departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Para cada alínea, verifique se o endomorfismo definido pela matriz A, em relação à base canónica do espaço vectorial indicado, é diagonalizável.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^2$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (f) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^4$.

2. Diga para que valores do parâmetro real a, o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido pela matriz A, em relação a uma base de $\mathbb{R}^3$, não é diagonalizável, com

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \frac{1}{b^2}\begin{bmatrix} 0 & b^3 & b^4 \\ b & 0 & b^3 \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix},$$

   onde b um parâmetro real não nulo.
   Mostre que a matriz A:

   (a) é invertível;

   (b) define um endomorfismo diagonalizável, para todo $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Seja ψ um endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ tal que -2 e 7 são valores próprio de ψ com $m_a(-2) = 2$ e $m_g(7) = 3$. Diga, justificando:
   (a) qual o polinómio característico de ψ;
   (b) em que condições ψ é diagonalizável.

5. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Suponha que φ tem vectores próprios $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(0,-1,1)$, associados aos valores próprios 2, 1 e 0, respectivamente.
   (a) Justifique que φ é diagonalizável.
   (b) Determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

6. Considere o endomorfismo ψ de $\mathbb{R}^3$ representado, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine o núcleo e a nulidade de ψ.
   (b) Sem efectuar cálculos, justifique que 0 é valor próprio de ψ.
   (c) Mostre que ψ é diagonalizável e indique, justificando, uma matriz diagonal D semelhante à matriz A.

7. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine os valores próprios de φ.
   (b) Existe alguma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B})$ é uma matriz diagonal? Justifique.

8. Seja ψ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pela matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios associados de ψ.
   (b) Indique uma matriz quadrada P de ordem 3 e invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$.
   Verifique que A e C representam endomorfismos diagonalizáveis mas a composta desses endomorfismos não é diagonalizável.

10. Seja τ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que 1 é um valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e $(1,0,-1)$ e $(0,1,1)$ são vectores próprios associados a esse valor próprio.
   (a) Justifique que τ é diagonalizável.
   (b) Determine o subespaço próprio de τ associado ao valor próprio 1.
   (c) Sabendo que $(-1,1,0)$ é um vector próprio de τ associado ao valor próprio 2, determine a matriz de τ, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

11. Considere os endomorfismos φ e ψ de $\mathbb{R}^3$ definidos, respectivamente, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pelas matrizes:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Verifique que φ e ψ têm o mesmo polinómio característico.
   (b) Mostre que φ é diagonalizável e ψ não é.
   (c) As matrizes A e C são semelhantes?

12. Verifique que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não são semelhantes.

13. Considere o endomorfismo ψ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{bmatrix}.$$
onde a e b são parâmetros reais.
Sejam ainda $u_1 = (0,1,0)$ e $u_2 = (1,-2,c)$ vectores próprios de ψ, com c um parâmetro real.
   (a) Determine a, b e c.
   (b) Calcule os valores próprios de ψ e justifique que ψ é diagonalizável.
   (c) Determine uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D, tais que $A = PDP^{-1}$.

14. Mostre que os endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos, em relação a uma base fixa de $\mathbb{R}^3$, pelas matrizes:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -8 & -10 & 7 \\ -12 & -12 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & 6 \\ -12 & -12 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
têm os mesmos valores próprios. Quais destas matrizes representam o mesmo endomorfismo?

15. Mostre que k é o único valor próprio dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos, em relação a uma base fixa de $\mathbb{R}^3$, pelas matrizes:
$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}.$$
onde k é um parâmetro real, mas que nenhuma matriz é semelhante a outra.

16. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a & 2 & -2 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix}$, com a e b parâmetros reais. Seja ainda $v = (1, 0, 0)$.
    (a) Determine a e b, sabendo que v é vector próprio de φ.
    (b) Determine os valores próprios, os subespaços próprios de φ associados e justifica que φ é diagonalizável.
    (c) Seja w um vector próprio associado ao valor próprio 0. Baseando-te nas alíneas anteriores, prove que $u = v + kw$, com $k \in \mathbb{R}$, é solução do sistema de equações lineares definido por $A^{88}X = v$.

17. Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ definido pela matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Indique uma base de $\operatorname{Nuc}\varphi$ e uma base de $\operatorname{Im}\varphi$.
    (b) Determine os valores próprios de φ e os subespaços próprios associados.
    (c) Mostre que φ é diagonalizável e indique uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal.
    (d) Determine:
        i. $M(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B}$ é a base determinada na alínea (c) e $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
        ii. $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, por dois processos diferentes.

18. Considere um endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 1, 1)$ associados, respectivamente, aos valores próprios 2, 3 e 4. Escreva a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

19. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a \\ -1 & -a & 0 \\ a & a & 1 \end{bmatrix},$$
com a um parâmetro real.

(a) Determine, em função de a, a característica da matriz A.

(b) Considere o sistema de equações lineares definido por $AX = B$, onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Tendo em atenção a alínea anterior, discuta o sistema em função dos parâmetros a e b.

(c) Considere o endomorfismo φ de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, é a matriz A para $a = 1$.

i. Determine $\operatorname{Nuc}\varphi$;

ii. Diga, justificando, se φ é monomorfismo e/ou epimorfismo;

iii. Determine os valores próprios de φ;

iv. Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio 0.

(d) Justifique a afirmação:

$$\text{“ A matriz } A, \text{ com } a = 1, \text{ é semelhante à matriz } \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.\text{''}$$

1. **não são** diagonalizáveis os endomorfismos das alíneas (a) e (d) .

2. $a = 2$.

4. (a) $p_\psi(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-7)^3$; (b) ψ é diagonalizável sse $m_g(-2) = 2$.

5. (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. (a) $\operatorname{Nuc}\varphi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z = 0\}$ e $n_\varphi = 2$; (c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

7. (a) $\sigma(\varphi) = \{0, 2\}$; (b) Sim. Por exemplo, $\mathcal{B} = ((1,0,1), (1,0,-1), (0,1,0))$.

8. (a) $\sigma(\psi) = \{-1, 1, 2\}$, $U_{-1} = \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\}$, $U_1 = \{(3z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $U_2 = \{(x, 3x, x) : x \in \mathbb{R}\}$; (b) Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. (b) $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + x - y = 0\}$; (c) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

11. (c) não.

13. (a) $a = -1$, $b = 0$ e $c = 2$; (b) $\sigma(\psi) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$;
    (c) Por exemplo, $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

14. C e D.

16. (a) $a = b = 0$;
    (b) $\sigma(\varphi) = \{0, 1\}$, $U_0 = \{(x,x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, $U_1 = \{(x, 2z, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

17. (a) $\mathcal{B}_{\operatorname{Nuc}\varphi} = ((1,0,1), (0,1,1))$ e $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\varphi} = ((1,2,-1))$;
    (b) $\sigma(\varphi) = \{0, 4\}$, $U_0 = \operatorname{Nuc}\varphi$ e $U_4 = \{(x, 2x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;
    (c) Por exemplo, $\mathcal{B} = ((1,0,1), (0,1,1), (1,2,-1))$;
    (d) i. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; ii. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

18. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

19. (a) $\operatorname{car} A = 2$ se $a \in \{-1, 0, 1\}$, $\operatorname{car} A = 3$ se $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;
(b) sistema possível e determinado: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;
sistema possível e indeterminado: $a = 0$ e $b = -1$;
sistema impossível: $a \in \{-1, 1\}$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $a = 0$ e $b \neq -1$;
(c) i. $\operatorname{Nuc} \varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \ \wedge \ x + y = 0\}$; ii. φ não é monomorfismo nem epimorfismo. iii. $\sigma(\varphi) = \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$; iv. $U_0 = \operatorname{Nuc} \varphi$.