

EXERCÍCIOS 4

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $T > 0$.
 - (a) Mostre que quando f é diferenciável, f' é periódica de período T .
 - (b) Suponha que f é contínua e $F' \equiv f$. Mostre que F é periódica de período T se e só se $\int_0^T f(x)dx = 0$.
2. (a) Verifique que valem as seguintes identidades trigonométricas (no contexto das séries de Fourier também chamadas **fórmulas de transformação logarítmica**)

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin \alpha \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta \quad (3)$$

- (b) Utilize a alínea anterior para mostrar que, quando $\omega = \frac{2\pi}{T}$, o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega \cdot) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega \cdot) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

é ortonormado no espaço vectorial real das funções reais periódicas de período $T > 0$, integráveis à Riemann em $[0, T]$, munido do quase produto interno

$$f \bullet g := \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

3. Determine as séries de Fourier das (extensões periódicas das) funções seguintes, supostas definidas num intervalo de período.

$$(a) f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi) \qquad (b) f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$(c) f(x) = 1 \quad (-1 < x \leq 1) \qquad (d) f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = x^2 \quad (0 < x \leq 2) \qquad (f) f(x) = \begin{cases} -x^2 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$(g) f(x) = |x| \quad (-2 < x \leq 2) \qquad (h) f(x) = \begin{cases} -1 & 1 < |x| \leq 2 \\ 1 & |x| \leq 1 \end{cases}$$

$$(i) f(x) = e^x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

4. Suponha que $T > 0$ e considere $f :]0, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) A **extensão par** de f com período $T > 0$ é (a extensão periódica d) a função f_p definida por

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \frac{T}{2} \\ f(-x), & -\frac{T}{2} < x \leq 0 \end{cases}$$

A **série de cossenos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_p . Determine as séries de cossenos das restrições a $[0, \frac{T}{2}]$ de cada uma das funções do exercício anterior (3).

- (b) A **extensão ímpar** de f com período $T > 0$ é (a extensão periódica d) a função f_i definida por

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \frac{T}{2} \\ 0, & x = 0 \\ -f(-x), & -\frac{T}{2} < x \leq 0 \end{cases}$$

A **série de senos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_i . Determine as séries de senos das restrições a $[0, \frac{T}{2}]$ de cada uma das funções do exercício 3.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, utilize as extensões periódicas de período 2π das funções f para verificar as somas indicadas.

(a) $f(x) = x - \pi$, se $-\pi < x \leq \pi$; $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$; $\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

6. Utilize a equação de Parseval – com funções de período 2π – para verificar as igualdades seguintes

(a) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ (b) $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$ (b) $\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^6}$

7. Mostre que seja qual for $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge mas não é uma série de Fourier.