dimensão finita serão aqui aplicáveis.

No que se segue, vamos estudar o subespaço de (X, d_{sup}) gerado pela base (numerável)

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots\} = \{x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

2.1 Séries de potências

Designa-se por série de potências uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{2.1}$$

em que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ constitui uma sucessão de reais.

Comentários:

(1) chama-se a atenção para o facto de que em estrito rigor, a expressão $x^0 = 1$ só faz sentido quando $x \neq 0$; todavia, usaremos aqui a convenção $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, com o objectivo de simplificar as fórmulas resultantes;

(2) o caso geral de série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0)^n = a_0 + a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)^2 + \cdots$$

ditas, séries de potências centradas em $y_0 \in \mathbb{R}$, é redutível ao caso (2.1) por *translação* $x = y - y_0$.

Lema 2.1. *Para cada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, convergente absolutamente em pelo menos um $x_0 \neq 0$, existe um único $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x| < R$, e diverge se $|x| > R$, no caso em que $R < \infty$.*

Demonstração. Se para $x_0 \neq 0$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ converge, então os termos desta série são limitados, ou seja, existe um $M > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para todos $n \in \mathbb{N}$.

Para todo o x tal que $|x| < |x_0|$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente, pois

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e a série numérica (com x fixo)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = 1 + \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

converge absolutamente (série geométrica de razão $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$).

Considere-se agora o conjunto $\mathcal{D}$ de todos os $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série de potências converge absolutamente. $\mathcal{D} \neq \{0\}$ (pelo menos, também $x_0 \in \mathcal{D}$).

Se $\mathcal{D}$ é limitado, defina-se $R = \sup \mathcal{D} < \infty$ (todo o subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ tem supremo, único, aí). Da construção resulta que a série de potências converge absolutamente se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

Se $\mathcal{D}$ é ilimitado, temos $R = \infty$ e a série de potências converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$. $\square$

O valor R designa-se por *raio de convergência da série.* Para obter R, use-se o critério de D'Alembert (do quociente) ou o de Cauchy (da raíz). Atenção: estes dois critérios não são equivalentes!

Chama-se *intervalo de convergência* da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ao intervalo aberto $]-R, R[$. O conjunto de todos os pontos para os quais a série converge designa-se por *domínio de convergência* da série. Note que isto implica estudar a convergência da série nos pontos $x = -R$ e $x = +R$.

Exemplo 2.1. *(i)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Temos, do critério de D'Alembert que

$$L = \overline{\lim_n} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_n |x| \frac{n}{n+1} = |x|,$$

donde a série converge absolutamente se $|x| < 1$ *e diverge se* $|x| > 1$*. Assim,* $R = 1$*.*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Pelo critério de D'Alembert,

$$L = \overline{\lim_n} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_n |x| \frac{n!}{(n+1)!} = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. Assim,* $R = \infty$*.*

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2^2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n} + \ldots$

Então

$$L = \overline{\lim_n} \left| \frac{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{n+1}}}{(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n}} \right| = \lim_n |x|^2 \frac{2n-1}{2(2n+1)} = \frac{|x|^2}{2} < 1,$$

donde temos o intervalo de convergência definido pela inequação $|x| < \sqrt{2}$*.*

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n} = 1 + \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{16} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{4^n} + \ldots$

Usando o critério de Cauchy,

$$L = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{4^n}\right|} = \frac{|x-2|}{4} < 1$$

donde o intervalo de convergência é dado pela inequação $|x-2| < 4$.

Lema 2.2. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leq \infty$. *Então a série das suas derivadas termo a termo,* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, *tem o mesmo raio de convergência.*

Demonstração. Com efeito, o raio de convergência da série das derivadas termo a termo verifica a inequação

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} \left|\frac{(n+1)a_{n+1}x^{n+1}}{n a_n x^n}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{\lim_n} \frac{n+1}{n} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\lim_n} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1, \end{aligned}$$

pelo que toma o mesmo valor R que no caso da série de potências inicial. $\square$

Teorema 2.1 (Convergência uniforme das séries de potências)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leq \infty$.

A série converge uniformemente em $[-M, M]$, *para todo* $0 < M < R$.

Demonstração. Nestas condições tem-se

(i) $|a_n x^n| \leq |a_n| M^n = c_n$, para todos $x \in [-M, M]$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente,

donde, pelo Teorema 1.2 (Critério de Weierstrass), a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[-M, M]$, para $0 < M < R$. $\square$

Corolário 2.1.1. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências, com raio de convergência* $0 < R \leq +\infty$. *Tem-se então*

i) a soma desta série é uma função contínua no intervalo de convergência;

ii) para todo x *no intervalo de convergência,*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

iii) no intervalo de convergência $]-R, R[$ *é válida a igualdade*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Teorema 2.2 (Igualdade de séries de potências)**.** *Se duas séries de potências,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ |x| < R_1$, *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,\ |x| < R_2$, *com* $R_1, R_2 \neq 0$, *têm a mesma soma na vizinhança de* $x = 0$, *então as séries coincidem.*

Demonstração. Tome-se $0 < M < R$, onde $R = \min\{R_1, R_2\}$. Pelo Teorema 2.1, teremos garantida a convergência uniforme das séries no intervalo fechado $[-M, M]$.

