Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Segundo Exame da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 1 hora e 45 minutos — 23 de Novembro de 2007

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [2.5] Considere a série dada por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4e)^n}$. Indique qual é a sucessão das somas parciais associada (a esta série) e, se possível, determine a soma da série.

2. [4.5] Estude a natureza das seguintes séries de termos não negativos:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+30}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^4}$

3. [3.0] Estude a natureza das seguintes séries numéricas de termos positivos e negativos. No caso de haver convergência, indique se ela é simples ou absoluta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+70}{(-2)^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^9}$

4. [2.5] Por uso da derivada da função tangente, deduza a fórmula para a derivada da função arctan.

5. [2.5] Seja f a função definida por $f(x) = |x-1|$. Mostre que não existe nenhum ponto $c \in]0,3[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{3}$. Isso contradiz o Teorema de Lagrange? Justifique.

6. [2.5] Demonstre que se f e g são funções contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$ e g' não se anula em $]a,b[$, então existe um $c \in]a,b[$ tal que
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ .$$

7. [2.5] Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty}(5\,x_n)$ uma série convergente demonstre que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

—— **FIM** ——