Análise Matemática II

P. Cerejeiras

Aveiro, 2^o semestre de 2015/2016

0 Espaços métricos

O objectivo desta secção é o estender o estudo da convergência de sucessões e de séries de números reais (tratado em Análise Matemática 1) ao caso de estruturas mais gerais, que permitam, por exemplo, estudar a convergência de sequências de objectos (e.g., matrizes, ou funções) pertencentes a um dado espaço vectorial.

0.1 Produto interno

O tradicional produto interno no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ permite introduzir os conceitos de *comprimento de vectores* e de *ângulo entre vectores*. Mais, dado um sistema linear $Ax = y$, do qual são conhecidos os valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, associados à matriz A, e correspondentes vectores próprios $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, então é sabido que o sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^3$ e, para $y = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$, tira-se automaticamente a solução do sistema $Ax = y$ como

$$x = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\vec{v}_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\vec{v}_2 + \frac{\alpha_3}{\lambda_3}\vec{v}_3,$$

assumindo que os valores próprios λ_j são não nulos. Vamos agora generalizar este conceito ao caso de um espaço vectorial real (de dimensão arbitrária).

Definição 0.1. *Dado um espaço vectorial real X (dito, espaço linear) chamamos produto interno a uma aplicação*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle, \tag{0.1}$$

que verifica

i) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle$ *sse* $x = 0$; *(positividade)*

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; *(comutatividade)*

iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; *(associatividade)*

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, *(distributividadde)*

para todos $x, y, z \in X$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como exemplos de espaços vectoriais reais, considere-se

1) $X = \mathbb{R}^2$, onde $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.

2) $X = C[0, 1]$, com $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

3) $X = C[0,1]$, com $\langle f,g\rangle_w := \int_0^1 f(t)g(t)w(t)dt$, onde $w = w(t)$ representa uma função contínua positiva (dita, *função peso*).

Teorema 0.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.**

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle, \quad \forall x,y \in X. \tag{0.2}$$

Demonstração. Tome-se $z = x + \lambda y \in X$. Tem-se

$$0 \leq \langle z,z\rangle = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle.$$

Para $\langle z,z\rangle = 0$ então $z = x + \lambda y = 0$ e temos que x e y são colineares. Para $\langle z,z\rangle > 0$ então o discriminante da polinómio do segundo grau em λ terá que ser negativo, ou seja,

$$b^2 - 4ac = 4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle < 0,$$

o que conclui a prova. □

Deste teorema retira-se automaticamente a desigualdade (ver Exemplo 2))

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_0^1 (f(t))^2dt\right)\left(\int_0^1 (g(t))^2dt\right)$$

Definição 0.2. *Sendo X um espaço vectorial real com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$, chama-se norma induzida por produto interno à aplicação*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| := \langle x,x\rangle \geq 0. \tag{0.3}$$

No que se segue, X denotará sempre um espaço vectorial real não vazio.

0.2 Definição de espaço métrico

Comecemos por definir *sucessão de elementos no espaço vectorial real X* (não vazio).

Definição 0.3. *Chamamos sucessão em X a toda a aplicação*

$$\varphi : \mathbb{N} \to X, \quad n \mapsto u_n \in X,$$

e escrevemos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

As sucessões de números reais (estudadas em AM1) constituem o caso particular de sucessões em $X = \mathbb{R}$.

Já a aplicação

$$n \mapsto u_n, \quad u_n(x) := x^n + n,\ x \in [0,1],$$

ou seja,

$$u_1(x) = x + 1, \quad u_2(x) = x^2 + 2, \quad u_3(x) = x^3 + 3, \cdots,$$

com $x \in [0, 1]$, estabece uma sucessão no espaço $X = C[0, 1]$, das funções reais contínuas de variável real no intervalo $[0, 1]$.

Outro exemplo é o espaço $X = \mathbb{R}^2$, dos pares ordenados de números reais. A sucessão

$$n \mapsto u_n, \quad u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \in \mathbb{R}^2,$$

ou seja,

$$u_1 = (1, \frac{1}{2}), \quad u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), \quad u_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}), \cdots,$$

constitui uma sucessão de pares de números reais.

