Análise Matemática II
Folha de exercícios 2013-14

Paula Cerejeiras

---

1 Sucessões e séries de funções

1. Estude as seguintes sucessões de funções de termo geral f_n quanto à convergência pontual e à convergência uniforme:

   (a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \in [0,1]$

   (b) $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (c) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (d) $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \quad x \in [-r, r],\ r > 0$

   (e) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad x > 1.$

   (f) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0,1].$

   (g) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0,1].$

   (h) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad x \in [0,1].$

   (i) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

2. Mostre que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em $D \subset \mathbb{R}$ e D é um conjunto finito, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em D.

3. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, x \in [0,1]$. Mostre que

   (a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em $[0,1]$.

   (b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

   (c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0, \frac{1}{2}]$ e diga o que pode concluir acerca de

$$\lim_n \int_0^x f_n(t)dt, \quad x \in [0, 1/2].$$

4. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n, x \in [0,1]$.

   (a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

   (b) Determine $\int_0^1 (\lim_n f_n(x))\, dx$ e $\lim_n \int_0^1 f_n(x) dx$.

5. Considere $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

   (a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$ desde que $0 \notin [a,b]$.

   (b) Determine $\int_0^1 f(x)dx$ e $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx$.

   (c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.

6. Considere $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

   (a) Verifique que $\int_0^1 f(x)dx \neq \lim_n \int_0^1 f_n(x)dx$.

   (b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.

   (c) Seja $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), n \in \mathbb{N}$.

   Verifique que a sucessão converge uniformemente em $\mathbb{R}$

   Designando por f o seu limite, mostre que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para f'. Esta conclusão contradiz os resultados dados nas aulas? Justifique.

7. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}.$$

   (a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em $[0,1]$.

   (b) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

8. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2e^{-1}x, & x \in [0, \frac{1}{n}[\\ ne^{-nx}, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

   (a) Mostre que para todo o $x \in]0,1]$ se tem $\lim_n f_n(x) = \lim_n ne^{-nx}$.

   (b) Mostre que

$$\lim_n \left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_n f_n(x)\right) dx.$$

(c) Que conclusão pode tirar sobre a eventual convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifique a sua resposta.

9. Considere a série $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

10. Mostre que a série $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^4+k^4}$ é uniformemente convergente e que a função s é contínua em $\mathbb{R}$

11. Caso seja possível, calcule :

    (a) $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

    (b) $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

12. Considere a série $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$.

    (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

    (b) Justifique a igualdade $\int_0^1 s(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \arctan \frac{1}{k}$.

    (c) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

    (d) Indique o conjunto das primitivas da função s.

13. Considere a série $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2\sqrt{n+1}}, x \in \mathbb{R}$

    (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

    (b) Justifique que s uma função contínua em $\mathbb{R}$

    (c) Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)dx$.

    (d) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

2 Séries de Taylor

1. Determine o intervalo, e o domínio, de convergência das seguintes séries de Taylor:

    (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^n$

    (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$

    (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n!}$

    (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{10^n}$

    (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

    (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^2 2^n}$

    (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)^n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{n+1}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{n^3}$

(o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n}$

2. Mostre que a série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

tem por soma $f(x) = e^x$ em $\mathbb{R}$. Use este resultado para obter a expansão em série de potências das funções $\cos(x)$ e $\sin(x)$

3. Calcule as somas das seguintes séries de potências, bem como os intervalos de convergência em que essa soma é válida:

(a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

4. Calcule a expansão em série de Taylor das seguintes funções, sem se esquecer de indicar o respectivo intervalo de convergência:

(a) $\ln(1 + x)$

(b) $(1 + x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

(c) $\arctan x$

(d) $\arcsin x$

(e) $\sinh x$

(f) $\cosh x$

(g) e^{-x}

(h) $\sin x^2$

(i) $\frac{1-\cos x}{x^2}$

(j) $\arctan x^2$

(k) $\frac{1+x}{1-x}$

(l) $\frac{1}{(1+x)^2}$

(m) $\ln \frac{1-x}{1+x}$

(n) $\ln(1 - x^2)$

(o) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

(p) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

(q) $\int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt$

(r) $\int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$

5. Mostre que

   (a) $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2}\,dx \right) = 1$

6. Determine o polinómio de Taylor de grau k centrado em c da função f, e estime o erro cometido no intervalo definido por $|x-c| < \frac{1}{5}$, sendo

   (a) $f(x) = \ln x;\ k = 4$ e $c = 1$.

