Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II **2007/08**

2º teste Duração: 2h30

- **Este teste consta de 7 questões (algumas com alíneas) e termina com a palavra FIM, a que se segue um formulário.**
- **Entre parênteses antes de cada questão indica-se a cotação da mesma e das suas alíneas.**
- **Não se esqueça de justificar convenientemente as suas afirmações, se necessário apresentando os cálculos intermédios que efectuar.**

---

(2) **1.** Considere a seguinte representação em série de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx).$$

Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ usando a fórmula de Parseval.

(1+2,5) **2.** (a) Defina transformada de Laplace, $L[f](s)$, de uma função $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Usando propriedades da transformada de Laplace, determine

$$L[e^{-t}\cosh(2t) - 3t\sin(t)](s).$$

(2,5) **3.** Considere a EDO $y' = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$, para $x > 1$ e $y > 0$. Mostre que $2y - xe^{xy}$ é um seu factor integrante e resolva o PVI formado por aquela EDO e a condição inicial $y(2) = 2$.

(0,5+2,5+1) **4.** (a) Verifique que $f(x) = xe^{x^2}$ é solução particular da EDO $y' - 2xy = e^{x^2}$.

(b) Determine a solução geral da EDO $y' - 2xy = x$.

(c) Usando os resultados das alíneas anteriores, determine a solução do PVI

$$y' - 2xy = 3e^{x^2} + 5x, \ y(0) = 0.$$

(2) **5.** Seja $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $0 \leq \varphi(x) \leq C + L\int_a^x \varphi(t)\,dt$, onde C, L são constantes não negativas. Mostre que, para todo o $x \in [a, b]$, $\varphi(x) \leq Ce^{L(x-a)}$.

(1+2) **6.** Considere o PVI $y' = y\cos(x), \ y(0) = 1$.

(a) Mostre que o PVI dado tem uma solução única sobre qualquer intervalo fechado $[a, b]$ contendo a origem, com $a, \ b \in \mathbb{R}$.

(b) Determine, usando $u_0(x) = 0$ como função inicial, uma expressão geral para as aproximações sucessivas $u_n(x)$ (iterativas de Picard) da solução do PVI acima.

(3) **7.** Determine a solução geral completa do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' + y & = & 0 \\ 2x' - y' & = & 8x \end{array}\right. .$$

[Nota: A variável independente é t; assim, tanto x como y são funções de t.]

FIM

Formulário

(apenas simbologia sumária é apresentada, de acordo com a notação usual ou a convencionada nas aulas; nada é referido sobre as hipóteses que validam as fórmulas)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

(a) $L[t^n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ \ s > 0,\ n \in \mathbb{N}_0.$

(b) $L[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a},\ \ s > a,\ a \in \mathbb{R}.$

(c) $L[\sin(at)](s) = \dfrac{a}{s^2+a^2},\ \ s > 0,\ a \in \mathbb{R}.$

(d) $L[\cos(at)](s) = \dfrac{s}{s^2+a^2},\ \ s > 0,\ a \in \mathbb{R}.$

(e) $L[\sinh(at)](s) = \dfrac{a}{s^2-a^2},\ \ s > |a|,\ a \in \mathbb{R}.$

(f) $L[\cosh(at)](s) = \dfrac{s}{s^2-a^2},\ \ s > |a|,\ a \in \mathbb{R}.$

$$L[e^{at}f(t)](s) = F(s-a).$$

$$L[f(t-a)H_a(t)](s) = e^{-as}F(s), \quad a \geq 0.$$

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \quad s > a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$L[t^n f(t)](s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > a, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_{n-1}(t))\,dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$