} *não pode ser escrito como combinação linear de* $p_1(x), \ldots, p_k(x)$. *Portanto,* $P[x]$ *não é finitamente gerado.*

Observação 4.46. *Recorde-se que qualquer subespaço vectorial é um espaço vectorial, por definição. Logo todos conceitos e resultados válidos para espaços vectoriais são também válidos para subespaços vectoriais.*

Exercício Resolvido 4.47. *Seja* $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$ *um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^4$. *Mostre que* F *é finitamente gerado.*

Resolução: *Verifique que* $F \leq \mathbb{R}^4$. *Para mostrar que* F *é finitamente gerado, é necessário encontrar um sistema de geradores de* F.

Observe-se que se $(x, y, z, w) \in F$ *então* $x = -y - z - w$. *Logo, os vectores de* F *são da forma* $(-y - z - w, y, z, w)$. *Mas*

$$(-y - z - w, y, z, w) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(-1, 0, 0, 1),$$

isto é, qualquer vector de F *pode ser escrito como combinação linear dos vectores* $(-1, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ *e* $(-1, 0, 0, 1)$, *que pertencem a* F. *Portanto,*

$$F = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle.$$

Como é gerado por um número finito de vectores (neste caso, apenas três vectores), então F *é um (sub)espaço vectorial finitamente gerado.*

Exercício 4.48. *Mostre que o espaço vectorial real* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *é finitamente gerado, mostrando que as matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

são geradores desse espaço vectorial.

4.7 Base e dimensão

Definição 4.49. *Seja* E *um espaço vectorial finitamente gerado e seja ainda* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *um subconjunto de* E. *Diz-se que* $\mathcal{B}$ *é uma* ***base de*** E *se*

(i) *$\mathcal{B}$ é um conjunto de vectores linearmente independentes;*

(ii) *$e_1, e_2, \ldots, e_n$ é um sistema de geradores de E, isto é, $E = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$.*

Observação 4.50. *Quando é dada uma ordenação específica aos elementos de uma base $\mathcal{B}$, chama-se a $\mathcal{B}$ **base ordenada**, e representa-se por*

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

onde e_i representa o i-ésimo vector da base.

Por convenção, o espaço trivial $\{0_E\}$ tem como base o conjunto vazio, $\emptyset$. Note-se que este espaço é finitamente gerado, uma vez que $\{0_E\} = \langle 0_E \rangle$, porém, não existem vectores linearmente independentes neste espaço vectorial trivial.

Exemplo 4.51. *O conjunto $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.*

Mostre-se primeiro que os vectores $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$ geram $\mathbb{R}^3$.

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e veja-se que é possível escrever (x,y,z) como combinação linear dos vectores indicados, isto é, veja-se que existem números reais α_1, α_2 e α_3 tais que

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,2,0)\\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2).\end{aligned}$$

O que é equivalente a que seja possível o sistema nas incógnitas α_1, α_2 e α_3

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases}$$

Escalonando a correspondente matriz ampliada, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right]$$

E, portanto, este sistema é sempre possível para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ou seja, qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação dos vectores $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,2,0)$. Logo esses vectores geram $\mathbb{R}^3$.

Falta provar que estes vectores são linearmente independentes, o que corresponde a provar que há uma única maneira de escrever o vector nulo como combinação linear destes vectores. Suponha-se que

$$(0,0,0) = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,2,0).$$

Repare-se que esta equação corresponde à equação anterior substituindo x, y e z por zero. Assim substituindo, na matriz ampliada do sistema anterior, x, y e z por zero, conclui-se que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 0$. Logo, os vectores são linearmente independentes e, portanto, $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,2,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.52. *Mostre que* $\{1, x, x^2\}$ *é uma base de* $P_2[x]$.

O próximo resultado é útil para construir uma base para um espaço vectorial finitamente gerado.

Teorema 4.53. *Sejam* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ *tais que, para algum* $i \in \{1, \ldots, k\}$, v_i *é combinação linear dos restantes vectores. Então*

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Demonstração. Como v_i é combinação linear dos restantes vectores, tem-se que

$$v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_k v_k, \tag{4.1}$$

para alguns $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$. Seja

$$x \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Então

$$x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k, \tag{4.2}$$

Para alguns $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Veja-se que $x \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$. De (4.1)) e (4.2) obtém-se que

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_k v_k) \\ &\qquad + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k \\ &= \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_{i-1} v_{i-1} + \gamma_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \gamma_k v_k, \end{aligned}$$

onde $\gamma_j = \alpha_j + \alpha_i \beta_j$, para $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$. Conclui-se assim que

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Para mostrar a inclusão contrária considere-se $x \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle$. Logo

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k \\ &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k, \end{aligned}$$

para alguns $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Donde

$$x \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Consequentemente

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Portanto,

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

□

Exemplo 4.54. *Sabe-se que* $\mathbb{R}^2 = \langle(1,1),(1,0),(0,1)\rangle$ *(verifique!). Como* $(1,1)$ *é combinação linear de* $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *uma vez que*

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

então $\mathbb{R}^2 = \langle(1,0),(0,1)\rangle$.

Por outro lado, os vectores $(1,0)$ *e* $(0,1)$ *são linearmente independentes (prove!) então* $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ *é uma base ordenada de* $\mathbb{R}^2$.

Proposição 4.55. *Todo o espaço vectorial finitamente gerado tem uma base.*

Demonstração. Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. Se $E = \{0_E\}$ então tem como base o conjunto vazio. Portanto pode-se assumir que $E \neq \{0_E\}$. Então existem vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$ tais que

$$E = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle.$$

Como $E \neq \{0_E\}$, então um destes vectores é diferente do vector 0_E, logo esse vector é linearmente independente. Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ são linearmente independentes então formam uma base de E e o resultado fica demonstrado. Caso sejam linearmente dependentes então existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes. Pelo teorema anterior,

$$E = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n\rangle.$$

Agora, se $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n$ são linearmente independentes então obtém-se uma base de E; caso contrário, repete-se o procedimento anterior. Como E tem um número finito de geradores este procedimento é repetido até produzir um subconjunto de $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ formado por vectores linearmente independentes que geram E e, portanto, constituem uma base de E. □

Corolário 4.56. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Qualquer sistema de geradores de* E *contém uma base de* E.

Nos exemplos que se seguem apresenta-se um processo para, a partir de um sistema de geradores de um espaço vectorial finitamente gerado, construir uma base desse espaço vectorial.

Exemplo 4.57. *Sabe-se que* $\mathbb{R}^3 = \langle(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1),(-1,2,3)\rangle$ *(verifique!) e pretende-se descobrir uma base de* $\mathbb{R}^3$ *contida em*

$$S = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1),(-1,2,3)\}.$$

Comece-se por verificar se os vectores de S *são linearmente independentes.*

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) + \lambda_4(-1,2,3) = (0,0,0).$$

Esta igualdade é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Escalonando a matriz ampliada associada, obtém-se

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_3' := L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 - L_3 \\ L_2' := L_2 - L_3}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

Donde se obtém

$$\begin{cases} \lambda_1 = 7\lambda_4 \\ \lambda_2 = 4\lambda_4 \\ \lambda_3 = -6\lambda_4 \end{cases}$$

Como este sistema admite pelo menos uma solução não nula (por exemplo, $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -6$ *e* $\lambda_4 = 1$*) os vectores considerados são linearmente dependentes. Logo um deles pode escrever-se como combinação linear dos restantes.*

Da solução não nula considerada, obtém-se

$$7(1,0,1) + 4(0,1,-1) - 6(1,1,1) + (-1,2,3) = (0,0,0).$$

Donde resulta que $(-1,2,3) = 6(1,1,1) - 7(1,0,1) - 4(0,1,-1)$*, ou seja, o vector* $(-1,2,3)$ *é combinação linear dos vectores* $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ *e* $(1,1,1)$. *Como*

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,1), (0,1,-1), (1,1,1), (-1,2,3) \rangle$$

então

$$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,1), (0,1,-1), (1,1,1) \rangle .$$

Veja-se, agora, se os vectores $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ *e* $(1,1,1)$ *são linearmente independentes. Sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) = (0,0,0).$$

Esta igualdade é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Então os vectores $(1,0,1)$, $(0,1,-1)$ *e* $(1,1,1)$ *são linearmente independentes e, portanto,*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,-1),(1,1,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Observação 4.58. *Considere-se o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^n$*, para* $n \in \mathbb{N}$. *Sejam*

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,\ldots,0,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots,0,0,0) \\ \vdots & & \\ e_{n-1} & = & (0,0,0,\ldots,0,1,0) \\ e_n & = & (0,0,0,\ldots,0,0,1) \end{array}$$

Facilmente se prova que estes vectores são linearmente independentes e que geram $\mathbb{R}^n$*, pelo que formam uma base de* $\mathbb{R}^n$*. A esta base ordenada chama-se* ***base canónica de*** $\mathbb{R}^n$*, e representa-se por* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$*:*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

Além da base canónica, existem outras bases para $\mathbb{R}^n$*. Por exemplo, os vectores*

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & (1,1,1,\ldots,1,1) \\ v_2 & = & (0,1,1,\ldots,1,1) \\ v_3 & = & (0,0,1,\ldots,1,1) \\ \vdots & & \\ v_n & = & (0,0,0,\ldots,0,1), \end{array}$$

também constituem uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *(prove!).*

Exercício 4.59. *Mostre que* $\mathcal{B}_{P_n[x]} = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$ *é uma base (ordenada) de* $P_n[x]$*, à qual se que chama* base canónica de $P_n[x]$.

Na observação anterior encontrou-se duas bases de $\mathbb{R}^n$ com n vectores. De facto, todas as bases de um espaço vectorial têm o mesmo número de vectores:

Proposição 4.60. *Seja* E *um espaço vectorial e sejam* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *duas bases de* E*. Então* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *têm o mesmo número de vectores.*

Atendendo a este resultado pode definir-se o seguinte conceito:

Definição 4.61. *Ao número de vectores de uma qualquer base de um espaço vectorial* E *chama-se* ***dimensão de*** E *e representa-se por* $\dim E$.

Exemplo 4.62. *Pela observação 4.58, conclui-se que* $\dim \mathbb{R}^n = n$*, em particular* $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ *e* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Exercício 4.63. *Justifique que* $\dim P_n[x] = n + 1$.

Exemplo 4.64. *Seja* $m \in \mathbb{R}$*. No espaço vectorial* $\mathbb{R}^2$*, considere-se o subespaço vectorial*

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx\} = \{(x, mx), x \in \mathbb{R}\}.$$

Então $(x, mx) = x(1, m)$*, para qualquer* $x \in \mathbb{R}$*. Donde* $F = \langle (1, m) \rangle$*. Como* $(1, m) \neq (0, 0)$ *então* $(1, m)$ *é linearmente independente. Assim,* $\mathcal{B} = ((1, m))$ *é uma base ordenada de* F *e* $\dim F = 1$.

Exercício Resolvido 4.65. *Seja* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$*. Sabendo que* A *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^3$*, determine a dimensão de* A.

<u>Resolução:</u> *Seja* $v \in A$*, então existem números reais* y *e* z *tais que*

$$v = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Então qualquer vector $v \in A$ *se escreve como combinação linear de* $v_1 = (0, 1, 0)$ *e* $v_2 = (0, 0, 1)$*. Logo* $A \subseteq \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$*. Por outro lado, como* $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *pertencem a* A*, todas as combinações lineares de* $(0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *também pertencem a* A*, pois* A *é fechado para a adição e para a multiplicação por um escalar. Logo* $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \subseteq A$ *e, portanto,* $A = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$*. Além disso,* v_1 *e* v_2 *são linearmente independentes (verifique!). Logo* $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *é uma base ordenada de* A*. Como qualquer base tem o mesmo número de elementos, tem-se que* $\dim A = 2$.

Exercício Resolvido 4.66. *Seja* G *é o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a* n*, com* $n \in \mathbb{N}$*, com termo independente nulo, ou seja,*

$$G = \{p(x) \in P_n[x] : p(0) = 0\}.$$

Mostre que G *é um subespaço vectorial de* $P_n[x]$ *e determine a dimensão de* G.

<u>Resolução:</u> *Mostre-se que* G *é um subespaço vectorial de* $P_n[x]$.

(i) *Claramente que o polinómio nulo pertence a* G*. Donde* $G \neq \emptyset$.

(ii) *Sejam* $p(x), q(x) \in G$*. Então* $p(0) = 0$ *e* $q(0) = 0$*. Logo* $(p+q)(x) \in G$ *pois*

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$$

E, portanto, G *é fechado para a adição de polinómios.*

(iii) *Analogamente, sejam* $p(x) \in G$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Então* $p(0) = 0$*. Donde* $(\alpha p)(x) \in G$ *pois*

$$(\alpha p)(0) = \alpha(p(0)) = \alpha 0 = 0$$

Logo G *é fechado para a multiplicação por um número real.*

Portanto, pela Proposição 4.9, G *é um subespaço vectorial de* $P_n[x]$*.*

Seja $r(x) \in G$*. Então*

$$r(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x,$$

isto é, os vectores $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x$ *geram* G*. Mais, estes vectores são linearmente independentes pois formam um subconjunto da base canónica de* $P_n[x]$*. Logo uma base ordenada de* G *é*

$$\mathcal{B} = (x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x)$$

e, consequentemente, $\dim G = n$*.*

Exercício 4.67. *Sejam* $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mostre que $\mathcal{B}_c = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ *é uma base de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *(à qual se chama base canónica de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*) e conclua que* $\dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$*.*

O próximo resultado estabelece o número mínimo de geradores e o número máximo de vectores linearmente independentes num espaço vectorial, atendendo à dimensão desse espaço vectorial.

Teorema 4.68. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *tal que* $\dim E = n$*. Então:*

i. *Quaisquer* n *vectores de* E *linearmente independentes formam uma base de* E*;*

ii. *Qualquer sistema de geradores de* E *com* n *elementos formam uma base de* E*;*

iii. *Qualquer conjunto de vectores de* E *com mais de* n *elementos é linearmente dependente.*

Observação 4.69. *Pelo teorema anterior, se se souber que* $\dim E = n$*, dados* n *vectores* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$*, para se verificar que* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *é uma base de* E *basta verificar apenas uma das seguintes condições:*

- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *são linearmente independentes;*
- $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *geram* E*.*

Corolário 4.70. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim E = n$. Então qualquer conjunto de vectores de E linearmente independentes pode ser extendido a uma base de E.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ vectores linearmente independentes. Se $k = n$, pelo teorema 4.68, $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ é uma base de E. Se $k < n$, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ não formam uma base de E e, portanto, não geram E. Logo existem um vector $u_{k+1} \in E$, que não é combinação linear de $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Pela observação 4.28, tem-se que $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}$ são linearmente independentes. Se $k + 1 = n$ então $(u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1})$ é uma base de E, caso contrário, repete-se o processo adicionando sucessivamente um vector até obter-se n vectores linearmente independentes. $\square$

Exemplo 4.71. *Sejam $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$. Mostre-se que*

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$$

é uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, de acordo com o teorema anterior, basta, por exemplo, ver se os vectores são linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 0) + \alpha_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Então

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Logo, os vectores são linearmente independentes e, portanto, formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício Resolvido 4.72. *Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ e determine um sistema de geradores de S. Verifique se esse conjunto é formado por vectores linearmente independentes e indique, justificando, a dimensão de S.*

Resolução: *Tem-se que:*

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\} \\ &= \{(y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

E, portanto, S é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ pois é o subespaço gerado pelos vectores $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$.

Veja-se se estes vectores geradores de S são linearmente independentes. Suponha-se que

$$\alpha(1,1,0)+\beta(-3,0,1)=(0,0,0),$$

com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Então, obtém-se $\alpha=0$ e $\beta=0$. Portanto, os vectores $(1,1,0)$ e $(-3,0,1)$ são linearmente independentes. Logo formam uma base.

Como $\mathcal{B}=((1,1,0),(-3,0,1))$ é uma base de S então $\dim S=2$.

Exercício 4.73. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vectoriais $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x-y+3z=0\}$ e $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=5x\}$. Indique, justificando, a dimensão de V e de W.*

4.8 Coordenadas de um vector relativamente a uma base

Proposição 4.74. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ uma base de E. Então qualquer vector $u\in E$ se escreve de forma <u>única</u> como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$, ou seja, existem escalares únicos $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tais que*

$$u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n.$$

Demonstração. Como $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ é uma base de E então

$$E=\langle e_1,e_2,\ldots,e_n\rangle.$$

Logo qualquer elemento de E se escreve como combinação linear dos vectores $e_1,e_2,\ldots,e_n$. Seja $u\in E$ e suponha-se que

$$u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n,$$

com $\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$, e

$$u=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n.$$

com $\beta_1,\beta_2\ldots,\beta_n\in\mathbb{K}$. Então

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\cdots+\beta_ne_n$$

ou seja,

$$(\alpha_1-\beta_1)e_1+(\alpha_2-\beta_2)e_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)e_n=0_E.$$

Como $e_1,e_2,\ldots,e_n$ são linearmente independentes, tem-se que:

$$\alpha_i-\beta_i=\mathbf{0}_{\mathbb{K}}\Leftrightarrow\alpha_i=\beta_i,$$

para qualquer $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Conclui-se assim que há apenas uma única maneira de escrever u como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$. □

Definição 4.75. *Seja E um espaço vectorial de dimensão n. Sejam ainda $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de E e $u \in E$. Ao n-uplo $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, de escalares univocamente determinados, tais que*

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

*chama-se **coordenadas** (ou **componentes**) **de** u **na base** (ou **relativamente à base**) $\mathcal{B}$ e escreve-se*

$$u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}.$$

Exemplo 4.76. *Sabe-se que $\mathcal{B} = ((1,2), (3,-1))$ é uma base do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para determinar as coordenadas deste vector na base $\mathcal{B}$ tem de se determinar os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\alpha(1,2) + \beta(3,-1) = (x, y),$$

isto é,

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha - \beta = y \end{cases}$$

Passando para a matriz ampliada e escalonando, obtém-se

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & x \\ 0 & -7 & y-2x \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_2' := -\frac{1}{7}L_2]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{7} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_1' := L_1 - 3L_2]{} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & \frac{x+3y}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{7} \end{array}\right].$$

Donde $\beta = \frac{2x-y}{7}$ e $\alpha = \frac{x+3y}{7}$. Portanto,

$$(x, y) = \left(\frac{x+3y}{7}, \frac{2x-y}{7}\right)_{\mathcal{B}}.$$

Observe-se que, para $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}},$$

onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Assim como, para $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in P_n[x]$,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)_{\mathcal{B}_{P_n[x]}},$$

onde $\mathcal{B}_{P_n[x]}$ é a base canónica de $P_n[x]$.

Exercício Resolvido 4.77. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ considere-se a base*

$$\mathcal{B} = ((1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)).$$

(a) Determine as coordenadas de $u = (-1, 3, 2, 0)$ *relativamente à base* $\mathcal{B}$.

(b) Indique o vector $v \in \mathbb{R}^4$ *tal que* $v = (-1, 2, 3, 1)_{\mathcal{B}}$.

Resolução:

(a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}^4$ *tais que*

$$(-1, 3, 2, 0) = \alpha_1(1, 1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 1, 0) + \alpha_3(1, 0, 0, 0) + \alpha_4(0, 0, 0, 1),$$

então

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$(-1, 3, 2, 0) = (1, 2, -2, 0)_{\mathcal{B}}.$$

(b) Como $v = (-1, 2, 3, 1)_{\mathcal{B}}$ *então*

$$v = -1(1, 1, 0, 0) + 2(0, 1, 1, 0) + 3(1, 0, 0, 0) + 1(0, 0, 0, 1) = (2, 1, 2, 1).$$

Exercício 4.78. *No espaço vectorial real* $P_3[x]$, *considere as bases ordenadas* $\mathcal{B}_1 = (1 - x, x + x^2, x^2, x^3)$ *e* $\mathcal{B}_2 = (2, x - 3x^3, 2x^2 + x^3, x - x^2)$.

(a) Determine as coordenadas dos polinómios $p(x) = x^3 - 4x^2 - x$ *e* $q(x) = x^2 + 3x + 2$ *nas bases dadas.*

(b) Indique o polinómio $r(x) \in P_3[x]$ *tal que* $r(x) = (1, -2, 0, 1)_{\mathcal{B}_2}$.

4.9 Intersecção, reunião e soma de subespaços

Definição 4.79. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* F *e* G *subespaços vectoriais de* E. *Define-se a* ***intersecção dos subespaços*** F ***e*** G, *e representa-se por* $F \cap G$, *como sendo o subconjunto de* E *definido por:*

$$F \cap G = \{u \in E : u \in F \ \wedge \ u \in G\}.$$

Proposição 4.80. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* F *e* G *subespaços vectoriais de* E. *Então* $F \cap G$ *é um subespaço vectorial de* E.

Demonstração. **(i)** Como F e G são subespaços vectoriais de E então:

$$0_E \in F \ \text{ e } \ 0_E \in G.$$

Logo $0_E \in F \cap G$ e, portanto, $F \cap G \neq \emptyset$.

(ii) Sejam $u, v \in F \cap G$. Por definição de intersecção de F e G, vem que:

$$\begin{array}{rcl} u \in F \cap G & \Rightarrow & u \in F \text{ e } u \in G \\ v \in F \cap G & \Rightarrow & v \in F \text{ e } v \in G \end{array}$$

Por outro lado, F e G são subespaços vectoriais de E, logo $u + v \in F$ e $u + v \in G$, pelo que $u + v \in F \cap G$.

(iii) De forma análoga, seja $\lambda \in \mathbb{K}$ e seja $u \in F \cap G$. Então

$$u \in F \cap G \Rightarrow u \in F \text{ e } u \in G.$$

Mas como F e G são subespaços vectoriais de E então

$$\lambda u \in F \text{ e } \lambda u \in G \Rightarrow \lambda u \in F \cap G.$$

Logo, pela Proposição 4.9, $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E. □

Exemplo 4.81. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vectoriais $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z = 0\}$ e $G = \langle(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle$. Para determinar $F \cap G$ determine-se primeiro a condição que define G:*

$$(x, y, z) \in G \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (x, y, z) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(-1, 1, 2)$$

Ou seja, se e só se a matriz ampliada associada corresponde a um sistema possível:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 3 & z - x \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - 3L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - x - 3y \end{array}\right]$$

Para que o sistema seja possível a condição que se impõe é $z - x - 3y = 0$. Assim, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x - 3y = 0\}$. Donde

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0 \wedge z - x - 3y = 0\}.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ z - x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}y \\ z = x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}y \\ z = \frac{1}{2}y \end{cases},$$

obtém-se que

$$F \cap G = \left\{\left(-\frac{5}{2}y, y, \frac{1}{2}y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercício 4.82. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$*, considere os subespaços vectoriais*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\} \;\; e \;\; V = \langle (1, 0, -1), (2, 0, -4), (0, 3, 1) \rangle.$$

Determine uma base de $U \cap V$*.*

Definição 4.83. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* F *e* G *subespaços vectoriais de* E*. A* ***reunião dos subespaços*** F ***e*** G*, representa-se por* $F \cup G$*, é o subconjunto de* E *definido por:*

$$F \cup G = \{u \in E : u \in F \;\vee\; u \in G\}.$$

O exemplo que se apresenta a seguir permite concluir que, em geral, a reunião de subespaços vectoriais de um espaço vectorial E não é um subespaço vectorial de E.

Exemplo 4.84. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$*, considere-se os subespaços vectoriais*

$$H = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \qquad e \qquad F = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

Repare-se que $H \cup F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \;\vee\; y = 0\}$ *não é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^2$ *pois não é fechado para a adição de vectores. De facto,*

$$(0, 1) \in H \cup F \;\; e \;\; (1, 0) \in H \cup F$$

e, no entanto, $(0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin H \cup F$*.*

A proposição que se segue estabelece uma condição necessária e suficiente para que a reunião de subespaços seja um subespaço vectorial.

Proposição 4.85. *Seja* E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* F *e* G *subespaços vectoriais de* E*. Então* $F \cup G$ *é um subespaço vectorial de* E *se é só se*

$$F \subseteq G \;\; ou \;\; G \subseteq F.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha-se, com vista a um absurdo, que $F \cup G$ é um subespaço vectorial de E e, no entanto, $F \nsubseteq G$ e $G \nsubseteq F$. Então,

$$\exists f \in F : f \notin G \qquad \text{e} \qquad \exists g \in G : g \notin F.$$

Uma vez que $F \cup G$ é um subespaço vectorial, é fechado para a adição e, como $f, g \in F \cup G$, então $f + g = s \in F \cup G$. Tem-se então que $s \in F$ ou $s \in G$. Assim,

- se $s \in F$ então $g = s - f \in F$, o que é absurdo!
- se $s \in G$ então $f = s - g \in G$, o que é absurdo!

Logo $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

($\Leftarrow$) Se $F \subseteq G$ então $F \cup G = G$, que é um subespaço vectorial de E. Analogamente, se $G \subseteq F$ então $F \cup G = F$, que também é um subespaço vectorial de E. $\square$

Teorema 4.86. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja F um subespaço vectorial de E. Então F tem dimensão finita e $\dim F \leq n$. Mais, se $\dim F = n$ então $F = E$.*

Por convenção diz-se que $\dim\{0_E\} = 0$. Observe-se que se F é um subespaço vectorial de E e $F \neq \{0_E\}$ então $\dim F \geq 1$. Portanto, $\dim F = 0 \Leftrightarrow F = \{0_E\}$.

