Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 5

1. Em cada alínea, determine uma EDO que tenha as curvas indicadas como soluções:

   (a) $x^2 + y^2 = Cx$, (b) $y = Ce^{\frac{x}{C}}$, $C \neq 0$,

   (c) $y = Cx^2$, (d) $y = Cx + C^2$, com $C \in \mathbb{R}$.

2. Determina uma EDO cuja solução geral seja dada pelas curvas:

   (a) $y = Cx + D$, (b) $(x - C)^2 + (y - D)^2 = 1$,

   (c) $y = C \sin(x + D)$, (d) $y = e^x(Cx + D)$ com $C, D \in \mathbb{R}$.

   Qual o tipo de curvas representadas por estas soluções gerais?

3. Numa EDO implícita do tipo $F(x, y, y') = 0$ é possível, em certos casos, obter soluções singulares via eliminação de y' nas duas equações:

   $$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y, y') = 0$$

   (que constituem um sistema de equações que não são nem necessárias, nem suficientes para a existência de solução singular).

   Aplique este método às EDOs seguintes:

   (a) $y'^2 - 4xy' + 4y = 0$ (solução geral: $y = cx - \frac{1}{4}c^2$, $c \in \mathbb{R}$),

   (b) $y = y'x + 1 + y'^4$, (solução geral: $y = cx + 1 + c^4$, $c \in \mathbb{R}$),

   (c) $y'^2 - yy' + e^x = 0$, (solução geral: $y = ce^x + \frac{1}{c}$, $c \neq 0$).

4. Determine a solução do PVI para as seguintes EDO's exactas:

   (a) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$, $y(0) = 1$,

   (b) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$, $y(1) = 1$,

   (c) $(x - y + 1)dy - (x - y - 1)dx = 0$, $y(0) = -1$,

   (d) $\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2-3x^2}{y^4}y' = 0$, $y(1) = 1$.

   Para que valores iniciais poderá não existir solução?

5. Determine, via separação de variáveis, a solução de:

   (a) $y' = y + 3$, $y(0) = -2$; (b) $1 + y^2 - xy' = 0$, $y(1) = 1$;

   (c) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$; (d) $xy((1 + x^2)y' = 1 + y^2$, $y(1) = 1$.