1. Matrizes. Noções gerais

1.1 Definição. Algumas matrizes especiais

Suponha-se que se está a trabalhar em estruturas algébricas conhecidas, como por exemplo, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ com as operações usuais de adição e de multiplicação. Considere $\mathbb{K}$ um desses conjuntos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ chamam-se *escalares*.

Definição 1.1. *Uma* ***matriz do tipo*** *(ou* ***de tamanho****)* $p \times q$ ***sobre*** $\mathbb{K}$ *é uma tabela de dupla entrada com* p *linhas e* q *colunas cujos elementos pertencem a* $\mathbb{K}$*.*

Em termos de notação representam-se matrizes por letras maiúsculas e usa-se a tabela de números dentro de parênteses rectos como indicado a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}.$$

Os escalares a_{ij}, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$ dizem-se *entradas* (ou *elementos*) de A. Em termos gerais, também se escreve

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}, \quad \text{com } i \in \{1, \ldots, p\} \text{ e } j \in \{1, \ldots, q\}.$$

O termo genérico a_{ij} representa a entrada da matriz A que se encontra na linha i e na coluna j e é usual referir como sendo a entrada (ou o elemento) (i, j).

Exemplo 1.2. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

é uma matriz do tipo 3×2 *pois é composta por* 3 *linhas e* 2 *colunas. A entrada* a_{31} *(ou entrada* $(3, 1)$*) é* 6*.*

Seja A uma matriz do tipo $p \times q$. Quando $p = q$ diz-se que A é uma *matriz quadrada de ordem* p. Quando se tem uma matriz com uma só coluna (linha) chama-se *matriz coluna* (*matriz linha*).

Exemplo 1.3. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A *é quadrada de ordem* 2*,* B *é uma matriz coluna e* C *é uma matriz linha.*

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, com $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, uma matriz quadrada. As entradas a_{ij} com $i = j$, isto é, as entradas da forma a_{ii}, formam a *diagonal principal* de A. Os elementos a_{ij} e a_{ji}, com $i \neq j$, estão dispostos simetricamente em relação à diagonal principal, e por isso dizem-se *opostos*.

Exemplo 1.4. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 4 \\ \boxed{2} & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal principal são 2, 1 *e* 0 *e estão assinalados por* $\bigcirc$. *As entradas marcadas por* $\boxed{}$ *são um exemplo de elementos opostos.*

Definição 1.5. *Chama-se* ***matriz diagonal*** *a uma matriz quadrada em que os elementos que não são da diagonal principal são iguais a zero, ou seja,* $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$.

Exemplo 1.6. *A matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal.

Definição 1.7. *Chama-se* ***matriz escalar*** *a uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais entre si.*

Exemplo 1.8. *As matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

são matrizes escalares.

Um caso especial de uma matriz escalar é a matriz em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Essa matriz chama-se *matriz identidade*. Assim, a matriz identidade de ordem n, representa-se por I_n, e é a matriz

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Se a sua ordem for depreendida do contexto, representa-se simplesmente por I. Observe-se que $I_n = \left[\delta_{ij}\right]$, sendo δ_{ij} o símbolo de Kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}.$$

A *matriz nula* do tipo $p \times q$ é uma matriz em que todas as suas entradas são iguais a zero e representa-se por $0_{p \times q}$. Por vezes representa-se apenas por 0 (zero), quando no contexto está subentendido o tipo da matriz.

Definição 1.9. *Uma matriz quadrada diz-se matriz **triangular superior** se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, isto é, os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Analogamente, uma matriz quadrada diz-se matriz **triangular inferior** se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, isto é, os elementos acima da diagonal principal são nulos.*

Exemplo 1.10. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é triangular superior e B é uma matriz triangular inferior.

Definição 1.11. *Duas matrizes $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$ do tipo $p \times q$ dizem-se **iguais** se $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$.*

1.2 Operações com matrizes e suas propriedades

1.2.1 Adição de matrizes

Seja $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes do tipo $p \times q$ com elementos em $\mathbb{K}$.
A adição de matrizes é uma aplicação definida no produto cartesiano

$$M_{p\times q}(\mathbb{K}) \times M_{p\times q}(\mathbb{K})$$

que a cada par de matrizes (A, B) faz corresponder uma e uma só matriz $C \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ tal que $C = A + B$. Também se diz que esta é uma operação interna em $M_{p\times q}(\mathbb{K})$. Em termos de representação das entradas da matriz que resulta da adição de duas matrizes quaisquer pode apresentar-se a seguinte definição:

Definição 1.12. *Sejam $A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ tais que $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$. A **matriz soma** $A + B$ é a matriz de $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ definida por:*

$$A + B = \left[c_{ij}\right],$$

com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Por vezes escreve-se simplesmente $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]$.

