

departamento de matemática



universidade de aveiro

1. Para cada uma das alíneas, determine qual o subespaço gerado pelos vectores dados, no espaço vectorial real indicado.
 - (a) $(0, 1)$ e $(0, 2)$, em \mathbb{R}^2 ;
 - (b) $(0, 1)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$, em \mathbb{R}^2 ;
 - (c) $(2, 2, 3)$, $(-1, -2, 1)$ e $(0, 1, 0)$, em \mathbb{R}^3 ;
 - (d) $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ e $(2, 2, 2)$, em \mathbb{R}^3 ;
 - (e) $x^2 + 1$, $x^2 + x$ e $x - 1$, em $P_2[x]$;
 - (f) $3 + x^2$, $5 + 4x - x^2$ e $-2 + 2x - 2x^2$, em $P_2[x]$.
2. Nos espaços vectoriais reais indicados, defina, por meio de equações, os seguintes subespaços vectoriais:
 - (a) $\langle (1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2) \rangle$, em \mathbb{R}^3 ;
 - (b) $\langle (1, 1, 2), (2, 1, 1) \rangle$, em \mathbb{R}^3 ;
 - (c) $\langle (1, -1, 0, 1) \rangle$, em \mathbb{R}^4 ;
 - (d) $\langle (1, 1, 2, 1), (0, 1, 0, 1) \rangle$, em \mathbb{R}^4 ;
 - (e) $\langle x^2 + 1, x - 1 \rangle$, em $P_2[x]$;
 - (f) $\langle -x^2 + 3x + 2, -3x^2 + 9x + 6 \rangle$, em $P_2[x]$;
 - (g) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, em $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
3. Encontre um sistema de geradores para cada um dos subespaços vectoriais apresentados:
 - (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = -z\}$;
 - (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y = x - z = 0\}$;
 - (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$;
 - (d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge y = -z\}$;
 - (e) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0, x + y + 2w = 0, y - z + w = 0\}$;
 - (f) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : a - 4b + 3c = 0\}$;
 - (g) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : c - a = 0 \wedge 4d - a + 24b = 0\}$;
 - (h) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : b = d = e - 2a = c + f - 4a = 0 \right\}$.

4. Considere, no espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , os vectores $v_1 = (2, 1, 0, 3)$, $v_2 = (3, -1, 5, 2)$ e $v_3 = (-1, 0, 2, 1)$. Quais dos seguintes vectores

$$a = (2, 3, -7, 3), \quad b = (0, 0, 0, 0), \quad c = (1, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad d = (-4, 6, -13, 4)$$

pertence a $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$?

5. No espaço vectorial real $P_3[x]$, considere os vectores

$$p_1(x) = 2 + x + 4x^3, \quad p_2(x) = 1 - x + 3x^3 \quad \text{e} \quad p_3(x) = 3 + 2x + 5x^3$$

Quais dos seguintes vectores

$$q(x) = 2 + 6x^3, \quad n(x) = 0, \quad r(x) = 5 - 9x + 5x^2 \quad \text{e} \quad t(x) = 2 + 2x + 3x^3$$

pertence a $\langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$?

6. Considere o espaço vectorial real \mathbb{R}^3 . Determine os números reais a e b de modo a que

$$\langle (a, 1, 1), (0, 0, b) \rangle = \langle (1, 1, 1), (-1, -1, 1) \rangle$$

7. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , considere o subconjunto

$$X = \{(1, 0, \alpha), (\alpha, \beta, \beta), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- (a) Determine os valores dos parâmetros reais α e β para os quais X seja um conjunto de geradores de \mathbb{R}^3 .
- (b) Para um dos valores de α e de β determinados na alínea anterior, escreva o vector $(-1, 1, -2)$ como combinação linear dos vectores de X .
8. No espaço vectorial real \mathbb{R}^3 , considere os subespaços vectoriais F e G definidos por

$$F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (2, 2, 2) \rangle$$

Indique o valor lógico das seguintes afirmações, justificando:

(a) $G \subseteq F$

(b) $(0, 0, 0) \notin F$

9. Encontre um sistema de geradores do conjunto solução do sistema homogéneo $AX = 0$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

10. Seja E um espaço vectorial sobre um corpo \mathbb{K} e seja $\{u_1, u_2\}$ um sistema de geradores linearmente independentes de E .
- (a) Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_3 \in E$, é um sistema de geradores de E mas não é constituído por vectores linearmente independentes.
 - (b) Justifique que $\{u_1\}$ não é um sistema de geradores de E mas é constituído por vectores linearmente independentes.
 - (c) Seja X um outro sistema de geradores de E . Que pode dizer sobre o número de vectores de X ?
 - (d) Seja Y um subconjunto de E constituído por vectores linearmente independentes. Que pode dizer sobre o número de vectores de Y ?
 - (e) Seja u_4 um vector de E . Em que condições que o conjunto $S = \{u_1, u_4\}$ é um sistema de geradores de E ?

1. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$;
 (b) \mathbb{R}^2 ;
 (c) \mathbb{R}^3 ;
 (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y = 0\}$;
 (e) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - a + b = 0\}$;
 (f) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - 3a - 2b = 0\}$.
2. (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\}$;
 (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\}$;
 (c) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = 0, x + y = 0, w - x = 0\}$;
 (d) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w - y = 0 = z - 2x\}$;
 (e) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c - a + b = 0\}$;
 (f) $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : c = -2a \wedge b = -3a\}$;
 (g) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = 3a \wedge c = 2a \wedge d = 0 \right\}$.
3. (a) $\{(0, -1, 1)\}$;
 (b) $\{(1, -3, 1)\}$;
 (c) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 2)\}$;
 (d) $\{(0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$;
 (e) $\{(-1, 1, 1, 0)\}$;
 (f) $\{4x^2 + x, -3x^2 + 1\}$;
 (g) $\{24x^3 + x^2 + 24x, 4x^3 + 4x + 1\}$;
 (h) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.
4. a, b e d .
5. $q(x)$, $n(x)$ e $t(x)$.
6. $a = 1$ e $b \neq 0$.
7. (a) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$.
8. (a) Verdadeiro; (b) Falso.
9. $\{(-1, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$.
10. (c) o número de vectores de X é superior ou igual a 2;
 (d) o número de vectores de Y é inferior ou igual a 2;
 (e) Só se u_1 e u_4 forem linearmente independentes.