Definido o que se entende por uma sucessão X, estabeleça-se o conceito de *limite desta sucessão.* A definição usual de convergência de uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais para $x \in \mathbb{R}$ diz que, para todo o $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x| < \epsilon, \tag{0.4}$$

e escrevemos $\lim_n x_n = x$. Esta definição assenta no estudo da proximidade entre os elementos x_n e x, de $\mathbb{R}$, pelo que é razoável definir convergência com base numa conveniente definição de *distância.*

Definição 0.4 (Distância)**.** *Dado um espaço X, chamo distância, ou métrica, em X a toda a aplicação $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifique*

i) $d(x, x) = 0$;

ii) $d(x, y) > 0$ *para todo* $x \neq y$;

iii) $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetria);*

iv) $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdade triangular),*

para todos $x, y, z \in X$.

Note-se que as condições *i)* e *ii)* são equivalentes a afirmar que $d(x, y) \geq 0$, com $d(x, y) = 0$ sse $x = y$. É igualmente óbvio que o mesmo espaço pode ser munido de diferentes métricas.

Também notar que, se X possuir um produto interno, então $d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y\rangle$ constitui uma distância em X (dita *distância induzida pelo produto interno*).

Definição 0.5 (Espaço métrico)**.** *Chama-se espaço métrico ao par (X, d), onde d é uma distância em X.*

No caso das sucessões de números reais, temos $X = \mathbb{R}$ e a distância usada é a distância Euclideana $d_{Euc}(x, y) = |x - y|$. Todavia,

$$d_{disc}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

é também uma distância em $X = \mathbb{R}$. Obviamente, os espaços $(\mathbb{R}, d_{Euc})$ e $(\mathbb{R}, d_{disc})$ são espaços métricos distintos.

Outros exemplos:

1) $X = C[0, 1]$ munido da distância

$$d(f, g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx;$$

2) $X = \mathbb{R}^d, (d \in \mathbb{N})$, munido da distância ℓ_1, ou métrica do táxista,

$$d_{\ell_1}\left((x_1, x_2, \cdots, x_d), (y_1, y_2, \cdots, y_d)\right) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_d - y_d|;$$

3) $X = \mathbb{R}^d, (d \in \mathbb{N})$, munido da distância ℓ_2, ou métrica Euclideana,

$$d_{\ell_2}\left((x_1, x_2, \cdots, x_d), (y_1, y_2, \cdots, y_d)\right) := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_d - y_d|^2};$$

4) $X = \mathbb{R}^d, (d \in \mathbb{N})$, munido da distância ℓ_∞,

$$d_{\ell_\infty}\left((x_1, x_2, \cdots, x_d), (y_1, y_2, \cdots, y_d)\right) := \sup_{j=1,2,\cdots,d} |x_j - y_j|;$$

5) X é o espaço das funções reais de variável real num dado intervalo $D \subset \mathbb{R}$, com a distância (métrica do supremo)

$$d_{sup}(f, g) := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|.$$

0.3 Convergência em espaços métricos

Definição 0.6 (Convergência em espaço métrico)**.** *Dados um espaço métrico (X, d) e uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X, e $u \in X$, diremos que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em (X, d) se e só se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > N \quad \Rightarrow \quad d(u_n, u) < \epsilon, \tag{0.5}$$

ou seja,

$$\lim_n d(u_n, u) = 0.$$

O seguinte lema mostra a equivalência entre a Definição 0.6 e a convergência usual de sucessões de números reais.