   (b) $f(x) = \arccos x;\ k = 3$ e $c = \frac{1}{2}$.

7. Determine, com erro inferior a 10^{-4}, os seguintes integrais.

   (a) $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

   (b) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$

   (c) $\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t}\,dt$

   (d) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(t^2)\,dt$

8. Considere a série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} e^{-t^2}\,dt \right)$.

   (a) Determine o seu raio de convergência;
   (b) Determine o polinómio de Taylor de ordem 4, e centrado em $c = 0$, de f, sem se esquecer de estimar o erro cometido.
   (c) Aproxime $f(1)$ com um erro inferior a 10^{-3}.

9. Calcule

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\,dt$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$

10. Determine, por recurso ao desenvolvimento em série de Taylor, a função que verifica

    (a) $f'(x) + 2xf(x) = 0$, sujeita às condições $f(0) = 1$.
    (b) $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$, sujeita às condições $f(0) = 1$.

    Identifique a função, se possível, sem se esquecer de indicar o intervalo de convergência da série.

11. Mostre que a função (dita, *função de Bessel de ordem* 0)

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

satisfaz

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$$

12. Seja f_n a sequência de Fibonacci, ou seja, $f_1 = f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

    (a) Calcule o raio de convergência desta série.

    (b) Obtenha uma expressão analítica para $s(x)$.

    (c) Determine o termo f_n, para n arbitrário.

3 Séries de Fourier

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $T-$periódica.

    (a) Mostre que, quando f diferenciável, então f' é também $T-$periódica.

    (b) Suponha que f contínua e $F' \equiv f$. Mostre que F é $T-$periódica se e só se $\int_0^T f(x)dx = 0$.

    (c) Generalize os resultados anteriores para o caso de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2. Considere a função dada por $f(x) = |x|, \ x \in \mathbb{R}$.

    (a) Escreva a série de Fourier da sua restrição a $[-\pi, \pi]$.

    (b) Mostre que a sua soma não é f.

3. Considere a função $2\pi-$periódica dada por $f(x) = 1$, se $-\pi \leq x < 0$, e por $f(x) = \frac{x}{\pi}$, se $0 \leq x \leq \pi$. Esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, os gráficos de f e da respectiva série de Fourier.

4. Determine as séries de Fourier das extensões periódicas das seguintes funções:

    (a) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

    (c) $f(x) = 1 \quad (-1 < x \leq 1)$

    (d) $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

    (e) $f(x) = x^2 \quad (0 < x \leq 2)$

(f) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x^2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(g) $f(x) = |x| \quad (-2 < x \leq 2)$

(h) $f(x) = \begin{cases} -1, & 1 < |x| \leq 2 \\ 1, & |x| \leq 1 \end{cases}$

5. Suponha que $T > 0$ e considere $f : [0, \frac{T}{2}] \to \mathbb{R}$.

   (a) Define-se **extensão par** de f, de período $T > 0$, como sendo a extensão $T-$periódica da função f_p dada por

   $$f_p(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq \frac{T}{2} \\ f(-x), & -\frac{T}{2} < x < 0 \end{cases}$$

   A **série de co-sinos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_p.

   Determine as séries de co-sinos das funções do exercício anterior (4).

   (b) Define-se **extensão ímpar** de f, de período $T > 0$, como sendo a extensão $T-$periódica da função f_i dada por

   $$f_i(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq \frac{T}{2} \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x), & -\frac{T}{2} < x < 0 \end{cases}$$

   A **série de sinos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_i.

   Determine as séries de sinos das funções do exercício anterior (4).

6. Considere a função constante $f(x) = \frac{\pi}{4}$ no intervalo $[0, \pi]$. Esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, os gráficos das respectivas séries de Fourier de sinos e de co-sinos.

