Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II **30/03/2015**

Teste 1 (modelo) - avaliação discreta (CURSO: MATEMÁTICA) Duração: 1h30m

---

Os resultados usados devem ser enunciados com precisão e rigor. A qualidade e cuidado na redacção da resposta são elementos importantes para a avaliação. Dúvidas na interpretação das questões devem ser explicitadas na prova.

3,0 val. **1.** Considere a seguinte sucessão de funções, de termo geral $u_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$, onde $x \in [-\pi, \pi]$ e $n = 1, 2, \ldots$ Estude a sucessão dada quanto

(a) à convergência pontual.

(b) à convergência uniforme.

4,5 val. **2.** Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências ($a_n > 0, \forall n = 0, 1, 2, \ldots$) com intervalo de convergência $]-R, R[$ ($R > 0$). Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

(a) Se a série convergir absolutamente num dos extremos do intervalo de convergência, então converge também no outro extremo.

(b) Se a série diverge em $x = -R$, então converge simplesmente em $x = R$.

(c) Se a série converge simplesmente em $x = -R$, então diverge em $x = R$.

3,0 val. **3.** Calcule o desenvolvimento em série de potências das seguintes funções, não se esquecendo de indicar o respectivo intervalo de convergência:

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; (b) $h(x) = (1 - x^2)e^{x^2}$;

5,0 val. **4.** Considere f uma função $T-$periódica ($T > 0$), contínua e limitada em $\left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$

(a) Mostre que f se pode decompor sempre na soma de uma função par f_e com uma função ímpar f_o, isto é, $f = f_e + f_o$.

(b) Use o resultado anterior para justificar que a série de Fourier associada à extensão periódica da função $f(x) = T - 2x$, $|x| \leq \frac{T}{2}$, existe, e tem a forma

$$S(x) = T + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4,5 val. **5.** Determine a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} t, & se\ t \in [1, 4] \\ 0, & restantes\ valores \end{cases}$$