Exemplo 1.13. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+6 & -2+(-1) & 3+2 \\ 4+7 & 5+8 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 11 & 13 & 9 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da adição de matrizes

Apresentam-se agora algumas propriedades da adição de matrizes. Ir-se-á provar algumas destas propriedades e as restantes demonstrações são deixadas como exercício.

Sejam $A, B, C \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ matrizes quaisquer.

- **Comutatividade:** $A + B = B + A$.

  Demonstração. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se:

  $$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix} && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} b_{ij} + a_{ij} \end{bmatrix} && \text{pela comutatividade em } \mathbb{K} \\ &= B + A \end{aligned}$$

  □

- **Associatividade:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

  Demonstração. Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Tem-se:

  $$\begin{aligned} (A + B) + C &= \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \end{bmatrix} && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) \end{bmatrix} && \text{pela associatividade em } \mathbb{K} \\ &= \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{ij} + c_{ij} \end{bmatrix} && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} \right) && \text{por definição de adição de matrizes} \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$

  □

- **Existência de elemento neutro:** $0_{p\times q} + A = A$.
- **Existência de elemento simétrico:** $A + (-A) = 0_{p\times q}$, onde, se $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, $-A = \begin{bmatrix} -a_{ij} \end{bmatrix}$.

As demonstrações da existência do elemento neutro e simétrico ficam como exercício.

Uma vez que são válidas estas quatro propriedades diz-se que $M_{p\times q}(\mathbb{K})$ munido da adição de matrizes é um *grupo abeliano* (ou *comutativo).*

Exercício 1.14. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 10 \\ 5 & -5 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 9 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $A - B$.

1.2.2 Multiplicação por um escalar

Pode também definir-se uma operação externa entre o conjunto das matrizes e o conjunto $\mathbb{K}$. A multiplicação por um escalar é uma aplicação definida no produto cartesiano $\mathbb{K} \times M_{p\times q}(\mathbb{K})$ que a cada par (α, A) faz corresponder uma e uma só matriz $C \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ tal que $C = \alpha A$. Assim:

Definição 1.15. *Seja $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ tal que $A = \left[a_{ij}\right]$ e seja $\alpha \in \mathbb{K}$ um escalar. A* ***matriz*** *αA é a matriz do tipo $p \times q$ que se obtém de A multiplicando todas as entradas de A pelo escalar α, ou seja:*

$$\alpha A = \left[\alpha a_{ij}\right],$$

com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$.

Exemplo 1.16. *Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, então*

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.17. *Calcule $2A - 3B$, sabendo que*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da multiplicação por um escalar

Sejam α, β escalares quaisquer e sejam $A, B \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ matrizes quaisquer.

- **Propriedade 1:** $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

  Demonstração. Sejam $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$, e seja $\alpha \in \mathbb{K}$. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha(A + B) &= \alpha \left[a_{ij} + b_{ij}\right] && \text{por definição de adição de matrizes} \\
&= \left[\alpha(a_{ij} + b_{ij})\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar} \\
&= \left[\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}\right] && \text{pela distributividade da multiplicação em relação à adição em } \mathbb{K} \\
&= \left[\alpha a_{ij}\right] + \left[\alpha b_{ij}\right] && \text{por definição de adição de matrizes} \\
&= \alpha \left[a_{ij}\right] + \alpha \left[b_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar} \\
&= \alpha A + \alpha B.
\end{aligned}$$

$\square$

- **Propriedade 2:** $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

  Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1,\dots,p\}$ e $j \in \{1,\dots,q\}$, e sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Tem-se que:

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)\left[a_{ij}\right] && \text{pela definição de matriz } A\\
&= \left[(\alpha+\beta)a_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \left[\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}\right] && \text{pela distributividade da multiplicação em relação à adição em } \mathbb{K}\\
&= \left[\alpha a_{ij}\right] + \left[\beta a_{ij}\right] && \text{pela definição de adição de matrizes}\\
&= \alpha\left[a_{ij}\right] + \beta\left[a_{ij}\right] && \text{por definição de multiplicação por um escalar}\\
&= \alpha A + \beta A
\end{aligned}$$

  □

- **Propriedade 3:** $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- **Propriedade 4:** $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}A = A$, onde $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação usual em $\mathbb{K}$ (note-se que, no nosso caso, $\mathbf{1}_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da multiplicação usual em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, ou seja, 1).