Lema 0.1. *Considere-se a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais, e $x \in \mathbb{R}$. Temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x se e só se $\lim_n d_{Euc}(x_n, x) = 0$.*

Demonstração. $\lim_n x_n = x$ é equivalente a afirmar que para todo o $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}\Big(n > N \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon\Big) \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(n > N \Rightarrow d_{Euc}(x_n, x) < \epsilon\Big)\\ &\Leftrightarrow \quad \Big(n > N \Rightarrow |d_{Euc}(x_n, x) - 0| < \epsilon\Big),\end{aligned}$$

ou seja, $\lim_n d_{Euc}(x_n, x) = 0$. □

A sucessão $\mathbb{N} \ni n \mapsto u_n$, dada por $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) \in \mathbb{R}^2$, converge para $(0,0)$ em $(\mathbb{R}^2, d_{\ell_1})$, uma vez que

$$d_{\ell_1}\Big((\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}), (0,0)\Big) = |\frac{1}{n} - 0| + |\frac{1}{n+1} - 0| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Todavia, esta sucessão não converge no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_{disc})$. Com efeito, suponha-se que a sucessão converge para $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ segundo d_{disc}. Então, para $\epsilon = 0,5 (< 1)$, existirá uma ordem $N(0,5) \in \mathbb{N}$ tal que para todo o natural $n > N$ se terá

$$d_{disc}\Big((\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}), (x_0, y_0)\Big) < 0,5.$$

Da Definição 0.2, i) e ii), resulta que $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}) = (x_0, y_0)$ para todos $n > N$, o que é falso. Em consequência, não pode existir o limite (x_0, y_0).

Este exemplo levanta a questão de quando é que a convergência em (X, d_1) implica a convergência em (X, d_2)?

Definição 0.7 (Equivalência de métricas)**.** *Sejam d_1, d_2 duas distâncias num mesmo espaço X. Estas distâncias dizem-se equivalentes, e escrevemos $d_1 \sim d_2$, se e só se existirem constantes reais $0 < A \leq B < \infty$ tais que*

$$Ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Bd_1(x, y), \tag{0.6}$$

para todos $x, y \in X$.

A equivalência entre distâncias é

1) reflexiva: $d_1 \sim d_1$;

2) simétrica: $d_1 \sim d_2 \quad \Rightarrow \quad d_2 \sim d_1$;

3) transitiva: $d_1 \sim d_2 \ \wedge \ d_2 \sim d_3 \quad \Rightarrow \quad d_1 \sim d_3$,

onde d_1, d_2 e d_3 são distâncias num mesmo espaço X.

Lema 0.2. *Se a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em (X,d_1), e d_1,d_2 são distâncias equivalentes em X, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para u em (X,d_2).*

Demonstração. Temos que $\lim_n d_1(u_n,u)=0$, e existem constantes $0<A\le B<\infty$ tais que

$$Ad_1(u_n,u)\le d_2(u_n,u)\le Bd_1(u_n,u).$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas, vem que $\lim_n d_2(u_n,u)=0$. □

Como exemplo, note-se que as distâncias d_{ℓ_1} e d_{ℓ_2} são equivalentes em $\mathbb{R}^d$, uma vez que

$$d_{\ell_2}(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_d-y_d)^2} \underbrace{\le}_{a^2+b^2\le(a+b)^2,\ a,b\ge 0} |x_1-y_1|+\cdots+|x_d-y_d|=d_{\ell_1}(x,y)$$

e

$$d_{\ell_1}(x,y)=|x_1-y_1|+\cdots+|x_d-y_d| \underbrace{\le}_{|a|\le\sqrt{a^2+b^2}} d\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_d-y_d)^2}=d\ d_{\ell_2}(x,y).$$

Assim, a sucessão $(\frac{1}{n},\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ que provámos convergir para $(0,0)$ em (R^2,d_{ℓ_1}), também converge para $(0,0)$ em $(\mathbb{R}^2,d_{\ell_2})$, dado que $d_{\ell_2}\sim d_{\ell_1}$.

0.4 Sequências de Cauchy e espaços métricos completos

Definição 0.8 (Sequência de Cauchy)**.** *Dados um espaço métrico (X,d), e uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X, diremos que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitui uma sucessão de Cauchy em (X,d) se e só se*

$$\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}:\quad n>N\quad\Rightarrow\quad\Big(d(u_n,u_{n+m})<\epsilon,\ \forall m\in\mathbb{N}\Big), \tag{0.7}$$

ou seja,

$$\lim_n d(u_n,u_{n+m})=0,$$

para todo $m=1,2,3,\ldots$

Definição 0.9 (Espaço métrico completos)**.** *Um espaço métrico (X,d) diz-se completo se toda a sucessão de Cauchy em (X,d) tiver limite em (X,d).*