Definição 4.87. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E. A* ***soma dos subespaços*** *F* ***e*** *G, representa-se por $F+G$, é o subconjunto de E dado por:*

$$F+G = \{u+v : \ u \in F \ \wedge \ v \in G\}.$$

Proposição 4.88. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G dois subespaços vectoriais de E. Então $F+G$ é um subespaço vectorial de E.*

Demonstração. **(i)** Como F e G são subespaços vectoriais de E então

$$0_E \in F \ \text{ e } \ 0_E \in G.$$

Logo $0_E = 0_E + 0_E \in F+G$. E, portanto, $F+G \neq \emptyset$.

(ii) Sejam $u, v \in F+G$. Então

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \ \text{ tais que } \ u_1 \in F, \ u_2 \in G \\ v &= v_1 + v_2, \ \text{ tais que } \ v_1 \in F, \ v_2 \in G. \end{aligned}$$

Assim, $u+v = \underbrace{(u_1+v_1)}_{\in F} + \underbrace{(u_2+v_2)}_{\in G}$. Logo $u+v \in F+G$.

(iii) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in F+G$. Então $u = u_1+u_2$ para alguns $u_1 \in F$ e $u_2 \in G$. Logo $\lambda u = \lambda(u_1+u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in F} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in G} \in F+G$.

Logo, pela Proposição 4.9, $F+G$ é um subespaço vectorial de E. □

Exemplo 4.89. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços vectoriais:*

$$F = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \qquad e \qquad G = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$$

Então

$$\begin{aligned} F+G &= \{(0,0,z)+(0,y,0) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}. \end{aligned}$$

Observação 4.90. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja X um subconjunto de E. Prova-se que $\langle X \rangle$ é o menor (no sentido da inclusão) subespaço vectorial de E que contém X, isto é:*

se H é subespaço vectorial de E tal que $X \subseteq H$ então $\langle X \rangle \subseteq H$

Atendendo à observação anterior, pode provar-se que a soma de dois subespaços é o menor subespaço que contém a união desses subespaços, isto é:

Proposição 4.91. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E. Então $F + G = \langle F \cup G \rangle$.*

Demonstração. Para provar que $F + G = \langle F \cup G \rangle$, e atendendo à observação anterior, basta mostrar que $F + G$ é o menor subespaço vectorial que contém $F \cup G$. Ou seja, tem que se mostrar que: **(i)** $F \cup G \subseteq F + G$ e **(ii)** se H é um subespaço vectorial de E tal que tal que $F \cup G \subseteq H$ então $F + G \subseteq H$.

(i) Seja $u \in F \cup G$. Então $u \in F$ ou $u \in G$. Se $u \in F$ tem-se

$$u = u + 0_E \in F + G.$$

Analogamente, se $u \in G$ tem-se $u = 0_E + u \in F + G$. Ou seja provou-se que $F \cup G \subseteq F + G$.

(ii) Seja H um subespaço vectorial de E tal que $F \cup G \subseteq H$. Seja ainda $u \in F + G$ arbitrário. Então:

$$u = u_1 + u_2, \quad \text{tais que} \quad u_1 \in F, \quad \text{e} \quad u_2 \in G$$

Como $F \cup G \subseteq H$, então $u_1, u_2 \in H$ e, portanto, como H é subespaço vectorial, então $u = u_1 + u_2 \in H$. Logo $F + G \subseteq H$.

□

Teorema 4.92. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E tais que $F = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ e $G = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, para alguns $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k \in E$. Então*

$$F + G = \langle u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_k \rangle.$$

Exemplo 4.93. *No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ considere-se os subespaços vectoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\} \quad e \quad G = \langle (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle$$

Determine-se um sistema de geradores de $F + G$. Já são conhecidos os geradores de G, basta agora determinar um sistema de geradores de F:

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - 3z\} \\ &= \{(-y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Logo

$$F + G = \langle (-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 2) \rangle.$$

Exercício 4.94. *No espaço vectorial* $\mathbb{R}^4$ *considere-se os subespaços vectoriais:*

$$\begin{aligned} S &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a-b=0 \ \wedge \ a=b+d\} \\ T &= \langle (1,0,0,3),(2,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Determine $S+T$ *e indique uma sua base.*

4.10 Teorema das dimensões

Teorema 4.95 (Teorema das dimensões)**.** *Sejam* E *um espaço vectorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* F *e* G *subespaços vectoriais de* E*, finitamente gerados. Então*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Demonstração. Considere-se o caso particular em que $F = \{0_E\}$ ou $G = \{0_E\}$. Neste caso, $F \cap G = \{0_E\}$ e $F+G = G$ ou $F+G = F$. Como $\dim\{0_E\} = 0$, a igualdade verifica-se trivialmente.

Suponha-se então que $F \neq \{0_E\}$ e $G \neq \{0_E\}$. Repare-se que F e G têm dimensão finita; mais, $F \cap G$ é um subespaço vectorial de F (e também de G) e, portanto, também tem dimensão finita.

Suponha-se que $F \cap G \neq \{0_E\}$ e seja $\mathcal{B}_{F\cap G} = (e_1, \ldots, e_s)$ uma base ordenada de $F \cap G$. Como $e_1, \ldots, e_s \in F$ e são linearmente independentes, pelo corolário 4.70 é possível juntar vectores de F à base de $F \cap G$ por forma a obter uma base de F. O mesmo se pode fazer para G. Assim, sejam $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p)$ e $\mathcal{B}_G = (e_1, \ldots, e_s, g_1, \ldots, g_k)$ bases ordenadas de F e G, respectivamente. Então

$$F = \langle e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p \rangle,$$

$$G = \langle e_1, \ldots, e_s, g_1, \ldots, g_k \rangle$$

e

$$F+G = \langle e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k \rangle.$$

Prove-se que os vectores $e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k$ são linearmente independentes. Para tal considere-se a combinação linear nula,

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s + \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_p t_p + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_k g_k = 0_E, \tag{4.3}$$

que é equivalente a

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s + \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_p t_p}_{\in F = \langle e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p \rangle} = \underbrace{(-\gamma_1 g_1) + \cdots + (-\gamma_k g_k)}_{\in G = \langle e_1, \ldots, e_s, g_1, \ldots, g_k \rangle}.$$

Logo $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s + \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_p t_p \in F \cap G$. Mas, como $\mathcal{B}_{F\cap G} = (e_1, \ldots, e_s)$ é uma base de $F \cap G$, então:

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s + \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_p t_p = \varphi_1 e_1 + \cdots + \varphi_s e_s,$$

para alguns $\varphi_1, \ldots, \varphi_s \in \mathbb{K}$. Assim,

$$(\alpha_1 - \varphi_1)e_1 + \cdots + (\alpha_s - \varphi_s)e_s + \beta_1 t_1 + \cdots + \beta_p t_p = 0_E.$$

Uma vez que $e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p$ são linearmente independentes pois formam uma base de F, tem-se que:

$$\alpha_1 - \varphi_1 = \cdots = \alpha_s - \varphi_s = \beta_1 = \cdots = \beta_p = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

Conclui-se assim que $\beta_1 = \cdots = \beta_p = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Substituindo em (4.3), obtém-se:

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_k g_k = 0_E,$$

o que implica que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = \gamma_1 = \cdots = \gamma_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}},$$

já que $e_1, \ldots, e_s, g_1, \ldots, g_k$ são linearmente independentes.

Conclui-se assim que $e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k$ são linearmente independentes e, portanto, estes vectores formam uma base de $F + G$. Logo

$$\underbrace{\dim(F+G)}_{=s+p+k} = \underbrace{\dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}_{=(s+p)+(s+k)-s}.$$

Se $F \cap G = \{0_E\}$, considere-se $\mathcal{B}_F = (t_1, \ldots, t_p)$ e $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_k)$ bases ordenadas de F e G, respectivamente. Por um raciocínio análogo ao anterior, prova-se que $\mathcal{B}_{F+G} = (t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k)$ é uma base de $F + G$ (demonstre!). Logo, também neste caso,

$$\underbrace{\dim(F+G)}_{=p+k} = \underbrace{\dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}_{=p+k-0}.$$

□

Observação 4.96. *No demonstração do teorema anterior provou-se também que, no caso de $F \cap G \neq \{0_E\}$, se $\mathcal{B}_{F \cap G} = (e_1, \ldots, e_s)$ é uma base ordenada de $F \cap G$ e $\mathcal{B}_F = (e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p)$ e $\mathcal{B}_G = (e_1, \ldots, e_s, g_1, \ldots, g_k)$ são bases ordenadas de F e G, respectivamente, então*

$$\mathcal{B}_{F+G} = (e_1, \ldots, e_s, t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k)$$

é uma base ordenada de $F + G$. No caso de $F \cap G = \{0_E\}$ e se $\mathcal{B}_F = (t_1, \ldots, t_p)$ e $\mathcal{B}_G = (g_1, \ldots, g_k)$ são bases ordenadas de F e G, respectivamente, então

$$\mathcal{B}_{F+G} = (t_1, \ldots, t_p, g_1, \ldots, g_k)$$

é uma base ordenada de $F + G$.

Exemplo 4.97. *Considere-se, no espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$*, os subespaços vectoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\} \quad e \quad G = \langle(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle.$$

No exemplo 4.81, viu-se que

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ y \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \langle(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2})\rangle \\ &= \langle(-5, 2, 1)\rangle \end{aligned}$$

Como $(-5, 2, 1) \neq (0, 0, 0)$*,* $(-5, 2, 1)$ *é linearmente independente e, portanto,* $\mathcal{B}_{F\cap G} = ((-5, 2, 1))$ *é uma base ordenada de* $F \cap G$*. Veja-se que* $\dim F = 2$*. Ora*

$$\begin{aligned} F &= \{(-y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(-1, 1, 0), (-3, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

Sendo $(-1, 1, 0)$ *e* $(-3, 0, 1)$ *vectores linearmente independentes (verifique!), então* $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (-3, 0, 1))$ *é uma base ordenada de* F *e* $\dim F = 2$*.*

Assim, basta "juntar" um vector de F *ao vector* $(-5, 2, 1)$ *que não seja combinação linear de* $(-5, 2, 1)$ *para se obter uma outra base de* F*. Por exemplo,* $(1, 2, -1) \in F$ *e não é combinação linear de* $(-5, 2, 1)$*, pois* $(1, 2, -1) \neq \alpha(-5, 2, 1)$*, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Como* $\dim(F) = 2$ *e* $(1, 2, -1), (-5, 2, 1) \in F$ *são linearmente independentes,*

$$\mathcal{B}_F = ((1, 2, -1), (-5, 2, 1)) \text{ é base ordenada de } F.$$

Por outro lado, $G = \langle(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle$*, logo* $\dim G \leq 2$*. Como* $F \cap G \subseteq G$*, então* $(-5, 2, 1)$ *é um vector linearmente independente de* G*.*

No entanto, $(1, 0, 1)$ *não é combinação linear de* $(-5, 2, 1)$*, logo* $(1, 0, 1)$ *e* $(-5, 2, 1)$ *são dois vectores de* G *linearmente independentes e, consequentemente,* $\dim G \geq 2$*. Conclui-se assim que* $\mathcal{B}_G = ((1, 0, 1), (-5, 2, 1))$ *é uma base ordenada de* G *e que* $\dim G = 2$*.*

Finalmente,

$$\mathcal{B}_F = ((1, 2, -1), (-5, 2, 1)) \text{ é base ordenada de } F$$

$$\mathcal{B}_G = ((1, 0, 1), (-5, 2, 1)) \text{ é base ordenada de } G$$

e, portanto, pela observação 4.96:

$$\mathcal{B}_{F+G} = ((1, 2, -1), (-5, 2, 1), (1, 0, 1)) \text{ é base ordenada de } F + G.$$

Dado um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, de entre os subespaços vectoriais de E da forma $F + G$, onde F e G são subespaços vectoriais de E, têm particular importância os que verificam a seguinte condição:

Para todo $u \in F+G$ existem um e um só $u_1 \in F$ e um e um só $u_2 \in G$ tais que $u = u_1 + u_2$.

Definição 4.98. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E. Diz-se que $F+G$ é* ***soma directa*** *(ou que F e G estão em soma directa), e representa-se por $F \oplus G$, se, para todo $u \in F+G$ existem um e um só $u_1 \in F$ e um e um só $u_2 \in G$ tais que*

$$u = u_1 + u_2.$$

Exemplos 4.99. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere-se os subespaços vectoriais:*

1. *$F = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $G = \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}$. Então*

$$\begin{aligned} F+G &= \{(0,0,z)+(0,y,0) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}. \end{aligned}$$

Assim, qualquer que seja $u \in F+G$ tem-se que $u = (0,b,c)$, para alguns $b,c \in F+G$, pelo que u se escreve de modo único como soma de um elemento de F com um elemento de G, da forma $u = (0,0,c)+(0,b,0)$, onde $(0,0,c) \in F$ e $(0,b,0) \in G$. Então F está em soma directa com G.

2. *$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ e $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x\}$. Então*

$$\begin{aligned} F+G &= \{(0,y,z)+(y',y',z') : y,z,y',z' \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(y',y+y',z+z') : y,z,y',z' \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}^3 \quad \textit{(verifique!)}. \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$(1,1,1) = \underbrace{(0,0,1)}_{\in F} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in G}$$

e, por outro lado,

$$(1,1,1) = \underbrace{(0,0,-1)}_{\in F} + \underbrace{(1,1,2)}_{\in G}$$

Então, existe $u \in F+G$ que não se escreve de modo único como um vector de F com um vector de G e portanto F não está em soma directa com G.

O próximo resultado estabelece uma caracterização para a soma directa de dois subespaços vectoriais.

Proposição 4.100. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) *A soma $F+G$ é directa;*

(ii) *O vector nulo escreve-se de modo único como soma de um vector de F com um vector de G;*

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$.

Demonstração. Prova-se este resultado através da seguinte sequência de implicações:

$$\textbf{(i)} \Rightarrow \textbf{(ii)} \Rightarrow \textbf{(iii)} \Rightarrow \textbf{(i)}$$

(i) ⇒ (ii) Resulta imediatamente da definição de soma directa.

(ii) ⇒ (iii) Sabe-se que

$$\{0_E\} \subseteq F \cap G. \tag{4.4}$$

Por outro lado, seja $u \in F \cap G$. Então $u \in F$ e $u \in G$. Como G é um subespaço vectorial de E tem-se que $-u \in G$. Por definição de simétrico em E,

$$\underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{(-u)}_{\in G} = 0_E$$

e tem-se também

$$\underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = 0_E.$$

Por hipótese, o vector nulo escreve-se de modo único como soma de um elemento de F com um elemento de G, logo $u = 0_E$ e, consequentemente,

$$F \cap G \subseteq \{0_E\} \tag{4.5}$$

Por (4.4) e (4.5) conclui-se que $F \cap G = \{0_E\}$.

(iii) ⇒ (i) Seja $u \in F + G$ e admita-se que

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \quad \text{tais que } u_1 \in F \text{ e } u_2 \in G \\ u &= u_1' + u_2', \quad \text{tais que } u_1' \in F \text{ e } u_2' \in G \end{aligned}$$

Então $\underbrace{u_1 - u_1'}_{\in F} = \underbrace{u_2 - u_2'}_{\in G}$ pelo que $u_1 - u_1' \in F \cap G$ e $u_2 - u_2' \in F \cap G$. Mas, por hipótese, $F \cap G = \{0_E\}$. Logo

$$u_1 - u_1' = 0_E \quad \text{e } u_2 - u_2' = 0_E$$

ou seja, $u_1 = u_1'$ e $u_2 = u_2'$.

Provou-se então que cada vector $u \in F \cap G$ se escreve de modo único como soma de um vector de F com um vector de G. □

Exemplos 4.101. *1. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, considerem-se os subespaços vectoriais*

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \ \wedge \ z + t = 0\} \\ G &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \wedge \ t = 0\}. \end{aligned}$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} F\cap G &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y=0 \ \wedge\ z+t=0\ \wedge\ x=0\ \wedge\ t=0\}\\ &= \{(0,0,0,0)\}, \end{aligned}$$

então F está em soma directa com G.

2. *No espaço vectorial real $P_3[x]$, considerem-se os subespaços vectoriais*

$$\begin{aligned} F &= \{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3[x] : a_0+a_1=0\ \wedge\ a_3=0\}\\ G &= \{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3[x] : a_0+a_1+a_2=0\}. \end{aligned}$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} F\cap G &= \{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\in P_3[x] : a_0+a_1=0\wedge a_3=0\wedge\\ &\qquad \wedge a_0+a_1+a_2=0\}\\ &= \{-a_1+a_1x :\ a_1\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

tem-se que $1-x\in F\cap G$ e, portanto, $F\cap G\neq\{0_E\}$. Logo a soma $F+G$ não é soma directa.

Exercício 4.102. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes vectores:*

$$a=(1,2,-1),\ b=(1,-2,-1),\ c=(1,2,3)\ \ e\ \ d=(2,2,2).$$

Seja F o subespaço gerado pelos vectores a e b e seja G o subespaço gerado pelos vectores c e d. Determine uma base para:

(a) $F\cap G$;

(b) $F+G$. *(<u>sugestão</u>: use a observação 4.96)*

Teorema 4.103. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam F e G subespaços vectoriais de E de dimensão finita. Seja ainda $S=F+G$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) $S=F\oplus G$.

(ii) $\dim(F+G)=\dim F+\dim G$.

(iii) *Se $\mathcal{B}_F=(t_1,t_2,\ldots,t_p)$ é uma base ordenada de F e $\mathcal{B}_G=(g_1,g_2,\ldots,g_k)$ é uma base ordenada de G, então $\mathcal{B}=(t_1,t_2,\ldots,t_p,g_1,g_2,\ldots,g_k)$ é uma base ordenada de $F+G=S$.*

Demonstração. **(i) $\Rightarrow$ (ii)** Resulta de imediato do Teorema das dimensões. De facto, como $S=F\oplus G$ então $F\cap G=\{0_E\}$ e, consequentemente, $\dim(F\cap G)=0$. Logo

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)\Leftrightarrow \dim(F+G)=\dim F+\dim G$$

(ii) $\Rightarrow$ **(i)** Novamente, pelo Teorema das dimensões,

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G \Rightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Rightarrow F \cap G = \{0_E\}.$$

Daqui conclui-se que **(i)** $\Leftrightarrow$ **(ii)**.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Por hipótese, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, logo, pelo teorema das dimensões tem-se $\dim(F \cap G) = 0$. Donde $F \cap G = \{0_E\}$. Atendendo à observação 4.96 obtém-se **(iii)**. A implicação **(iii)** $\Rightarrow$ **(ii)** é óbvia. □

Exercício 4.104. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere-se os subconjuntos $F = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $G = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.*

(a) Mostre que F e G são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.

(b) Averigúe se $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

4.11 Subespaço complementar

Definição 4.105. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja F um subespaço vectorial de E. A um subespaço vectorial $F^\star$, de E, tal que*

$$E = F \oplus F^\star,$$

*chama-se **subespaço complementar de** F.*

Teorema 4.106. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n. Todo o subespaço vectorial de E tem pelo menos um subespaço complementar.*

Demonstração. Seja F um subespaço vectorial de E.

- Se $F = \{0_E\}$ então um subespaço complementar de F é o próprio espaço vectorial E (e é único);
- Se $F = E$ então um subespaço complementar de F é $\{0_E\}$ (e é único);
- Suponha-se que F é um subespaço vectorial não trivial de E. Então, seja $\mathcal{B} = (f_1, \ldots, f_k)$ uma base ordenada de F. Como $F \neq E$ então existem vectores em E que não pertencem a F. Pode assim completar-se a base de F por forma a obter uma base de E. Seja

  $$\mathcal{B}_E = (f_1, \ldots, f_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$$

  essa base ordenada de E. Tome-se

  $$S = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle.$$

  Logo $E = F + S$. Pelo Teorema 4.103, $\dim F + \dim S = n$ e, portanto, $E = F \oplus S$. Conclui-se assim que S é um subespaço complementar de F.

□

Exemplo 4.107. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^4$*, considere*

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y + 2z - w = 0\}.$$

Verifique que F *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^4$*. Agora, vai-se determinar dois subespaços complementares de* F*.*

Tem-se que $\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 2))$ *é uma base ordenada de* F *(prove!). Complete-se, de duas formas diferentes, esta base até obter uma base de* $\mathbb{R}^4$*.*

1. *"acrescentando" os vectores* $(1, 0, 0, 0)$ *e* $(0, 1, 0, 0)$*.*

   Veja-se que os vectores $(1, 0, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0, 0)$*,* $(-1, 1, 0, 1)$ *e* $(-1, 0, 1, 2)$ *são linearmente independentes. Sejam* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *tais que*

   $$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 1, 0, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 1) + \delta(-1, 0, 1, 2) = (0, 0, 0, 0),$$

   ou seja,

   $$(\alpha - \gamma - \delta, \beta + \gamma, \delta, \gamma + 2\delta) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma - \delta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \delta = 0 \\ \gamma + 2\delta = 0 \end{cases}$$

   E, portanto, $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$*. Logo, a única forma de escrever o vector nulo como combinação dos vectores dados é a combinação linear nula trivial.*

   Logo os vectores $(1, 0, 0, 0)$*,* $(0, 1, 0, 0)$*,* $(-1, 1, 0, 1)$ *e* $(-1, 0, 1, 2)$ *são linearmente independentes. Como* $\mathbb{R}^4$ *tem dimensão* 4*, estes vectores formam uma base de* $\mathbb{R}^4$*.*

   Seja $S = \langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle$*. Tem-se que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus S$*. Portanto* S *é um subespaço complementar de* F*.*

2. *"acrescentando" os vectores* $(1, 0, 0, 0)$ *e* $(0, 0, 1, 0)$*.*

   Veja-se que os vectores $(1, 0, 0, 0)$*,* $(0, 0, 1, 0)$*,* $(-1, 1, 0, 1)$ *e* $(-1, 0, 1, 2)$ *são linearmente independentes. Sejam* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ *tais que*

   $$\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 1, 0, 1) + \delta(-1, 0, 1, 2) = (0, 0, 0, 0),$$

   ou seja,

   $$(\alpha - \gamma - \delta, \gamma, \beta + \delta, \gamma + 2\delta) = (0, 0, 0, 0). \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \gamma - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \gamma + 2\delta = 0 \end{cases}$$

E, portanto, $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 0$. *Logo os vectores* $(1,0,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(-1,1,0,1)$ *e* $(-1,0,1,2)$ *são linearmente independentes. Mais uma vez pode concluir-se que estes vectores também formam uma base de* $\mathbb{R}^4$.

Seja $S_1 = \langle (1,0,0,0),(0,0,1,0) \rangle$. *Tem-se que* $\mathbb{R}^4 = F \oplus S_1$. *Portanto* S_1 *é outro subespaço complementar de* F.

5. Aplicações lineares

5.1 Definição e propriedades

Definição 5.1. *Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Chama-se* ***aplicação linear*** *(ou* ***transformação linear*** *ou ainda* ***homomorfismo****) de E em E' a toda a aplicação $\varphi : E \longrightarrow E'$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\forall u, v \in E, \quad \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$;

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Simplificação de notação: Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$, escreve-se $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ em vez de $\varphi((x_1, \ldots, x_n))$.

Exemplos 5.2. *1. A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \varphi(x,y,z) = (x+y, z) \end{array}$$

é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$. De facto,

(i) *Sejam $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ arbitrários. Então*

$$\begin{aligned} \varphi\left((x,y,z)+(a,b,c)\right) &= \varphi(x+a, y+b, z+c) && \textit{por definição} \\ & && \textit{de adição em } \mathbb{R}^3 \\ &= ((x+a)+(y+b), z+c) && \textit{por definição de } \varphi \\ &= ((x+y)+(a+b), z+c) && \textit{pelas propriedades} \\ & && \textit{da adição em } \mathbb{R} \\ &= (x+y, z) + (a+b, c) && \textit{por definição} \\ & && \textit{de adição em } \mathbb{R}^2 \\ &= \varphi(x,y,z) + \varphi(a,b,c) && \textit{por definição de } \varphi. \end{aligned}$$

Provou-se assim que, para quaisquer $(x,y,z), (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\varphi\left((x,y,z)+(a,b,c)\right) = \varphi(x,y,z) + \varphi(a,b,c).$$

(ii) *Sejam agora $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ arbitrários. Então*

$$\begin{aligned} \varphi\left(\lambda(x,y,z)\right) &= \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) && \textit{por definição de multiplicação por} \\ & && \textit{um escalar em } \mathbb{R}^3 \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda z) && \textit{por definição de } \varphi \\ &= (\lambda(x+y), \lambda z) && \textit{pela distributividade da multiplicação} \\ & && \textit{em relação à adição em } \mathbb{R} \\ &= \lambda(x+y, z) && \textit{por definição de multiplicação por} \\ & && \textit{um escalar em } \mathbb{R}^2 \\ &= \lambda\varphi(x,y,z) && \textit{por definição de } \varphi. \end{aligned}$$

Provou-se assim que, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$\varphi\left(\lambda(x,y,z)\right) = \lambda\varphi(x,y,z).$$

2. *Seja* $x_0 \in \mathbb{R}$. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \psi(f) = f(x_0) \end{array}$$

é uma aplicação linear de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}$. *De facto,*

(i) *Sejam* $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *arbitrários. Então*

$$\begin{aligned} \psi(f+g) &= (f+g)(x_0) && \textit{por definição de } \psi \\ &= f(x_0) + g(x_0) && \textit{por definição de adição em } \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ &= \psi(f) + \psi(g) && \textit{por definição de } \psi. \end{aligned}$$

Logo $\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$, *para quaisquer* $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

(ii) *Sejam* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *arbitrários. Então*

$$\begin{aligned} \psi(\lambda f) &= (\lambda f)(x_0) && \textit{por definição de } \psi \\ &= \lambda(f(x_0)) && \textit{por definição de multiplicação por um escalar em } \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ &= \lambda\psi(f) && \textit{por definição de } \psi. \end{aligned}$$

Ou seja, $\psi(\lambda f) = \lambda\psi(f)$, *para quaisquer* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & M_{3\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \longmapsto & \phi\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = (a^2, b+c-2) \end{array}$$

não é uma aplicação linear. De facto,

$$\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = (1^2, 0+2-2) = (1,0)$$

e

$$\phi\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = (2^2, 0+4-2) = (4,2),$$

mas

$$2\phi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = 2(1,0) = (2,0).$$

Logo, $\phi(\lambda u) \neq \lambda\phi(u)$, *quando* $\lambda = 2$ *e* $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 5.3. *Verifique que a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \theta: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & \theta(x,y) = (2x, x-y, 3y) \end{array}$$

é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3$.