As demonstrações das Propriedades 3 e 4 ficam como exercício.

Exercício 1.18. *Considere as matrizes A e B do tipo 1×3 tais que:*

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule, aplicando as propriedades, $5(A+B) + 2\left(\frac{1}{2}A + B\right)$.

Prova-se também que é válida um tipo de "lei do anulamento" na multiplicação de uma matriz por um escalar.

Teorema 1.19. *Sejam $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então*

$$\alpha A = 0_{p\times q} \quad \text{se e só se} \quad \alpha = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } A = 0_{p\times q},$$

onde $0_{\mathbb{K}}$ é o elemento neutro da adição usual em $\mathbb{K}$ (ou seja, no nosso caso, 0).

Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1,\dots,p\}$ e $j \in \{1,\dots,q\}$.
Então $\alpha A = 0_{p\times q}$ é equivalente a

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha a_{ij}\right] = 0_{p\times q} && \text{por definição de multiplicação escalar}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha a_{ij} = 0,\ \forall i \in \{1,\dots,p\}, j \in \{1,\dots,q\} && \text{por definição de igualdade de matrizes}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee a_{ij} = 0,\ \forall i \in \{1,\dots,p\}, j \in \{1,\dots,q\} && \text{pela lei do anulamento do produto em } \mathbb{K}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee A = \left[a_{ij}\right] = 0_{p\times q}
\end{aligned}$$

□

1.2.3 Produto entre matrizes

Dadas duas matrizes A e B, o produto $A \times B$ só é possível se o número de colunas da primeira matriz coincide com o número de linhas da segunda matriz. A matrizes que satisfazem esta relação chamam-se *matrizes encadeadas*. Assim, dadas duas matrizes A e B, se queremos efectuar o produto $A \times B$ e se A é uma matriz do tipo $p \times q$ então B tem de ser uma matriz do tipo $q \times m$. Nesse caso a matriz resultante, que se representa por AB, é uma matriz do tipo $p \times m$. Esquematicamente

$$\underbrace{A}_{p\times q} \times \underbrace{B}_{q\times m} = \underbrace{AB}_{p\times m}.$$

Sejam A uma matriz do tipo $p \times q$ e B uma matriz do tipo $q \times m$. Note-se que AB está definido. Relativamente a BA, três hipóteses poderão ocorrer:

- BA poderá não estar definido; isso acontece se $m \neq p$;
- BA está definido (isto é, $p = m$) e BA será uma matriz do tipo $q \times q$ e AB será uma matriz do tipo $m \times m$; e neste caso podem surgir duas situações:
  - se $q \neq m$, AB e BA são de tipos diferentes e, consequentemente, $AB \neq BA$;
  - se $q = m$, AB e BA são do mesmo tipo mas poderão ser diferentes.

Exemplo 1.20. *Sejam A uma matriz do tipo 2×3, B uma matriz do tipo 3×4, C uma matriz do tipo 3×2 e D e E matrizes do tipo 4×4. Então:*

- *AB é do tipo 2×4 e BA não está definida;*
- *AC é do tipo 2×2 e CA é do tipo 3×3;*
- *DE é do tipo 4×4 e ED é do tipo 4×4.*

Veja-se então como se multiplicam matrizes. Considere-se primeiro o caso particular do produto de uma matriz linha por uma matriz coluna.

Definição 1.21. *Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$. Então o **produto da matriz linha** A **pela matriz coluna** B é:*

$$AB = \left[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_pb_p\right].$$

Observe-se que se A é uma matriz do tipo $1 \times p$ e B é uma matriz do tipo $p \times 1$, então AB é uma matriz do tipo 1×1.

Exemplo 1.22. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. *Então*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 0 \times 3 + (-2) \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}.$$

Já é possível agora definir o produto entre duas matrizes encadeadas quaisquer tendo por base a definição do caso particular anterior.

