Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame de Recurso / Análise Matemática I

Duração: 3 horas 28 de Janeiro de 2010

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [3.0] Considere o conjunto $A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (a) Determine (justificando devidamente), caso existam, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A.

   (b) Determine (justificando devidamente) o conjunto dos pontos de acumulação de A.

   (c) Averigue (justificando devidamente) se A é um conjunto aberto e/ou fechado.

2. [2.5] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}} & , \text{ se } x > 0, \\ -e^{-k} \ln\left(x^2 + e^{-k}\right) & , \text{ se } x \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Determine, se possível, um valor para $k \in \mathbb{R}$ que garanta que f é uma função contínua no seu domínio.

   (b) Considere-se $k = 1$ na definição da função f de cima e denote-se por g a restrição de tal f ao intervalo $]-\infty, 0[$. Mostre que g é injectiva e caracterize a sua função inversa.

3. [1.5] Estude a diferenciabilidade da função $f : \left]-\frac{1}{2}, \infty\right[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x) & , \text{ se } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ 2x & , \text{ se } x > 0. \end{cases}$$

4. [3.5] Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n + 5\sqrt{n} + 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}$

5. [2.5] Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int x\ \ln(x^2)\ dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\ dx$

6. [2.0] Seja F a função definida em $]-1,+\infty[$ por $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^{\ln(x+1)}\frac{1}{e^t+1}\ dt.$
   Determine $F(0)$ e $F'(0)$.

7. [1.5] Averigue se o seguinte integral impróprio é convergente, indicando o seu valor em tal caso:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x^2+3)}\ dx.$$

8. [1.5] Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série convergente, demonstre que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

9. [2.0] Enuncie o *Teorema da Derivação da Função Inversa* e deduza a derivada da função "arc tan" a partir do conhecimento da derivada da função tangente.

— FIM —