Proposição 5.4. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$. *Seja ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'. *Então:*

(a) $\varphi(0_E) = 0_{E'}$;

(b) $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, *para todo* $u \in E$;

(c) $\varphi(u-v) = \varphi(u) - \varphi(v)$, *para todo* $u, v \in E$.

Demonstração. Prove-se **(a)**. Como o vector nulo de E, 0_E, é o elemento neutro para a adição em E, então $0_E = 0_E + 0_E$. Donde

$$\begin{array}{rl} & \varphi(0_E) = \varphi(0_E + 0_E) \\ \Leftrightarrow & \varphi(0_E) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E). \end{array}$$

Note-se que a última igualdade resulta do facto de φ ser uma aplicação linear. Como E' é um espaço vectorial e $\varphi(0_E) \in E'$, então existe o seu simétrico em E', $-\varphi(0_E)$. Mas então, adicionando a ambos os membros da igualdade anterior esse simétrico, obtém-se

$$\begin{array}{ll} \varphi(0_E) + (-\varphi(0_E)) = \varphi(0_E) + \varphi(0_E) + (-\varphi(0_E)) & \\ \Leftrightarrow 0_{E'} = \varphi(0_E) + 0_{E'} & \text{pelos axiomas de espaço vectorial} \\ \Leftrightarrow 0_{E'} = \varphi(0_E) & \text{por definição de } 0_{E'}. \end{array}$$

Prove-se **(b)**. Seja $u \in E$. Pretende-se provar que o vector $\varphi(-u)$ é o simétrico do vector $\varphi(u)$ em E', ou seja, $\varphi(-u) + \varphi(u) = 0_{E'}$. Ora

$$\begin{array}{rll} \varphi(-u) + \varphi(u) & = \varphi(-u+u) & \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear} \\ & = \varphi(0_E) & \text{por definição de simétrico em } E \\ & = 0_{E'} & \text{pela alínea } \textbf{(a)}. \end{array}$$

Portanto, $\varphi(-u) = -\varphi(u)$, para todo $u \in E$.

Prove-se **(c)**. Sejam $u, v \in E$. Então

$$\begin{array}{rll} \varphi(u-v) & = \varphi(u + (-v)) & \text{por notação} \\ & = \varphi(u) + \varphi(-v) & \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear} \\ & = \varphi(u) + (-\varphi(v)) & \text{pela alínea } \textbf{(b)} \\ & = \varphi(u) - \varphi(v) & \text{por notação.} \end{array}$$

□

O próximo resultado estabelece uma nova caracterização para aplicações lineares.

Proposição 5.5. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação de E em E'. Então φ é uma aplicação linear se e só se*

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u, v \in E.$$

A demonstração fica como exercício.

Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Representa-se por $\mathcal{L}(E, E')$ o conjunto das aplicações lineares de E para E'. Observe-se que, como $\mathcal{L}(E, E')$ é um conjunto de aplicações, pode considerar-se as seguintes operações:

Adição: Dadas $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, E')$, $\varphi + \psi$ é a aplicação de E em E' tal que

$$(\varphi + \psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u), \text{para todo o } u \in E.$$

Multiplicação por um escalar: Dados $\varphi \in \mathcal{L}(E, E')$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\varphi$ é a aplicação de E em E' tal que

$$(\lambda\varphi)(u) = \lambda\left(\varphi(u)\right), \text{para todo o } u \in E.$$

Teorema 5.6. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, E')$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $\varphi+\psi$ e $\lambda\varphi$ são aplicações lineares. Mais, $\mathcal{L}(E, E')$, munido com a adição e a multiplicação por um escalar definidas anteriormente, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Considere-se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, E')$ arbitrárias e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E$. Então

$$\begin{aligned}
(\varphi + \psi)(\alpha u + \beta v) &= \varphi(\alpha u + \beta v) + \psi(\alpha u + \beta v) && \text{por definição de adição em } \mathcal{L}(E, E'). \\
&= \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) + \alpha\psi(u) + \beta\psi(v) && \text{pela Proposição 5.5} \\
&= \alpha(\varphi(u) + \psi(u)) + \beta(\varphi(v) + \psi(v)) && \text{por } E' \text{ ser um espaço vectorial} \\
&= \alpha\left((\varphi + \psi)(u)\right) + \beta\left((\varphi + \psi)(v)\right) && \text{por definição de adição em } \mathcal{L}(E, E').
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi + \psi$ é uma aplicação linear. Logo a adição é uma operação interna em $\mathcal{L}(E, E')$.

Analogamente, considere-se $\varphi \in \mathcal{L}(E, E')$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e sejam $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}$ e

$u, v \in E$. Então

$$\begin{aligned}
(\lambda\varphi)(\alpha u + \beta v) &= \lambda\left(\varphi(\alpha u + \beta v)\right) && \text{por definição de multiplicação} \\
& && \text{por um escalar em } \mathcal{L}(E, E'). \\
&= \lambda\left(\alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)\right) && \text{pela Proposição 5.5} \\
&= (\lambda\alpha)\varphi(u) + (\lambda\beta)\varphi(v) && \text{por } E' \text{ ser um espaço vectorial} \\
&= (\alpha\lambda)\varphi(u) + (\beta\lambda)\varphi(v) && \text{pela comutatividade em } \mathbb{K} \\
&= \alpha\left(\lambda(\varphi(u))\right) + \beta\left(\lambda(\varphi(v))\right) && \text{por } E' \text{ ser um espaço vectorial} \\
&= \alpha\left(\lambda\varphi\right)(u) + \beta\left(\lambda\varphi\right)(v) && \text{por definição de multiplicação} \\
& && \text{por um escalar em } \mathcal{L}(E, E').
\end{aligned}$$

Logo $\lambda\varphi$ é uma aplicação linear, e portanto $\lambda\varphi \in \mathcal{L}(E, E')$.

Fica como exercício provar que $\mathcal{L}(E, E')$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações anteriormente definidas. □

Observação 5.7. *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} 0_{\mathcal{L}(E,E')}: & E & \longrightarrow & E' \\ & u & \longmapsto & 0_{\mathcal{L}(E,E')}(u) = 0_{E'} \end{array}$$

é uma aplicação linear de E para E' e é o vector nulo do espaço vectorial $\mathcal{L}(E, E')$. Prove que, de facto, $0_{\mathcal{L}(E,E')} + \psi = \psi$, para todo $\psi \in \mathcal{L}(E, E')$.

Mais, para cada $\psi \in \mathcal{L}(E, E')$, a aplicação

$$\begin{array}{rccl} -\psi: & E & \longrightarrow & E' \\ & u & \longmapsto & (-\psi)(u) = -(\psi(u)) \end{array}$$

é uma aplicação linear de E em E' e é o simétrico de ψ em $\mathcal{L}(E, E')$. Prove que, de facto, $\psi + (-\psi) = 0_{\mathcal{L}(E,E')}$.

Exercício 5.8. *Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$, $\varphi \in \mathcal{L}(E, E')$ e $\psi \in \mathcal{L}(E', E'')$. Prove que a aplicação, à qual se chama **aplicação composta**,*

$$\begin{array}{rccl} \psi \circ \varphi: & E & \longrightarrow & E'' \\ & u & \longmapsto & (\psi \circ \varphi)(u) = \psi\left(\varphi(u)\right) \end{array}$$

é uma aplicação linear de E em E''.

5.1.1 Classificação de aplicações lineares

Definição 5.9. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação linear de E em E'. Diz-se que φ é um*

- ***monomorfismo*** *se φ é injectiva, isto é, $\varphi(u) = \varphi(v) \Rightarrow u = v, \forall u, v \in E$;*
- ***epimorfismo*** *se φ é sobrejectiva, isto é, se o contradomínio de φ é E';*

- ***isomorfismo*** *se φ é bijectiva, isto é, se φ é injectiva e sobrejectiva;*
- ***endomorfismo*** *se $E = E'$;*
- ***automorfismo*** *se φ é um endomorfismo e um isomorfismo.*

Exemplos 5.10. *1. A aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi(x, y, z) = x + y + z, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

é um epimorfismo.

2. A aplicação linear $\psi : P_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\psi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a, b, c, d), \quad \forall ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x]$$

é um isomorfismo.

3. A aplicação linear $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ definida por

$$\varphi(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a, \quad \forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$$

é um automorfismo.

5.1.2 Propriedades das aplicações lineares

O teorema seguinte exprime o comportamento das aplicações lineares em relação à dependência e/ou independência linear de vectores.

Teorema 5.11. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação linear de E para E'. Então:*

(i) *Se os vectores $v_1, \ldots, v_k \in E$ são linearmente dependentes em E então os vectores $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ são linearmente dependentes em E'.*

(ii) *φ é monomorfismo se e só se*

> *a independência linear dos vectores $v_1, \ldots, v_k$ implicar a independência linear dos vectores $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$.*

Demonstração. Prove-se **(i)**. Sejam $v_1, \ldots, v_k \in E$ e suponha-se que estes vectores são linearmente dependentes. Então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E.$$

Como φ é uma aplicação linear, tem-se

$$\begin{aligned} & \varphi(0_E) = 0_{E'} \\ \Leftrightarrow \quad & \varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = 0_{E'} \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k \varphi(v_k) = 0_{E'}. \end{aligned}$$

Ou seja, obtém-se uma combinação linear nula dos vectores $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ em que os escalares não são todos nulos. Portanto, $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ são linearmente dependentes em E'.

Prove-se **(ii)**. ($\Rightarrow$) Suponha-se que φ é monomorfismo, ou seja, é injectiva e sejam $v_1, \dots, v_k \in E$ vectores linearmente independentes. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(v_k) = 0_{E'}.$$

Pretende-se provar que a sua única solução é $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$, para se poder concluir que os vectores $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ são linearmente independentes. Como φ é uma aplicação linear, tem-se $\varphi(0_E) = 0_{E'}$ e

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1\varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(v_k) = 0_{E'} = \varphi(0_E).$$

Como φ é injectiva, se dois objectos têm a mesma imagem, então eles são iguais, logo

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E.$$

Mas os vectores $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes, donde

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

Portanto, os vectores $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ são linearmente independentes.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que sempre que $v_1, \dots, v_k$ forem linearmente independentes então $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k)$ são linearmente independentes. Vai-se provar que φ é injectiva.

Suponha-se, com vista a um absurdo, φ não é um monomorfismo, isto é, suponha-se que existem $u, v \in E$ tais que $u \neq v$ e $\varphi(u) = \varphi(v)$. Seja $w = u - v$. Como $u \neq v$ tem-se $w \neq 0_E$, donde w é linearmente independente. Então, por hipótese, $\varphi(w)$ é linearmente independente. Mas, por outro lado,

$$\varphi(w) = \varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = 0_{E'}$$

e $0_{E'}$ é linearmente dependente. Logo $\varphi(w)$ é linearmente dependente, o que é absurdo. Portanto, φ é monomorfismo. $\square$

Resumindo:

- Uma aplicação linear transforma vectores linearmente dependentes em vectores linearmente dependentes.
- Para que uma aplicação linear transforme sempre vectores linearmente independentes em vectores linearmente independentes é necessário e suficiente que esta aplicação seja injectiva.

Exemplos 5.12. *1. Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ tal que*

$$\varphi(x, y, z) = (x + y, z), \quad \textit{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

É fácil verificar que φ não é um monomorfismo. De facto,

$$\varphi(3,2,-1) = \varphi(4,1,-1) = (5,-1).$$

Considere os vectores $u_1 = (1,1,-1)$, $v_1 = (-1,-3,2)$ e $w_1 = (-1,-5,3)$. Note-se que são linearmente dependentes (prove!) e

$$\varphi(u_1) = (2,-1), \quad \varphi(v_1) = (-4,2) \quad e \quad \varphi(w_1) = (-6,3)$$

também são linearmente dependentes.

Considere os vectores $u_2 = (1,-1,0)$, $v_2 = (0,-3,2)$ e $w_2 = (-1,0,3)$. Prove que são linearmente independentes. No entanto,

$$\varphi(u_2) = (0,0), \quad \varphi(v_2) = (-3,2) \quad e \quad \varphi(w_2) = (-1,3)$$

são linearmente dependentes (justifique!).

2. *Seja ϕ uma aplicação linear de $P_1[x]$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $\phi(ax+b) = (a,b)$, para todo $ax+b \in P_1[x]$. Prove que ϕ é um monomorfismo.*

   Considere os polinómios $p_1(x) = x-1$, $q_1(x) = -3$ e $r_1(x) = 3x+3$. Note-se que são linearmente dependentes pois $\dim(P_1[x]) = 2$. Facilmente se verifica que

   $$\phi(p_1(x)) = (1,-1), \quad \phi(q_1(x)) = (0,-3) \quad e \quad \phi(r_1(x)) = (3,3)$$

   também são linearmente dependentes.

   Considere agora os polinómios $p_2(x) = 4x-3$ e $q_2(x) = x+5$. Prove que são linearmente independentes e verifique que também os vectores

   $$\phi(p_2(x)) = (4,-3) \quad e \quad \phi(q_2(x)) = (1,5)$$

   são linearmente independentes.

O próximo resultado mostra que uma aplicação linear cujo domínio é um espaço vectorial de dimensão finita fica perfeitamente definida quando se conhecem as imagens dos vectores de uma qualquer base desse mesmo espaço vectorial.

Proposição 5.13. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que E tem dimensão finita. Seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e sejam $u_1, \ldots, u_n \in E'$. Então existem uma e uma só aplicação linear φ de E para E' tal que $\varphi(e_i) = u_i$, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Mais, se $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, então $\varphi(v) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.

Demonstração. Seja $v \in E$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de E então v escreve-se como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$, ou seja, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Defina-se a aplicação $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que $\varphi(v) = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Seja $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$e_i = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} e_1 + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} e_{i-1} + \mathbf{1}_{\mathbb{K}} e_i + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} e_{i+1} + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} e_n.$$

Por definição de φ, vem que

$$\varphi(e_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_1 + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_{i-1} + \mathbf{1}_{\mathbb{K}} u_i + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_{i+1} + \cdots + \mathbf{0}_{\mathbb{K}} u_n = u_i.$$

A demonstração de que φ é uma aplicação linear fica como exercício.

Prove-se a unicidade. Suponha-se que existe uma outra aplicação linear ψ, tal que $\psi(e_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seja $v \in E$ arbitrário. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Donde

$$\begin{aligned}
\psi(v) &= \psi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\
&= \alpha_1 \psi(e_1) + \cdots + \alpha_n \psi(e_n) && \text{pois } \psi \text{ é aplicação linear} \\
&= \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n && \text{pois } \psi(e_i) = u_i,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
&= \alpha_1 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(e_n) && \text{pois } u_i = \varphi(e_i),\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
&= \varphi(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) && \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear} \\
&= \varphi(v)
\end{aligned}$$

Como $\varphi(v) = \psi(v)$, para todo $v \in E$, pode concluir-se que $\varphi = \psi$. □

Exemplos 5.14. *1. Considere-se a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\varphi(1,1) = (1,0,-1) \quad e \quad \varphi(1,0) = (0,2,1).$$

Pretende-se determinar a expressão geral de φ.

Primeiro, note-se que $\mathcal{B} = ((1,1),(1,0))$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ (prove!). Em seguida, escreve-se um vector arbitrário de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vectores $(1,1)$ e $(1,0)$. Se

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

então

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = x - y \\ \alpha = y \end{cases}$$

Ou seja, $(x,y) = y(1,1) + (x-y)(1,0)$. Então

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \varphi\left(y(1,1) + (x-y)(1,0)\right) \\
&= y\varphi(1,1) + (x-y)\varphi(1,0) \\
&= y(1,0,-1) + (x-y)(0,2,1) \\
&= (y, 2x-2y, x-2y).
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(x,y) = (y, 2x-2y, x-2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. *A aplicação linear* $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $\psi(1,0) = (0,1)$ *e* $\psi(0,1) = (1,0)$ *é a simetria do plano em relação à recta* $y = x$*. Com efeito, atendendo a que* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$ *é a base canónica de* $\mathbb{R}^2$*, para qualquer* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, tem-se que* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$*. Logo:*

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \psi\left(x(1,0) + y(0,1)\right)\\ &= x\psi(1,0) + y\psi(0,1)\\ &= x(0,1) + y(1,0) = (y,x).\end{aligned}$$

Portanto, $\psi(x,y) = (y,x)$*, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Exercício 5.15. *Considere a aplicação linear* $\theta : P_2[x] \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\theta(1+x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \theta(x^2 - x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ \theta(1+2x) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que θ *é única e determine* $\theta(ax^2+bx+c)$*, para todo* $ax^2+bx+c \in P_2[x]$*.*

5.2 Imagem e imagem recíproca

Definição 5.16. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* F *e* F' *subespaços vectoriais de* E *e* E'*, respectivamente. Seja ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'*.*

Chama-se ***imagem de*** F ***por*** φ *ao subconjunto de* E' *definido por*

$$\varphi(F) = \{\varphi(u) : u \in F\}$$

ou seja, é o conjunto de todas as imagens dos vectores pertencentes a F*.*

Ao conjunto dos vectores cuja imagem pertence a F'*, isto é, ao subconjunto de* E *definido por:*

$$\varphi^{-1}(F') = \{v \in E : \varphi(v) \in F'\}$$

chama-se ***imagem recíproca de*** F' ***por*** φ*.*

Observação 5.17. *As definições de imagem e imagem recíproca podem ser aplicadas a quaisquer subconjuntos de* E' *e* E*, respectivamente.*

Teorema 5.18. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e seja* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'*. Então:*

(a) *se* F *é um subespaço vectorial de* E *então* $\varphi(F)$ *é um subespaço vectorial de* E'*.*

(b) *se F' é um subespaço vectorial de E' então $\varphi^{-1}(F')$ é um subespaço vectorial de E.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Suponha-se que F é subespaço vectorial de E. Então

(i) $0_{E'} \in \varphi(F)$, pois $0_{E'} = \varphi(0_E)$ e $0_E \in F$.

(ii) Sejam $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in \varphi(F)$. Então existem $u_1, v_1 \in F$ tais que
$$u = \varphi(u_1) \quad \text{e} \quad v = \varphi(v_1).$$
Logo
$$\lambda u + \beta v = \lambda\varphi(u_1) + \beta\varphi(v_1) = \varphi(\lambda u_1 + \beta v_1),$$
pois φ é aplicação linear e, portanto,
$$\lambda u + \beta v = \varphi(w), \quad \text{com } w = \lambda u_1 + \beta v_1 \in F.$$
Donde $\lambda u + \beta v \in \varphi(F)$.

A demonstração de **(b)** é análoga e fica como exercício. □

Exemplo 5.19. *Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*
$$\varphi(x, y) = (x, x + y, x - y), \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
e considere os seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente:
$$F = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \qquad e \qquad F' = \{(a, 2a, 0) : a \in \mathbb{R}\}.$$
Então,
$$\begin{aligned}\varphi(F) &= \{\varphi(0, y) : y \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(0, 0 + y, 0 - y) : y \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle(0, 1, -1)\rangle\end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(F') &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) \in F'\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, x + y, x - y) = (a, 2a, 0), \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \wedge x + y = 2a \wedge x - y = 0, \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a \wedge y = a \wedge x = y, \text{ para algum } a \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1)\rangle.\end{aligned}$$

Exercício 5.20. *Considere a aplicação linear $\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2[x]$ tal que*
$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b)x^2 + 2ax - d, \quad \text{para todo } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$
Sejam $S = \left\{\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x & x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\}$ e $G = \{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c = 0\}$ subespaços vectoriais de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $P_2[x]$, respectivamente. Determine $\varphi(S)$ e $\varphi^{-1}(G)$.

5.3 Núcleo e imagem

Definição 5.21. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação linear de E em E'.*

*Chama-se **núcleo de** φ, e representa-se por* $\operatorname{Nuc}\varphi$ *(ou* $\operatorname{Ker}\varphi$*), ao subconjunto de E definido por:*

$$\operatorname{Nuc}\varphi = \{u \in E : \varphi(u) = 0_{E'}\} = \varphi^{-1}\left(\{0_{E'}\}\right).$$

*Chama-se **imagem de** φ, e representa-se por* $\operatorname{Im}\varphi$*, ao subconjunto de E' definido por:*

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(u) : u \in E\} = \varphi(E).$$

Proposição 5.22. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação linear de E em E'. Então:*

(a) $\operatorname{Nuc}\varphi$ *é um subespaço vectorial de E;*

(b) $\operatorname{Im}\varphi$ *é um subespaço vectorial de E'.*

Demonstração. Prove-se **(a)**.

(i) Como $\varphi(0_E) = 0_{E'}$, então $0_E \in \operatorname{Nuc}\varphi$;

(ii) Sejam $u, v \in \operatorname{Nuc}\varphi$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então $\varphi(u) = 0_{E'}$ e $\varphi(v) = 0_{E'}$. Logo, como φ é aplicação linear,

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) = \alpha 0_{E'} + \beta 0_{E'} = 0_{E'}.$$

Donde $\alpha u + \beta v \in \operatorname{Nuc}\varphi$.

Também se podia provar **(a)** atendendo a que $\varphi^{-1}(\{0_{E'}\}) = \operatorname{Nuc}\varphi$ e $\{0_{E'}\}$ é um subespaço vectorial de E', pelo Teorema 5.18.

A demonstração de **(b)** fica como exercício. □

Exemplo 5.23. *Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x + 2z, y - z)$. Então o núcleo de φ é*

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc}\varphi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = (0, 0)\}\\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2z, y - z) = (0, 0)\}.\end{aligned}$$

Ora

$$(x + 2z, y - z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

Logo $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$*. A imagem de φ é*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi &= \{\varphi(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}\\ &= \{(x + 2z, y - z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(x, 0) + (0, y) + (2z, -z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x(1, 0) + y(0, 1) + z(2, -1) : x, y, z \in \mathbb{R}\}\\ &= \langle(1, 0), (0, 1), (2, -1)\rangle = \mathbb{R}^2 \qquad \textit{(prove!)}\end{aligned}$$

Exercício 5.24. *Considere a aplicação linear* $\phi : P_2[x] \longrightarrow P_3[x]$ *tal que*

$$\phi(ax^2 + bx + c) = (c + b)x^3 + ax^2, \quad \textit{para todo } ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$

Determine $\operatorname{Nuc}\phi$ *e* $\operatorname{Im}\phi$.

Proposição 5.25. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e seja* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'. *Seja ainda* $v' \in E'$. *Se existe* $v \in E$ *tal que* $\varphi(v) = v'$ *então*

$$\varphi^{-1}(\{v'\}) = v + \operatorname{Nuc}\varphi.$$

Demonstração. De facto,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\{v'\}) &= \{u \in E : \varphi(u) = v'\}\\
&= \{u \in E : \varphi(u) = \varphi(v)\}\\
&= \{u \in E : \varphi(u - v) = 0_{E'}\}\\
&= \{u \in E : u - v \in \operatorname{Nuc}\varphi\}\\
&= \{u \in E : u - v = w,\ w \in \operatorname{Nuc}\varphi\}\\
&= \{v + w : w \in \operatorname{Nuc}\varphi\}\\
&= v + \operatorname{Nuc}\varphi.
\end{aligned}$$

□

Exemplos 5.26.

1. *Seja* $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma aplicação linear definida por*

   $$\varphi(x, y, z) = (x + y, z), \quad \textit{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Seja $(0, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ *e determine-se o conjunto de vectores de* $\mathbb{R}^3$ *com a mesma imagem por* φ *que* $(0, 1, 2)$, *isto é, cuja imagem por* φ *é o vector* $\varphi(0, 1, 2) = (1, 2)$ *(ou seja, determine-se* $\varphi^{-1}(\{(1, 2)\})$*). Tem-se*

   $$\operatorname{Nuc}\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = (0, 0), \}$$

   ou seja,

   $$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

   Logo $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. *Conclui-se então que*

   $$\begin{aligned}
   \varphi^{-1}(\{(1, 2)\}) &= (0, 1, 2) + \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}\\
   &= \{(x, 1 - x, 2) : x \in \mathbb{R}\}.
   \end{aligned}$$

2. *Seja* $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_3[x]$ *tal que* $\varphi(ax^2 + bx + c) = b + (c + a)x + ax^3$, *para todo* $ax^2 + bx + c \in P_2[x]$. *Determine-se o conjunto de polinómios de* $P_2[x]$ *cuja imagem por* φ *é* $-1 + 2x^3$, *ou seja,* $\varphi^{-1}\left(\{-1 + 2x^3\}\right)$.