Definição 1.23. *Sejam A e B matrizes do tipo $p \times q$ e $q \times m$, respectivamente. O* ***produto de** A **por** B*, representa-se por AB, é a matriz do tipo $p \times m$ que se obtém considerando para elemento (i, j) o produto da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.*

Formalmente tem-se que, para $A = \begin{bmatrix} a_{ik} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{kj} \end{bmatrix}$, com $i \in \{1, \dots, p\}$, $k \in \{1, \dots, q\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, o produto de A por B é a matriz AB do tipo $p \times m$ definida por:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}, \qquad \text{com } i \in \{1, \dots, p\} \text{ e } j \in \{1, \dots, m\}$$

onde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{iq}b_{qj} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}.$$

Esquematicamente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{iq} \\ \\ \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{qj} & \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \\ & & & \\ \end{bmatrix}}_{AB}$$

Exemplo 1.24. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Então*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 3 \times (-1) & 2 \times 0 + 3 \times 2 \\ 0 \times 5 + (-1) \times (-1) & 0 \times 0 + (-1) \times 2 \\ 1 \times 5 + 4 \times (-1) & 1 \times 0 + 4 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 1 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.25. *Calcule, se possível, o produto AB sabendo que*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe-se que dada uma matriz A do tipo $p \times q$, com $p \neq q$, não está definido o produto $A^2 = AA$. Facilmente se conclui que só se pode definir *potência de uma matriz* para matrizes quadradas. De uma forma geral, se A é uma matriz quadrada de ordem n, A^k, com $k \geq 1$, representa a matriz quadrada de ordem n definida por:

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ factores}}.$$

Por convenção, $A^0 = I_n$.

Observe-se que pode ter-se $A^2 = 0_{p \times p}$ e, no entanto, $A \neq 0_{p \times p}$.

Exemplo 1.26. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *tem-se que*

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 2}.$$

Pode então concluir-se que não é válida a lei do anulamento no conjunto $M_{n \times n}(\mathbb{K})$. De facto, dadas duas matrizes A e B encadeadas, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Exemplo 1.27. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Então*

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades do produto de matrizes

Sejam α um escalar e A, B, C matrizes quaisquer com tamanhos adequados.

- **Existência de elemento neutro:** Se A e B forem do tipo $p \times q$, então $I_p A = A$ e $B I_q = B$;
- **Associatividade:** $A(BC) = (AB)C$;
- **Associatividade mista:** $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- **Distributividade:** $A(B + C) = AB + AC$ e $(A + B)C = AC + BC$.

Recorde-se que o produto de matrizes não é comutativo (encontre um contra--exemplo!) e, consequentemente, multiplicar à direita ou à esquerda por uma matriz (não nula) não é a mesma coisa!

1.2.4 Transposta de uma matriz

Definição 1.28. *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz do tipo $p \times q$. Chama-se* ***transposta*** *da matriz A, e representa-se por A^T, à matriz do tipo $q \times p$ tal que*

$$A^T = [a'_{ji}] .$$

com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$.

Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix},$$

então

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1q} & a_{2q} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, as linhas da matriz A^T são as colunas da matriz A.

Exemplo 1.29. *Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. A transposta de A é a seguinte matriz:*

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da transposta de uma matriz

Seja α um escalar e sejam A, B matrizes quaisquer com os tamanhos adequados.

- **Transposta da transposta:** $\left(A^T\right)^T = A$.

  Demonstração. Seja $A = [a_{ij}]$, com $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Por definição, $A^T = [a'_{ji}]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \dots, q\}$ e $i \in \{1, \dots, p\}$. Assim,

  $$\left(A^T\right)^T = [a'_{ji}]^T = [a''_{ij}]$$

  onde $a''_{ij} = a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ e $j \in \{1, \dots, q\}$. Logo $\left(A^T\right)^T = A$. $\square$

- **Transposta da multiplicação por um escalar:** $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

  Demonstração. Seja $A = \left[a_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Ora, sendo $A^T = \left[a'_{ji}\right]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$ e $i \in \{1, \ldots, p\}$, então
  $$(\alpha A)^T = \left[\alpha a_{ij}\right]^T = \left[\alpha a'_{ji}\right] = \alpha \left[a'_{ji}\right] = \alpha A^T.$$
  □

- **Transposta da soma:** $(A + B)^T = A^T + B^T$.

