1. Considere as funções dadas por:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + 2, \quad g(x) = 2 - 3e^{x-1}, \quad h(x) = 1 - \ln(x+e),$$

$$i(x) = \ln(4 - x^2), \quad j(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x + 1}.$$

   (a) Determine o domínio de cada uma delas.
   (b) Caracterize f^{-1}, g^{-1} e h^{-1}.
   (c) Calcule os zeros de i e de j.
   (d) Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de intersecção do gráfico de j com a recta de equação $y = 1$.

2. Em $\mathbb{R}$, as funções f e g são dadas por $f(x) = \sqrt{x+4}$ e $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Caracterize $f \circ g$.

3. Caracterize a função inversa da *restrição principal* da função f, sendo $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Determine o domínio, o contradomínio e os zeros das funções dadas por:

   (a) $f(x) = \pi - \arccos(2x+1)$
   (b) $g(x) = -\dfrac{\pi}{3} + \operatorname{arccot}(-3x)$
   (c) $h(x) = \arctan \frac{1}{x+1}$
   (d) $m(x) = \arcsin\left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

5. Seja f a função dada por $f(x) = \arcsin(x^2 - 1)$.

   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Indique as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

6. Considere a função g tal que $g(x) = \arccos \dfrac{1}{x}$.

   Indique o domínio, o contradomínio e os zeros de g.

7. (a) Seja f uma função real de variável real. Observe que $f = g + h$, onde

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

   Mostre que g é uma função par e que h é ímpar.

   (b) Expresse cada uma das funções seguintes como soma de uma função par e outra ímpar: $f_1(x) = 3 - 2x + x^4 - 5x^7$, $f_2(x) = (x+2)\sin x - x^3 \sin(5x)$, $f_3(x) = \sin(x + \pi/3)$.

(c) Demonstre que a soma de duas funções pares é uma função par e que a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

(d) O que pode afirmar acerca do produto de duas funções pares? E de duas ímpares? E de uma par e outra ímpar?

8. Resolva cada uma das seguintes equações:

(a) $\cos(2x) = \frac{1}{2}$, com $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

(b) $\dfrac{x^2 \cot x}{\sin x} = 0$.

(c) $\sin x = \tan x$.

(d) $\dfrac{(x^2-1)\sin(2x)}{x} = 0$.

9. Determine o domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{3+2x^2}{\cot x - 1}$.

10. Considere a função dada por $f(x) = \arcsin \frac{x+3}{x-2}$. Determine:

(a) o domínio de f;

(b) os valores de x tais que $f(x) \geq 0$.

11. Determine o domínio e os zeros da função dada por

$$g(x) = \begin{cases} \arccos(x^2) & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{-x+1} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

12. Seja $A =]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

(a) o interior de A,

(b) o complementar de A,

(c) o exterior de A,

(d) a fronteira de A,

(e) a aderência de A.

13. Determine, em $\mathbb{R}$, o interior, a aderência e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

(a) $\{1, \sin 1, \sin 2\}$

(b) $[0,1] \cup]2,3] \cup \{6, 10\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$

(e) $(\mathbb{R} \setminus]-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}$

(f) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(g) $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

14. Seja $\mathscr{V}_\delta(p)$ uma vizinhança com centro em p e raio δ. Mostre que para cada ponto $q \in \mathscr{V}_\delta(p)$ existe uma vizinhança V de centro em q que está contida em $\mathscr{V}_\delta(p)$.

15. Verifique se a união de dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ ainda é um conjunto aberto.

16. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\overline{A}$ é o menor subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ que contém A.

17. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Verifique que $p \in \overline{A}$ se e só se toda a vizinhança de p intersecta A.

18. Mostre que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, para quaisquer $A, B \subset \mathbb{R}$. O que se pode dizer sobre uma correspondente igualdade para o caso da intersecção em lugar da reunião?

19. Averigue, justificando, quais são os pontos isolados e os pontos de acumulação do subconjunto $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$.

20. Seja $\mathscr{A}$ um conjunto de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que

$$C = \bigcup_{S \in \mathscr{A}} S$$

é um aberto em $\mathbb{R}$.

21. Sejam A e B conjuntos abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que $A \cap B$ é aberto em $\mathbb{R}$.

22. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup \{B \subset \mathbb{R} \ : \ B \text{ é aberto, } B \subset A\}.$$

23. Seja A um conjunto não vazio de números reais e $-A := \{-x : x \in A\}$. Verifique que:

    (a) b é majorante de $A \Leftrightarrow$ -b é minorante de $-A$
    (b) b é supremo de $A \Leftrightarrow$ -b é ínfimo de $-A$
    (c) b é máximo de $A \Leftrightarrow$ -b é mínimo de $-A$

24. Determine, caso seja possível, o ínfimo, o mínimo, o supremo e o máximo de cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |1 - x| \leq 2\}$
    (b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$
    (c) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$
    (d) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{1-n}{n}\}$
    (e) $\mathbb{Q} \cap]-1, 2]$
    (f) $\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} \cap [1, 3[$

25. Indique se são majorados, minorados ou limitados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| = 2|x|\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^{-1}} < \frac{x^{-1}}{x}\}$

26. Sejam $A = \{-3, -2\} \cup (\mathbb{Q} \cap [0,1])$ e $B =]-4, 2] \cup ([0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$. Indique, caso existam, os supremos e os ínfimos dos conjuntos A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$.

27. Suponha que A e B são conjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados. Seja

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

Prove que:

(a) $A + B$ é limitado

(b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

(c) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

28. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão cujo termo geral é $u_n = \frac{(-1)^n + n}{n+1}$.

(a) Determine os cinco primeiros termos da sucessão.

(b) Indique, justificando, o valor lógico das proposições:

i. $\exists n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{14}{15}$

ii. $0 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

29. Considere a sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $x_n = \frac{n+1}{n+2} - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

(a) Verifique que a sucessão é monótona e que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{3} \leq x_n < 0$.

(b) A sucessão é convergente?

30. Calcule os limites das seguintes sucessões:

(a) $\left(\dfrac{(-1)^n + n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(e^n + e^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\dfrac{3n^3 + n^2 + 1}{2n^3 - n - 2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(d) $\left(\dfrac{n+5}{1+n^2} \sin \dfrac{\pi n}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

31. Calcule, caso existam, o limite das seguintes sucessões:

(a) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^3}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(b) $\left(\cos \dfrac{n\pi}{4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(c) $\left(\cos(n\pi) + (-1)^{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

(d) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n n}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

32. Quando possível, dê exemplos de sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ e $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e que verifiquem:

(a) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

(b) $x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

(c) $x_n + z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

(d) $x_n z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(e) $\frac{x_n}{z_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$

33. Mostre que a simples existência de limite das sucessões $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ obriga a que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente.

34. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x-a}{|x-a|}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cot\frac{2}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(1-x)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arccos\frac{1}{x}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

35. Dê um exemplo de duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) \neq f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

36. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 8} \frac{x^{2/3}-3x^{1/2}}{4-\frac{16}{x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^2+x-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-8x^3}{2-3x^3}$

37. Determine k por forma a que a função f seja contínua no seu domínio.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^5 \sin\frac{1}{x^2}+1 & \text{se } x\neq 0 \\ k & \text{se } x=0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}+2 & \text{se } x\neq 0 \\ k & \text{se } x=0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \arccos\frac{2}{x}, & \text{se } x\geq 2 \\ 2ke^{x-2} & \text{se } x<2 \end{cases}$

38. Mostre que a equação $x^3 + 4x^2 + 2x + 5 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

39. Para cada uma das seguintes séries numéricas, determine a sucessão das somas parciais associada, calcule alguns dos primeiros termos dessa sucessão e, se possível, determine a soma da série:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\pi)}{3^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

40. Estude a natureza das seguintes séries de termos não negativos:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{2n^4-n+3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{10}{9}}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{\sqrt[3]{n^9+n^2+1}}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,e^{-n}}{2n+3}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n + n^2}{n^4}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$ (p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+\ln n}$ (t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

41. Prove que: (a) se $a_n > 0$ e $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

(b) se $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (este critério é conhecido por CRITÉRIO DE D'ALEMBERT).

42. Estude as seguintes séries quanto à sua natureza:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{10}{9}\right)^{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(n \sin \frac{2}{n}\right)^{2n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}} e^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(n \sin \frac{k}{n}\right)^{2n}, \quad |k| \neq 1$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} e^{-n}$

43. Estude a natureza das seguintes séries numéricas alternadas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

44. Verifique se as seguintes séries numéricas são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+2)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}+n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\cos \pi n}{n!}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + \cos 3n}{n^2+n}$

45. Estude a natureza das seguintes séries numéricas. No caso de haver convergência, indique se ela é simples ou absoluta:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+4}{(-2)^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{10^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n^2+1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{1}{n^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n+1}$

46. Mostre que, se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ também converge.

47. Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$ converge.

Sugestão: Comece por mostrar que

$$\forall x, y \geq 0 \qquad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

48. Calcule usando a definição, se possível, as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

(a) $f(x) = \ln x$, $x = a \in D_f$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$

(c) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 3$

49. Determine f', em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x) = e^{\cos x} + x \sin x$

(b) $f(x) = \frac{1-x}{x^3+2} + 2x$

(c) $f(x) = (x+5)^4$

50. Defina as derivadas das funções trigonométricas inversas.

51. Discuta a diferenciabilidade de cada uma das funções, dadas por:

    (a) $f(x) = e^x$

    (b) $f(x) = e^{-|x|}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

52. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$.
    Mostre que f é contínua em $x = 0$ mas, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.

53. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

54. Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 e^{-x}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, defina $(g \circ f)'$.

55. Considere a função dada por $f(x) = 3x - 3 + \sin(x - 1)$.

    (a) Calcule $f(1)$.

    (b) Prove que f tem um único zero em $\mathbb{R}$.

56. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f'.
    Determine a derivada de

$$f(-x)\,,\ f(e^x)\,,\ f(\ln(x^2+1))\,,\ f(f(x)).$$

57. Utilize o Teorema de Rolle para provar que:

    (a) O polinómio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

    (b) O polinómio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

58. Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x < 0 \\ \ln(e^x + 1) & , \quad x \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

    (a) Mostre que a recta de equação $y = x$ é uma assímptota ao gráfico de f.

    (b) Caracterize f'.

    (c) Existe um intervalo fechado contido em $[0, +\infty[$ no qual seja possível aplicar o teorema de Rolle? Justifique.

59. Considere a função $g : x \longmapsto y = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \quad x \leq 0 \end{cases}$. Justifique as seguintes afirmações:

   (a) f não verifica as condições do teorema de Lagrange em nenhum intervalo de que zero seja ponto interior.

   (b) f verifica as condições do teorema de Lagrange no intervalo $[0, 1]$, sendo $c = \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$ a abcissa que permite originar o valor médio do referido teorema.

60. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \, \sin x}{1 - \cos x}$

   (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$

   (c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

   (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x \text{ arccot } x)$

61. A Figura 1 contém a representação gráfica da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = \frac{2\,t}{t^2 + 3}.$$

   (a) Estude h quanto à continuidade.

   (b) Verifique que $h(-t) = -h(t)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Determine, caso existam, assímptotas horizontais e verticais da função.

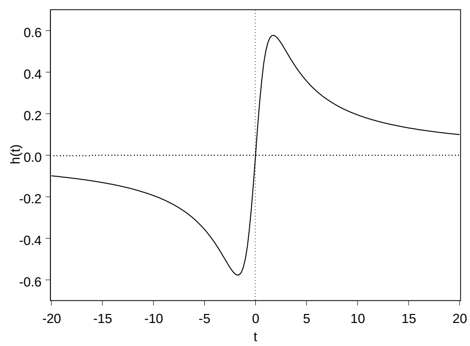

Figura 1: Gráfico de $h(t)$ para $t \in [-20, 20]$.

62. Considere as seguinte funções:

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^{-1/x}, & x < 0 \\ (1-x)e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1}, \quad x > -1.$$

Estude-as quanto à continuidade e averigue acerca das suas assímptotas.

63. Estude quanto à existência de assímptotas a função f em cada um dos seguintes casos:

(a) $f(x) = x^3 - x + 1$;
(b) $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$;
(c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$;
(d) $f(x) = x\ln(x)$;
(e) $f(x) = \sin x + \cos x,\ x \in [0, 2\pi]$.

64. Na Figura 2 representa-se graficamente as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2}; \qquad g(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

Determine o domínio de cada uma destas funções e identifique eventuais assímptotas horizontais, verticais e oblíquas.

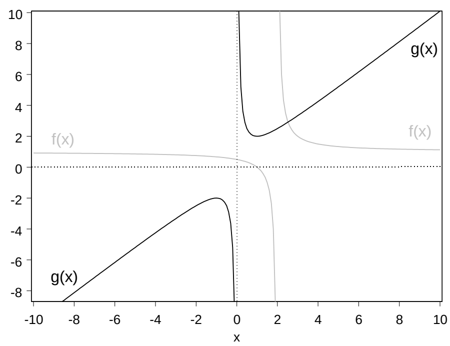

Figura 2: Gráfico de $f(x)$ e $g(x)$ para $x \in [-10, 10]$.

65. Para cada uma das seguintes funções estude: o domínio; os zeros; as assímptotas; a primeira derivada; os extremos; os intervalos de monotonia; a segunda derivada; os pontos de inflexão; o sentido da concavidade.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$;
(b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$;
(c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$;
(d) $f(x) = \begin{cases} x\ln x & , \ x > 0 \\ \sqrt{1-x} & , \ x \leq 0 \end{cases}$.

