Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II **20/03/2010**

Teste 1 Duração: 1h30m

7,0 val. **1.** Considere a sucessão de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Estude o limite pontual desta sucessão.

(b) Mostre que se tem

$$\lim_n \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\lim_n f_n(x) \right) dx = \frac{1}{2}.$$

(c) A sucessão dada converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.
Sugestão: estude o comportamento da sucessão nos pontos $x_n = (1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{2n}},\ n \in \mathbb{N}$.

7,0 val. **2.** Considere a função definida por $f(x) = \arg\sinh(x)$ (onde $y = \arg\sinh(x)$ denota a inversa da função sino hiperbólico $x = \sinh(y)$).

(a) Obtenha o desenvolvimento da função definida por f em série de potências, indicando o respectivo raio de convergência.
Sugestão: use o facto de que $(\frac{d}{dx}\arg\sinh)(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Calcule $f(\frac{1}{10})$ com um erro inferior a 10^{-8}.

6,0 val. **3.** (a) Justifique que, se f é uma função par e integrável à Riemann em $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, com $T > 0$, então os coeficientes de Fourier $b_n, n \in \mathbb{N}$, de f, são nulos.

(b) Determine a série de Fourier associada à extensão periódica da função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases} .$$