   Atendendo a que $\varphi(-2 - x + 2x^2) = -1 + 2x^3$ *e* $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_{P_2[x]}\}$ *(verifique!), tem-se*

   $$\varphi^{-1}\left(\left\{-1 + 2x^3\right\}\right) = \left(-2 - x + 2x^2\right) + \{0_{P_2[x]}\} = \left\{-2 - x + 2x^2\right\}.$$

Exercício 5.27. *Seja* $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_1[x]$ *uma aplicação linear definida por* $\varphi(ax^2+bx+c) = ax+b$*, para todo* $ax^2+bx+c \in P_2[x]$*. Determine* $\varphi^{-1}(\{5x-1\})$*.*

Proposição 5.28. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *tais que* E *tem dimensão finita. Seja* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *uma base ordenada de* E *e seja ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'*. Então*

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle.$$

Demonstração. Para mostrar a igualdade entre os dois conjuntos tem de se mostrar as duas inclusões:

(i) $\langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle \subseteq \operatorname{Im}\varphi$

(ii) $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$

Prove-se **(i)**. Esta inclusão é óbvia. De facto, seja $u \in \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. Então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1\varphi(e_1) + \alpha_2\varphi(e_2) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n).$$

Como $\varphi(e_i) \in \operatorname{Im}\varphi$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, (justifique!) e $\operatorname{Im}\varphi$ é subespaço vectorial de E', então $u \in \operatorname{Im}\varphi$.

Prove-se **(ii)**. Seja $v \in \operatorname{Im}\varphi$. Então existe $u \in E$ tal que $v = \varphi(u)$. Por outro lado, como $\mathcal{B}$ é base de E, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} v = \varphi(u) &= \varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1\varphi(e_1) + \alpha_2\varphi(e_2) + \cdots + \alpha_n\varphi(e_n) \end{aligned}$$

o que equivale a dizer que $v \in \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$. □

Observação 5.29. *Como* $\operatorname{Im}\varphi$ *é subespaço vectorial de* E'*, então*

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leq \dim(E')$$

e, analogamente, como $\operatorname{Nuc}\varphi$ *é subespaço vectorial de* E*, então*

$$\dim(\operatorname{Nuc}\varphi) \leq \dim E.$$

Exemplo 5.30. *Seja* $\varphi : P_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma aplicação linear definida por*

$$\varphi(ax+b) = (b+a, a, 2b), \quad \forall ax+b \in P_1[x].$$

Sabendo que $\mathcal{B} = (1+x, x)$ *é uma base de* $P_1[x]$*, determine-se* $\operatorname{Im}\varphi$*.*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi &= \langle \varphi(1+x), \varphi(x) \rangle \\ &= \langle (2,1,2), (1,1,0) \rangle \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x - 2y\}. \quad \textit{(verifique!)}\end{aligned}$$

Definição 5.31. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *tais que* E *tem dimensão finita. Seja ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'*. À dimensão de* $\operatorname{Nuc}\varphi$ *chama-se* ***nulidade de*** φ*, e representa-se por* n_φ*, e à dimensão de* $\operatorname{Im}\varphi$ *chama-se* ***característica de*** φ*, e representa-se por* c_φ*.*

Exemplo 5.32. *Seja* $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $\varphi(x,y,z) = (x+y+z, 2x-y)$*, para todo* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Determine-se a nulidade e a característica de* φ*. O núcleo de* φ *é:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Nuc}\varphi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y,z) = (0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y+z, 2x-y) = (0,0)\}.\end{aligned}$$

Ora

$$(x+y+z, 2x-y) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-3x \\ y=2x \end{array} \right.$$

Logo

$$\operatorname{Nuc}\varphi = \{(x, 2x, -3x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,2,3) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,3) \rangle.$$

Como $(1,2,3) \neq (0,0,0)$ *conclui-se que o único gerador de* $\operatorname{Nuc}\varphi$ *é linearmente independente. Assim,* $\mathcal{B} = ((1,2,3))$ *é uma base de* $\operatorname{Nuc}\varphi$ *e, portanto,* $n_\varphi = 1$*.*

A imagem de φ *é*

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\varphi &= \{\varphi(x,y,z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+y+z, 2x-y) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2) + y(1,-1) + z(1,0) : x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,2), (1,1), (1,0) \rangle = \mathbb{R}^2. \quad (justifique!)\end{aligned}$$

Logo $c_\varphi = 2$*.*

Exercício 5.33. *Considere a aplicação linear* $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *definida por* $\phi(x,y,z) = (x-z, 0, y+2z, x-y+z)$*, para todo* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*. Determine a nulidade e a característica de* ϕ*.*

O próximo resultado apresenta uma condição necessária e suficiente para a injectividade de uma aplicação linear, usando o núcleo dessa aplicação linear.

Proposição 5.34. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Seja ainda φ uma aplicação linear de E em E'. A aplicação φ é um monomorfismo se e só se* $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha-se que φ é injectiva e seja $u \in \operatorname{Nuc}\varphi$. Então

$$\begin{aligned} u \in \operatorname{Nuc}\varphi &\Rightarrow \varphi(u) = 0_{E'} && \text{por definição de } \operatorname{Nuc}\varphi \\ &\Rightarrow \varphi(u) = \varphi(0_E) && \text{pelas propriedades de aplicação linear} \\ &\Rightarrow u = 0_E && \text{pois } \varphi \text{ é injectiva.} \end{aligned}$$

Logo $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$. Prove-se que, para todo $u, v \in E$, se $\varphi(u) = \varphi(v)$ então $u = v$. Ora

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \varphi(v) &\Rightarrow \varphi(u) - \varphi(v) = 0_{E'} && \text{por } E' \text{ ser um espaço vectorial} \\ &\Rightarrow \varphi(u - v) = 0_{E'} && \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear} \\ &\Rightarrow u - v \in \operatorname{Nuc}\varphi && \text{por definição de } \operatorname{Nuc}\varphi \\ &\Rightarrow u - v = 0_E && \text{por hipótese, } \operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\} \\ &\Rightarrow u = v && \text{por } E \text{ ser um espaço vectorial.} \end{aligned}$$

Portanto φ é injectiva. □

Teorema 5.35. ***(Teorema da dimensão)*** *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que E tem dimensão finita. Seja ainda φ uma aplicação linear de E em E'. Então:*

$$\dim E = \dim(\operatorname{Nuc}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi)$$

ou, abreviadamente,

$$\dim E = n_\varphi + c_\varphi.$$

Demonstração. Se $E = \{0_E\}$ então $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$ e $\operatorname{Im}\varphi = \{0_{E'}\}$. Logo $\dim E = \dim(\operatorname{Nuc}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi)$. Suponha-se que $E \neq \{0_E\}$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma base de E. Se $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$ então, pela proposição 5.34, φ é um monomorfismo. Pela alínea **(ii)** do teorema 5.11 e como os vectores $e_1, \ldots, e_n$ são linearmente independentes, então $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$ são linearmente independentes. Pela proposição 5.28 tem-se

$$\operatorname{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle.$$

Logo $\mathcal{B}' = (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n))$ é uma base ordenada de $\operatorname{Im}\varphi$. Donde, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = n$. Como $\dim(\operatorname{Nuc}\varphi) = 0$ e $\dim E = n$, tem-se

$$\dim E = n = 0 + n = \dim(\operatorname{Nuc}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Suponha-se agora que $\operatorname{Nuc}\varphi \neq \{0_E\}$. Seja $\mathcal{B}_{\operatorname{Nuc}\varphi} = (u_1, \ldots, u_p)$ uma base de $\operatorname{Nuc}\varphi$, onde $p \leq \dim E$. Pelo corolário 4.70 é possível juntar vectores de E à base de $\operatorname{Nuc}\varphi$ por forma a obter uma base de E. Seja

$$\mathcal{B}_\infty = (u_1, \ldots, u_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_{p+k})$$

uma base de E, onde $k = n - p$. Agora, prova-se que $(\varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}))$ é uma base de $\operatorname{Im}\varphi$. Pela proposição 5.28 tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\varphi &= \langle \varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_p), \varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}) \rangle \\
&= \langle 0_{E'}, \ldots, 0_{E'}, \varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}) \rangle \\
&= \langle \varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}) \rangle
\end{aligned}$$

Resta provar que os vectores $(\varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}))$ são linearmente independentes. Sejam $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+k} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_{p+1}\varphi(e'_{p+1}) + \cdots + \alpha_{p+k}\varphi(e'_{p+k}) = 0_{E'}.$$

Então

$$\varphi(\alpha_{p+1}e'_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+k}e'_{p+k}) = 0_{E'},$$

ou seja, $\alpha_{p+1}e'_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+k}e'_{p+k} \in \operatorname{Nuc}\varphi$. Logo, existem $\beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_{p+1}e'_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+k}e'_{p+k} = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p,$$

donde,

$$\alpha_{p+1}e'_{p+1} + \cdots + \alpha_{p+k}e'_{p+k} - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_p u_p = 0_E$$

é uma combinação linear nula dos vectores $u_1, \ldots, u_p, e'_{p+1}, \ldots, e'_{p+k}$. Mas como estes vectores formam uma base de E, são linearmente independentes, logo a única combinação linear nula destes vectores é a trivial. Consequentemente, $\alpha_{p+1} = \cdots = \alpha_k = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$ e os vectores $\varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}$ são linearmente independentes. Provou-se assim que $(\varphi(e'_{p+1}), \ldots, \varphi(e'_{p+k}))$ é uma base de $\operatorname{Im}\varphi$ e $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = k$. Portanto, $\dim E = p + k = n_\varphi + c_\varphi$. ☐

Exemplo 5.36. *Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(x, y, z) = (x + 2y, y - z, y)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Então*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nuc}\varphi &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 2y, y - z, y) = (0, 0, 0)\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 \ \wedge \ y - z = 0 \ \wedge \ y = 0\} \\
&= \{(0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Logo φ é um monomorfismo. Além disso, pelo Teorema das dimensões, $c_\varphi = 3$. Logo, como $\operatorname{Im}\varphi$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$, ou seja, φ é um epimorfismo. Donde φ é um isomorfismo.

Exercício 5.37. *Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definida por*

$$\varphi(1,0,0)=(1,0), \quad \varphi(0,1,0)=(1,1) \quad e \quad \varphi(0,0,1)=(0,1).$$

Classifique φ, quanto à injectividade e à sobrejectividade.

Observação 5.38. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que E tem dimensão finita. Seja ainda φ uma aplicação linear de E em E'. Então:*

(i) *φ é um monomorfismo se e só se $n_\varphi = 0$; de facto, pela proposição anterior,*

$$\varphi \text{ é monomorfismo } \Leftrightarrow \operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Nuc}\varphi)=0 \Leftrightarrow n_\varphi = 0.$$

(ii) *φ é um epimorfismo se e só se $\operatorname{Im}\varphi = E'$ se e só se $c_\varphi = \dim(E')$; de facto,*

$$\begin{aligned}\varphi \text{ é epimorfismo } &\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = E' \\ &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(E') \Leftrightarrow c_\varphi = \dim(E').\end{aligned}$$

(iii) *φ é um isomorfismo se e só se $n_\varphi = 0$ e $c_\varphi = \dim(E') = \dim E$.*

Proposição 5.39. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ com a mesma dimensão (finita) e seja φ uma aplicação linear de E em E'. Então φ é um monomorfismo se e só se φ é um epimorfismo.*

Demonstração. Seja $p = \dim E = \dim(E')$. Pelo Teorema das dimensões,

$$p = n_\varphi + c_\varphi.$$

Logo, φ é um monomorfismo se só se $n_\varphi = 0$ se só se $p = c_\varphi$ se só se $\dim(E') = c_\varphi$ se só se φ é um epimorfismo. □

Resulta desta proposição que para que uma aplicação linear entre espaços vectoriais com a mesma dimensão seja bijectiva basta que seja injectiva ou sobrejectiva.

Exemplo 5.40. *Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\varphi(a,b,c) = (2a, b+c, b-c)$, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Averigúe-se se φ é bijectiva.*

Como $\dim E = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim(E')$, *basta mostrar que φ é sobrejectiva pois a proposição anterior garante que se φ é sobrejectiva então também é injectiva. Ora*

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{R}^3) &= \{\varphi(a,b,c) : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(2a, b+c, b-c) : a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2a,0,0)+(0,b,b)+(0,c,-c) : a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(2,0,0)+b(0,1,1)+c(0,1,-1) : a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\rangle = \mathbb{R}^3. \quad \textit{(justifique!)}\end{aligned}$$

Conclui-se assim que φ é sobrejectiva, logo é injectiva e, consequentemente, é bijectiva.

Teorema 5.41. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Seja φ uma aplicação linear de E em E' e seja F um subespaço vectorial de E. Então:*

(1) *se $F = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, então $\varphi(F) = \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle$;*

(2) *Se F é finitamente gerado, então $\varphi(F)$ também o é e*

$$\dim(\varphi(F)) \leq \dim F.$$

Demonstração. Prove-se **(1)**. Para mostrar a igualdade entre os dois conjuntos tem de se mostrar as duas inclusões:

(i) $\varphi(F) \subseteq \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle$

(ii) $\langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle \subseteq \varphi(F)$

Prove-se **(i)**. Seja $v \in \varphi(F)$. Então existe $u \in F$ tal que $v = \varphi(u)$. Por outro lado, como $F = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} v = \varphi(u) &= \varphi(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \\ &= \alpha_1 \varphi(v_1) + \cdots + \alpha_k \varphi(v_k) \end{aligned}$$

o que equivale a dizer que $v \in \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle$.

Prove-se **(ii)**. Seja $v \in \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle$. Então existem $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \beta_1 \varphi(v_1) + \cdots + \beta_k \varphi(v_k).$$

Como $\varphi(v_i) \in \varphi(F)$, pois $v_i \in F$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, e $\varphi(F)$ é subespaço vectorial de E', então $v \in \varphi(F)$.

Prove-se **(2)**. Se F é finitamente gerado então $F = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, para alguns vectores $v_1, \ldots, v_k \in F$, e, pela alínea anterior, $\varphi(F) = \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle$, ou seja, $\varphi(F)$ é finitamente gerado.

Agora, se $F = \{0_E\}$ então $\varphi(F) = \{\varphi(0_E)\} = \{0_{E'}$. Logo $\dim(\varphi(F)) \leq \dim F$. Se $F \neq \{0_E\}$ seja $(v_1, \ldots, v_k)$ uma base de E, como

$$\varphi(F) = \langle \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \rangle,$$

então $\dim(\varphi(F)) \leq k = \dim E$. □

Observação 5.42. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Se φ é uma aplicação linear injectiva e F é um subespaço vectorial de E, finitamente gerado, então $\dim(\varphi(F)) = \dim(F)$.*

5.4 Isomorfismos

Definição 5.43. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Os espaços E e E' dizem-se* ***isomorfos***, *e representa-se por $E \simeq E'$, se existe um isomorfismo φ de E em E'.*

Proposição 5.44. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Se φ é um isomorfismo de E em E', então φ^{-1} é um isomorfismo de E' em E.*

Demonstração. Como φ é bijectiva, também φ^{-1} é bijectiva (justifique!). Resta mostrar que φ^{-1} é também aplicação linear.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $u, v \in E'$. Como φ é sobrejectiva, existem $a, b \in E$ tais que $\varphi(a) = u$ e $\varphi(b) = v$. Donde

$$\varphi^{-1}(\alpha u + \beta v) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(\alpha u + \beta v) &= \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a + \beta b)) && \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear}\\
&= \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)(\alpha a + \beta b) && \text{por definição de aplicação composta}\\
&= \alpha a + \beta b && \text{pois } \varphi^{-1} \circ \varphi \text{ é a função identidade em } E\\
&= \alpha\varphi^{-1}(u) + \beta\varphi^{-1}(v) && \text{pois } a = \varphi^{-1}(u) e b = \varphi^{-1}(v).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.45. *Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Então,*

(a) *$E \simeq E$;*

(b) *se $E \simeq E'$, então $E' \simeq E$;*

(c) *se $E \simeq E'$ e $E' \simeq E''$, então $E \simeq E''$.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Basta considerar a aplicação $id_E : E \longrightarrow E$ definida por $id_E(u) = u$, para todo $u \in E$. Prove que id_E é uma aplicação linear bijectiva.

Prove-se **(b)**. Se $E \simeq E'$, então existe uma aplicação linear ϕ de E em E' bijectiva. Assim, pela proposição anterior, ϕ^{-1} também é uma aplicação linear bijectiva e, portanto, $E' \simeq E$.

Prove-se **(c)**. Se $E \simeq E'$ existe um isomorfismo ϕ de E em E' e se $E' \simeq E''$ existe um isomorfismo ψ de E' em E''. Logo a aplicação $\psi \circ \phi : E \longrightarrow E''$ é uma aplicação linear bijectiva, pois a composta de duas aplicações bijectivas é bijectiva e a composta de duas aplicações lineares é linear (veja-se o Exercício 5.8). □

Teorema 5.46. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que E tem dimensão finita. Então E e E' são isomorfos se e só se* $\dim E = \dim(E')$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como E e E' são isomorfos, existe um isomorfismo φ de E em E'. Como φ é injectiva, pela proposição 5.34 vem que $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$ e $\operatorname{Im}\varphi = E'$, ou seja $\dim(\operatorname{Nuc}\varphi) = 0$ e $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim E'$. Logo, pelo teorema da dimensão, tem-se

$$\dim E = \dim(\operatorname{Nuc}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim E'.$$

($\Leftarrow$) Sejam $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ e $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ bases de ordenadas de E e E', respectivamente. Considere a aplicação linear φ de E em E' definida por $\varphi(e_i) = e'_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Como φ é bijectiva (prove!) então E e E' são isomorfos. $\square$

Corolário 5.47. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim E = n$. Então E é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Exemplo 5.48. *Os espaços vectoriais reais $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^6$ são isomorfos, pois têm dimensão finita e*

$$\dim(M_{2\times 3}(\mathbb{R})) = 6 = \dim \mathbb{R}^6.$$

Por exemplo, a aplicação $\phi : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$ definida por

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d, e, f), \quad \textit{para todo} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}),$$

é um isomorfismo de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^6$. De facto, ϕ é injectiva e é uma aplicação linear. Prove-se que ϕ é injectiva. Ora

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nuc}\phi &= \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \phi\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right) = (0,0,0,0,0,0)\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : (a,b,c,d,e,f) = (0,0,0,0,0,0)\right\} \\
&= \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Logo ϕ é injectiva. Como $\dim(M_{2\times 3}(\mathbb{R})) = \dim \mathbb{R}^6$, ϕ é sobrejectiva e, consequentemente, é bijectiva. A prova de que ϕ é uma aplicação linear fica como exercício.

Exercício 5.49. *Mostre que $P_n[x]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ são isomorfos.*

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Na secção que se segue todos os espaços vectoriais têm dimensão finita.

Definição 5.50. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e p, respectivamente. Sejam ainda $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de E, $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \ldots, e'_p)$ uma base ordenada de E' e φ uma aplicação linear de E em E'. Então a* ***matriz de φ em relação às bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$****, denotada por $M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, é a matriz do tipo $p \times n$ dada por:*

$$M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \cdots + a_{p1}e'_p \\ \varphi(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \cdots + a_{p2}e'_p \\ \vdots \\ \varphi(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \cdots + a_{pn}e'_p \end{cases}$$

ou seja, $\varphi(e_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{pi})_{\mathcal{B}_2}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por outras palavras, a coluna i da matriz $M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ é constituída pelas coordenadas de $\varphi(e_i)$ na base $\mathcal{B}_2$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Exemplos 5.51. *1. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $\varphi(x, y) = (2x, x - y, 3y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sejam*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1, 0), (0, 1)) \quad e \quad \mathcal{B} = ((1, 1), (-1, 2))$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \quad e \quad \mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule-se $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})$. Tem-se

$$\varphi(1, 0) = (2, 1, 0) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (2, 1, 0)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(0, 1) &= (0, -1, 3) = 0(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) \\ &= (0, -1, 3)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}, \end{aligned}$$

donde

$$M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule-se $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Tem-se

$$\varphi(1,1)=(2,0,3)=3(1,1,1)+(-3)(1,1,0)+2(1,0,0)=(3,-3,2)_{\mathcal{B}'}$$

$$\begin{aligned}\varphi(-1,2)&=(-2,-3,6)=6(1,1,1)+(-9)(1,1,0)+1(1,0,0)\\&=(6,-9,1)_{\mathcal{B}'},\end{aligned}$$

donde

$$M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}3&6\\-3&-9\\2&1\end{bmatrix}.$$

2. *Seja $\phi:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que $\phi(a,b,c)=(2a+b,-c)$, para todo $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, e sejam*

$$\mathcal{B}=((1,1,2),(0,2,6),(0,0,-4)) \quad e \quad \mathcal{B}'=((1,0),(0,2))$$

bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine-se $M(\phi;\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Tem-se

$$\phi(1,1,2)=(3,-2)=3(1,0)+(-1)(0,2)=(3,-1)_{\mathcal{B}'}$$

$$\phi(0,2,6)=(2,-6)=2(1,0)+(-3)(0,2)=(2,-3)'_{\mathcal{B}}$$

$$\phi(0,0,-4)=(0,4)=0(1,0)+2(0,2)=(0,2)_{\mathcal{B}'},$$

pelo que

$$M(\phi;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&-3&2\end{bmatrix}.$$

Exercício Resolvido 5.52. *Seja $\psi:P_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que*

$$\psi(ax^2+bx+c)=(2b,b-3a,a),\ \text{para todo } ax^2+bx+c\in P_2[x].$$

Sejam ainda $\mathcal{B}_{P_2[x]}=(1,x,x^2)$ a base canónica de $P_2[x]$ e

$$\mathcal{B}=((1,0,1),(1,1,0),(0,0,1))$$

uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine $M(\psi;\mathcal{B}_{P_2[x]},\mathcal{B})$.

Resolução: *Tem-se*

$$\psi(1)=(0,0,0)=0(1,0,1)+0(1,1,0)+0(0,0,1)=(0,0,0)_{\mathcal{B}}$$

$$\psi(x)=(2,1,0)=1(1,0,1)+1(1,1,0)+(-1)(0,0,1)=(1,1,-1)_{\mathcal{B}} \qquad .$$

$$\psi(x^2)=(0,-3,1)=3(1,0,1)+(-3)(1,1,0)+(-2)(0,0,1)=(3,-3,-2)_{\mathcal{B}}.$$

Logo,

$$M(\psi;\mathcal{B}_{P_2[x]},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&1&-3\\0&-1&-2\end{bmatrix}.$$

Exercício 5.53. *Sejam* $\theta : P_2[x] \longrightarrow P_1[x]$ *uma aplicação linear tal que*

$$\theta(ax^2 + bx + c) = (a - b)x + 2c, \qquad \textit{para todo } ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$

Sejam ainda $\mathcal{B} = (3, 2 + x, x^2 - 1)$ *e* $\mathcal{B}' = (x - 2, x)$ *bases de* $P_2[x]$ *e* $P_1[x]$*, respectivamente. Determine* $M(\theta; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$*.*

Uma aplicação linear também poderá ficar definida a partir de uma sua matriz em relação a bases previamente fixadas no espaço vectorial domínio e no espaço vectorial chegada.

Teorema 5.54. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e sejam* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *bases ordenadas de* E *e* E'*, respectivamente. Sejam ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E' *tal que* $A = M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ *e* $u \in E$*. Se* C *é a matriz coluna formada pelas coordenadas do vector* $u \in E$ *relativamente à base* $\mathcal{B}_1$ *então* AC *é a matriz coluna formada pelas coordenadas de* $\varphi(u) \in E'$ *em relação à base* $\mathcal{B}_2$*.*

Demonstração. Suponha-se que $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ e $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_p)$ e seja $u \in E$. Então existem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Seja $C = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}^T$, isto é, C é a matriz coluna formada pelas coordenadas do vector $u \in E$ relativamente à base $\mathcal{B}_1$ e sejam $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p \in \mathbb{K}$ tais que $AC = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p \end{bmatrix}^T$. Como φ é uma aplicação linear e atendendo a que $\varphi(e_i) = \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_p \end{bmatrix} A_i$, onde A_i representa a coluna i da matriz A, para $i = 1, \dots, n$, tem-se

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \alpha_1 \varphi(e_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(e_n) \\
&= \begin{bmatrix} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \cdots & \varphi(e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e'_1 & e'_2 & \cdots & e'_p \end{bmatrix} AC \\
&= \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \cdots + \beta_p e'_p \\
&= (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)_{\mathcal{B}_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, AC é a matriz coluna formada pelas coordenadas de $\varphi(u) \in E'$ em relação à base $\mathcal{B}_2$. □

Exemplo 5.55. *Considere-se* $\mathcal{B} = ((1, 1, 2), (0, 2, 6), (0, 0, -4))$ *uma base ordenada de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{B}' = ((1, 0), (0, 2))$ *uma base ordenada de* $\mathbb{R}^2$*. Seja* $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *uma aplicação linear tal que*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine-se $\varphi(1,-3,-6)$.

