departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(x, y) = (2x - y, -8x + 4y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Dados os vectores $u = (5, 10)$, $v = (3, 2)$ e $w = (1, 1)$, indique quais pertencem ao núcleo de φ.
   (b) Dados os vectores $a = (1, -4)$, $b = (5, 0)$ e $c = (-3, 12)$, indique quais pertencem à imagem de φ.

2. Seja $\psi : P_2[x] \longrightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear definida por
$$\psi(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx, \quad \text{para todo } ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$
   (a) Dados os polinómios $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = 0$ e $p_3(x) = 1 + x$, indique quais pertencem ao núcleo de ψ.
   (b) Dados os polinómios $q_1(x) = x^2 + 3x$, $q_2(x) = x + 2$ e $q_3(x) = 4x^2 - x^3 + 7x$, indique quais pertencem à imagem de ψ.

3. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,
$$\phi(x, y, z, w) = (4x + y - 2z - 3w, 2x + y + z - w, 6x - 9z + 9w)$$
Indique um vector que pertença ao $\mathrm{Nuc}\,\phi$ e um vector que pertença a $\mathrm{Im}\,\phi$.

4. Para cada uma das seguintes aplicações lineares, determine uma base do núcleo, $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}\,\varphi}$, e uma base da imagem, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\varphi}$, bem como a nulidade e a característica:
   (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y) = (3x - y, -3x + y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (x + y, x, 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   (c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (0, 0, 2y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
   (d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
   (e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
   (f) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = (4x + y + 5z + 2w, x + 2y + 3z)$, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;
   (g) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = c + b - a$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
   (h) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(-1, 1) = (3, 2, 1)$, $\varphi(0, 1) = (1, 1, 0)$;
   (i) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 0) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0);$$
   (j) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que
$$\varphi(1, 0, 0) = (2, 3), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 4) \quad \text{e} \quad \varphi(0, 0, 1) = (-5, 2).$$

5. Considere a base $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear tal que:

$$\varphi(1,0,0) = x^3 + 2x, \quad \varphi(0,1,1) = x^2 - 2x, \quad \text{e} \quad \varphi(0,0,1) = x^3 + x^2.$$

Determine:

(a) uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\operatorname{Nuc}\varphi$, se possível.

(b) $\operatorname{Im}\varphi$ e uma sua base.

(c) $\varphi^{-1}(\{x^3 + 2x\})$, expresso em função de $\operatorname{Nuc}\varphi$.

6. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$\varphi(1,0,0) = (1,0,2,0), \quad \varphi(0,1,1) = (0,1,-2,0), \quad \text{e} \quad \varphi(0,0,1) = (1,1,0,0).$$

Determine:

(a) $\varphi(a,b,c)$, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$;

(b) $\operatorname{Nuc}\varphi$ e a nulidade de φ;

(c) $\operatorname{Im}\varphi$ e a característica de φ;

(d) $\varphi^{-1}(\{(2,2,0,0)\})$;

(e) um subespaço complementar de $\operatorname{Nuc}\varphi$.

7. Seja φ uma aplicação de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(x,y,z) = (x + k_1 - 2k_2, 2x + y), \qquad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

onde k_1 e k_2 são dois parâmetros reais.

(a) Diga, justificando, qual a relação entre k_1 e k_2 para que φ seja uma aplicação linear.

(b) Considere $k_1 = 2$ e $k_2 = 1$. Determine um subespaço complementar de $\operatorname{Nuc}\varphi$.

8. Sejam E e E' espaços vectoriais reais tais que $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}_{E'} = (e'_1, e'_2)$ são bases ordenadas de E e E', respectivamente. Seja φ uma aplicação de E para E' definida por:

$$\varphi(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x+k)e'_1 + (y+z)e'_2, \ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

onde k é um parâmetro real.

(a) Para que valores de k, φ uma aplicação linear?

(b) Para os valores de k determinados na alínea anterior, determine uma base do núcleo de φ e indique a sua nulidade.

9. Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam φ e ψ endomorfismos de E. Mostre que:

   (a) $\operatorname{Nuc}(\varphi \circ \psi) \supseteq \operatorname{Nuc} \psi$;

   (b) $\operatorname{Im}(\varphi \circ \psi) \supseteq \operatorname{Im} \varphi$;

   (c) $\operatorname{Nuc}(\varphi) \cap \operatorname{Nuc}(\psi) \subseteq \operatorname{Nuc}(\varphi + \psi)$.

1. (a) u; (b) a e c.

2. (a) $p_2(x)$; (b) $q_1(x)$ e $q_3(x)$.

3. $(0,0,0,0) \in \operatorname{Nuc}\phi$ e $(-3,-1,9) \in \operatorname{Im}\phi$.

4. (a) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((1,3))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((-1,1))$ e $c_\varphi = 1$;
(b) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0,2),(0,1,-2))$ e $c_\varphi = 2$;
(c) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((1,0,0),(0,0,1))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((0,0,1))$ e $c_\varphi = 1$;
(d) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((-1,1,1))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0,0),(0,0,1))$ e $c_\varphi = 2$;
(e) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0,0),(0,0,1),(0,0,1))$ e $c_\varphi = 3$;
(f) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((-4,2,0,-7),(-6,0,2,-7))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0),(0,1))$ e $c_\varphi = 2$;
(g) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = (x^2+1, x^2+x)$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = (1)$ e $c_\varphi = 1$;
(h) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = \emptyset$, $n_\varphi = 0$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0,1),(0,1,-1))$ e $c_\varphi = 2$;
(i) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((1,1,0),(0,0,1))$, $n_\varphi = 2$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((1,0))$ e $c_\varphi = 1$;
(j) $\mathcal{B}_{\mathrm{Nuc}_\varphi} = ((18,-19,11))$, $n_\varphi = 1$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}_\varphi} = ((2,3),(-1,4))$ e $c_\varphi = 2$.

5. (a) $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,0,1))$;
(b) $\operatorname{Im}\varphi = \{ax^3+bx^2+cx+d \in P_3[x] : d = 0 \ \wedge\ c-2a+2b = 0\}$ e
$\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\varphi} = (x^3+2x, x^2-2x)$;
(c) $(1,0,0) + \operatorname{Nuc}\varphi$.

6. (a) $\varphi(a,b,c) = (a+c-b, c, 2a-2b, 0)$, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$;
(b) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(a,a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ e $n_\varphi = 1$;
(c) $\operatorname{Im}\varphi = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z-2x+2y = w = 0\}$ e $c_\varphi = 2$;
(d) $\{(a,a,2) : a \in \mathbb{R}\}$; (e) $\{(x,0,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$.

7. (a) $k_1 = 2k_2$; (b) $\mathbb{R}^2$.

8. (a) $k = 0$; (b) $\mathcal{B}_{\operatorname{Nuc}\varphi} = \{e_3 - e_2\}$ e $n_\varphi = 1$.