departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\varphi(1,0) = (1,0,0) \quad \text{e} \quad \varphi(0,1) = (2,1,-1).$$

Determine:

(a) a matriz de φ em relação às bases canónicas dos espaços considerados;

(b) a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ e à base

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)) \text{ de } \mathbb{R}^3,$$

usando a alínea anterior;

(c) as coordenadas de $\varphi(1,3)$ na base $\mathcal{B}$, definida na alínea anterior;

(d) $\varphi(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz, em relação à base canónica do espaço considerado, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\varphi(0,1,3)$.

(b) Determine o núcleo de φ e uma sua base.

(c) Indique a característica φ, sem calcular $\operatorname{Im}\varphi$.

3. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^3$ definida, em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e de $\mathbb{R}^3$, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine bases para $\operatorname{Im}\varphi$ e para $\operatorname{Nuc}\varphi$.

(b) Escreva a matriz de φ em relação à base

$$\mathcal{B} = ((1,-1,1,0),(0,1,-1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,1))$$

de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) Calcule $\varphi^{-1}(\langle(1,1,1)\rangle)$.

4. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ definida, em relação às bases canónicas dos espaços considerados, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule $\varphi^{-1}(\{(0,1,1,2)\})$.

   (b) Determine o núcleo de φ. Diga se φ é ou não um monomorfismo.

   (c) Indique um subespaço complementar de $\operatorname{Im}\varphi$.

5. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definida, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B} = ((1,1),(-1,1))$ de $\mathbb{R}^2$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Determine:

   (a) o núcleo e a nulidade de φ;

   (b) $\varphi(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. Considere a aplicação linear φ de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^5$ definida, em relação à base

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$$

   de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^5$, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Seja ainda $F = \langle (1,1,1,1,1),(1,1,1,0,0),(1,0,0,0,0) \rangle$.

   (a) Escreva a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base

$$\mathcal{B}' = ((1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0))$$

   de $\mathbb{R}^5$.

   (b) Calcule $\varphi^{-1}(F)$.

   (c) Diga se φ é um monomorfismo ou um epimorfismo.

7. Considere o endomorfismo φ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & a+b-c \\ b+c-d & 2a+b-d \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

   (a) Determine $\operatorname{Nuc}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$.

   (b) Diga se φ é ou não um automorfismo.

   (c) Escreva a matriz de φ em relação à base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

   (d) Escreva a matriz de φ em relação à base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

   de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, usando a alínea anterior.

   (e) Calcule $\varphi^{-1}\left(\left\langle \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle\right)$.

8. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1,2) = (2,-2)$ e

$$\operatorname{Nuc}\varphi = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\}.$$

   Determine:

   (a) $\varphi(0,1)$ e $\varphi(1,1)$;

   (b) a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

9. Seja E um espaço vectorial real tal que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma sua base. Considere o endomorfismo φ de E tal que:

$$\varphi(e_1) = 2e_1 + 3e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1 + e_2 \quad \text{e} \quad \varphi(e_3) = 2e_2 + 3e_3.$$

   (a) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}$.

   (b) Considere os vectores $u_1 = e_1 - e_2$, $u_2 = 2e_3$ e $u_3 = e_2 + e_3$.

      i. Prove que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ é uma base de E.

      ii. Escreva a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

      iii. Utilizando a alínea anterior, determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B}'$.

      iv. Determine as coordenadas do vector $\varphi(v)$ na base $\mathcal{B}'$, onde $v = (2,-1,0)_{\mathcal{B}}$.

10. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ y+2z=b \\ -x+z=c \end{cases}$$

   (a) Determine a relação entre os valores de a, b e c para os quais o sistema é possível.

   (b) Supondo que o sistema é possível, determine o conjunto solução e indique o grau de indeterminação.

   (c) Seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz dos coeficientes do sistema dado. Utilizando as alíneas anteriores, indique:

      i. $\operatorname{Im}\varphi$;

      ii. $\operatorname{Nuc}\varphi$;

      iii. $\varphi^{-1}(\{(1,2,1)\})$.

11. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ representado, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

   (a) Determine os valores de α para os quais φ é um isomorfismo.

   (b) Para $\alpha = 1$, determine:

      i. o núcleo de φ;

      ii. o conjunto $\varphi^{-1}(\{(a,b,c)\})$, onde $(a,b,c) = \varphi(1,2,0)$.

   (c) Discuta o sistema $AX = 0$, em função de α.

      Sugestão: utilize as alíneas anteriores.