É necessário primeiro determinar as coordenadas do vector $u=(1,-3,-6)$ *na base* $\mathcal{B}$. *Ora*

$$(1,-3,-6)=\alpha_1(1,1,2)+\alpha_2(0,2,6)+\alpha_3(0,0,-4)$$

é equivalente a

$$\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_1+2\alpha_2=-3\\ 2\alpha_1+6\alpha_2-4\alpha_3=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=-2\\ \alpha_3=-1\end{cases}$$

Pode então escrever-se:

$$(1,-3,-6)=1(1,1,2)+(-2)(0,2,6)+(-1)(0,0,-4)=(1,-2,-1)_{\mathcal{B}}.$$

De acordo com o teorema anterior, as coordenadas de $\varphi(u)$ *na base* $\mathcal{B}'$ *são* $(-1,3)$ *pois*

$$A\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&0\\-1&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}.$$

Logo $\varphi(u)=(-1,3)_{\mathcal{B}'}$ *e, portanto,*

$$\varphi(1,-3,-6)=-1(1,0)+3(0,2)=(-1,6).$$

Exercício Resolvido 5.56. *Seja* $\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *a aplicação linear cuja matriz em relação às bases ordenadas*

$$\mathcal{B}_1=((1,1),(-1,2))\quad e\quad \mathcal{B}_2=((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$$

de $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$, *respectivamente, é:*

$$A=\begin{bmatrix}3&6\\-3&-9\\2&1\end{bmatrix}.$$

Calcule $\phi(1,0)$ *e* $\phi(x,y)$, *para todo* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, *recorrendo à matriz* A.

<u>Resolução:</u> *Ora*

$$(1,0)=\alpha(1,1)+\beta(-1,2)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=1\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{2}{3}\\ \beta=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Donde $(1,0)=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)_{\mathcal{B}_1}$. *Então*

$$A\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\-3&-9\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\phi(1,0) = (0,1,1)_{\mathcal{B}_2} = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) + 1(1,0,0) = (2,1,0).$$

Analogamente, verifique que

$$(x,y) = \frac{y+2x}{3}(1,1) + \frac{y-x}{3}(-1,2).$$

Donde

$$A \begin{bmatrix} \frac{y+2x}{3} \\ \frac{y-x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y+2x}{3} \\ \frac{y-x}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ x-4y \\ x+y \end{bmatrix}$$

são as coordenadas de $\phi(x,y)$ na base $\mathcal{B}_2$. Logo

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= (3y, x-4y, x+y)_{\mathcal{B}_2} \\ &= 3y(1,1,1) + (x-4y)(1,1,0) + (x+y)(1,0,0) \\ &= (2x, x-y, 3y), \qquad \textit{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Matriz da adição, da multiplicação por um escalar e da composta de aplicações lineares

Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam φ e ϕ aplicações lineares de E em E'. Como já se viu $\varphi + \phi$ é uma aplicação linear de E em E' e, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{K}$, o mesmo sucede a $\lambda\varphi$. Então:

Teorema 5.57. *Seja E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e sejam φ e ϕ aplicações lineares de E em E'. Sejam ainda $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e E', respectivamente, e seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Se*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \quad e \quad C = M(\phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

então,

$$M(\varphi + \phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A + C$$

e

$$M(\lambda\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \lambda A.$$

Demonstração. Prove! □

Pode também definir-se a matriz da composta de duas aplicações lineares tendo por base as matrizes de cada uma das aplicações lineares.

Teorema 5.58. *Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ bases ordenadas de E, E' e E'', respectivamente. Seja φ uma aplicação linear de E em E' cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ é*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Seja ϕ uma aplicação linear de E' em E'' cuja matriz em relação às bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ é

$$C = M(\phi; \mathcal{B}', \mathcal{B}'').$$

Então

$$M(\phi \circ \varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = M(\phi; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = CA.$$

Exemplo 5.59. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que*

$$\varphi(x, y, z) = (x + y + z, y - 2z), \qquad \textit{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Determine-se a matriz de φ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Tem-se

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) = (1, 0)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}$$

$$\varphi(0, 1, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1) = (1, 1)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}$$

$$\varphi(0, 0, 1) = (1, -2) = 1(1, 0) + (-2)(0, 1) = (1, -2)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}.$$

Assim,

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x, y) = (x, x + y, x - y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Determine-se a matriz de ϕ em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\phi(1, 0) = (1, 1, 1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}$$

$$\phi(0, 1) = (0, 1, -1) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1) = (0, 1, -1)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}.$$

Logo

$$C = M(\phi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, determine-se a matriz de $\phi \circ \varphi$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, sem definir a aplicação composta. Sabe-se que

$$M(\phi \circ \varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = M(\phi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = CA.$$

Assim

$$M(\phi \circ \varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5.5.1 Isomorfismo entre $\mathcal{L}(E,E')$ e $M_{p\times n}(\mathbb{K})$

Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim E = n$ e $\dim E' = p$. Recorde-se que $\mathcal{L}(E,E')$ é o conjunto das aplicações lineares de E em E' e $M_{p\times n}(\mathbb{K})$ é o conjunto das matrizes $p\times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Também já se viu que o conjunto $\mathcal{L}(E,E')$ munido com as operações usuais de adição de aplicações e multiplicação de uma aplicação por um escalar é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e que o conjunto $M_{p\times n}(\mathbb{K})$ munido com as operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Prova-se que:

Teorema 5.60. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ tais que $\dim E = n$ e $\dim E' = p$. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de E e E', respectivamente. A aplicação $\theta : \mathcal{L}(E,E') \longrightarrow M_{p\times n}(\mathbb{K})$ tal que $\theta(\varphi) = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')$, para todo $\varphi \in \mathcal{L}(E,E')$, é um isomorfismo.*

Observação 5.61. *É simples verificar que $\dim M_{p\times n}(\mathbb{K}) = pn$ pois as matrizes*

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},\ M_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, M_{p,n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, na forma geral, as matrizes

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} m_{ks} \end{bmatrix} \in M_{p\times n}(\mathbb{R}),$$

onde $m_{ij} = 1$ e $m_{ks} = 0$, para $k \neq i$ e $s \neq j$, constituem uma base de $M_{p\times n}(\mathbb{K})$. Logo

$$\dim\left(\mathcal{L}(E,E')\right) = pn,$$

pois, pelo teorema anterior, os espaços $\mathcal{L}(E,E')$ e $M_{p\times n}(\mathbb{K})$ são isomorfos.

5.5.2 Matrizes invertíveis e isomorfismos

Teorema 5.62. *Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ com a mesma dimensão n e sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de E e E', respectivamente. Seja φ uma aplicação linear de E em E' tal que $A = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Então A é uma matriz invertível se e só se φ é um isomorfismo. Mais, $A^{-1} = M(\varphi^{-1};\mathcal{B}',\mathcal{B})$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha-se que A é invertível. Pretende-se provar que φ é bijectiva. Pela Proposição 5.39, basta provar que φ é injectiva e, pela Proposição 5.34, basta mostrar que $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$. Seja $v \in \operatorname{Nuc}\varphi$ e seja X a matriz coluna formada pelas coordenadas de v na base $\mathcal{B}$. Então

$$v \in \operatorname{Nuc}\varphi \Leftrightarrow \varphi(v) = 0_{E'} \Leftrightarrow AX = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

pela Proposição 5.54. Note-se que $0_{E'} = (0, 0, \ldots, 0)_{\mathcal{B}'}$. Como A é invertível, existe A^{-1} e, multiplicando à esquerda a igualdade anterior por A^{-1} em ambos os membros, obtém-se

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T,$$

isto é, $v = (0, 0, \ldots, 0)_{\mathcal{B}}$. Logo $v = 0_E$, donde $\operatorname{Nuc}\varphi = \{0_E\}$. Provou-se que φ é injectiva. Como E e E' têm a mesma dimensão então φ é sobrejectiva. Portanto, φ é um isomorfismo.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se que φ é um isomorfismo. Como φ é bijectiva então a aplicação inversa φ^{-1} está bem definida e é também um isomorfismo. Seja $C = M\left(\varphi^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}\right)$. Então,

$$\begin{aligned} AC &= M\left(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) M\left(\varphi^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}\right) \\ &= M\left(\varphi \circ \varphi^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'\right) \\ &= M\left(id_{E'}; \mathcal{B}', \mathcal{B}'\right) \\ &= I_n. \end{aligned}$$

Portanto, A é invertível e C é a matriz inversa de A. □

5.6 Matriz de mudança de base

Definição 5.63. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de E. À matriz*

$$P = M\left(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}'\right)$$

*chama-se **matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$**, e representa-se por $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

Recorde-se que

$$\begin{array}{rccl} id_E: & E & \longrightarrow & E \\ & u & \longmapsto & id_E(u) = u \end{array}$$

Dado um vector $v \in E$, a matriz de mudança de base atrás definida, permite obter as coordenadas de v na base $\mathcal{B}'$ a partir das coordenadas de v na base $\mathcal{B}$. De facto, se X for a matriz coluna formada pelas coordenadas de v na base $\mathcal{B}$ então PX será a matriz coluna formada pelas coordenadas de v na base $\mathcal{B}'$.

Exercício 5.64. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere-se as seguintes bases:*

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 1) \quad e \quad \mathcal{B}' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)).$$

Determine as coordenadas de $u = (1, 2, -3)$ na base $\mathcal{B}'$ e de $v = (-2, 0, 4)$ na base $\mathcal{B}$, usando as matrizes de mudança de base.

Teorema 5.65. *Uma matriz de mudança de base é invertível.*

Demonstração. Uma matriz de mudança de base é uma matriz da aplicação linear id_E, onde E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Como id_E é um isomorfismo, então qualquer matriz de mudança de base é invertível. □

Teorema 5.66. *Toda a matriz invertível pode ser considerada uma matriz de mudança de base.*

Atendendo ao Teorema 5.62, é fácil provar

Teorema 5.67. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita tal que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são duas bases ordenadas de E. Então*

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = (M(\mathcal{B}',\mathcal{B}))^{-1}.$$

Exemplo 5.68. *No espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, considere-se as seguintes bases:*

$$\mathcal{B} = ((1,1),(2,1)) \qquad e \qquad \mathcal{B}' = ((1,0),(1,-1)).$$

(a) Suponha que as coordenadas de $v \in \mathbb{R}^2$ na base $\mathcal{B}$ são $(2,3)$. Pretende-se calcular as coordenadas de v na base $\mathcal{B}'$. Primeiro vai-se determinar a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$. Ora

$$id_{\mathbb{R}^2}(1,1) = (1,1) = 2(1,0) + (-1)(1,-1) = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$$

$$id_{\mathbb{R}^2}(2,1) = (2,1) = 3(1,0) + (-1)(1,-1) = (3,-1)_{\mathcal{B}'}.$$

Portanto, $P = M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix},$$

então $v = (13,-5)_{\mathcal{B}'}$.

<u>Verificação:</u> Se $v = (2,3)_{\mathcal{B}}$, então $v = 2(1,1) + 3(2,1) = (8,5)$. Por outro lado,

$$(13,-5)_{\mathcal{B}'} = 13(1,0) + (-5)(1,-1) = (8,5) = v.$$

(b) Suponha-se agora que $w = (1,2)_{\mathcal{B}'}$ e determine-se as coordenadas de w na base $\mathcal{B}$. Começa-se por determinar a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$. Note-se que

$$\begin{aligned} M(\mathcal{B}',\mathcal{B}) &= M(id_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B}',\mathcal{B}) && \text{por definição de matriz de mudança de base} \\ &= \left(M\left(id_{\mathbb{R}^2}^{-1};\mathcal{B},\mathcal{B}'\right)\right)^{-1} && \text{pelo Teorema 5.62} \\ &= (M(id_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1} && \text{pois } id_{\mathbb{R}^2}^{-1} = id_{\mathbb{R}^2} \\ &= P^{-1} \end{aligned}$$

Verifique que $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. *Donde as coordenadas de* w *na base* $\mathcal{B}$ *são dadas por*

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $w = (-7, 5)_{\mathcal{B}}$.

5.7 Relação entre matrizes de uma mesma aplicação linear

Sejam E e E' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e seja φ uma aplicação linear de E em E'. Sejam ainda $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ bases ordenadas de E e $\mathcal{B}'_1$ e $\mathcal{B}'_2$ bases ordenadas de E'. Suponha-se que

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) \quad \text{e} \quad C = M(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2).$$

Considere-se o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}_1)\ E \arrow[r, "A", "\varphi"'] & E'\ (\mathcal{B}'_1) \arrow[d, "id_{E'}"', "P"] \\
(\mathcal{B}_2)\ E \arrow[u, "Q", "id_E"'] \arrow[r, "\varphi", "C"'] & E'\ (\mathcal{B}'_2)
\end{tikzcd}$$

Tem-se que $\varphi = id_{E'} \circ \varphi \circ id_E$ e, matricialmente, pelo Teorema 5.58,

$$M(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = M(id_{E'}; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)\ M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)\ M(id_E; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).$$

ou seja, $C = PAQ$.

Observação 5.69. *Note-se que* P *e* Q *são duas matrizes de mudança de base em* E *e* E'*, respectivamente.*

Exemplo 5.70. *Seja* $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear tal que, para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = (2x, x - y, 3y)$. *Sejam*

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 0), (0, 1)) \quad e \quad \mathcal{B}_2 = ((1, 1), (-1, 2))$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ *e*

$$\mathcal{B}'_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \quad e \quad \mathcal{B}'_2 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$. *Sejam ainda*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = M(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2).$$

Obtenha-se C *a partir de* A *e de matrizes de mudança de base convenientes.*

Esquematicamente, tem-se,

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}_1)\ \mathbb{R}^2 \arrow[rr, "A", "\varphi"'] & & \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}'_1) \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^3}"', "P"] \\
(\mathcal{B}_2)\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "Q", "id_{\mathbb{R}^2}"'] \arrow[rr, "\varphi", "C"'] & & \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}'_2)
\end{tikzcd}$$

onde

$$Q = M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = M(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$P = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = M(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

pois

$$(1,1) = (1,1)_{\mathcal{B}_1}$$

$$(-1,2) = (-1,2)_{\mathcal{B}_1}$$

$$(1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0) = (0,0,1)_{\mathcal{B}'_2}$$

$$(0,1,0) = 0(1,1,1) + 1(1,1,0) + (-1)(1,0,0) = (0,1,-1)_{\mathcal{B}'_2}$$

$$(0,0,1) = 1(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + 0(1,0,0) = (1,-1,0)_{\mathcal{B}'_2}.$$

Assim,

$$C = PAQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5.71. *Seja* $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *uma aplicação linear tal que*

$$M(\phi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ são as bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Determine $M(\phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, onde $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-2))$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ são bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Definição 5.72. *Sejam A e C matrizes do tipo $p \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$. Diz-se que A e C são* ***equivalentes*** *se existem matrizes invertíveis $P \in M_{p\times p}(\mathbb{K})$ e $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que*

$$C = PAQ.$$

Se A e C são matrizes quadradas de ordem n e existe uma matriz invertível $S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $C = S^{-1}AS$, então diz-se que A e C são ***semelhantes****.*

Teorema 5.73. *Sejam $A, C \in M_{p\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes A e C são equivalentes se e só se representam a mesma aplicação linear em relação a determinadas bases.*

Teorema 5.74. *Sejam $A, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes A e C são semelhantes se e só se representam o mesmo endomorfismo em relação a diferentes bases.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sejam E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n, $\mathcal{B}$ uma base de E e φ o endomorfismo de E tal que $A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Como A e C são semelhantes, existe uma matriz $S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível tal que $C = S^{-1}AS$. Pelo teorema 5.66 existe uma base $\mathcal{B}'$ de E tal que $S = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$. Então $C = M(\varphi; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se A e C representam o mesmo endomorfismo então pelo teorema anterior, $C = PAQ$. E facilmente se verifica que $P = Q^{-1}$ e, consequentemente, A e C são semelhantes. $\square$

Observação 5.75. *Se A é a matriz de um endomorfismo em relação a uma base $\mathcal{B}$ e C é a matriz do mesmo endomorfismo mas em relação a uma base $\mathcal{B}'$ então A e C são semelhantes.*

Exemplo 5.76. *Seja ψ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine-se a matriz de ψ em relação à base $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1))$, usando matrizes de mudança de base. Seja $C = M(\psi; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Então, esquematicamente,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) \arrow[r, "A", "\varphi"'] & \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}') \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\varphi", "C"'] & \mathbb{R}^3\ (\mathcal{B}') \end{tikzcd}$$

e, portanto, $C = P^{-1}AP$, *onde*

$$P = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{verifique!}$$

e

$$P^{-1} = M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \textit{verifique!}$$

Logo,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que A *e* C *são semelhantes.*

Exercício 5.77. *Seja* $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear tal que, para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$. *Sejam ainda*

$$\mathcal{B} = ((1, -1), (0, 1)) \quad e \quad \mathcal{B}' = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, -1, 1))$$

bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$, *respectivamente.*

(a) Determine a matriz de ψ *em relação às bases canónicas dos espaços considerados.*

(b) Determine a matriz de ψ *em relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$:

   (i) usando a definição;

   (ii) usando matrizes de mudança de base.

(c) Determine $\psi(2, -3)$, *usando ambas as representações matriciais de* ψ.

Teorema 5.78. *Sejam* E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *bases ordenadas de* E *e* E', *respectivamente. Seja ainda* φ *uma aplicação linear de* E *em* E' *tal que* $A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. *Então,*

$$\dim(\operatorname{Im} \varphi) = r(A).$$

Recorde-se que $r(A)$ representa a característica da matriz A.

Observação 5.79. *Resulta deste teorema que:*

(i) φ *é um epimorfismo se e só se* $r(A) = \dim(E')$;

(ii) φ *é um monomorfismo se e só se* $r(A) = \dim E$;

(iii) φ *é um isomorfismo se e só se* $r(A) = \dim E = \dim(E')$.

Exemplo 5.80. *Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *bases dos espaços vectoriais* $\mathbb{R}^4$ *e* $\mathbb{R}^3$*, respectivamente, e seja* $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear tal que*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a característica da matriz A*, averigúe-se se* φ *é sobrejectiva.*

Escalonando a matriz A *tem-se,*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3' := L_3 + L_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3' := L_3 - 2L_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = r(A) = 3$*. Como* $\operatorname{Im}\varphi$ *é um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim(\mathbb{R}^3)$*, então* $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$ *e, consequentemente,* φ *é sobrejectiva.*

Exercícios 5.81.

1. *Considere a aplicação linear* φ *de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$ *cuja matriz em relação à base canónica de* $\mathbb{R}^3$ *e à base* $\mathcal{B} = ((1,1), (-1,1))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Usando a matriz A*, determine* $\operatorname{Nuc}\varphi$ *e classifique a aplicação quanto à injectividade e sobrejectividade.*

2. *Considere a aplicação linear* ϕ *de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^4$ *definida por*

$$\phi(1,1,1) = (1,0,0,0),\ \phi(1,1,0) = (1,0,0,0) \ \text{ e } \ \phi(1,0,0) = (k,1,k,k-1),$$

   onde k *é um parâmetro real.*

   Diga para que valores de k *a aplicação* ϕ *é:*

   (a) monomorfismo;
   (b) epimorfismo.

   Sugestão: *use uma matriz de* ϕ *em relação a bases convenientemente escolhidas.*

6. Valores e vectores próprios

6.1 Valores e vectores próprios

Definição 6.1. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Seja ainda $\lambda \in \mathbb{K}$. Diz-se que λ é um* ***valor próprio de*** *φ se existe um vector $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ e*

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

Ao vector v chama-se ***vector próprio de*** *φ* ***associado ao valor próprio*** *λ.*

Definição 6.2. *Chama-se* ***espectro de*** *φ, e representa-se por $\sigma(\varphi)$, ao conjunto de todos os valores próprios de φ.*

Exemplo 6.3. *Determine-se os valores próprios e vectores próprios do endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ definido, em relação à base canónica desse espaço, pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinar um valor próprio de φ é encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual existe (x, y, z) não nulo tal que $\varphi(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$. Ora, pelo Teorema 5.54, pode passar-se para representação matricial:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) = \lambda(x,y,z) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, é necessário encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema anterior admite, pelo menos, uma solução não trivial, ou seja, tal que a característica da matriz do sistema seja inferior a 3, ou, equivalentemente, tal que a matriz do sistema não seja invertível. Assim, λ é tal que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Assim:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) + 1(1-(1-\lambda)) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -\lambda\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 2. \end{aligned}$$

Assim, o espectro de φ *é o conjunto* $\sigma(\varphi) = \{0, 2\}$.

Determinem-se os vectores próprios de φ *associados a* $\lambda = 0$*. Por definição, são todos* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ *tais que* $\varphi(x, y, z) = 0(x, y, z)$*, ou seja,* $\varphi(x, y, z) = (0, 0, 0)$*. Novamente é equivalente a resolver o sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$$

Logo, os vectores próprios de φ *associados a* $\lambda = 0$ *são da forma* $(x, x, -x)$*, com* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Note-se que se determinaram as coordenadas dos vectores próprios na base canónica de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$(x, x, -x)_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = x(1,0,0) + x(0,1,0) - x(0,0,1) = (x, x, -x).$$

Determinem-se agora os vectores próprios de φ *associados a* $\lambda = 2$*. Usando o mesmo raciocínio, basta resolver o sistema*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Passando para matriz ampliada, obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 + L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$$

Logo, $(z, -z, z)$*, com* $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, são os vectores próprios de* φ *associados a* $\lambda = 2$.

Exercício 6.4. *Considere o endomorfismo* ϕ *de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *definido por*

$$\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}, \quad \text{para todo } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Determine os seus valores próprios e os vectores próprios associados.

Atendendo ao exemplo anterior, escreva-se o teorema:

Teorema 6.5. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E. Seja φ um endomorfismo de E e $A = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então:*

(a) *$\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de φ se e só se*

$$|A - \lambda I_n| = 0.$$

(b) *$v \in E$ é vector próprio de φ associado ao valor próprio λ se e só se, sendo X_0 a matriz coluna das coordenadas de v na base $\mathcal{B}$, X_0 é uma solução não nula do sistema de equações lineares*

$$(A - \lambda I_n)X = 0.$$

Demonstração. Prove-se **(a)**. Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. Então λ é valor próprio de φ se e só se existe $v \in E$ tal que $v \neq 0_E$ e $\varphi(v) = \lambda v$, ou seja, se e só se existe $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, tal que $AX_0 = \lambda X_0$, onde X_0 é a matriz coluna das coordenadas de v na base $\mathcal{B}$, que é equivalente a

$$AX_0 - \lambda X_0 = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X_0 = 0.$$

Ou seja, se e só se o sistema homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ é possível e indeterminado, isto é, se e só se

$$|A - \lambda I_n| = 0,$$

pelos Teorema 3.43 e Teorema 3.44.

A demonstração de **(b)** fica como exercício. □

Observação 6.6. *Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $|A - \lambda I_n|$ é um polinómio em λ de grau n.*

Teorema 6.7. *Se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ são duas matrizes semelhantes então*

$$|A - \lambda I_n| = |B - \lambda I_n|.$$

Demonstração. Como A e B são matrizes semelhantes então existe uma matriz $S \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível tal que $B = S^{-1}AS$. Logo

$$\begin{aligned}
|B - \lambda I| &= \left|S^{-1}AS - \lambda S^{-1}I_nS\right| \\
&= \left|S^{-1}(A - \lambda I_n)S\right| \\
&= \left|S^{-1}\right| |(A - \lambda I_n)| \, |S| \\
&= \frac{1}{|S|} |(A - \lambda I_n)| \, |S| \\
&= |B - \lambda I|.
\end{aligned}$$

□

Pelo teorema anterior e pelo teorema 5.74 tem-se que se $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ são duas matrizes que representam o mesmo endomorfismo então os polinómios $|A-\lambda I_n|$ e $|B-\lambda I_n|$ são iguais. Temos então a definição seguinte.

Definição 6.8. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base ordenada de E. Seja φ um endomorfismo de E e $A = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B})$. Ao polinómio $|A-\lambda I_n|$ chama-se **polinómio característico de** φ, e representa-se por $p_\varphi(\lambda)$.*

*A equação $p_\varphi(\lambda) = 0$ designa-se por **equação característica de** φ.*

Viu-se, no teorema 6.5, que, sendo A uma matriz de φ em relação a uma base fixa, λ é valor próprio de φ se e só se $|A-\lambda I| = 0$, ou seja, as raízes do polinómio característico de φ são os valores próprios de φ.

Definição 6.9. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Seja ainda $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de φ. Chama-se **multiplicidade algébrica de** λ, e representa-se por $m_a(\lambda)$, à multiplicidade de λ enquanto raiz do polinómio característico de φ, $p_\varphi(\lambda)$.*

Recorde-se que λ_0 é raiz de multiplicidade k de um polinómio $p(\lambda)$ se e só se $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k q(\lambda)$, onde $q(\lambda)$ é um polinómio que não admite λ_0 como raiz.

Exemplo 6.10. *Seja ϕ o endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuja matriz, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$, é*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine-se a multiplicidade algébrica dos valores próprios de ϕ. Pelo teorema anterior, como

$$\begin{aligned} p_\phi(\lambda) = |A-\lambda I_4| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^2(-1-\lambda)(1-\lambda), \end{aligned}$$

então os valores próprios de ϕ são -1, 1 e 2, onde

$$m_a(2) = 2 \quad e \quad m_a(-1) = m_a(1) = 1.$$

Exercício Resolvido 6.11. *Seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz, em relação à base $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$, é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores próprios de φ, as respectivas multiplicidades algébricas e os vectores próprios associados.