66. Calcule:

(i) $\int \left(5x^3 + 2\cos x\right)\, dx$

(j) $\int \left(8t^3 - 6\sqrt{t} + \dfrac{1}{t^3}\right)\, dt$

(k) $\int \dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}\, dx$

(l) $\int \dfrac{1}{\cos x\, \cot x}\, dx$

(m) $\int \left(\sqrt{3}\sin x + \dfrac{1}{2x}\right)\, dx$

(n) $\int \dfrac{2x}{1+x^2}\, dx$

(o) $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx$

(p) $\int \dfrac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

(q) $\int 2xe^{x^2}\, dx$

(r) $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\, dx$

(s) $\int \cos^3 x\, dx$

67. Calcule:

(a) $\int x\sec^2 x\, dx$

(b) $\int e^x \sin x\, dx$

(c) $\int \ln x\, dx$

(d) $\int \arctan x\, dx$

(e) $\int \sec^3 x\, dx$

(f) $\int \sin(5x)\cos(3x)\, dx$

68. Calcule:

(a) $\int \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx$

(b) $\int \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$

(c) $\int \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\, dx$

(d) $\int \dfrac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x + 1)}\, dx$

(e) $\int \dfrac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\, dx$

(f) $\int \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}}\, dx$

69. A corrente i num circuito RCL é dada por

$$i = EC\left(\frac{\alpha^2}{\omega} + \omega\right) e^{-\alpha t}\sin(\omega t).$$

São **constantes** a força electromotriz E, ligada no instante $t = 0$, a capacidade C (em farads), a resistência R (em ohms), a indutância L (em henrys),

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C - R^2}}.$$

A carga Q (em coulombs) é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = i,$$

com $Q(0) = 0$. Determine a expressão de $Q(t)$.

70. Calcule:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x(3+\ln x)^3}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\ dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}\ dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}}\ dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{4+5x^2}\ dx$

(j) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\ dx$

71. Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\ dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}\ dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+15}\ dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+12x^2+14x+10}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\ dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{5x^3-3x^2+7x-3}{(x^2+1)^2}\ dx$

72. Estude quanto à integrabilidade, nos respectivos domínios, as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \in [-1,2]\setminus\{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 3, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \ln|x|, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} \tan x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1,5]\setminus\mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1,5]\cap\mathbb{Z} \end{cases}$$

73. Seja $g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

A função g é integrável em $[0,2]$? Em caso afirmativo calcule $\displaystyle\int_0^2 g(x)\ dx$.

74. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

75. Determine a derivada da função F_j $(j = 1, \ldots, 9)$ dada por:

$F_1(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\, dt$ $\quad F_2(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{x^2} \sqrt{1+t^4}\, dt$ $\quad F_3(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$

$F_4(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt$ $\quad F_5(x) = \displaystyle\int_{x^2+1}^{\sin x} t\cos t\, dt$ $\quad F_6(x) = x^3 \displaystyle\int_1^x e^{-s^2}\, ds$

$F_7(x) = \displaystyle\int_0^x (x-s)e^{-s^2}\, ds$ $\quad F_8(x) = \displaystyle\int_1^x \left(\sin(s^2) + e^{-s^2}\right) ds$ $\quad F_9(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{x^3} \ln(s^2+1)\, ds$

76. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} (x+1)^2 \arcsin t\, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Calcule $F'(x)$.

77. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por

$$F(x) = \int_{x^2}^{k\ln x} e^{-t^2} dt.$$

78. Seja F a função dada por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du\right) dt$. Calcule $F''(x)$.

79. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
Mostre que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t)dt$$

admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

80. A probabilidade P de que um frequencímetro digital manufacturado por uma companhia electrónica dure entre 2 e 3 anos, com um uso normal, é dada aproximadamente por

$$P = \int_2^3 12t^{-3}\, dt.$$

(a) Calcule a probabilidade P.

(b) Calcule x tal que
$$\int_2^x 12t^{-3}\,dt = 1.$$

81. Considere a função f dada por
$$f(x) = \int_x^{x^3} h(t)\,dt,$$
onde h é uma função par. Mostre que f é uma função ímpar.

82. Calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin x + \cos x\big)^2\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x\sin(3x^2)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$

(f) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

(j) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_2^{\frac{7}{2}} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

(n) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}\,dx$

(o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

(q) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x\ln(3x)}\,dx$

(r) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

(s) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

(t) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

83. Determine a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela recta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

84. Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.

85. Determine a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas rectas $x = -\pi$ e $x = \pi$.

86. Seja $\mathscr{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$
   (a) Represente geometricamente a região $\mathscr{A}$.
   (b) Calcule a área da região $\mathscr{A}$.

87. Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas rectas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

88. Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Mostre que $F(x) = \frac{\pi}{2}$ no seu domínio.

89. Verifique se os seguintes integrais impróprios convergem e, em caso de convergência, indique o seu valor numérico.

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x}\, dx$