Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Primeiro Exame da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 1 hora | 2 de Novembro de 2007

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [4.0] Considere a função g tal que $g(x) = \arccos\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros de g.

2. [3.5] Considere o conjunto $B = \left\{7 + \dfrac{5000}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ e indique o seu interior, o seu fecho e o seu derivado.

3. [2.5] Seja C um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Defina "$\sup(C)$", "$\inf(C)$" e "ponto fronteiro do conjunto C".

4. [2.0] Determine (justificando) o limite da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{\cos^2 n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. [4.0] Considere a função real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -k^3\,\dfrac{\sin x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{\pi} - \cos x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases},$$

em que k é um parâmetro real.

   (a) Determine o valor de k de modo que a função f seja contínua.
   (b) Justifique que f admite pelo menos um zero no intervalo $]0, \pi[$.

6. [4.0] Mostre que o limite de uma sucessão convergente é único.

—— FIM ——