7. Considere a função dada por $f(x) = \pi - x$, para $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, o gráfico da série de Fourier da restrição de f a $[-\pi, \pi]$.

   (b) Esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, os gráficos das respectivas séries de Fourier de sinos e de co-sinos da restrição de f a $[0, \pi]$.

   (c) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

8. Considere a função $2\pi-$periódica f dada por $f(x) = 1$, se $0 \leq x < \pi$ e por $f(x) = 0$, se $-\pi \leq x < 0$.

   (a) Determine a série de Fourier de f, e esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, o gráfico da função soma dessa série. Compare o gráfico de f com o da soma da série obtida.

   (b) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

9. Considere a série de Fourier da função f, $2\pi-$periódica, que verifica $f(x) = e^x$, para$-\pi \leq x < \pi$.

   (a) Esboce, no intervalo $[-5\pi, 5\pi]$, o gráfico da sua soma.

   (b) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{\tanh \pi} - 1)$.

   (c) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1)$.

10. Considere a função dada por $f(x) = x^2$, para $-\pi \leq x \leq \pi$.

   (a) Determine a sua série de Fourier.

   (b) Mostre que esta é uniformemente convergente em todo o intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

   (c) Mostre que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)$, para $x \in [-\pi, \pi]$.

   (d) Mostre que se tem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

11. Determine as identidades de Parseval correspondentes a cada um dos desenvolvimentos em série de Fourier das funções dadas no intervalo $]-\pi, \pi[$ (com exclusão do 0 na alínea (c)):

   (a) $x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2\pi^2+12}{n^3} \sin(nx)$.

   (b) $\frac{\pi^2}{3} - x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$.

   (c) $\frac{|x|}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x)$.

   (d) $\frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n \sin(nx)}{4n^2-1}$.

12. Em cada uma das alíneas seguintes, utilize as extensões 2π-periódicas das funções f para obter as somas indicadas.

   (a) $f(x) = x - \pi,\ se\ -\pi < x \leq \pi;$ $\qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$; $\qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

13. Mostre que, seja qual for $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge, mas não é uma série de Fourier.

14. Prove que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $2\pi-$periódica e de classe $C^2(\mathbb{R})$, então a série de Fourier de f converge uniformemente para f.

    Sugestão: Considere os coeficientes de Fourier $a_n,\ b_n$ de uma tal função e denote por α_n e β_n os coeficientes de Fourier de f'. Mostre então que $\alpha_n = nb_n,\ \beta_n = -na_n$.

15. Compare os coeficientes das séries de Fourier de $|x|$ e $\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, prolongadas a partir de $]-\pi, \pi]$.

4 Transformadas de Laplace

1. Mostre que

   (a) $L[t^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0, \ n \in \mathbb{N}_0.$

   (b) $L[e^{at}](p) = \frac{1}{p-a}, \quad p > a, \ a \in \mathbb{R}.$

   (c) $L[\sin(at)](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad p > 0, \ a \in \mathbb{R}.$

   (d) $L[\cos(at)](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad p > 0, \ a \in \mathbb{R}$

   (e) $L[\sinh(at)](p) = \frac{a}{p^2-a^2}, \quad p > |a|, \ a \in \mathbb{R}.$

   (f) $L[\cosh(at)](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad p > |a|, \ a \in \mathbb{R}.$

2. Determine as transformadas de Laplace das funções $f = f(t), \ t \geq 0$ dadas pelas seguintes expressões:

   (a) $f(t) = 4\sin t \cos t + 2e^{-t}$

   (b) $f(t) = t^5 + \cos(2t)$

   (c) $f(t) = 2e^{3t} - \sin(5t)$

   (d) $f(t) = e^{2t}(\sin t + \cos t)$

   (e) $f(t) = t\cos(2t)$

   (f) $f(t) = t^2 \sin t$

   (g) $f(t) = [1 - H(t-\pi)] \sin t$

   (h) $f(t) = (t-2)^2 e^{2(t-2)} H(t-2)$

   (i) $f(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \leq t < \pi \\ 4\pi, & t \geq \pi \end{cases}$

