42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES X

Vítor Neves

2009/2010

Capítulo 6

Equações diferenciais ordinárias

6.4 Existência e unicidade

$$\begin{cases} y' \ = \ f(x,y) & f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \& \ \textbf{contínua} \\ y(x_0) \ = \ y_0 & (x_0, y_0) \in \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Teorema 6.4.1 *O problema* (6.1) *é equivalente à equação integral seguinte em y.*

$$y(x) \ = \ y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{6.2}$$

Lema 6.4.1 ***(De Gronwall)*** *Se a função $\varphi : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e para certos $C, L \in \mathbb{R}_0^+$ satisfaz*

$$0 \ \leq \ \varphi(x) \ \leq \ C + L\int_a^x \varphi(t)dt \qquad (x \in [a,b]), \tag{6.3}$$

então

$$\forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \ \leq \ Ce^{L(x-a)} \tag{6.4}$$

6.4.1 Unicidade

Definição 6.4.1 *Para $0 \leq L \in \mathbb{R}$, f diz-se $L-$**Lipschitziana** (ou que* satisfaz uma condição de Lipschitz) *em y no conjunto $C \subseteq \Omega$, quando*

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in C \quad |f(x, y) - f(x, w)| \leq L|y_1 - y_2|. \tag{6.5}$$

Teorema 6.4.2 *Se f é $L-$Lipschitziana em y em $C \subseteq \Omega$, $I \times J$ é o rectângulo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq C$, e o problema* (6.1) *tem solução $\phi : I \to J$, então ϕ é a única solução definida em I.*

6.4.2 Existência e unicidade

Tenha-se bem presente que f ***é contínua por hipótese***.

Teorema 6.4.3 ***(de Picard-Lindeloef)***
Se f é $L-$Lipschitziana em y (em Ω), existe algum $\varepsilon > 0$ para o qual o problema de Cauchy (6.1) *tem solução única definida em $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.*

"Dem."

O teorema vale por ser possível determinar constantes reais, de modo a que

$$\begin{aligned} R &:= [x_0 - \theta, x_0 + \theta] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] && (6.6) \\ M &\geq \text{máx}\{|f(x, y)| \big| \ (x, y) \in R\} && (6.7) \\ \alpha &:= \min\left(\theta, \frac{\beta}{M}\right) && (6.8) \end{aligned}$$

o que determina a convergência uniforme da sucessão definida por recorrência

$$\begin{cases} u_0(x) = y_0 \\ u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dx \quad n \geq 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

para uma solução, que será única pelo teorema 6.4.2