Um exemplo de um espaço métrico completo é o espaço $(\mathbb{R},d_{disc})$. Com efeito, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fôr uma sucessão de Cauchy em $(\mathbb{R},d_{disc})$, ou seja,

$$\forall\epsilon>0,\exists N=N(\epsilon)\in\mathbb{N}:\quad n>N\quad\Rightarrow\quad\Big(d_{disc}(x_n,x_{n+m})<\epsilon,\ \forall m\in\mathbb{N}\Big),$$

então para $\epsilon<1$ vem

$$n>N\quad\Rightarrow\quad 0=d_{disc}(x_n,x_{n+m})<\epsilon,\ \forall m\in\mathbb{N},$$

ou seja, $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x \in \mathbb{R}$, e a sucessão dada converge para x em $(\mathbb{R}, d_{disc})$.

Atenção: o espaço métrico $(\mathbb{R}, d_{disc})$ não é equivalente a $(\mathbb{R}, d_{Euc})$.

1 Sucessões e séries de funções

Pressupõe-se o conhecimento de sucessões e séries numéricas leccionadas em Análise Matemática 1.

1.1 Sucessões de funções

No que se segue, X representa o espaço das funções reais de variável real num intervalo $D \subset \mathbb{R}$, não vazio. Note-se que este espaço é um espaço vectorial para a adição pontual

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),$$

e produto pontual por um escalar real λ,

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

onde $x \in D$, e $f, g \in X$.

Definição 1.1 (Sucessão de funções). *Designa-se por sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço X a toda a aplicação de $\mathbb{N}$ em X ou seja, $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in X$, com*

$$u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to u_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

e denota-se por

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots).$$

A função u_n designa-se por termo de ordem n da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Note-se que a sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitui uma *sucessão ordenada de funções* cujo domínio, para a variável x, é $D \subset \mathbb{R}$, e onde a cada concretização da variável $x \in D$ corresponde uma sucessão numérica. Em estrito rigor, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ designa uma *sucessão de funções* enquanto que

$$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots)$$

designa a *concretização dessa sucessão na variável $x \in D$*. Por abuso de linguagem, não faremos distinção entre ambas as notações.

Definição 1.2 (Convergência pontual). *A sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço X (onde $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$) converge pontualmente para a função $u \in X$ (onde $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) se para cada*

$x \in D$, a sucessão numérica $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u(x) \in \mathbb{R}$, isto é, se para todo o $\epsilon > 0$, existir uma ordem $N = N(\epsilon, x)$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \epsilon.$$

A função $u \in X$ diz-se limite (pontual) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, e escreve-se $\lim_n u_n = u$.

Exemplo 1.1. *Considerar o $D = [0, 1]$ nos exemplos que se seguem.*

(i) A sucessão de funções de termo geral $u_n(x) = x^n$ converge para $u(x) = 0,\ x \in [0, 1[,\ u(1) = 1$;

(ii) a sucessão de funções de termo geral $u_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ converge para $u(x) = 0,\ x \in]0, 1],\ u(0) = 1$;

(iii) a sucessão de funções de termo geral $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ converge para $u(x) = 0,\ x \in [0, 1]$;

(iv) a sucessão de funções de termo geral $u_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$; converge para $u(x) = 0,\ x \in [0, 1]$.

Na figura seguinte são dados os gráficos dos primeiros termos destas sucessões.

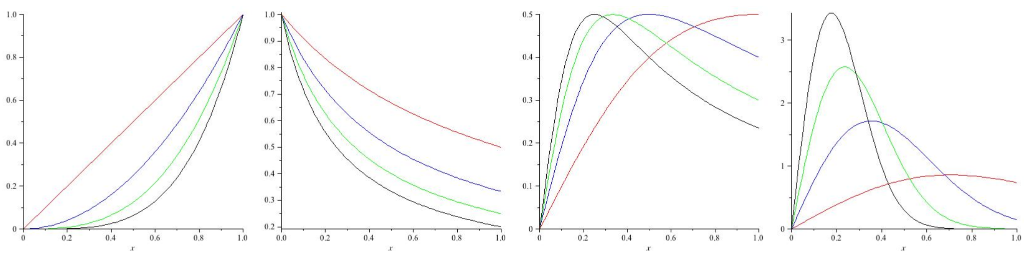

Figura 1: Gráficos dos primeiros quatro termos das sucessões dadas, respectivamente.