   (j) $f(t) = |\sin t|$

3. Seja $L[f](p) = F(p), \quad p > 0$. Mostre que:

   (a) Então $L[f''](p) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \quad p > 0.$

   (b) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p).$

   (c) $\frac{F(p)}{p} = L[\int_0^t f(\tau)\, d\tau](p), \quad p > 0..$

4. Mostre que $L[\mathrm{Si}(t)](p) = L\left[\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau\right](p) = \frac{1}{p}\arctan\left(\frac{1}{p}\right), \quad p > 0.$

5. Determine as transformadas inversas de Laplace das seguintes funções $F = F(p)$, consideradas em domínios adequados:

(a) $F(p) = \frac{7}{(p-1)^3} + \frac{1}{(p+1)^2-4}$

(b) $F(p) = \frac{e^{-\pi p}}{p^2+16}$

(c) $F(p) = \frac{p}{p^2-3p-4}$

(d) $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3}$

(e) $F(p) = \frac{2}{p^3-4p^2+5p}$

(f) $F(p) = \frac{p+1}{p^3-2p^2+9p-18}$

(g) $F(p) = \frac{1}{p^4-1}$

(h) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}$

(i) $F(p) = \frac{1}{(p^2+9)^2}$

(j) $F(p) = \frac{p}{(p^2+16)^2}$

6. Calcule:

(a) $L^{-1}\left[\arctan\left(\frac{4}{p}\right)\right]$;

(b) $L^{-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right]$

(c) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^3(p^2+1)}\right]$, usando o resultado da alínea 3 (c).

7. Usando transformadas de Laplace, determine uma solução $y = y(t),\ t \geq 0$, das seguintes equações:

(a) $y' + y = 0, \quad \text{com } y(0) = 1$

(b) $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad \text{com } y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

(c) $y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0, \quad$ com constante $m > 0$ e $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 1$.

8. Usando transformadas de Laplace, prove que:

(a) $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$;

(b) $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t dt = \frac{3}{25}$;

(c) $\int_0^\infty t^3e^{-t}\sin t dt = 0$.

9. Calcule o integral $I(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(ty)}{y^2}dy$.

5 Equações Diferenciais Ordinárias

1. Obtenha uma equação diferencial para a qual a família de curvas dada seja solução geral.

   (a) $y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R};$

   (b) $2y^2 + x^2 = C^2, \quad C \in \mathbb{R};$

   (c) $x^2 - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R};$

   (d) $y = \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R};$

   (e) $y = Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R};$

2. Determine a EDO de que as trajectórias ortogonais, a cada uma das famílias de curvas da alínea 1, são solução geral.

3. Determine uma EDO cuja solução geral seja dada pelas curvas indicadas:

   (a) $y = Cx + D, \quad C, D \in \mathbb{R};$

   (b) $(x - C)^2 + (y - D)^2 = 1, \quad C, D \in \mathbb{R};$

   (c) $y = C\sin(x + D), \quad C, D \in \mathbb{R};$

   (d) $y = (Cx + D)e^x, \quad C, D \in \mathbb{R};$

   Qual o tipo de curvas representadas por estas soluções gerais?

4. Numa EDO implícita do tipo $F(x, y, y') = 0$ é possível, em certos casos, obter soluções singulares via a eliminação de y' no sistema formado pelas duas equações

$$F(x, y, y') = 0, \quad \partial_{y'} F(x, y, y') = 0$$

   (dito, $p-$discriminante, mas que não constitui condição necessária, nem suficiente, para a existência de solução singular). Aplique este método às EDO's que se seguem

   (a) $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$, com solução geral $y = Cx - \frac{C^2}{4}, \quad C \in \mathbb{R};$

   (b) $y = xy' + 1 + (y')^4$, com solução geral $y = Cx + C^2 + 1, \quad C \in \mathbb{R};$

   (c) $(y')^2 - yy' + e^x = 0$, com solução geral $y = Ce^x + \frac{1}{C}, \quad C \in \mathbb{R};$