   (d) Utilizando as alíneas anteriores, determine os valores de α para os quais o sistema $AX = B$ é possível, para todo $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

12. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ representado, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \alpha \\ \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \end{bmatrix},$$

onde α é um parâmetro real.

   (a) Determine, em função de α, a nulidade de φ.

   (b) Considere $\alpha = 2$.

i. Verifique que $\operatorname{Nuc}\varphi$ é um subespaço complementar de $\operatorname{Im}\varphi$.
ii. Determine $\varphi^{-1}(\{(1,1,-2)\})$.

13. Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $P_2[x]$ definida por:

$$\varphi(a,b,c) = (b-c) + (a+c)x + (a+2b)x^2,$$

para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determine $\operatorname{Nuc}\varphi$ e averigúe se φ é um isomorfismo.

(b) Determine a matriz de φ em relação à base $\mathcal{B} = ((2,0,0),(1,-1,0),(0,2,-1))$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B}' = (1+x^2, 1-x, -1)$ de $P_2[x]$.

(c) Considere a aplicação linear ψ de $P_2[x]$ em $\mathbb{R}^4$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}'$ de $P_2[x]$, definida na alínea anterior, e à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de $\psi \circ \varphi$ relativamente à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, definida na alínea anterior, e à base canónica de $\mathbb{R}^4$.

14. Sejam φ e ψ endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\varphi(1,1,0) = (1,0,0), \quad \varphi(1,-1,0) = (1,2,0) \quad \text{e} \quad \varphi(0,0,1) = (0,1,1)$$

e

$$\psi(x,y,z) = (-y, x-y, z), \qquad \text{para todo } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determine $\varphi(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Considere o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, $\varphi + \alpha\psi$, onde α é um parâmetro real. Determine os valores de α para os quais $\varphi + \alpha\psi$ é um automorfismo.

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; (c) $\left(7, -\frac{3}{2}, -1\right)$;
   (d) $\varphi(x,y) = (x+2y, y, -y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. (a) $(3,4,10)$; (b) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(-z,-z,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Nuc}\varphi} = ((-1,-1,1))$;
   (c) $c_\varphi = 2$.

3. (a) $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\varphi} = ((2,-1,3),(1,2,-1))$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Nuc}\varphi} = ((-4,1,-7,0),(-3,0,-5,1))$;
   (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$; (c) $\{(2-3w-4y, y, 3-7y-5w, w) : y,w \in \mathbb{R}\}$.

4. (a) $\{(y,y,1-y) : y \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(y,y,-y) : y \in \mathbb{R}\}$ e φ não é monomorfismo;
   (c) $\{(0,y,z,0) : y,z \in \mathbb{R}\}$.

5. (a) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(z,-2z,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $n_\varphi = 1$;
   (b) $\varphi(x,y,z) = (z-x, 3x+2y+z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

6. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\{(x, x+z, x) : x,z \in \mathbb{R}\}$;
   (c) não é monomorfismo nem epimorfismo.

7. (a) $\operatorname{Nuc}\varphi = \left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} d & d \\ 2 & 3d \end{bmatrix} : d \in \mathbb{R}\right\}$ e $\operatorname{Im}\varphi = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w-x-y-z=0\}$;
   (b) não é automorfismo. (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; (d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & 5 & -3 & 6 \\ -6 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;
   (e) $\left\{\begin{bmatrix} -c & 2c \\ c & 0 \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R}\right\}$.

8. (a) $\varphi(0,1) = (2,-2)$ e $\varphi(1,1) = (0,0)$; (b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; (b) ii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; iii. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ 10 & 8 & 4 \end{bmatrix}$;
   iv. $\varphi(v) = (5,-5,10)_{\mathcal{B}'}$.

10. (a) $c+a-b=0$;
    (b) $\{(a-b+z, b-2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e grau de indeterminação é 1;

(c) i. $\operatorname{Im}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + x - y = 0\}$; ii. $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(z,-2z,z) : z \in \mathbb{R}\}$;
iii. $\{(-1+z, 2-2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

11. (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$;
(b) i. $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z = 0\}$; ii. $\{(1+x, 2+y, x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$;
(c) sistema possível e indeterminado: $\alpha \in \{-2,1\}$;
sistema possível e determinado: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$;
(d) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}$.

12. (a) se $\alpha = -1$, $n_\varphi = 2$; se $\alpha = 2$, $n_\varphi = 1$; se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,2\}$, $n_\varphi = 0$;
(b) ii. $\{(z, z-1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

13. (a) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(0,0,0)\}$ e é um isomorfismo;
(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -6 & -7 & 11 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

14. (a) $\varphi(x,y,z) = (x, x-y+z, z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
(b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.