As séries de funções são introduzidas à custa da sucessão das suas somas parciais.

Definição 1.3 (Série de funções). *Seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em X (ou seja, $f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$) Chama-se série de funções, e denota-se por*

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} f_j,$$

à sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das somas parciais dos primeiros n termos de $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, onde

$$s_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x).$$

Definição 1.4 (Convergência pontual de uma série de funções). *Seja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ uma série em X (ou seja, $f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$).*

Chama-se soma da série ao limite (pontual) da sucessão das somas parciais $S = \lim_n s_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Note-se que a notação $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ representa simultaneamente a *sucessão das soma parciais*

$$s_1 = f_1, \quad s_2 = f_1 + f_2, \quad \dots, \quad s_n = f_1 + \cdots + f_n, \quad \cdots,$$

e a *soma da série*, limite pontual da sucessão das somas parciais,

$$S = \lim_n s_n = \lim_n (f_1 + \cdots + f_n).$$

Consequências:

(i) Os resultados e teoremas válidos para sucessões e séries numéricas são agora extensíveis a sucessões e séries de funções. Em particular, o limite pontual de uma sucessão de funções, se existir, é único.

(ii) Dos termos da série obtêm-se os termos da sucessão das somas parciais associada. Conversamente, a partir dos termos da sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recuperam-se os termos da série por meio da relação de recorrência

$$f_1(x) = s_1(x), \quad f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), n \geq 2, \quad x \in D.$$

1.2 Convergência pontual e convergência uniforme

A convergência pontual não é suficiente para garantir a transição, no limite, de propriedades como a continuidade, a primitivação ou a diferenciação. Para tal, é necessário exigir convergência no espaço métrico (X, d_{sup}), isto é, no espaço linear das funções reais de variável real num intervalo $D \subset \mathbb{R}$, munido da métrica do supremo

$$d_{sup}(f, g) := \sup_{x\in D} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in X.$$

Definição 1.5 (Convergência uniforme)**.** *Sejam $u_n, u \in X$, com $n \in \mathbb{N}$.*

A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se que converge uniformemente para u em D, e escreve-se $\lim_n u_n \overset{unif}{=} u$, se convergir para u em (X, d_{sup}), isto é, se para todo o $\epsilon > 0$, existir uma ordem $N = N(\epsilon)$ tal que

$$n > N(\epsilon) \Rightarrow d_{sup}(u_n, u) < \epsilon.$$

Exemplo 1.2. *(i) A sucessão de termo geral $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in [0, 1]$ converge pontualmente para $u(x) = 0$. A diferença entre o termo geral da sucessão e o seu limite é estimável por*

$$0 \leq u_n(x) - u(x) = \frac{1}{2n} \frac{2nx}{1 + n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

donde concluimos que, para todo o $\epsilon > 0$, existe um $N = N(\epsilon) = \left[\frac{1}{2\epsilon}\right]$ tal que

$$n > N(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad d_{sup}(u_n, u) = \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x) - u(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} < \epsilon,$$

ou seja, a sucessão de termo geral $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge uniformente para $u \equiv 0$ em $D = [0,1]$.

(ii) Já a sucessão de termo geral $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in [0,1]$, converge pontualmente para o mesmo limite da sucessão anterior mas tem a diferença entre o termo geral da sucessão e o seu limite majorada por

$$0 \leq u_n(x) - u(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}.$$

Assim, para $x_n = \frac{1}{n}$ tem-se

$$d_{sup}(u_n, u) = sup_{x\in[0,1]}|u_n(x) - u(x)| \geq |u_n(\frac{1}{n}) - u(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2}.$$

A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $u \equiv 0$ em (X, d_{sup}), ou seja, não converge uniformemente em $D = [0,1]$.

