departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Para cada uma das alíneas, determine qual o subespaço gerado pelos vectores dados, no espaço vectorial real indicado.

   (a) $(0,1)$ e $(0,2)$, em $\mathbb{R}^2$;
   (b) $(0,1)$, $(2,1)$ e $(2,2)$, em $\mathbb{R}^2$;
   (c) $(2,2,3)$, $(-1,-2,1)$ e $(0,1,0)$, em $\mathbb{R}^3$;
   (d) $(1,1,1)$, $(1,0,0)$ e $(2,2,2)$, em $\mathbb{R}^3$;
   (e) x^2+1, x^2+x e $x-1$, em $P_2[x]$;
   (f) $3+x^2$, $5+4x-x^2$ e $-2+2x-2x^2$, em $P_2[x]$.

2. Nos espaços vectoriais reais indicados, defina, por meio de equações, os seguintes subespaços vectoriais:

   (a) $\langle(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;
   (b) $\langle(1,1,2),(2,1,1)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;
   (c) $\langle(1,-1,0,1)\rangle$, em $\mathbb{R}^4$;
   (d) $\langle(1,1,2,1),(0,1,0,1)\rangle$, em $\mathbb{R}^4$;
   (e) $\langle x^2+1, x-1\rangle$, em $P_2[x]$;
   (f) $\langle -x^2+3x+2, -3x^2+9x+6\rangle$, em $P_2[x]$;
   (g) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Encontre um sistema de geradores para cada um dos subespaços vectoriais apresentados:

   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0 \ \wedge\ y=-z\}$;
   (b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+y=0 \ \wedge\ x-z=0\}$;
   (c) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y-z=0\}$;
   (d) $\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x=0 \ \wedge\ y=-z\}$;
   (e) $\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y-z=0 \ \wedge\ x+y+2w=0 \ \wedge\ y-z+w=0\}$;
   (f) $\{ax^2+bx+c\in P_2[x] : a-4b+3c=0\}$;
   (g) $\{ax^3+bx^2+cx+d\in P_3[x] : c-a=0 \ \wedge\ 4d-a+24b=0\}$;
   (h) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b=d=0 \ \wedge\ e-2a=0 \ \wedge\ c+f-4a=0 \right\}$.

4. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (2,1,0,3)$, $v_2 = (3,-1,5,2)$ e $v_3 = (-1,0,2,1)$. Quais dos seguintes vectores

$$a = (2,3,-7,3), \quad b = (0,0,0,0), \quad c = (1,1,1,1) \quad \text{e} \quad d = (-4,6,-13,4)$$

pertence a $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$?

5. No espaço vectorial real $P_3[x]$, considere os vectores

$$p_1(x) = 2 + x + 4x^3, \quad p_2(x) = 1 - x + 3x^3 \quad \text{e} \quad p_3(x) = 3 + 2x + 5x^3$$

Quais dos seguintes vectores

$$q(x) = 2 + 6x^3, \quad n(x) = 0, \quad r(x) = 5 - 9x + 5x^2 \quad \text{e} \quad t(x) = 2 + 2x + 3x^3$$

pertence a $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$?

6. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determine os números reais a e b de modo a que

$$\langle (a,1,1), (0,0,b) \rangle = \langle (1,1,1), (-1,-1,1) \rangle$$

7. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto

$$X = \{(1,0,a), (a,b,b), (1,0,0), (0,0,1)\}.$$

   (a) Determine os valores dos parâmetros reais a e b para os quais X seja um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Para um dos valores de a e de b determinados na alínea anterior, escreva o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores de X.

8. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vectoriais F e G definidos por

$$F = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (2,2,2) \rangle$$

Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando:

   (a) $G \subseteq F$

   (b) $(0,0,0) \notin F$

9. Encontre um sistema de geradores do conjunto solução do sistema homogéneo $AX = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

10. Seja E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\{u_1, u_2\}$ um sistema de geradores linearmente independentes de E.

    (a) Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_3 \in E$, é um sistema de geradores de E mas não é constituído por vectores linearmente independentes.

    (b) Justifique que $\{u_1\}$ não é um sistema de geradores de E mas é constituído por vectores linearmente independentes.

    (c) Seja X um outro sistema de geradores de E. Que pode dizer sobre o número de vectores de X?

    (d) Seja Y um subconjunto de E constituído por vectores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vectores de Y?

    (e) Seja u_4 um vector de E. Em que condições que o conjunto $S = \{u_1, u_4\}$ é um sistema de geradores de E?

1. (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
   (b) $\mathbb{R}^2$;
   (c) $\mathbb{R}^3$;
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y = 0\}$;
   (e) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - a + b = 0\}$;
   (f) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - 3a - 2b = 0\}$.

2. (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\}$;
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\}$;
   (c) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = 0 \ \wedge \ x + y = 0 \ \wedge \ w - x = 0\}$;
   (d) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w - y = 0 \ \wedge \ z - 2x = 0\}$;
   (e) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - a + b = 0\}$;
   (f) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c = -2a \ \wedge \ b = -3a\}$
   (g) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = 3a \ \wedge \ c = 2a \ \wedge \ d = 0 \right\}$.

3. (a) $\{(0,-1,1)\}$;
   (b) $\{(1,-3,1)\}$;
   (c) $\{(1,0,1),(0,1,2)\}$;
   (d) $\{(0,-1,1,0),(0,0,0,1)\}$;
   (e) $\{(-1,1,1,0)\}$;
   (f) $\{4x^2 + x, -3x^2 + 1\}$;
   (g) $\{24x^3 + x^2 + 24x, 4x^3 + 4x + 1\}$;
   (h) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. a, b e d.

5. $q(x)$, $n(x)$ e $t(x)$.

6. $a = 1$ e $b \neq 0$.

7. (a) $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. (a) Verdadeiro; (b) Falso.

9. $\{(-1,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

10. (c) o número de vectores de X é superior ou igual a 2;
    (d) o número de vectores de Y é inferior ou igual a 2;
    (e) Só se u_1 e u_4 forem linearmente independentes.