5. Integre as equações diferenciais

   (a) $2y'' = e^{3x} + \sin x$

   (b) $y^{(k)} = 0$, $k \in \mathbb{N}$

   (c) $y' = \frac{4}{x(x-4)}$

   (d) $xy' + y = 0.$

6. Mostre que não existe solução particular das EDO's seguintes que satisfaça às condições dadas:

   (a) $xy' + y = 0, \quad y(0) = 1;$

   (b) $y' = 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$

7. (a) Mostre que uma função é solução da equação diferencial $y' + Cy = 0$, $C \in \mathbb{R}$, se e só se é solução de $(e^{Cx}y)' = 0$. Integre a equação dada e estude o comportamento das soluções, em função da constante C, quando $x \to +\infty$.

   (b) Resolva a equação $3y' - 2y = 0$.

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são exactas e resolva-as:

   (a) $(3x^2 - 2xy)dx + (2y - x^2)dy = 0$

   (b) $3x^3y^2y' + 3x^2y^3 - 5x^4 = 0$

   (c) $(3x^2y^2 - 4xy)dy + (2xy^3 - 2y^2)dx = 0$

   (d) $xe^{xy}y' + ye^{xy} - 4x^3 = 0$

   (e) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y + y^2)y' = 0$

   (f) $(x - y + 1)dy - (x - y - 1)dx = 0.$

9. Mostre que uma equação diferencial de variáveis separáveis é exacta.

10. Determine a solução geral das seguintes equações:

    (a) $e^{-y}(1 + y') = 1$

    (b) $y' + y \tan x = 0$

11. Resolva os seguintes PVI's

    (a) $y' = y + 3, \quad y(0) = -1$

    (b) $y' = 2^{x+y} + 2^{x-y}, \quad y(0) = 0$

    (c) $(1 + y^2)dx - xdy = 0, \quad y(1) = 1$

    (d) $xe^{xy}dx + ye^{xy}dy = 0, \quad y(1) = \sqrt{3}$

12. Encontre a solução geral das seguintes equações e, quando aplicável, resolva os problemas de valores iniciais:

    (a) $y' - 2y = x^2 + x,$

    (b) $y' + (\cos(x))\ y = \sin(x)\ \cos(x),$

    (c) $xy' + y = 3x^3 - 1, \quad x > 0,$

    (d) $y' - y\tan(x) = e^{\sin(x)}, \quad 0 < x < \pi/2,$

    (e) $y' + ay = \sin\ x + e^{-5x}, \quad y(0) = 0,$

    (f) $y' - \frac{2}{x}y = x, \quad y(1) = 0.$

    (g) $y^{(4)} + y^{(3)} = 2$

    (h) $\sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}\ y' = -x^2, \quad y(2) = 2$

    (i) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0, \quad y(1) = 1$

13. Encontre uma nova variável dependente de modo a transformar a equação dada numa equação linear. Resolva então a equação.

(a) $xe^y y' - e^y = 3x^2$ (Sugestão: Tome $u = e^y$)

(b) $\frac{1}{y^2+1}\, y' + \frac{2}{x}\tan(y) = \frac{2}{x}$

(c) $y' - \frac{1}{x+1}\, y\ln(y) = (x+1)y$

14. Uma equação diferencial da forma $y' + a(x)y = b(x)y^k$, $k \in \mathbb{R}$, diz-se de uma *equação de Bernoulli.*

   (a) Mostre que existe uma substituição da forma $z = y^\alpha$, com α uma constante convenientemente escolhida, que a transforma numa equação linear de 1^a ordem.

   (b) Resolva os problemas

   (i) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$

   (ii) $y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(1) = 1.$

15. As equações diferenciais da forma $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ denominam-se *equações de Riccati.*

   (a) Mostre que, conhecida que seja uma sua solução particular $u = u(x)$, a substituição $y(x) = u(x) + \frac{1}{z(x)}$ a transforma numa equação linear de 1^a ordem.

   (b) Calcule a solução geral de $y' = xy^2 - 2xy + x - y^2 + y$.