<u>Resolução:</u> *Pelo teorema anterior, como*

$$\begin{aligned}
p_\varphi(\lambda) = |A-\lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda)-1\right)-(-1)\left(-(1-\lambda)-0\right) \\
&= (1-\lambda)^2(2-\lambda)-(1-\lambda)+(-1)(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-1-1) \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda)-2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda) \\
&= (1-\lambda)\lambda(\lambda-3),
\end{aligned}$$

então os valores próprios de φ são 0, 1 e 3 e, portanto,

$$m_a(0) = m_a(1) = m_a(3) = 1.$$

Determinem-se os vectores próprios associados a $\lambda = 0$. Tem que se resolver o sistema $(A-0I_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, onde X é a matriz coluna das coordenadas de um vector próprio genérico, em relação à base $\mathcal{B}$. Donde, como

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 + L_1]{} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

vem que as coordenadas de um vector próprio têm que satisfazer o seguinte sistema

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-y \end{cases}$$

Assim os vectores próprios associados a $\lambda = 0$ são vectores da forma:

$$v = (y,y,-y)_{\mathcal{B}} = y(1,1,1)+y(1,1,0)+(-y)(1,0,0) = (y,2y,y),$$

com $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Determinem-se agora os vectores próprios associados a $\lambda = 1$. Analogamente, como

$$\left[\begin{array}{c:c} A-1I_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr:r} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \left[\begin{array}{rrr:r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{rrr:r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

vem que

$$\begin{cases} -x+y+z=0 \\ -y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ y=0 \end{cases}$$

Donde os vectores próprios associados a $\lambda = 1$ *são vectores da forma:*

$$v = (x,0,x)_{\mathcal{B}} = x(1,1,1) + 0(1,1,0) + x(1,0,0) = (2x,x,x),$$

com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por fim, determinem-se os vectores próprios associados a $\lambda = 3$. *Como*

$$\left[\begin{array}{c|c} A-3I_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2' := L_2 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

então

$$\begin{cases} -x-y+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=2z \end{cases},$$

pelo que os vectores próprios associados a $\lambda = 3$ *são vectores da forma:*

$$v = (-z,2z,z)_{\mathcal{B}} = (-z)(1,1,1) + 2z(1,1,0) + z(1,0,0) = (2z,z,-z),$$

com $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 6.12. *Considere o endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *cuja matriz, em relação à base* $\mathcal{B} = ((1,0,1),(-1,1,0),(0,0,-1))$ *de* $\mathbb{R}^3$, *é*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores próprios, os respectivos vectores próprios associados e as respectivas multiplicidades algébricas.

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Dado um valor próprio λ de um endomorfismo de E, os vectores próprios associados são determinados a partir de soluções não nulas de um sistema homogéneo indeterminado. Uma vez que um sistema homogéneo indeterminado tem um conjunto infinito de soluções que formam um subespaço vectorial de E é claro que, se ao conjunto dos vectores próprios juntar-se o vector nulo do espaço vectorial E, se obtém um subespaço vectorial de E. De facto,

Teorema 6.13. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Seja ainda $\lambda \in \mathbb{K}$. Defina-se*

$$\mathcal{U}_\lambda = \{v \in E : \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Então:

(a) *$\mathcal{U}_\lambda$ é um subespaço vectorial de E.*

(b) *$\mathcal{U}_\lambda \neq \{0_E\}$ se e só se λ é valor próprio de φ.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Note-se que:

(i) $0_E \in \mathcal{U}_\lambda$, pois $\varphi(0_E) = \lambda 0_E$.

(ii) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e sejam $u, v \in \mathcal{U}_\lambda$. Então $\varphi(u) = \lambda u$ e $\varphi(v) = \lambda v$. Donde

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha u + \beta v) &= \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v) && \text{pois } \varphi \text{ é aplicação linear} \\ &= \alpha\lambda u + \beta\lambda v && \text{por hipótese } u \in \mathcal{U}_\lambda \text{ e } v \in \mathcal{U}_\lambda \\ &= \lambda(\alpha u + \beta v) && \text{pelos axiomas de espaço vectorial} \end{aligned}$$

Logo $\alpha u + \beta v \in \mathcal{U}_\lambda$.

Pelo Teorema 4.15, $\mathcal{U}_\lambda$ é um subespaço vectorial de E.

Prove-se **(b)**. ($\Rightarrow$) Suponha-se que $\mathcal{U}_\lambda \neq \{0_E\}$. Então existe $v \neq 0_E$ tal que $v \in \mathcal{U}_\lambda$, ou seja, $\varphi(v) = \lambda v$ e, portanto, por definição, λ é valor próprio de φ.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se que $\lambda \in \sigma(\varphi)$. Então existe $v \neq 0_E$ tal que $\varphi(v) = \lambda v$ e, portanto, $v \in \mathcal{U}_\lambda$, ou seja, $\mathcal{U}_\lambda \neq \{0_E\}$. □

Definição 6.14. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de φ, ao subconjunto de E definido por*

$$\mathcal{U}_\lambda = \{v \in E : \varphi(v) = \lambda v\}$$

chama-se ***subespaço próprio de φ associado ao valor próprio*** *λ.*

Definição 6.15. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de φ, chama-se* ***multiplicidade geométrica de*** *λ, e representa-se por $m_g(\lambda)$, à dimensão de $\mathcal{U}_\lambda$, ou seja,*

$$m_g(\lambda) = \dim(\mathcal{U}_\lambda).$$

Exemplo 6.16. *Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine-se a multiplicidade geométrica dos valores próprios de φ.

Primeiro, determinem-se os valores próprios de φ. Como

$$\begin{aligned}
p_\varphi(\lambda) = |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left((2-\lambda)(5-\lambda) - 4\right) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 6) \\
&= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 6)
\end{aligned}$$

então os valores próprios de φ são 1 e 6, com $m_a(1) = 2$ e $m_a(6) = 1$.

Determine-se o subespaço próprio associado a $\lambda = 1$.

$$\left[\begin{array}{c:c} A - 1I_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2' := L_2 - L_1 \\ L_3' := L_3 - 2L_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

vem que

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Logo

$$U_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

e, portanto, $m_g(1) = 1$ (justifique!).

Determine-se agora o subespaço próprio associado a $\lambda = 6$. Analogamente, como

$$\left[\begin{array}{c:c} A - 6I_3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' = L_3 + \frac{1}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

vem que

$$\begin{cases} -5x + y = 0 \\ -4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x \\ z = 10x \end{cases}$$

Donde

$$U_6 = \{(x, 5x, 10x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 5, 10) \rangle$$

e, portanto, $m_g(6) = 1$ (justifique!).

Exercício 6.17. *Considere o endomorfismo ψ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a multiplicidade geométrica dos valores próprios de ψ.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de um valor próprio de um endomorfismo.

Teorema 6.18. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio de φ então,*

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

Observação 6.19. *Resulta do teorema anterior que, se $m_a(\lambda) = 1$, ou seja, se λ é uma raiz simples do polinómio característico, então $m_g(\lambda) = 1$.*

6.2 Endomorfismos diagonalizáveis

O próximo resultado garante que a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes.

Teorema 6.20. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Sejam ainda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ valores próprios de φ, distintos dois a dois. Se $u_1, u_2, \ldots, u_p \in E$ são vectores próprios de φ associados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, respectivamente, então $u_1, u_2, \ldots, u_p$ são linearmente independentes.*

Demonstração. A demonstração é feita por indução em p. Para $p = 1$, u_1 é linearmente independente pois, por definição de vector próprio, $u_1 \neq 0_E$.

Suponha-se agora que, por hipótese de indução, quaisquer $p - 1$ vectores próprios associados a $p - 1$ valores próprios distintos são linearmente independentes. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_p \in E$ vectores próprios de φ associados aos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, respectivamente, onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ e $i \neq j$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = 0_E. \tag{6.1}$$

Então,

$$\begin{aligned} &\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p) = \varphi(0_E) \\ \Rightarrow &\alpha_1 \varphi(u_1) + \alpha_2 \varphi(u_2) + \cdots + \alpha_p \varphi(u_p) = 0_E \end{aligned}$$

e, como $u_1, u_2, \ldots, u_p$ são vectores próprios, tem-se:

$$\alpha_1(\lambda_1 u_1) + \alpha_2(\lambda_2 u_2) + \cdots + \alpha_p(\lambda_p u_p) = 0_E. \tag{6.2}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (6.1) por λ_1 obtém-se:

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_1 u_2 + \cdots + \alpha_p \lambda_1 u_p = 0_E. \tag{6.3}$$

Subtraindo membro a membro (6.2) a (6.3), resulta que:

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) u_2 + \cdots + \alpha_p(\lambda_p - \lambda_1) u_p = 0_E,$$

ou seja, tem-se uma combinação linear nula de $p-1$ vectores próprios associados a $p-1$ valores próprios distintos; donde, por hipótese de indução, estes vectores são linearmente independentes e, portanto,

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_p(\lambda_p - \lambda_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

Como, para todo $i \in \{2, \ldots, p\}$, $\lambda_i \neq \lambda_1$, então

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}.$$

Substituindo em (6.1) os escalares $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ por $\mathbf{0}_{\mathbb{K}}$, vem $\alpha_1 u_1 = 0_E$, ou seja, como $u_1 \neq 0_E$, $\alpha_1 = \mathbf{0}_{\mathbb{K}}$. Logo $u_1, u_2, \ldots, u_p$ são linearmente independentes. □

Corolário 6.21. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Sejam ainda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ valores próprios de φ, distintos dois a dois. Então,*

$$U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \cdots + U_{\lambda_p}$$

é uma soma directa.

Demonstração. Para se provar que a soma é directa prove-se que qualquer elemento $v \in U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \cdots + U_{\lambda_p}$ se escreve de forma única como soma de elementos dos subespaços vectoriais U_{λ_1}, U_{λ_2},...,U_{λ_p}. Seja $v \in U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \cdots + U_{\lambda_p}$. Suponha-se que

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_p, \quad \text{com } v_i \in U_{\lambda_i}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, p\}$$

e

$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_p, \quad \text{com } u_i \in U_{\lambda_i}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, p\}.$$

Assim,

$$0_E = v - v = (v_1 - u_1) + (v_2 - u_2) + \cdots + (v_p - u_p).$$

Note-se que $v_i - u_i \in U_{\lambda_i}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$, pois U_{λ_i} é um subespaço vectorial de E. Repare-se que se tem uma combinação linear nula dos vectores referidos com escalares não todos nulos, o que implicaria que esses vectores fossem linearmente dependentes. Como a valores próprios distintos correspondem vectores próprios linearmente independentes, o vector $v_i - u_i$ não pode ser vector próprio associado a λ_i; donde $v_i - u_i = 0_E$, ou seja, $v_i = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$. □

Assim, note-se que no caso em que

$$E = U_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_p}$$

então existe uma base de E constituída por vectores próprios de φ: basta considerar a união das bases das várias parcelas $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \ldots, U_{\lambda_p}$.

Suponha-se que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ é uma base de E constituída por vectores próprios de φ. Suponha-se que e_i é um vector próprio associado ao valor próprio

λ_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note-se que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ não são necessariamente distintos. Então:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= \lambda_1 e_1 = (\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ \varphi(e_2) &= \lambda_2 e_2 = (0, \lambda_2, 0, \ldots, 0, 0)_{\mathcal{B}} \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= \lambda_n e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, \lambda_n)_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

Assim,

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Deste modo apresenta-se a seguinte definição:

Definição 6.22. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Diz-se que φ é **diagonalizável** se existe uma base de E formada por vectores próprios de φ.*

Atendendo ao que foi visto anteriormente pode escrever-se o seguinte resultado:

Teorema 6.23. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja φ um endomorfismo de E. Então φ é diagonalizável se e só se existe uma base $\mathcal{B}$ de E tal que $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Veja-se o que foi escrito antes da definição 6.22.

($\Leftarrow$) Suponha-se que existe uma base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Isso significa que $\varphi(e_i) = (0, \ldots, 0, \lambda_i, 0, \ldots, 0)_{\mathcal{B}}$, onde λ_i ocupa a i-ésima posição do n-uplo, ou seja, $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ou seja, e_i é um vector próprio de φ associado ao valor próprio λ_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $\mathcal{B}$ é uma base de E formada por vectores próprios de φ. □

Observação 6.24. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja φ um endomorfismo de E. Suponha-se que φ é diagonalizável. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de E formada por n vectores próprios de φ. Seja ainda $\mathcal{B}'$ uma outra* *base de E tal que $A = M(\varphi; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$. Então, esquematicamente, tem-se:*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}')\ E \arrow[r, "A", "\varphi"'] & E\ (\mathcal{B}') \arrow[d, "id_E"', "P^{-1}"] \\
(\mathcal{B})\ E \arrow[u, "P", "id_E"'] \arrow[r, "\varphi", "D"'] & E\ (\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Logo

$$D = M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ são valores próprios de φ (não necessariamente distintos).

Note-se que $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, ou seja,

$$P = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}.$$

onde X_i é a i-ésima coluna constituída pelas coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, do i-ésimo vector da base $\mathcal{B}$, que é um vector próprio associado ao valor próprio λ_i, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Note-se que P é invertível pois é uma matriz mudança de base. A esta matriz chama-se ***matriz diagonalizante de*** *A.*

O próximo resultado fornece uma condição necessária e suficiente para um endomorfismo ser diagonalizável.

Teorema 6.25. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja φ um endomorfismo de E. Sejam ainda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ os valores próprios de φ. Então, φ é diagonalizável se e só se*

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \cdots + m_g(\lambda_p) = n.$$

Exemplo 6.26. *Averigúe-se se os seguintes endomorfismos são diagonalizáveis e, em caso afirmativo, escreva-se a matriz diagonal que o representa relativamente a uma certa base do espaço (formada por vectores próprios desse mesmo endomorfismo) e a matriz diagonalizante utilizada.*

1. *Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = (x + y, 3x - y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Note-se que $\varphi(1, 0) = (1, 3)$ e $\varphi(0, 1) = (1, -1)$. Donde,*

$$A = M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinem-se os valores próprios de φ. Ora

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_2| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 \\ &= \lambda^2 - 4 = (\lambda+2)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Assim, φ tem dois valores próprios $\lambda = -2$ e $\lambda = 2$. Sabe-se que

$$\begin{aligned} m_a(-2) = 1 &\Rightarrow m_g(-2) = 1 \\ m_a(2) = 1 &\Rightarrow m_g(2) = 1. \end{aligned}$$

Assim, como $m_g(-2) + m_g(2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, pelo Teorema 6.25, φ é diagonalizável.

Determine-se agora uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores próprios de φ.

Para $\lambda = 2$, determine-se o subespaço próprio associado. Pretende-se assim encontrar os vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(A - 2I_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontrar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema correspondente, obtém-se

$$U_2 = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1) \rangle.$$

Recorde-se que A é a matriz de φ em relação à base canónica.

Para $\lambda = -2$, calcule-se o subespaço próprio associado. Analogamente, pretende-se encontrar os vectores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(A + 2I_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontrar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$U_{-2} = \{(x, -3x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -3) \rangle.$$

Como vectores próprios de φ associados a valores próprios distintos são linearmente independentes, os vectores $(1, 1)$ e $(1, -3)$ são linearmente *independentes e, portanto, formam uma base de* $\mathbb{R}^2$ *(justifique!). Donde uma base de* $\mathbb{R}^2$ *formada por vectores próprios é*

$$\mathcal{B} = ((1,1),(1,-3)).$$

Sabe-se que $\varphi(1,1) = 2(1,1) = (2,0)_{\mathcal{B}}$ *e* $\varphi(1,-3) = -2(1,-3) = (0,-2)_{\mathcal{B}}$. *Logo*

$$D = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note-se que, esquematicamente

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\underset{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "A", "\varphi"'] & \underset{(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "P^{-1}", "id_{\mathbb{R}^2}"'] \\
\overset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P", "id_{\mathbb{R}^2}"'] \arrow[r, "\varphi", "D"'] & \overset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

Donde $D = P^{-1}AP$, *onde* $P = M(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ *e* $P^{-1} = M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B})$, *ou seja,*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. *Seja* ψ *um endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $\psi(x,y) = (x, 2x+y)$, *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   Note-se que $\psi(1,0) = (1,2)$ *e* $\psi(0,1) = (0,1)$. *Logo,*

$$A = M(\psi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine-se os valores próprios de ψ. *Ora*

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2.$$

   Pelo que ψ *tem um único valor próprio* $\lambda = 1$, *com multiplicidade algébrica igual a* 2.

   Então $m_g(1) = 1$ *ou* $m_g(1) = 2$. *Se* $m_g(1) = 2$, ψ *é diagonalizável; se* $m_g(1) = 1$, ψ *não é diagonalizável.*

   Determine-se o subespaço próprio associado a $\lambda = 1$. *Pretende-se assim encontrar os vectores* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que*

$$(A - 1I_2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontrar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$U_1 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (0, 1) \rangle$$

e, consequentemente, $m_g(1) = 1$ *e* ψ *não é diagonalizável.*

Exercício Resolvido 6.27. *Considere* ϕ *um endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido por* $\phi(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 3x - 5y + 3z, 6x - 6y + 4z)$, *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Averigúe se ϕ *é diagonalizável e, em caso afirmativo, escreva a matriz diagonal que o representa relativamente a uma certa base de* $\mathbb{R}^3$ *(formada pelos seus vectores próprios) e a matriz diagonalizante utilizada.*

Resolução: *Note-se que*

$$\phi(1, 0, 0) = (1, 3, 6), \quad \phi(0, 1, 0) = (-3, -5, -6) \quad e \quad \phi(0, 0, 1) = (3, 3, 4).$$

Logo,

$$A = M(\phi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinem-se os valores próprios de ϕ. *Ora*

$$\begin{aligned}
|A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((-5-\lambda)(4-\lambda) + 18) + (-3)(-1)^{1+2}(3(4-\lambda) - 18) + \\
&\quad + 3(-18 - 6(-5-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) - 3 \times 18 \\
&\quad - 3 \times 18 - 18(-5-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda - 108 + 90 + 18\lambda \\
&= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 9(4-\lambda) \\
&= (4-\lambda)[(1-\lambda)(-5-\lambda) + 9] \\
&= (4-\lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) \\
&= (4-\lambda)(\lambda+2)^2.
\end{aligned}$$

Assim, ϕ *tem dois valores próprios* $\lambda = -2$ *e* $\lambda = 4$, *onde* $m_a(-2) = 2$ *e* $m_a(4) = 1$. *Tem-se então que* $m_g(4) = 1$ *e* $m_g(-2) = 1$ *ou* $m_g(-2) = 2$.

Assim, ϕ *é diagonalizável se e só se* $m_g(-2) = 2$.

Determine-se então o subespaço próprio associado a $\lambda = -2$. *Pretendem-se os vectores* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tais que*

$$(A + 2I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, encontrar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_{-2} &= \{(y-z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0) + z(-1,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,0), (-1,0,1) \rangle. \end{aligned}$$

Como $(1,1,0)$ *e* $(-1,0,1)$ *são linearmente independentes,* $((1,1,0),(-1,0,1))$ *é uma base de* U_{-2} *e, portanto,* $m_g(-2) = 2$*, ou seja,* ϕ *é diagonalizável.*

Para determinar uma base de $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios é necessário ainda determinar o subespaço próprio associado a* $\lambda = 4$*. Assim, para* $\lambda = 4$*, pretende-se encontrar os vectores* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tais que*

$$(A - 4I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ou seja, encontrar a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$U_4 = \{(y, y, 2y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,2) \rangle.$$

Como vectores próprios de ϕ *associados a valores próprios distintos são linearmente independentes,*

$$\mathcal{B} = ((1,1,2),(1,1,0),(-1,0,1)).$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$*, formada por vectores próprios de* ϕ*. Assim,*

$$D = M(\phi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e $D = P^{-1}AP$*, onde*

$$P = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$P^{-1} = M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.28. *Considere ψ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B} = ((1,1,-1),(1,-1,0),(-1,0,0))$ é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Averigúe se ψ é diagonalizável e, em caso afirmativo, escreva a matriz diagonal que o representa relativamente a uma certa base do espaço (formada pelos seus vectores próprios) e a matriz diagonalizante utilizada.

O seguinte resultado é um corolário do teorema 6.25.

Corolário 6.29. *Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja φ um endomorfismo de E. Se φ admite n valores próprios distintos então φ é diagonalizável.*

De facto, como a multiplicidade algébrica de cada valor próprio é 1, a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios também é 1. Por isso, a soma das multiplicidades geométricas dos n valores próprios distintos de φ é igual a n, ou seja, existe uma base de E formada por vectores próprios de φ.

Note-se que se φ não admite n valores próprios distintos nada se pode concluir.

Observação 6.30. *Recorde-se $\mathcal{L}(E,E) \cong M_{n\times n}(\mathbb{K})$ (veja-se Teorema 5.60). Assim, dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, existe um endomorfismo φ de E e uma base $\mathcal{B}$ de E tal que $A = M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B})$. Ora isso permite que todas as definições dadas neste capítulo possam ser reescritas para uma matriz quadrada de ordem n. Assim, diz-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A se λ é valor próprio de φ. Analogamente, $v \in E$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ se v é um vector próprio de φ associado ao valor próprio λ.*

Além disso, diz-se que A é diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existem matrizes quadradas de ordem n, P e D, com P invertível e D diagonal, tais que

$$D = P^{-1}AP.$$

Recorde-se que à matriz P chama-se matriz diagonalizante de A.

Do que foi dito anteriormente diz-se que, se A é uma matriz quadrada de ordem n, A é diagonalizável se e só se tem n vectores próprios linearmente independentes. Uma matriz P diagonalizante de A, tem por colunas as coordenadas na base $\mathcal{B}$ dos vectores próprios de A linearmente independentes. Se P é uma matriz diagonalizante de A e $D = P^{-1}AP$, então os elementos diagonais de D são os valores próprios de A correspondentes às colunas de P.

Observação 6.31. *Note-se que se duas matrizes têm o mesmo polinómio característico nada se pode concluir quanto à semelhança entre elas. Por exemplo, considerem-se as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que têm o mesmo polinómio característico, $(1-\lambda)^2$ *(verifique!) e, no entanto, não são semelhantes. De facto, se* A *e* I_2 *fossem semelhantes, existia* $S \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *invertível tal que* $A = S^{-1} I_2 S = I_2$, *o que é absurdo! Logo* A *e* I_2 *não são semelhantes.*

Exercício 6.32. *Verifique se as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

Exercício Resolvido 6.33. *Considere a matriz* A *que representa um endomorfismo* φ *de* $\mathbb{R}^2$ *em relação à base* $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,2))$ *de* $\mathbb{R}^2$*:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. *Calcule os valores próprios de* φ.
2. *Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio de maior valor absoluto.*
3. *Indique, caso exista, uma matriz diagonal semelhante a* A*, justificando a existência dessa matriz.*

Resolução:

1. *Os valores próprios de* φ *encontram-se determinando as soluções da sua equação característica. Ora,*

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det(A-\lambda I) = 0$ *se e só se* $(1-\lambda)(2-\lambda)-6 = 0$, *o que é equivalente a determinar as soluções da equação* $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, *ou seja,* $\lambda = -1$ *ou* $\lambda = 4$.

Logo, os valores próprios de φ *são* -1 *e* 4.

2. *Como* $|4| > |-1|$, *ou seja,* 4 *é o valor próprio de maior valor absoluto, o subespaço próprio pedido é o subespaço próprio associado a* 4. *Por definição:*

$$U_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = 4(x,y)\}.$$

Tem-se então:

$$\varphi(x,y) = 4(x,y) \Leftrightarrow (A - 4I_2)X = 0,$$

onde X é a matriz coluna das coordenadas de (x, y) na base $\mathcal{B}$. A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{c|c} A-4I_2 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr|r} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2'=L_2+\frac{2}{3}L_1]{} \left[\begin{array}{rr|r} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_4 &= \{(x, x)_{\mathcal{B}} : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1) + x(-1,2) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 3x) : x \in \mathbb{R}\} = \langle (0,3) \rangle \end{aligned}$$

3. *Repare-se que existir uma matriz diagonal semelhante a A é o mesmo que existir uma matriz diagonal que representa o mesmo endomorfismo φ (recorde-se que matrizes que representam o mesmo endomorfismo são semelhantes). O que significa verificar que φ é diagonalizável. Pelo que já foi dito, basta verificar se a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios de φ é igual à dimensão de $\mathbb{R}^2$.*

   Ora,

$$\begin{gathered} m_a(-1) = 1 \Rightarrow m_g(-1) = 1 \\ m_a(4) = 1 \Rightarrow m_g(4) = 1. \end{gathered}$$

   Então, $2 = \dim \mathbb{R}^2 = m_g(-1) + m_g(4)$. Logo φ é diagonalizável, o que significa que existe uma base de $\mathbb{R}^2$ para a qual a matriz de φ é diagonal. E essa base é a base formada por vectores próprios de φ linearmente independentes e a matriz é a matriz diagonal formada pelos valores próprios de φ. Note-se que

$$U_{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = -(x, y)\}.$$

   Prove que

$$\begin{aligned} U_{-1} &= \left\{ \left(-\frac{3}{2}y, y \right)_{\mathcal{B}} : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{3}{2}y(1,1) + y(-1,2) : y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(-\frac{5}{2}y, \frac{1}{2}y \right) : y \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-5, 1) \rangle \end{aligned}$$

   Assim,

$$D = M(\varphi; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

   com $\mathcal{B}' = ((0,3), (-5,1))$. Note-se que

$$(0,3) = a(1,1) + b(-1,2) \Rightarrow a = 1 \ \wedge \ b = 1$$

$$(-5,1) = a(1,1) + b(-1,2) \Rightarrow a = -3 \ \wedge \ b = 2.$$

Donde

$$P = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esquematicamente,

$$\begin{tikzcd}
\underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "A", "\varphi"'] & \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"', "P^{-1}"] \\
\underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P", "id_{\mathbb{R}^2}"'] \arrow[r, "\varphi", "D"'] & \underset{(\mathcal{B}')}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

Conclui-se assim que $D = P^{-1}AP$, ou seja, P é a matriz diagonalizante de A.

