42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES III

Vítor Neves

2009/2010

1.5.2 Polinómio de Taylor

Definição 1.5.4 *Seja* $f : I :==]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^n. *O* ***polinómio de Taylor*** *de* f *centrado no ponto* $c \in I$ *é a função*

$$T_c^n f(x) \ := \ f(c) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(c)(x-c)^i \qquad (x \in I)$$

Teorema 1.5.2 *Seja* $f : I :=]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^{n+1} *e suponha-se que* $c \in I$.

1. $T_c^n f(x)$ *é uma boa aproximação de* f:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - T_c^n f(x)}{(x-c)^n} \ = \ 0$$

2. *Quando* f *é de classe* C^{n+1} *e* $c \in [a,b] \subseteq I$ *uma majoração do erro da aproximação pode ser obtida do seguinte modo*

$$\begin{aligned} M(f,n,c) \ &= \ \text{máx}\left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \mid x \in [a,b] \right\} \\ |f(x) - T_c^n f(x)| \ &= \ |R_n(x,c)| \\ &\leq \ \frac{M(f,n,c)}{(n+1)!} |x-c|^{n+1} \\ &\leq \ \frac{M(f,n,c)}{(n+1)!} (b-a)^{(n+1)} \end{aligned}$$

1.5.3 Analiticidade

Definição 1.5.5 *A função $f : I :=]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ diz-se* ***analítica em*** *$c \in I$ se qualquer das situações seguintes se verifica para algum $\delta > 0$*

1. *$R_n(x, c) \to 0$, para qualquer $x \in I$ tal que $|x - c| < \delta$*

2. *f é desenvolvível em* ***série de Taylor*** *em torno de c*

$$f(x) \;=\; f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

f diz-se ***analítica em*** *I, se for analítica em todos os pontos de I. Se $c = 0$ a série também se diz* ***de McLaurin****.*

Teorema 1.5.3

1. *Cada função analítica num ponto c tem uma só série de Taylor centrada em c, mais precisamente, se $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ é analítica em $c \in]\alpha, \beta[$, então em algum intervalo $[c - \delta, c + \delta]$*

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad sse \quad \forall n \geq 0 \; a_n \;=\; \frac{f(n)(c)}{n!}$$

2. *As séries de potências de raio de convergência positivo são analíticas; em particular duas séries de potências não triviais centradas no mesmo ponto são iguais se e somente se têm os mesmos coeficientes da mesma ordem, i.e., quando o raio de convergência de ambas as séries é positivo*

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n = \sum_{n \geq 0} b_n (x-c)^n \quad sse \quad \forall n \geq 0 \; a_n = b_n.$$

1.5.4 Alguns desenvolvimentos

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (\alpha - i)}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N}_0)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; |x| < 1)$$