16. Verifique que as seguintes equações diferenciais não são exactas, mas que admitem um factor integrante. Encontre-o e integre-as.

   (a) $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

   (b) $(xy^2 - y^3) + (1 - xy^2)y' = 0$

   (c) $dx + (\frac{x}{y} - \sin y)dy = 0$

   (d) $y\sin x + (2(\cos x - 1) - 3y)y' = 0$

   (e) $4 - 4x^2 - y^2 - 3yy' = 0$

   (f) $xdy = (xy^2 - y)dx$

17. Lei de decaimento radioactivo: a razão de desintegração de uma substância radioactiva é directamente proporcional à sua massa i.e., se $x(t)$ é a massa da substância no momento t, então a substância desintegra-se segundo a lei $\frac{dx}{dt} = -kx$, com $k > 0$.

   (a) Resolva esta EDO.

   (b) Sendo x_0 a massa inicial da substância e T o tempo necessário para que metade desta se desintegre (dito, *tempo de meia-vida da substância*), mostre que T é independente de x_0.

   (c) Sendo $x(0) = x_0$ e T dados, mostre que a lei de decaimento é $x(t) = x_0\, 2^{-\frac{t}{T}}$.

   (d) Se, num dado momento, há 100g da substância e após 4 horas, restarem 20g, qual será a massa da substância após 8 horas?

   (e) Qual a massa inicial da substância, sabendo que ao fim de 6 horas, restavam 60g, e 2 horas mais tarde, restavam apenas 50g?

18. O Sr. Silva tirou uma garrafa de cerveja do frigorífico, que estava à temperatura de 7^o C. Antes de conseguir abri-la chegou o seu irmão, que o manteve ocupado durante cerca de 90 minutos. Isto aconteceu na sala de estar, mantida a uma temperatura confortável de 19^o C. O Sr. Silva, após a saída do seu irmão, mediu a temperatura da sua cerveja, chegando à conclusão de que esta se encontrava agora à temperatura de 15^o C, demasiadamente alta para a cerveja ser bebida. Como qualquer bebedor de cerveja, sabe que a lei do arrefecimento de Newton estabelece que

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

onde $T = T(t)$ é a temperatura, T_a a temperatura ambiente e $k > 0$ é uma constante. Assim, o Sr. Silva conclui que uma garrafa à temperatura ambiente da sala deve ser posta no frigorífico por 3 horas de forma a reduzir a sua temperatura para uns aceitáveis 8^o C.

Ele tem razão? Encontrando-se agora à temperatura de 15^o C, quanto tempo deve a garrafa ficar no frigorífico ?

19. Uma dada população é modelada pela seguinte equação diferencial (dita, *equação de logística*) $x'(t) = \frac{6}{5}x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{4200}\right)$.

    (a) Determine as soluções de equilíbrio (isto é, soluções que não mudam com o tempo).

    (b) Estude o crescimento/decrescimento da solução $x = x(t)$.

20. Designamos por $v(p)$ a venda semanal de um produto, com um preço de p Euros por peça. De acordo com a experiência, a venda diminui se aumentarmos o preço. A taxa de diminuição de venda, i.e. $(dv/dp)/v$, é, inicialmente, posta indirectamente proporcional ao preço

$$\frac{dv/dp}{v} = -\lambda/p, \quad \lambda > 0.$$

Determine a solução geral desta equação para $p > 0$. Porque razão a escolha

$$\frac{dv}{dp} = -\lambda\frac{v}{p+\gamma},$$

com $\gamma > 0$, é mais realista?