Lema 1.1. *Sejam $u_n, u \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) A sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em (X, d_{sup});

ii) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \quad : \quad n > N \quad \Rightarrow \quad \Big(|u_n(x) - u(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in D\Big)$

Lema 1.2. *(X, d_{sup}) é um espaço métrico completo.*

A demonstração destes dois lemas é deixada como exercício.

Definição 1.6 (Convergência uniforme de série de funções)**.** *Seja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ uma série em X, isto é, $f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$.*

Diz-se que a série $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ converge uniformemente para S em D, ($S : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), e escreve-se $\sum_{j=1}^{\infty} f_j \overset{unif}{=} S$, se a sucessão das suas somas parciais convergir para S em (X, d_{sup}).

A convergência da sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$ para S em (X, d_{sup}) é equivalente ao estudo da convergência da sucessão dos restos, de termo geral

$$\begin{aligned} D \ni x \mapsto R_n(x) &= f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \cdots \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Porque

$$s_n(x) + R_n(x) = S(x) \quad \Leftrightarrow \quad R_n(x) = S(x) - s_n(x), \quad x \in D,$$

a sucessão dos restos tem os seus termos bem definidos, e a convergência da sucessão das somas parciais para S em (X, d_{sup}) é equivalente à convergência da sucessão dos restos para a função nula em (X, d_{sup}).

Exemplo 1.3. *A série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

corresponde à sucessão das somas parciais

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} x^{j-1}$$

$$= \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & x \neq 1 \\ n, & x = 1 \end{cases},$$

pelo que converge pontualmente para $S(x) = \frac{1}{1-x}$ se $|x| < 1$.

Já a sucessão dos restos tem por termo geral

$$R_n(x) = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots = x^n \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

com

$$d_{sup}(R_n, 0) = \sup_{|x|<1} |R_n(x) - 0| = \lim_{x \to 1^-} |R_n(x)| = \infty.$$

Assim, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ não converge uniformemente em $]-1, 1[$. Todavia, converge uniformente em qualquer sub-intervalo $[-a, a], 0 < a < 1$.

Teorema 1.1 (Critério de Weierstrass)**.** *Seja $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ uma série em X, isto é, $f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Se existe uma sucessão de reais $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que*

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$|f_n(x)| \leq c_n, \forall x \in D;$$

(ii) a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge,

então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge em (X, d_{sup}).

Demonstração. Vamos provar que sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$ é uma sucessão de Cauchy em (X, d_{sup}). Com efeito,

$$\begin{aligned} d_{sup}(s_n, s_{n+m}) &= \sup_{x \in D} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \\ &\leq \sup_{x \in D} (|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+m}(x)|) \\ &\leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m} \quad \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty, \end{aligned}$$

e qualquer $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolário 1.1.1. *Se a série de reais* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *fôr absolutamente convergente então as séries de cosinos,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$, *e de sinos,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$, *convergem uniformemente em* $\mathbb{R}$.

1.3 Continuidade, integração e derivação termo a termo

Teorema 1.2 (Continuidade)**.** *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *uma sucessão de funções contínuas.*

Se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para* u *em* (X, d_{sup}), *então* u *é uma função contínua em* D.

Demonstração. Por hipótese da continuidade das funções u_n, para cada ponto $x_0 \in D$ e $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ tal que

$$\forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Porque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u em (X, d_{sup}), para todo o $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(t) - u(t)| \leq \sup_{x\in D} |u_n(x) - u(x)| = d_{sup}(u_n, u) < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall t \in D.$$

Fixe-se $n > N(\epsilon)$. Existe então um $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ tal que para, todo o $x \in D$ se tem

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| &\leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u(x_0)| \\ &\leq d_{sup}(u_n, u) + |u_n(x) - u_n(x_0)| + d_{sup}(u_n, u) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 1.2.1. *Se a série de funções contínuas* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge para* S *em* (X, d_{sup}) *então* S *é uma função contínua em* D.

De notar que o Teorema 1.2 estabelece uma condição **suficiente**, mas **não necessária**. Reveja-se o Exemplo 1.2 *(ii)* para confirmar que uma sucessão pode não convergir uniformente e ainda assim o limite ser uma função contínua.