Exercícios 6.34. 1. *Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ definido por*

$$\varphi(x, y, z) = (x, 2y + z, z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Verifique se existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal e, em caso afirmativo, indique essa base.

2. *Seja ϕ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que*

$$M(\phi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e k é um parâmetro real. Indique os valores de k para os quais existe um vector não nulo (a, b, c) tal que

$$\phi(a, b, c) = -(a, b, c).$$

7. Produto interno

7.1 Definição e exemplos

Nesta secção apenas se irão considerar espaços vectoriais reais, isto é, espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$.

Definição 7.1. *Seja E um espaço vectorial real. Chama-se* ***produto interno em*** *E a qualquer aplicação $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) **linearidade relativamente ao primeiro argumento:** *para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, u', v \in E$,*

$$\varphi(\alpha u + \beta u', v) = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u', v);$$

(b) **linearidade relativamente ao segundo argumento:** *para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, v, v' \in E$,*

$$\varphi(u, \alpha v + \beta v') = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, v');$$

(c) **simetria:** *para quaisquer $u, v \in E$,*

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u);$$

(d) **definida positiva:**

(i) *$\varphi(u, u) \geq 0$, para qualquer $u \in E$;*

(ii) *se $\varphi(u, u) = 0$ então $u = 0_E$.*

Resumindo, uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ é um produto interno em E se for bilinear (isto é, linear relativamente ao primeiro e segundo argumentos), simétrica e definida positiva.

Observação 7.2. *Observe-se que as propriedades* **(a)** *e* **(c)** *implicam a propriedade* **(b)**. *Portanto, quando se pretende provar que uma aplicação é um produto interno, basta mostrar as propriedades* **(a)**, **(c)** *e* **(d)**.

Exemplos 7.3. *1. A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi\left((x, y), (x', y')\right) = xx' + yy', \quad \text{para todo } (x, y), (x'y') \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. De facto,

(a) *dados* $(x, y), (x', y'), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *quaisquer, tem-se*

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha(x,y) + \beta(x',y'), (z,w)\right) &= \varphi\left((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'), (z,w)\right) \\
&\quad \textit{pela definição de adição e multipli-} \\
&\quad \textit{cação por um escalar em } \mathbb{R}^2 \\
&= (\alpha x + \beta x')z + (\alpha y + \beta y')w \\
&\quad \textit{por definição de } \varphi \\
&= \alpha(xz + yw) + \beta(x'z + y'w) \\
&\quad \textit{pelas propriedades da adição e multi-} \\
&\quad \textit{plicação por um escalar em } \mathbb{R}^2 \\
&= \alpha\varphi\left((x,y),(z,w)\right) + \beta\varphi\left((x',y'),(z,w)\right) \\
&\quad \textit{por definição de } \varphi;
\end{aligned}$$

(c) *sejam* $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ *quaisquer, então*

$$\begin{aligned}
\varphi\left((x,y),(x',y')\right) &= xx' + yy' && \textit{por definição de } \varphi \\
&= x'x + y'y && \textit{pela comutatividade} \\
& && \textit{da multiplicação em } \mathbb{R} \\
&= \varphi\left((x',y'),(x,y)\right) && \textit{por definição de } \varphi.
\end{aligned}$$

Portanto, φ *é bilinear e simétrica.*

(d) *seja* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *qualquer, então:*

(i) $\varphi\left((x,y),(x,y)\right) = x^2 + y^2 \geq 0$;

(ii) $\varphi\left((x,y),(x,y)\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Logo, φ *também é definida positiva e é portanto um produto interno.*

2. *A aplicação* $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\varphi\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = x_1 y_1, \quad \textit{para todo } (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

não é um produto interno em $\mathbb{R}^2$*, porque* $\varphi\left((0,1),(0,1)\right) = 0$ *e* $(0,1) \neq (0,0)$*. Portanto, não é definida positiva.*

Exercício 7.4. *Seja* E *um espaço vectorial real e sejam* φ *e* ψ *dois produtos internos em* E*. Sejam ainda* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$*. Mostre que* $\alpha\varphi + \beta\psi$ *é um produto interno em* E*.*

Seja E um espaço vectorial real e seja φ um produto interno em E. Sejam ainda $u, v \in E$. O produto interno entre u e v é o número real $\varphi(u, v)$, e representa-se por $u \bullet v$.

Também é usual escrever o produto interno entre u e v como $u \mid v$ ou ainda $\langle u, v \rangle$.

Exemplos 7.5. *1. A aplicação de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$*, definida por*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i,$$

para todos $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, é um produto interno (prove!), ao qual se chama* ***produto interno canónico em*** $\mathbb{R}^n$*.*

2. A aplicação de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

para todos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$*, é um produto interno em* $\mathbb{R}^2$ *(prove!).*

Exercício 7.6. *Mostre que a aplicação de* $P_2[x] \times P_2[x]$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) \bullet (a_2x^2 + b_2x + c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$

para todos $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in P_2[x]$*, é um produto interno em* $P_2[x]$*.*

Proposição 7.7. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Então, para qualquer* $u \in E$*, tem-se* $0_E \bullet u = 0$*.*

Demonstração. Seja $u \in E$. Então:

$$\begin{aligned} 0_E \bullet u &= (0 \times 0_E) \bullet u && \text{pelas propriedades de espaço vectorial} \\ &= 0(0_E \bullet u) && \text{pela bilineariedade do produto interno} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

7.2 Norma de um vector

Definição 7.8. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno e seja* $u \in E$*. Chama-se* ***norma de*** u*, e representa-se por* $\|u\|$*, ao número real não negativo dado por*

$$\|u\| = \sqrt{u \bullet u}.$$

Exemplo 7.9. *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *o produto interno canónico definido no exemplo anterior. Então, para* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*,*

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| &= \sqrt{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (x_1, x_2, \ldots, x_n)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

Por exemplo, considere em $\mathbb{R}^2$ *o vector* $(1, 2)$*. A norma de* $(1, 2)$ *em relação ao produto interno canónico de* $\mathbb{R}^2$ *é* $\|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Note-se que o conceito de norma depende do produto interno definido no espaço vectorial.

Exemplo 7.10. *Considere em* $\mathbb{R}^2$*, o produto interno*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

A norma de $(1, 2)$ *em relação a este produto interno é*

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{(1, 2) \bullet (1, 2)} = \sqrt{1 + 2 + 2 + 8} = \sqrt{13}.$$

Teorema 7.11. . *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Para quaisquer* $u, v \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $\|u\| = 0$ *se e só se* $u = 0_E$*;*

(b) $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$*;*

(c) **Desigualdade de Schwarz:** $|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$*;*

(d) $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$ *se e só se* u *e* v *são linearmente dependentes;*

(e) **Desigualdade triangular:** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$*;*

(f) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ *se e só se um dos vectores se obtém do outro através da multiplicação deste por um escalar não negativo.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Seja $u \in E$.
($\Rightarrow$) Suponha-se que $\|u\| = 0$; então $u \bullet u = 0$. Pelas propriedades do produto interno, $u = 0_E$.
($\Leftarrow$) Suponha-se agora que $u = 0_E$; então $u \bullet u = 0$ e, portanto, $\|u\| = 0$.

Prove-se **(b)**. Sejam $u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\| &= \sqrt{(\alpha u) \bullet (\alpha u)} && \text{por definição de norma} \\
&= \sqrt{\alpha^2 (u \bullet u)} && \text{pela bilinearidade do produto interno} \\
&= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{u \bullet u} \\
&= |\alpha| \cdot \|u\|.
\end{aligned}$$

Prove-se **(c)**. Note-se primeiro que se $u = 0_E$ ou $v = 0_E$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Suponha-se então que $u \neq 0_E$ e $v \neq 0_E$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Como o produto interno é uma aplicação definida positiva então

$$(\lambda u + v) \bullet (\lambda u + v) \geq 0,$$

ou seja, pela bilinearidade do produto interno,

$$\lambda^2 (u \bullet u) + \lambda (u \bullet v) + \lambda (v \bullet u) + v \bullet v \geq 0.$$

Como o produto interno também é simétrico, obtém-se

$$\lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda(u \bullet v) + \|v\|^2 \geq 0,$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerando

$$\lambda = -\frac{u \bullet v}{\|u\|^2},$$

obtém-se

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 - 2\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2 \geq 0$$

o que é equivalente a $(u \bullet v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Portanto,

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Prove-se **(d)**.

($\Rightarrow$) Se $u = 0_E$ então claramente que u e v são linearmente dependentes e também se tem $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$. Suponha-se então que $u \neq 0_E$ e que $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$. Então $(u \bullet v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$, donde

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} = \|v\|^2$$

e, portanto,

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} - \|v\|^2 = 0.$$

Como

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} - \|v\|^2 = -\left\|-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v\right\|^2, \quad \text{(justifique!)}$$

tem-se

$$\left\|-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v\right\| = 0.$$

Pela propriedade **(a)**, tem-se necessariamente que

$$-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v = 0_E.$$

Portanto,

$$v = \frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u,$$

isto é, v é um múltiplo de u, o que implica que u e v são linearmente dependentes.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que u e v são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, pode supor-se que $v = \alpha u$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$|u \bullet v| = |u \bullet (\alpha u)| = |\alpha| \cdot \|u\|^2.$$

Por outro lado,
$$\|u\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|^2.$$
Logo, $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$.

Prove-se **(e)**. Sejam $u, v \in E$. Vai-se provar que
$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 .$$
Usando a definição de norma e a desigualdade de Schwarz, tem-se
$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \bullet (u+v) \\ &= u \bullet u + u \bullet v + v \bullet u + v \bullet v \\ &= \|u\|^2 + 2(u \bullet v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$
Portanto, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Prove-se **(f)**. Pela demonstração da propriedade anterior, tem-se a igualdade $\|u+v\| = \|u\|+\|v\|$ se e só se $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$. Prove-se agora que $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$ se e só se um dos vectores se obtém do outro através da multiplicação deste por um escalar não negativo. Observe-se que como $\|u\| \cdot \|v\| \geq 0$ então $u \bullet v = |u \bullet v|$. Logo, pela propriedade **(d)**, sabe-se que $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$ se e só se os vectores u e v são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, suponha-se que $v = \alpha u$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $u \bullet v = \alpha \|u\|^2$ e $|u \bullet v| = |\alpha| \cdot \|u\|^2$, então $\alpha > 0$. Reciprocamente, se $v = \alpha u$, com $\alpha > 0$, então claramente $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$. $\square$

Definição 7.12. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e seja u um vector não nulo de E. Chama-se* ***versor de*** *u, e representa-se por* vers(u), *ao vector*
$$\operatorname{vers}(u) = \frac{1}{\|u\|} u$$

Observação 7.13. *O versor de um vector não nulo u é sempre um vector de norma 1. A um vector de norma 1 chama-se* ***vector unitário****.*

7.3 Ângulo entre vectores

Sejam $u, v \in E$ tais que $u \neq 0_E$ e $v \neq 0_E$. Então, pela desigualdade de Schwarz,
$$|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$
E, portanto,
$$-\|u\| \cdot \|v\| \leq u \bullet v \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

isto é,

$$-1 \leq \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Assim, existe um valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos \theta = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Definição 7.14. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Dados dois vectores não nulos u e v de E, chama-se **ângulo de** u **com** v, e representa-se por $\angle(u, v)$, ao valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que*

$$\cos \theta = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

isto é,

$$\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Exemplos 7.15.

1. *Em $\mathbb{R}^2$, considere o produto interno canónico e os vectores $(1, 3)$ e $(2, 1)$. Determine-se $\angle((1, 3), (2, 1))$. Ora*

$$\begin{aligned} \angle((1,3),(2,1)) &= \arccos\left(\frac{(1,3) \bullet (2,1)}{\|(1,3)\| \cdot \|(2,1)\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{2+3}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. *Considere, em $\mathbb{R}^2$, o produto interno definido por*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Determine-se $\angle((1, 3), (2, 1))$. Neste caso,

$$\begin{aligned} \angle((1,3),(2,1)) &= \arccos\left(\frac{(1,3) \bullet (2,1)}{\|(1,3)\| \cdot \|(2,1)\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{15}{5\sqrt{10}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right). \end{aligned}$$

Exercício 7.16. *Considere, em $\mathbb{R}^3$, o produto interno definido por*

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Determine $\angle((1, 2, 1), (-1, 1, 1))$.

Teorema 7.17. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in E \setminus \{0_E\}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então:*

(a) $\angle(u, u) = 0$*;*

(b) $\angle(u, v) = \angle(v, u)$*;*

(c) $\angle(u, v) = \angle(\alpha u, \beta v)$ *se e só se α e β e têm o mesmo sinal, isto é, $\alpha\beta > 0$.*

(d) $\angle(u, v) = \pi - \angle(\alpha u, \beta v)$ *se e só se α e β e têm sinais contrários, isto é, $\alpha\beta < 0$.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Ora

$$\angle(u, u) = \arccos\left(\frac{u \bullet u}{\|u\| \cdot \|u\|}\right) = \arccos\left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2}\right) = \arccos 1 = 0.$$

Prove-se **(b)**. Ora, pela simetria do produto interno,

$$\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{v \bullet u}{\|v\| \cdot \|u\|}\right) = \angle(v, u).$$

Provem-se **(c)** e **(d)**. Note-se que $\alpha u, \beta v \in E \setminus \{0_E\}$. Logo,

$$\angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(\frac{(\alpha u) \bullet (\beta v)}{\|\alpha u\| \cdot \|\beta v\|}\right) = \arccos\left(\frac{(\alpha\beta)(u \bullet v)}{|\alpha\beta| \cdot \|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

E, portanto, $\alpha\beta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha\beta| = \alpha\beta \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \angle(u, v),$$

e $\alpha\beta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha\beta| = -\alpha\beta \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(-\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \pi - \angle(u, v).$$

□

Exercício Resolvido 7.18. *Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base ordenada de um espaço vectorial real E munido de um produto interno, tal que*

$$e_i \bullet e_i = 1 \quad \text{e} \quad e_i \bullet e_j = 0, \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ e } i \neq j.$$

Sejam $u = e_1 + e_2$ e $v = e_2 - 2e_3$ dois vectores de E. Determine:

(a) $\|u\|$; *(b)* $\|v\|$; *(c)* $\angle(u, v)$.

<u>*Resolução:*</u>

(a) Por definição de norma e pela bilinearidade do produto interno, tem-se:

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{u \bullet u} \\ &= \sqrt{(e_1 + e_2) \bullet (e_1 + e_2)} \\ &= \sqrt{e_1 \bullet (e_1 + e_2) + e_2 \bullet (e_1 + e_2)} \\ &= \sqrt{e_1 \bullet e_1 + e_1 \bullet e_2 + e_2 \bullet e_1 + e_2 \bullet e_2} \\ &= \sqrt{1 + 0 + 0 + 1} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

(b) Analogamente,

$$\begin{aligned}\|v\| &= \sqrt{v \bullet v} \\ &= \sqrt{(e_2 - 2e_3) \bullet (e_2 - 2e_3)} \\ &= \sqrt{e_2 \bullet (e_2 - 2e_3) - 2e_3 \bullet (e_2 - 2e_3)} \\ &= \sqrt{e_2 \bullet e_2 - 2(e_2 \bullet e_3) - 2(e_3 \bullet e_2) + 4(e_3 \bullet e_3)} \\ &= \sqrt{1 - 0 - 0 + 4} = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

(c) Como

$$\begin{aligned}u \bullet v &= (e_1 + e_2) \bullet (e_2 - 2e_3) \\ &= e_1 \bullet (e_2 - 2e_3) + e_2 \bullet (e_2 - 2e_3) \\ &= e_1 \bullet e_2 - 2(e_1 \bullet e_3) + e_2 \bullet e_2 - 2(e_2 \bullet e_3) \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 = 1,\end{aligned}$$

usando as alíneas anteriores, obtém-se

$$\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

Exercício 7.19. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $e_1, e_2, e_3 \in E$ tais que*

$$\|e_1\| = 2, \quad \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad e_2 \bullet e_1 = 0, \quad \angle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{4} \text{ e } \angle(e_2, e_3) = \frac{\pi}{2}.$$

Para $u = e_1 - 3e_2$ e $v = e_1 + e_3$, determine:

(a) $\|u\|$; *(b)* $\|v\|$; *(c)* $\angle(u, v)$.

7.4 Vectores ortogonais

Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Note-se que se u e v são vectores de E não nulos, então

$$u \bullet v = 0 \Leftrightarrow \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = 0 \Leftrightarrow \cos(\angle(u,v)) = 0 \Leftrightarrow \angle(u,v) = \frac{\pi}{2}.$$

Apresenta-se então a seguinte definição.

Definição 7.20. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in E$. Diz-se que u* ***é ortogonal a*** *v, e representa-se por $u \perp v$, se $u \bullet v = 0$.*

Exemplo 7.21. *Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$.*

(a) Relativamente ao produto interno canónico, $(1,0) \bullet (0,1) = 0$, ou seja, $(1,0)$ e $(0,1)$ são ortogonais.

(b) Relativamente ao produto interno definido por

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2;$$

tem-se $(1,0) \bullet (0,1) = 1$, isto é, $(1,0)$ e $(0,1)$ não são ortogonais.

Note-se que, de acordo com o exemplo anterior, dois vectores podem ser ortogonais em relação a um produto interno e não serem ortogonais em relação a outro.

Exercício 7.22. *Considere em $\mathbb{R}^3$ o seguinte produto interno:*

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Verifique se os vectores $u = (1,1,1)$, $v = (-1,1,1)$ e $w = (2,1,1)$ são ortogonais dois a dois.

Teorema 7.23. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Então, para todos $u, v \in E$,*

(a) *se $u \perp v$ então $v \perp u$;*

(b) *$0_E \perp u$;*

(c) *$u \perp u$ se e só se $u = 0_E$;*

(d) *se $u \perp v$ então $u \perp \lambda v$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. **(a)** resulta do facto de que $u \bullet v = v \bullet u$, para todos $u, v \in E$.

Prove-se **(b)**. Como $0_E \bullet u = 0$, para todo $u \in E$, então $0_E \perp u$, para todo $u \in E$.

Prove-se **(c)**. Repare-se que $u \perp u$ se e só se $u \bullet u = 0$ se e só se $u = 0_E$.

Prove-se **(d)**. Se $u \perp v$ então $u \bullet v = 0$. Logo $\lambda(u \bullet v) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, usando a bilinearidade do produto interno, tem-se $u \bullet (\lambda v) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Exercício 7.24. *Considere, num espaço vectorial real E munido de um produto interno, dois vectores $u, v \in E$ tais que $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$ e $\angle(u, v) = \frac{\pi}{3}$. Determine para que valores do parâmetro α, o vector $\alpha u + v$ é ortogonal ao vector $2u + 3v$.*

7.5 Sistema ortogonal e sistema ortonormado

Definição 7.25. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Sejam ainda $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Diz-se que os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ formam um **sistema ortogonal** se cada um dos vectores é ortogonal a cada um dos outros, ou seja,*

$$v_i \bullet v_j = 0, \quad \textit{para todo } i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \textit{ e } i \neq j.$$

*Se, além disso, os vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ forem unitários (ou normados), isto é, $\|v_i\| = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, diz-se que esses vectores formam um sistema ortonormado, ou seja, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ formam um **sistema ortonormado** se, para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$,*

$$v_i \bullet v_j = \begin{cases} 0 & \textit{se } i \neq j \\ 1 & \textit{se } i = j \end{cases}$$

Exemplos 7.26. *(a) Em $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, os vectores $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, 0, 2)$ e $w = (0, 5, 0)$ formam um sistema ortogonal. De facto, verifique que*

$$u \bullet v = u \bullet w = v \bullet w = 0.$$

Mas não formam um sistema ortonormado porque, por exemplo, $\|u\| = \sqrt{2} \neq 1$.

(b) Em $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno canónico, a base canónica de $\mathbb{R}^n$ constitui um sistema ortonormado.

Exercício 7.27. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$*, considere o seguinte produto interno:*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Mostre que os vectores $u = (2, -1)$ *e* $v = (-1, 0)$ *formam um sistema ortonormado.*

Teorema 7.28. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Sejam ainda* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ *não nulos. Se* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *formam um sistema ortogonal, então* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k = 0_E.$$

Então, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ tem-se

$$(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k) \bullet v_i = 0_E \bullet v_i,$$

ou seja, pela bilinearidade do produto interno,

$$\alpha_1(v_1 \bullet v_i) + \cdots + \alpha_{i-1}(v_{i-1} \bullet v_i) + \alpha_i(v_i \bullet v_i) + \alpha_{i+1}(v_{i+1} \bullet v_i) + \cdots + \alpha_k(v_k \bullet v_i) = 0$$

Como $v_1, v_2, \ldots, v_k$ formam um sistema ortogonal, $v_j \bullet v_i = 0$ para $i \neq j$. Logo, obtém-se $\alpha_i(v_i \bullet v_i) = 0$. Por outro lado, como o produto interno é definido positivo, $v_i \bullet v_i \neq 0$, pois $v_i \neq 0_E$. Donde $\alpha_i = 0$. Conclui-se então que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, ou seja, que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são linearmente independentes. □

7.6 Base ortogonal e base ortonormada

Definição 7.29. *A um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno chama-se* ***espaço euclidiano****.*

Definição 7.30. *Seja* E *um espaço euclidiano de dimensão* n *e seja* $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *uma base ordenada de* E*. Se os vectores* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *formam um sistema ortogonal diz-se que* $\mathcal{B}$ *é uma* ***base ortogonal de*** E*.*

Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *formam um sistema ortonormado diz-se que* $\mathcal{B}$ *é uma* ***base ortonormada de*** E*.*

Exemplo 7.31. *Considere a base canónica de* $\mathbb{R}^2$*,* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1, 0), (0, 1))$*.*

(a) se $\mathbb{R}^2$ *está munido do produto interno canónico, então* $(1, 0) \bullet (0, 1) = 0$*,* $\|(1, 0)\| = 1$ *e* $\|(0, 1)\| = 1$*, logo* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ *é uma base ortonormada.*

(b) se $\mathbb{R}^2$ *está munido do produto interno definido por*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

então $(1,0) \bullet (0,1) = 1 \neq 0$ *e, portanto,* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ *não é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^2$ *e, consequentemente, também não é uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^2$*.*

Exercício 7.32. *Seja* E *um espaço euclidiano tal que* $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ *é uma sua base ortogonal. Seja ainda* $u = e_1 + e_2$*. Mostre que*

$$\|u\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2.$$

(Observe-se que este resultado é o Teorema de Pitágoras para $E = \mathbb{R}^2$ *munido do produto interno canónico.)*

Exercício 7.33. *Seja* E *um espaço euclidiano,* u *um vector não nulo de* E *e* $U =< u >$*. Determine as bases ortonormadas de* U*.*

7.6.1 Método de ortonormalização de Gram-Schmidt

Nesta secção vai-se mostrar que um espaço euclidiano E admite sempre uma base ortonormada, provando-se que a aplicação do algoritmo seguinte, denominado **método de ortonormalização de Gram-Schmidt**, a uma base de E qualquer produz uma sua base ortonormada.

Algoritmo 7.34. ***Método de ortonormalização de Gram-Schmidt***
Seja E *um espaço euclidiano e seja* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *uma base ordenada de* E*. Aplique-se os* n *passos seguintes a* $\mathcal{B}$*, construindo-se os vectores* $w_1, w_2, \ldots, w_n$*.*

Passo 1: $w_1 = \text{vers}(e_1) = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Passo 2:

(a) $z_2 = e_2 - (e_2 \bullet w_1)w_1$.

(b) $w_2 = \text{vers}(z_2) = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$.

Em geral, aplica-se o passo i*, ao conjunto ordenado*

$$(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, e_i, \ldots, e_n)$$

obtido no final do passo $i - 1$*.*
Passo i:

(a) $z_i = e_i - (e_i \bullet w_1)w_1 - (e_i \bullet w_2)w_2 - \cdots - (e_i \bullet w_{i-1})w_{i-1}$;

(b) $w_i = \text{vers}(z_i) = \frac{z_i}{\|z_i\|}$,

No final do passo n obtém-se o conjunto ordenado $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$*, que é o resultado do algoritmo.*

O teorema seguinte mostra que a aplicação do método de ortonormalização de Gram-Schmidt a uma base qualquer de um espaço euclidiano produz uma base ortonormada desse espaço.