21. **Requer uso de máquina de calcular** A aceleração dum carro é dependente da velocidade v, da massa m, da força $F_A(v)$, da resistência por fricção F_R e da resistência do ar $F_L(v)$:

$$mv' = F_A(v) - F_R - F_L(v).$$

Um VW K70 (ano 1972) tem os seguintes dados

$m = 1130kg$, $F_R = 135N$,
$F_A(v) = 1537,4N - 1,4108\frac{Ns^2}{m^2}(v - 25\frac{m}{s})^2$
$10\frac{m}{s} < v < 47\frac{m}{s}$ (na quarta mudança),
$F_L(v) = 1,1770\frac{Ns^2}{m^2}c_w v^2$

Assim, obtemos para $c_w = 0,45$, a EDO

$$v' = 0,4608 + 0,06242v - 0,001717v^2.$$

(a) Calcule a solução do PVI onde a condição inicial é $v(0) = 100\frac{km}{h}$ e determine então a velocidade máxima e o tempo de aceleração necessário para levar o carro de $100\frac{km}{h}$ até $150\frac{km}{h}$.

(b) Quais os valores obtidos com a constante $c_w = 0,35$? O desempenho melhora?

22. Mostre que uma função diferenciável, com derivada limitada, sobre um intervalo fechado $[a, b]$, onde $-\infty < a < b < +\infty$, satisfaz sempre uma condição de Lipschitz neste intervalo.

23. Discuta se a função f verifica uma condição de Lipschitz local, ou global, relativamente à variável y, quando

(a) $f(x, y) = 1 + y^2$,

(b) $f(x, y) = 1 + x^2$,

(c) $f(x, y) = \frac{1}{1+y^2}$,

24. Mostre o **Lema de Bellman**. *Sejam $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ funções contínuas e não-negativas sobre o intervalo $[a, b]$, e $C > 0$. Então*

$$\varphi(x) \le C + \int_a^x \varphi(t)\psi(t)dt, \qquad x \in [a, b]$$

implica

$$\varphi(x) \le Ce^{\int_a^x \psi(t)dt}, \qquad x \in [a, b].$$

25. Considere dado o PVI $y' = x^2 + xy$, $y(0) = 0$.

(a) Determine, usando $y_0(x) = 0$ como função inicial, as aproximações sucessivas $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que a sucessão $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para a solução exacta do problema em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

26. Determine, usando o método das aproximações sucessivas, uma solução aproximada para cada um dos problemas seguintes; compare a solução aproximada obtida com a solução exacta do problema.

(a) $\begin{cases} y'(x) &= y(x)^2, \quad x \in [0,2] \\ y(0) &= 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'(x) &= y(x), \quad x \in [0,2] \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

27. Considere o PVI

$$\begin{cases} y'(x) &= x - y(x), \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

(a) Determine a solução exacta do PVI.

(b) Use o método das aproximações sucessivas para obter a solução.

(c) Calcule o erro cometido no ponto $x = 0,2$ à k-ésima etapa.

28. Mostre que o PVI

$$y' = \frac{y^3 e^x}{1+y^2} + x \sin y, \quad y(0) = 1$$

tem uma solução única sobre qualquer intervalo fechado $[a,b]$ que contenha a origem, com $a, b \in \mathbb{R}$.

29. Verifique que a função definida sobre o rectângulo $R := \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ e dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0, |y| \leq 1 \\ 2x & \text{se} \quad 0 < |x| \leq 1, -1 \leq y < 0 \\ 2x - 4\frac{y}{x} & \text{se} \quad 0 < |x| \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & \text{se} \quad 0 < |x| \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

não satisfaz a condição de Lipschitz. Mostre que as iterativas de Picard não convergem para uma solução do PVI $y' = f(x,y)$ com $y(0) = 0$.

30. Determine a solução do PVI

(a) $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}$ com $y(0) = 9$ e $y'(0) = 6$

(b) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 6\sinh(2x)$ com $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = 4$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

(d) $y'' + 4y = \cos(2x)$ com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

(e) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 2 - 4x$ com $y(0) = \frac{1}{2}$ e $y'(0) = y''(0) = 0$

(f) $y'' + 4y = f(x)$ com $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ e $f(x) = \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \pi \\ 4\pi & x \geq \pi \end{cases}$

31. Determine duas soluções linearmente independentes do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

32. Determine a solução geral da EDO linear homogénea:

(a) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' = 0$

(b) $y''' - 3y'' + 4y' - y = 0$

(c) $y''' - 2y'' + y' = 0$

(d) $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$

(e) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$

33. Determine a solução geral do sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$