departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Para cada uma das alíneas, determine a matriz da aplicação linear φ em relação às bases indicadas.

   (a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y) = (x, y, x+y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$;

   (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x+y, x+z, 2x, 0)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (2, 1, -1), (1, 2, 1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^4$;

   (c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = (0, x - y, z - w)$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^3$;

   (d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x+2y, y+2z, 3z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

   (e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y - 3z, x - 3y - 4z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;

   (f) $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, z, w) = x + y - w$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 2))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = (2)$ de $\mathbb{R}$;

   (g) $\varphi : P_3[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 3ax^2 + 2bx + c$, para todo $ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x]$, em relação às bases canónicas de $P_3[x]$ e de $P_2[x]$, respectivamente.

   (h) $\varphi : P_2[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^2 + bx + c) = -2ax^2 + (2a - b)x + b$, para todo $ax^2 + bx + c \in P_2[x]$, em relação à base $\mathcal{B} = (1 + x, x^2, x - x^2)$ de $P_2[x]$.

   (i) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1, 0) = (3, 2)$ e $\varphi(1, 1) = (0, 3)$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

2. Para cada uma das alíneas, determine a aplicação linear φ tal que:

   (a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;

   (b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;

   (c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1, -1), (2, -3))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$;

(d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,1,1),(0,1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1,1),(-1,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$;

(e) $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((-1,-1,-1),(0,-1,-2),(0,0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(0,1,0))$ são bases de $\mathbb{R}^3$.

(f) $\varphi : P_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = (x, 1-x)$ é base de $P_1[x]$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ é base de $\mathbb{R}^3$.

(g) $\varphi : P_1[x] \longrightarrow P_2[x]$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{P_1[x]}$ é base canónica de $P_1[x]$ e $\mathcal{B}' = (x, 1-x^2, 1-x+x^2)$ é base de $P_2[x]$.

3. Determine as matrizes de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, para cada um dos seguintes pares de bases dos espaços vectoriais indicados.

   (a) $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,1),(-2,3))$ de $\mathbb{R}^2$;

   (b) $\mathcal{B} = ((1,0),(1,-1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,3),(2,5))$ de $\mathbb{R}^2$;

   (c) $\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((-1,-1,1),(1,1,1),(0,1,2))$ de $\mathbb{R}^3$;

   (d) $\mathcal{B} = ((1,0,0),(2,-1,1),(1,2,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,1),(-1,1,2))$ de $\mathbb{R}^3$;

   (e) $\mathcal{B} = ((1,2,0,0),(0,1,2,0),(0,0,2,1),(2,1,1,1))$ e
   $\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ de $\mathbb{R}^4$;

   (f) $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{B}' = (1+x, x^2, x-x^2)$ de $P_2[x]$;

4. Sejam $\mathcal{B} = ((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(-1,0,1),(0,1,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

   (b) Seja $u \in \mathbb{R}^3$. Sabendo que $u = (1,2,-1)_{\mathcal{B}}$, determine as coordenadas de u em relação à base $\mathcal{B}'$ usando a matriz de mudança de base da alínea anterior.

5. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ é sua a matriz em relação à base $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,-3))$ de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Utilizando a matriz calculada na alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.

6. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^2$ tal que por $\varphi(x, y) = (0, x + y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Determine a matriz de φ em relação à base canónica do espaço considerado, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$.
   (b) Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Utilizando matriz de mudança de base da alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}$, definida na alínea anterior, isto é, $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$

7. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é

$$M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B} = ((1, 0, -1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$, usando o conceito de matriz de mudança de base.

8. Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $P_3[x]$ tal que, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(a, b, c) = ax^3 + (a - 2b - c)x^2 - 2cx + (a + b).$$

   (a) Determine a matriz de φ em relação às bases canónicas dos espaços considerados.
   (b) Utilizando matrizes de mudança de base, determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B} = (1 + x^3, x^2, x - x^2, 1 + x - x^3)$ de $P_3[x]$.

9. Considere φ e ψ dois endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\varphi(x, y, z) = (x, 2y, y - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$M(\varphi - 3\psi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de ψ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

10. Sejam E e E' dois espaços vectoriais reais tais que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ é uma base de E'. Seja ainda φ uma aplicação linear de E em E' tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{E'}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_1 + e_2, -e_2 + e_3)$ de E e à base $\mathcal{B}'_1 = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2)$ de E'.

(b) Sendo $u = (1, -1, 2)_{\mathcal{B}_1}$, determine as coordenadas de $\varphi(u)$ em relação à base $\mathcal{B}'_1$.

11. Sejam E e E' dois espaços vectoriais reais de dimensões 3 e 2, respectivamente, e tais que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ é uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ é uma base de E'. Seja ainda
$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Determine a base $\mathcal{B}'_1$ de E' tal que
$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. (a) $M(\varphi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$; (b) $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4})=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&1&2\\2&4&2\\0&0&0\end{bmatrix}$;

   (c) $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\1&0&-1&0\\-1&0&1&0\end{bmatrix}$; (d) $M(\varphi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$;

   (e) $M(\varphi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3})=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&-3\\1&-3&-4\end{bmatrix}$; (f) $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1&-1&1\end{bmatrix}$;

   (g) $M(\varphi;\mathcal{B}_{P_3[x]},\mathcal{B}_{P_2[x]})=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$; (h) $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&0&1\\-2&0&-2\\-2&2&-4\end{bmatrix}$;

   (i) $M(\varphi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})=\begin{bmatrix}3&-3\\2&1\end{bmatrix}$.

2. (a) $\varphi(x,y,z)=(x+y+2z,2x+y+3z,x-y)$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;
   (b) $\varphi(x,y,z)=(-2x+3y-z,x-3y+z,-x+2y-z)$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;
   (c) $\varphi(x,y)=(-3x-2y,-11x-9y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$;
   (d) $\varphi(x,y,z)=(x-y-z,9y-9x+3z)$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;
   (e) $\varphi(x,y,z)=(2x-5y+2z,4x-12y+5z,z-2y)$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$;
   (f) $\varphi(ax+b)=(2a+3b,3a+b,2a+2b)$, $\forall ax+b\in P_1[x]$;
   (g) $\varphi(ax+b)=(-4a-8b)x^2+(2a+6b)x+2b$, $\forall ax+b\in P_1[x]$.

3. (a) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3&2\\-1&1\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&-2\\1&3\end{bmatrix}$;

   (b) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}-5&-7\\3&4\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{bmatrix}4&7\\-3&-5\end{bmatrix}$;

   (c) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-2&1\\3&-2&1\\-2&2&0\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$;

   (d) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&4&0\\1&-2&6\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&-4&-12\\2&1&3\\1&2&3\end{bmatrix}$;

   (e) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}-1&-1&0&1\\2&-1&-2&0\\0&2&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&1&-1&3\\2&1&4&-2\\-4&-2&-3&4\\4&2&3&1\end{bmatrix}$;

   (f) $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$ e $M(\mathcal{B}',\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

4. (a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $u = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)_{\mathcal{B}'}$.

5. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \end{bmatrix}$.

6. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

8. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -6 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

10. (a) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\varphi(u) = (-2, 8)_{\mathcal{B}_1'}$.

11. $\mathcal{B}_1' = (e_1' + e_2', e_2')$.