Teorema 7.35. *Sejam* E *um espaço euclidiano,* $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *uma base ordenada de* E *e* $B' = (w_1, \ldots, w_n)$ *o resultado da aplicação do método de ortonormalização de Gram-Schmidt a* B*. Então* B' *é uma base ortonormada de* E*.*

Demonstração. A prova faz-se mostrando que em cada passo, o algoritmo constrói uma base de E por substituição de um vector na base construída no passo anterior, o qual forma um sistema ortonormado juntamente com os vectores introduzidos nos passos anteriores.

Note-se que no passo 1, $||w_1|| = 1$, isto é, w_1 forma um sistema ortonormado. Além disso, $(w_1, e_2, \ldots, e_n)$ é uma base de E (prove!).

Prove-se agora que $(w_1, w_2, e_3, \ldots, e_n)$ obtido no passo 2, é uma base de E em que w_1 e w_2 formam um sistema ortonormado. Como e_2 e w_1 são linearmente independentes, $z_2 = e_2 - (e_2 \bullet w_1)w_1$ é um vector não nulo de E. Além disso, $z_2 \perp w_1$, pois

$$\begin{aligned}
z_2 \bullet w_1 &= (e_2 - (e_2 \bullet w_1)w_1) \bullet w_1 \\
&= e_2 \bullet w_1 - (e_2 \bullet w_1)(w_1 \bullet w_1) && \text{pela bilinearidade do produto interno} \\
&= e_2 \bullet w_1 - (e_2 \bullet w_1)\|w_1\|^2 && \text{porque } w_1 \bullet w_1 = \|w_1\|^2 \\
&= 0 && \text{porque } \|w_1\| = 1.
\end{aligned}$$

Logo pela bilinearidade do produto interno,

$$w_2 \bullet w_1 = \frac{z_2}{||z_2||} \bullet w_1 = \frac{1}{||z_2||}(z_2 \bullet w_1) = 0.$$

Assim w_1, w_2 formam um sistema ortogonal e, como $||w_2|| = 1$ pois $w_2 = \text{vers}(z_2)$, obtém-se que w_1, w_2 formam um sistema ortonormado.

Para provar o caso geral, suponha-se que no fim do passo i-1 obtém-se a base de E, $(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, e_i, \ldots, e_n)$, onde $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}$ formam um sistema ortonormado e prove-se que $(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i, e_{i+1} \ldots, e_n)$ obtido no final do passo i é uma base de E em que $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i$ formam um sistema ortonormado. Como $e_i, w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}$ são linearmente independentes, z_i é um vector não nulo de E. Além disso, para $j \in \{1, \ldots, i-1\}$,

$$\begin{aligned}
z_i \bullet w_j = [&e_i - (e_i \bullet w_1)w_1 - \cdots - (e_i \bullet w_{j-1})w_{j-1} - (e_i \bullet w_j)w_j - \\
&- (e_i \bullet w_{j+1})w_{j+1} - \cdots - (e_i \bullet w_{i-1})w_{i-1}] \bullet w_j \\
= \; &e_i \bullet w_j - (e_i \bullet w_1)(w_1 \bullet w_j) - \cdots - (e_i \bullet w_{j-1})(w_{j-1} \bullet w_j) - \\
&- (e_i \bullet w_j)(w_j \bullet w_j) - (e_i \bullet w_{j+1})(w_{j+1} \bullet w_j) - \cdots - (e_i \bullet w_{i-1})(w_{i-1} \bullet w_j),
\end{aligned}$$

pela bilineariedade do produto interno, e portanto, $z_i \bullet w_j = 0$, porque $w_\ell \bullet w_j = 0$ se $\ell \neq j$ e $w_j \bullet w_j = ||w_j||^2 = 1$. Logo $w_i = \frac{z_i}{||z_i||}$ é tal que $w_i \perp w_j$, $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, e $\|w_i\| = 1$. Conclui-se assim que $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i$ formam um sistema ortonormado. Facilmente se vê que o conjunto ordenado

$$(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$$

é uma base de E (prove!).

Deste modo, no fim do passo n, o método de ortonormalização de Gram-Schmidt produz uma base ortonormada, $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, de E. □

Corolário 7.36. *Seja E um espaço euclidiano não trivial. Então E admite pelo menos uma base ortonormada.*

Exercício Resolvido 7.37. *Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Obtenha uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$, aplicando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt à base*

$$\mathcal{B} = ((0,1,0), (1,2,1), (0,1,2)).$$

Resolução: Considere-se $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (1,2,1)$ e $e_3 = (0,1,2)$.

Como $\|e_1\| = 1$, então

$$w_1 = \text{vers}(e_1) = \frac{e_1}{\|e_1\|} = e_1 = (0,1,0).$$

Assim

$$z_2 = e_2 - (e_2 \bullet w_1)\, w_1 = (1,2,1) - 2\,(0,1,0) = (1,0,1)\,.$$

e, portanto, como

$$\|z_2\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{2},$$

então $w_2 = \text{vers}(z_2) = \dfrac{z_2}{\|z_2\|} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *Por fim,*

$$\begin{aligned} z_3 &= e_3 - (e_3 \bullet w_1)\, w_1 - (e_3 \bullet w_2)\, w_2 \\ &= (0,1,2) - (0,1,0) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1,0,1). \end{aligned}$$

Como $\|z_3\| = \sqrt{2}$, então

$$w_3 = \text{vers}(z_3) = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ é

$$\mathcal{B}' = \left((0,1,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Exercício 7.38. *Para o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$ *munido do produto interno definido por*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

obtenha uma base ortonormada, aplicando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt à base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$.

7.7 Matriz da métrica

Sejam E um espaço euclidiano e $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma base de E. Sejam ainda $u, v \in E$ e

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} \text{ e } v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$$

as coordenadas de u e v, respectivamente, em relação à base $\mathcal{B}$, isto é,

$$u = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \text{ e } v = y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots, y_ne_n.$$

Então, pela bilinearidade do produto interno,

$$\begin{array}{rcl}
u \bullet v & = & (x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) \bullet (y_1e_1 + y_2e_2 + \cdots + y_ne_n) \\
& = & x_1y_1(e_1 \bullet e_1) + \cdots + x_1y_j(e_1 \bullet e_j) + \cdots + x_1y_n(e_1 \bullet e_n) \\
& & + \cdots + \\
& & x_iy_1(e_i \bullet e_1) + \cdots + x_iy_j(e_i \bullet e_j) + \cdots + x_iy_n(e_i \bullet e_n) \\
& & + \cdots + \\
& & x_ny_1(e_n \bullet e_1) + \cdots + x_ny_j(e_n \bullet e_j) + \cdots + x_ny_n(e_n \bullet e_n) \\
& = & \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \bullet e_1 & \cdots & e_1 \bullet e_j & \cdots & e_1 \bullet e_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_i \bullet e_1 & \cdots & e_i \bullet e_j & \cdots & e_i \bullet e_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_n \bullet e_1 & \cdots & e_n \bullet e_j & \cdots & e_n \bullet e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},
\end{array}$$

isto é,

$$u \bullet v = X^TGY,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ são os vectores das coordenadas de u e v na base $\mathcal{B}$, respectivamente, e $G = [e_i \bullet e_j]$. A matriz G é denominada **matriz da métrica** do produto interno em relação à base $\mathcal{B}$. Observe-se que como $e_i \bullet e_j = e_j \bullet e_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, tem-se que a matriz da métrica é uma matriz simétrica.

Exercício Resolvido 7.39. *Considere o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno*

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$$

e a base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *onde* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ *e* $e_3 = (1, -1, 1)$.

a) Determine a matriz da métrica G *do produto interno em relação à base* $\mathcal{B}$.

b) Calcule $(1, 1, 0) \bullet (2, -2, 1)$ *usando a matriz da métrica* G *obtida na alínea anterior.*

<u>*Resolução:*</u>

a) $e_1 \bullet e_1 = 2$, $e_1 \bullet e_2 = 3$, $e_1 \bullet e_3 = 0$, $e_2 \bullet e_2 = 7$, $e_2 \bullet e_3 = -2$, $e_3 \bullet e_3 = 2$ *(verifique!). Logo, como* G *é simétrica, obtém-se,*

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $(1, 1, 0) = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ *e* $(2, -2, 1) = (2, -1, 1)_{\mathcal{B}}$ *(verifique!). Assim,*

$$(1, 1, 0) \bullet (2, -2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3.$$

Exercício 7.40. *Sejam* E *um espaço euclidiano de dimensão 3 e* (e_1, e_2, e_3) *uma base ortonormada de* E.

a) Mostre que $(e_1 + e_2, e_3, e_1 - e_2)$ *é uma base de* E .

b) Determine a matriz da métrica do produto interno relativamente à base $(e_1 + e_2, e_3, e_1 - e_2)$.

O próximo teorema mostra como se relacionam duas matrizes da métrica que representam o mesmo produto interno.

Teorema 7.41. *Sejam* E *um espaço euclidiano,* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *e* $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ *duas bases de* E *e* G *e* G' *as matrizes da métrica do produto interno em relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$, *respectivamente. Então*

$$G' = P^T G P,$$

onde $P = M(id_E; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Demonstração. Sejam x e y vectores arbitrários de E, X e X' os vectores das coordenadas de x nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, respectivamente, e Y e Y' os vectores das coordenadas de y nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, respectivamente. Logo

$$x \bullet y = X^T G Y \text{ e } x \bullet y = X'^T G' Y'.$$

Como $X = PX'$ e $Y = PY'$, onde $P = M(id_E; \mathcal{B}', \mathcal{B})$, obtém-se

$$x \bullet y = X^T G Y = (PX')^T G (PY') = X'^T P^T G P Y',$$

concluindo-se assim que

$$X'^T (P^T G P) Y' = X'^T G' Y'.$$

Para mostrar que $G' = P^T G P$, considerem-se $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $x = e_i'$ e $y = e_j'$.

Então $X' = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$ e $Y' = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$, e portanto,

$$e_i' \bullet e_j' = X'^T (P^T G P) Y',$$

que é o elemento (i, j) da matrix $P^T G P$. Po outro lado, tem-se que

$$e_i' \bullet e_j' = X'^T G' Y',$$

que é o elemento (i, j) da matrix G'. Assim, conclui-se que os elementos (i, j) das matrizes $P^T G P$ e G' são iguais para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ou seja, $G' = P^T G P$. □

Exemplo 7.42. *Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno*

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3.$$

Como $G = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *é a matriz da métrica em relação à base* $\mathcal{B} = ((1,0,0), (1,1,0), (1,-1,1))$ *(ver Exercício Resolvido 7.39) tem-se que a matriz da métrica em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $G' = P^T G P$, onde* $P = M(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$. *Como* $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *(verifique!) obtém-se*

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam E um espaço euclidiano e G a matriz da métrica em relação a uma base ortonormada $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de E. Como $w_i \bullet w_j = 0$, se $i \neq j$, e $w_i \bullet w_i = 1$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que $G = I_n$.

Teorema 7.43. *Seja E um espaço euclidiano. A matriz da métrica em relação a uma base qualquer de E é invertível.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}$ uma base de E e G a matriz da métrica em relação a $\mathcal{B}$. Vai-se provar que G é invertível.

Seja $\mathcal{B}'$ uma base ortonormada de E. Então $G = P^T G' P$, onde $G' = I_n$ é a matriz da métrica em relação à base $\mathcal{B}'$ e $P = M(id_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Logo, como G' e P (e portanto P^T) são invertíveis, G também o é. □

7.8 Complemento ortogonal e projecções ortogonais

Definição 7.44. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e X um subconjunto não vazio de E. O ortogonal de X é*

$$X^{\perp} = \{y \in E : y \perp x \ \ \forall x \in X\}.$$

Teorema 7.45. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e X um subconjunto não vazio de E. Então $X^{\perp}$ é um subespaço vectorial de E.*

Demonstração. Note-se que $X^{\perp} \subset E$ por definição de $X^{\perp}$.

Como $0_E \perp x \, \forall x \in X$, $0_E \in X^{\perp}$, e portanto, $X^{\perp} \neq \emptyset$.

Para provar que $X^{\perp}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação por um escalar considerem-se $y_1, y_2 \in X^{\perp}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrários e demonstre-se que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in X^{\perp}$, ou seja, que $(\alpha y_1 + \beta y_2) \bullet x = 0 \ \forall x \in X$. De facto, se x é um vector arbitrário de X, tem-se que $(\alpha y_1 + \beta y_2) \bullet x = \alpha(y_1 \bullet x) + \beta(y_2 \bullet x)$, pela bilinearidade do produto interno, e portanto, como $y_1 \bullet x = y_2 \bullet x = 0$, pois y_1 e y_2 pertencem a $X^{\perp}$, tem-se que $(\alpha y_1 + \beta y_2) \bullet x = 0$, o que prova que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in X^{\perp}$.

Conclui-se assim que $X^{\perp}$ é um subespaço vectorial de E. □

Definição 7.46. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e X um subconjunto não vazio de E. A $X^{\perp}$ chama-se o subespaço ortogonal de X.*

Exemplo 7.47. *Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico e $X = \{(1,0)\}$. O subespaço ortogonal de X é*

$$\begin{aligned} X^{\perp} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \bullet (1,0) = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}. \end{aligned}$$

Teorema 7.48. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e X e Y subconjuntos não vazios de E. Então*

(a) *se $X \subset Y$ então $Y^\perp \subset X^\perp$;*

(b) *$X \subset (X^\perp)^\perp$;*

(c) *seja S o menor subespaço vectorial de E que contém X (isto é, S é a intersecção de todos os subespaços de E que contêm X). Então $S^\perp = X^\perp$;*

(d) *se $X \cap X^\perp \neq \emptyset$ então $X \cap X^\perp = \{0_E\}$.*

Demonstração. Para demonstrar **(a)**, suponha-se que $X \subset Y$ e prove-se que $Y^\perp \subset X^\perp$. Seja $z \in Y^\perp$ arbitrário. Então $z \bullet y = 0 \ \ \forall y \in Y$. Logo, como $X \subset Y$ tem-se que $z \bullet y = 0 \ \ \forall y \in X$, o que significa que $z \in X^\perp$, concluindo-se assim que $Y^\perp \subset X^\perp$.

Prove-se **(b)**. Seja $x \in X$ arbitrário. Então, por definição de $X^\perp$, $x \bullet z = 0 \ \ \forall z \in X^\perp$, o que implica que $x \in (X^\perp)^\perp$, concluindo-se que $X \subset (X^\perp)^\perp$.

Prove-se **(c)**. Como $X \subset S$ conclui-se por **(a)** que $S^\perp \subset X^\perp$. Para provar a inclusão contrária, comece-se por observar que um vector arbitrário de E pertence a S se e só se for combinação linear de vectores de X (prove!). Considere-se $y \in X^\perp$ arbitrário e prove-se que $y \in S^\perp$. Como $y \in X^\perp$,

$$y \bullet x = 0 \ \ \forall x \in X. \tag{7.1}$$

Para provar que $y \in S^\perp$, tome-se um vector z de S arbitrário e mostre-se que $y \bullet z = 0$. Como $z \in S$, existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$. Então

$$\begin{aligned} y \bullet z &= y \bullet (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) \\ &= \alpha_1 (y \bullet x_1) + \alpha_2 (y \bullet x_2) + \cdots + \alpha_k (y \bullet x_k), \end{aligned}$$

pela bilinearidade do produto interno. Logo, como por (7.1), $y \bullet x_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$, tem-se que $y \bullet z = 0$, concluindo-se assim que $y \in S^\perp$. Logo $X^\perp \subset S^\perp$.

Prove-se **(d)**. Suponha-se que $X \cap X^\perp \neq \emptyset$ e considere-se $x \in X \cap X^\perp$ arbitrário. Então como $x \in X$ e $x \in X^\perp$, tem-se que $x \bullet x = 0$, o que significa que $x = 0_E$. Logo $X \cap X^\perp = \{0_E\}$. □

Exemplo 7.49. *Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico e $X = \{(1,0)\}$. O subespaço ortogonal de X é $X^\perp = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ (ver Exemplo 7.47). Logo,*

$$\begin{aligned} (X^\perp)^\perp &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \bullet (x,y) = 0 \ \forall (x,y) \in X^\perp\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \bullet (0,y) = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : by = 0 \ \forall y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}. \end{aligned}$$

Note-se que $X \subset (X^\perp)^\perp$ mas $X \neq (X^\perp)^\perp$.

Teorema 7.50. *Sejam E um espaço vectorial real munido de um produto interno, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$, $S =< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ e y um vector de E. Então $y \in S^\perp$ se e só se $y \perp v_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

Demonstração. Note-se que o menor subespaço vectorial de E que contém o conjunto de vectores $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é S. Logo, por **(c)** do Teorema 7.48, $S^\perp = X^\perp$, concluindo-se assim que $y \in S^\perp$ se e só se $y \in X^\perp$, ou seja, se e só se $y \perp v_i$, $i = 1, \ldots, k$. □

7.9 Subespaço ortogonal de um subespaço vectorial

Nesta secção vão-se considerar subconjuntos de E que são subespaços vectoriais de E e os seus ortogonais.

Definição 7.51. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e F um subespaço vectorial de E. Ao subespaço ortogonal de F, $F^\perp$, chama-se complemento ortogonal de F.*

Exemplo 7.52. *Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \sum_{j=1}^{4} x_j y_j$$

e o subespaço vectorial $F =< (1, -1, 0, 0), (1, 0, \frac{1}{2}, 0), (0, 2, 1, 2) >$. Determine-se o subespaço complementar de F.

Pelo Teorema 7.50 tem-se que

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \in F^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} (a,b,c,d) \bullet (1,-1,0,0) & = & 0 \\ (a,b,c,d) \bullet (1,0,\frac{1}{2},0) & = & 0 \\ (a,b,c,d) \bullet (0,2,1,2) & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcr} a & = & b \\ c & = & -3b \\ d & = & 0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

Ou seja $F^\perp = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = b, c = -3b, d = 0\}$.

O teorema seguinte aplica-se a espaços vectoriais de dimensão finita.

Teorema 7.53. *Sejam E um espaço euclidiano e F um subespaço vectorial de E. Então*

(a) $E = F \oplus F^\perp$;

(b) $(F^\perp)^\perp = F$.

Demonstração. Prove-se **(a)**. O vector 0_E pertence a $F \cap F^\perp$ pois F e $F^\perp$ são subespaços vectoriais de E. Logo $F \cap F^\perp \neq \emptyset$, o que implica (por **(a)** do Teorema 7.48) que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

Prove-se agora que $E = F + F^\perp$. É óbvio que $F + F^\perp \subset E$. Para provar que a inclusão contrária é verdadeira considerem-se os seguintes casos:

Caso 1: $F = \{0_E\}$. Neste caso $F^\perp = E$ e consequentemente $E = F + F^\perp$.

Caso 2: $F = E$. É óbvio que $E = F + F^\perp$.

Caso 3: $F \neq \{0_E\}$ e $F \neq E$. Como E tem dimensão finita e F é um subespaço vectorial não nulo de E, tem-se que F admite uma base. Seja $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ uma base ortonormada de F. Para provar que $E \subset F + F^\perp$, considere-se um vector $x \in E$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned} x &= x - \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i) f_i + \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i) f_i \\ &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

onde $x_1 = x - \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i) f_i$ e $x_2 = \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i) f_i$.

Como x_2 é combinação linear dos vectores da base $\mathcal{B}$ de F, tem-se que $x_2 \in F$. Vai-se provar que $x_1 \in F^\perp$. Pelo Teorema 7.50 basta mostrar que $x_1 \perp f_j$, $j = 1, \ldots, k$. Tem-se então que, para $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\begin{aligned} x_1 \bullet f_j &= (x - \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i) f_i) \bullet f_j \\ &= x \bullet f_j - \sum_{i=1}^{k} (x \bullet f_i)(f_i \bullet f_j), \end{aligned}$$

pela bilinearidade do produto interno. Como $\mathcal{B}$ é uma base ortonormada tem-se que $f_i \bullet f_j = 0$ se $i \neq j$ e $f_j \bullet f_j = 1$ e portanto

$$x_1 \bullet f_j = x \bullet f_j - x \bullet f_j = 0.$$

Logo $x_1 \in F^\perp$, o que implica que $x = x_2 + x_1 \in F + F^\perp$, concluindo-se assim que $E = F + F^\perp$.

Prove-se **(b)**. Pelo Teorema 7.48, tem-se que $F \subset (F^\perp)^\perp$, logo, F é um subespaço vectorial de $(F^\perp)^\perp$. Para provar que $F = (F^\perp)^\perp$ basta provar que $\dim\, F = \dim\, (F^\perp)^\perp$. Por **(a)**, $E = F \oplus F^\perp$ e como $F^\perp$ também é um subespaço vectorial de E, $E = F^\perp \oplus (F^\perp)^\perp$. Logo $\dim\, E = \dim\, F + \dim\, F^\perp$ e $\dim\, E = \dim\, F^\perp + \dim\, (F^\perp)^\perp$, concluindo-se assim que $\dim\, F = \dim\, (F^\perp)^\perp$, o que prova **(b)**. ☐

Pelo Teorema 7.53, tem-se que se E é um espaço euclidiano e F um seu subespaço vectorial, então $E = F \oplus F^\perp$. Assim, dado um vector $v \in E$ existem, e são únicos, os vectores $f_1 \in F$ e $f_2 \in F^\perp$ tais que $v = f_1 + f_2$.

Definição 7.54. *Sejam E um espaço euclidiano, F um subespaço vectorial de E e v um vector de E. Sejam ainda $f_1 \in F$ e $f_2 \in F^\perp$ tais que*

$$v = f_1 + f_2.$$

O vector f_1 designa-se projecção ortogonal de v sobre F e representa-se $P_F^\perp(v) = f_1$. O vector f_2 designa-se projecção ortogonal de v sobre $F^\perp$ e representa-se $P_{F^\perp}^\perp(v) = f_2$.

Exemplo 7.55. *Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno*

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) + \sum_{j=1}^{4} x_jy_j,$$

o subespaço vectorial $F =< (1, -1, 0, 0), (1, 0, \frac{1}{2}, 0), (0, 2, 1, 2) >$ e o vector $x = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$. Determine-se $P_F^\perp(x)$ e $P_{F^\perp}^\perp(x)$.

Note-se que $B = ((1, -1, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base ortonormada de F (verifique!). Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} P_F^\perp(1,2,3,4) &= ((1,2,3,4) \bullet (1,-1,0,0))(1,-1,0,0) + \\ &\quad +((1,2,3,4) \bullet (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0))(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + \\ &\quad +((1,2,3,4) \bullet (0,0,0,1))(0,0,0,1) \\ &= (\frac{11}{8}, \frac{19}{8}, \frac{15}{8}, 4) \end{aligned}$$

e

$$P_{F^\perp}^\perp(1,2,3,4) = (1,2,3,4) - P_F^\perp(1,2,3,4) = (-\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{9}{8}, 0).$$

7.10 Distância entre vectores

Definição 7.56. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Dados $a, b \in E$, define-se a distância entre a e b, $d(a, b)$, como*

$$d(a, b) = ||a - b||.$$

Como visto na Secção 7.2 a norma de um vector depende do produto interno considerado, acontecendo portanto o mesmo com a distância entre vectores.

Exemplo 7.57. *Considere-se o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ e os vectores $(1, 2)$ e $(3, 4)$ de $\mathbb{R}^2$.*

(a) Relativamente ao produto interno canónico,

$$d((1,2),(3,4)) = ||(1,2)-(3,4)|| = ||(-2,-2)|| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

(b) Relativamente ao produto interno definido por

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2;$$

$$d((1,2),(3,4)) = ||(1,2) - (3,4)|| = ||(-2,-2)|| = \sqrt{4+4+4+8} = 2\sqrt{5}.$$

Teorema 7.58. *Sejam E um espaço vectorial real munido de um produto interno e $a, b, c \in E$. Então*

(a) $d(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b$*;*

(b) $d(a,b) = d(b,a)$*;*

(c) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$*.*

Demonstração. As seguintes demonstrações decorrem do Teorema 7.11.

Prove-se **(a)**:

$$d(a,b) = 0 \;\Leftrightarrow\; ||a-b|| = 0 \;\Leftrightarrow\; a - b = 0_E \;\Leftrightarrow\; a = b.$$

Prove-se **(b)**:

$$d(a,b) = ||a-b|| = ||-(b-a)|| = |-1|\,||b-a|| = ||b-a|| = d(b,a).$$

Prove-se **(c)**: observe-se que $d(a,b) = ||a-b|| = ||a-c+c-b||$. Como, pela desigualdade triangular, $||a-c+c-b|| \leq ||a-c|| + ||c-b||$, tem-se que

$$d(a,b) \leq ||a-c|| + ||c-b|| = d(a,c) + d(c,b).$$

□

Bibliografia

[1] A. Monteiro, G. Pinto, C. Marques, *Álgebra Linear e Geometria Analítica - Problemas e Exercícios*, Mc Graw Hill, 2000.

[2] A. Monteiro, *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Mc Graw Hill, 2001.

[3] W. K. Nicholson, *Álgebra Linear*, Mc Graw Hill, 2006.

[4] I. Cabral, C. Perdigão, C. Saiago, *Álgebra Linear*, Escolar Editora, 2009.

[5] A. P. Santana, J. F. Queiró, *Introdução à Álgebra Linear*, Gradiva, 2010.

[6] I. Matos, *Tópicos de Álgebra Linear*, DEETC-ISEL, 2007.

[7] L. Johnson, R. D. Riess, J. T. Arnold, *Introduction to Linear Algebra*, Pearson Education, 2009.

[8] B. Kolman, D. R. Hill, *Elementary Linear Algebra*, Pearson Prentice Hall, 2008.