  Demonstração. Sejam $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{ij}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Por definição de adição de matrizes, $A + B = \left[c_{ij}\right]$, com $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Assim,
  $$(A + B)^T = \left[c'_{ji}\right]$$
  com $c'_{ji} = c_{ij}$, para todo $j \in \{1, \ldots, q\}$ e $i \in \{1, \ldots, p\}$.

  Por outro lado, como $A^T = \left[a'_{ji}\right]$, com $a'_{ji} = a_{ij}$, e $B^T = \left[b'_{ji}\right]$, com $b'_{ji} = b_{ij}$, vem que $A^T + B^T = = \left[a'_{ji}\right] + \left[b'_{ji}\right] = \left[a'_{ji} + b'_{ji}\right] = \left[d_{ji}\right]$, onde a entrada (j, i) é
  $$d_{ji} = a'_{ji} + b'_{ji} = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} = c'_{ji}.$$
  E, portanto, $A^T + B^T = (A + B)^T$. □

- **Transposta do produto:** $(AB)^T = B^T A^T$.

  Demonstração. Sejam $A = \left[a_{ik}\right]$ e $B = \left[b_{kj}\right]$, com $i \in \{1, \ldots, p\}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Tem-se que
  $$AB = \left[c_{ij}\right], \quad \text{onde } c_{ij} = \sum_{l=1}^{q} a_{il} b_{lj}$$
  para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Assim
  $$(AB)^T = \left[c'_{ji}\right], \quad \text{onde } c'_{ji} = c_{ij}.$$
  Por outro lado, $A^T = \left[a'_{ki}\right]$, com $a'_{ki} = a_{ik}$, e $B^T = \left[b'_{jk}\right]$, com $b'_{jk} = b_{kj}$, para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Assim,
  $$B^T A^T = \left[d_{ji}\right], \quad \text{onde a entrada } (j, i) \text{ é}$$
  $$d_{ji} = \sum_{l=1}^{q} b'_{jl} a'_{li} = \sum_{l=1}^{q} b_{lj} a_{il} = \sum_{l=1}^{q} a_{il} b_{lj} = c'_{ji}.$$
  Logo $(AB)^T = B^T A^T$. □

Definição 1.30. *Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$.*

Observe-se que esta definição obriga a que a matriz A seja uma matriz quadrada. Além disso, uma matriz quadrada de ordem p é simétrica se existir simetria relativamente à diagonal principal, isto é, se é da forma

$$A = \left[a_{ij}\right], \text{ com } a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemplo 1.31. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *é simétrica.*

Definição 1.32. *Uma matriz A diz-se **anti-simétrica** se $A^T = -A$.*

Assim, a definição obriga a que A, para ser anti-simétrica, seja quadrada e os elementos da sua diagonal principal sejam todos nulos. Além disso, em posições opostas em relação à diagonal principal, estão elementos simétricos entre si.

Exemplo 1.33. *A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *é anti-simétrica.*

Exercícios 1.34.

1. *Seja A uma matriz quadrada. Prove que:*
   - *a)* $A + A^T$ *é simétrica;*
   - *b)* $A - A^T$ *é anti-simétrica.*
2. *Mostre que qualquer matriz quadrada se pode decompor na soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.*
3. *Em cada caso, prove que a afirmação é verdadeira ou apresente um contra-exemplo mostrando que é falsa. Sejam A, B e C matrizes de tamanhos adequados.*
   - *a) Se $A + B = A + C$ então B e C são do mesmo tipo.*
   - *b) Se $A + B = 0$, então $B = 0$.*
   - *c) Se a entrada $(2, 3)$ da matriz A é 7, então a entrada $(3, 2)$ de A^T é -7.*
   - *d) Se $A = -A$, então $A = 0$.*
   - *e) Para toda a matriz A, as matrizes A e A^T têm a mesma diagonal.*
   - *f) A igualdade $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ é sempre válida para quaisquer matrizes.*
   - *g) Se $A^2 = A$ então $A = 0$ ou $A = I$.*
4. *Sejam $A \in M_{p\times q}(\mathbb{K})$ e $B, C \in M_{q\times m}(\mathbb{K})$ matrizes quaisquer. Aplicando as propriedades das operações entre matrizes, mostre, de duas formas distintas, que*
$$(A(B + C))^T = B^T A^T + C^T A^T.$$