Passamos agora aos teoremas referentes à primitivação e derivação, termo a termo, de sucessões (resp., séries) de funções.

Teorema 1.3 (Integração termo a termo)**.** *Seja* $D = [a, b], a < b$. *Se a sucessão de funções contínuas* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* u *em* (X, d_{sup}) *então para todo o* $x_0 \in D$, *tem-se que a sucessão das primitivas, de termo geral* $U_n(x) = \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$, *converge para* $U(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)dt$ *em* (X, d_{sup}).

Demonstração. Pelo Teorema 1.2, as primitivas U_n e U existem.

Para todo o $\epsilon > 0$ existe uma ordem $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(t) - u(t)| \leq \sup_{x \in D} |u_n(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

para todo o $t \in D$. Então, para $n > N$ temos

$$\sup_{x\in D} |U_n(x) - U(x)| = \sup_{x\in D} \left| \int_{x_0}^{x} (u_n(t) - u(t))dt \right| < \frac{\epsilon}{b-a} |x - x_0| \leq \epsilon.$$

$\square$

Corolário 1.3.1. *Se a série de funções contínuas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para S em (X, d_{sup}) então para todo $x_0 \in D$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \right) = \int_{x_0}^{x} S(t)dt.$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação destes resultados.

Exemplo 1.4. *Foi provado que a série de funções contínuas*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

converge uniformemente em qualquer intervalo fechado $[-R, R] \subset]-1, +1[$. Usando este facto, obtém-se a expansão em série de funções contínuas de $\ln(1 + x)$, isto é,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - \cdots) dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \end{aligned}$$

válido para todo $x \in [-R, R] \subset] - 1, +1[$.

Teorema 1.4 (Derivação termo a termo)**.** *Seja $D = [a, b], a < b$.*

Se a sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ($u_n : D = [a, b] \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$), verifica

i) converge pontualmente para u em D;

ii) as derivadas u_n' são contínuas em D, $n = 1, 2, \cdots$;

iii) a sucessão das derivadas $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge em (X, d_{sup});

então $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* u' *em* (X, d_{sup}).

Demonstração. Designe-se por u^* o limite da sucessão das derivadas $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Teorema 1.2, u^* é contínua em D. Pela condição $ii)$, os integrais $\int_a^x u_n'(t)dt$ existem, qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$.

Integrando, vem

$$\begin{aligned}\int_a^x u^*(t)dt &= \lim_n \int_a^x u_n'(t)dt \qquad \text{por iii) e Teorema 1.3}\\ &= \lim_n (u_n(x) - u_n(a))\\ &= u(x) - u(a), \quad x \in D, \qquad \text{por i).}\end{aligned}$$

Pela unicidade do integral definido de uma função contínua, resulta a igualdade $u^* = u'$ em D.

□

Corolário 1.4.1. *Se a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *verifica*

i) a série converge pontualmente para S *em* D;

ii) as derivadas f_n' *são contínuas em* D, $n = 1, 2, \cdots$;

iii) a série das derivadas termo a termo, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge em* (X, d_{sup});

então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge para* S' *em* (X, d_{sup}), *ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x), \quad \forall x \in D.$$

2 Séries de Taylor

Na secção anterior estudaram-se sucessões e séries de elementos do espaço métrico (X, d_{sup}). Sendo X um espaço vectorial real levanta-se a questão de existência de uma base $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ que permita escrever qualquer elemento de X à custa dos elementos na base, isto é,

$$X \ni f = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots = \sum_n a_n\varphi_n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Note-se que há uma vantagem óbvia neste estudo, pois permite-nos descrever a acção de operações lineares através da sua acção sobre os elementos da base, isto é,

$$A\left(\sum a_n\varphi_n\right) := \sum a_n A(\varphi_n),$$

com A um operador linear (e.g., uma operação baseada em integração, ou derivação). Todavia, e porque a base $\mathcal{B}$ tem (em geral) dimensão infinita, nem todos os resultados para espaços vectoriais de