Da igualdade

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots \tag{2.2}$$

numa vizinhança de $x = 0$, resulta $a_0 = b_0$ quando $x = 0$. Vem então de (2.2) que

$$\begin{aligned} & a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \ldots \\ \Leftrightarrow \quad & x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots) = x(b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + \ldots) \end{aligned}$$

nessa vizinhança. Simplificando, vem

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + b_4 x^3 + \ldots$$

Pelo Corolário 2.1.1 estas séries são contínuas. Tome-se de novo $x = 0$, para obter $a_1 = b_1$. Procedendo recursivamente, vem $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

No que se segue vamos ver técnicas que permitem obter facilmente a expansão em série de potências de uma dada função. O primeiro método baseia-se no conhecimento prévio da soma da série geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{2.3}$$

a qual converge absolutamente no intervalo de convergência definido por $|x| < 1$.

Exemplo 2.2. *(i) A expansão em série de potências de* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *é feita por aplicação da série* *anterior. Temos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\
&= \frac{1}{1-y} \quad \textit{para } y=-x^2 \\
&= 1+y+y^2+\ldots+y^n+\ldots \\
&= 1+(-x^2)+(-x^2)^2+\ldots+(-x^2)^n+\ldots \\
&= 1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,
\end{aligned}$$

com intervalo de convergência dado por $|y| = |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

(ii) Semelhante procedimento pode ser aplicado à função

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2}{1+x} &= 3x^2\frac{1}{1-(-x)} \\
&= 3x^2[1+(-x)+(-x)^2+\ldots+(-x)^n+\ldots] \\
&= 3x^2-3x^3+3x^4-\ldots+3(-1)^n x^{n+2}+\ldots,
\end{aligned}$$

cuja expansão que é válida no intervalo de convergência definido por $|x| < 1$.

Os próximos exemplos dão a expansão em série da função exponencial e da função $(1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$ (dita, série binomial).

Exemplo 2.3. *(i) A função exponencial é definida como a única função que satisfaz*

$$(e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e \quad e^1 = e.$$

Considere-se a série

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

que converge absolutamente para $|x| < \infty$. *Então*

$$\frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}x^m = E(x),$$

e

$$E(1) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \lim_{k\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e,$$

pelo que $E(x) = e^x$, *em* $\mathbb{R}$ *(unicidade da função exponencial).*

(ii) Alternativamente, a primeira condição pode ser substituída pela propriedade

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Com efeito,

$$E(x)E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(n-j)!} x^j y^{n-j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = E(x+y).$$

(iii) (Série binomial) $(1+x)^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$.

Casos particulares: $\alpha = 0$ *conduz a* $(1+x)^0 \equiv 1$; $\alpha = m \in \mathbb{N}$ *conduz à habitual fórmula binomial*

$$(1+x)^m = x^m + mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} + \ldots + mx + 1.$$

Caso geral: para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, *temos*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad |x| < 1,$$

onde $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$, *se* $n \in \mathbb{N}$, *e* $(\alpha)_0 := 1$.

Ideia da demonstração: construa-se

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n,$$

uma série com raio de convergência $R = 1$. *O produto satisfaz a igualdade* $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$.

Para um dado $\alpha_0 > 0$ *e* x *fixo em* $]-1, 1[$, *a série em* α *converge uniformemente para* $|\alpha| < \alpha_0$ *(critério de Weierstrass). Então* $\varphi(\alpha)$ *é de tipo exponencial, isto é,* $\varphi(\alpha) = E^\alpha$, *para um certo* $E > 0$. *Mas* $E = \varphi(1) = 1 + x$, *o que completa a prova.*

Exemplo 2.4. *(i) Pelo Corolário 2.1.1,*

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \int_0^x \frac{1}{t+1} dt \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots) dt \quad \textit{série convergente em }]-1,1[\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \end{aligned}$$

sendo a expansão válida no intervalo de convergência $x \in]-1, 1[$.

(ii) De forma semelhante, pelo Corolário 2.1.1

$$
\begin{aligned}
arctan(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\
&= \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots\right] dt \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots
\end{aligned}
$$

válido para todo $x \in]-1,1[$.

(iii) Usando a série binomial (Exemplo 2.3, com $\alpha = -1/2$) temos para a função arcsin

$$
\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^x [1 - \frac{1}{2}(-t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-t^2)^2 + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})_n}{n!}(-t^2)^n + \ldots \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})_n}{n!} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \\
&= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1} + \ldots
\end{aligned}
$$

válido para $x \in]-1,1[$ (onde $m!! = m(m-2)(m-4)\ldots$, e terminando em 2 ou 1).

(iv) Para a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ tem-se, por aplicação do Corolário 2.1.1,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 2 + 3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + \ldots + n\cdot(n-1)x^{n-2} + \ldots\right) \\
&= 1 + \frac{3\cdot 2}{2}x + \frac{4\cdot 3}{2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \ldots, \quad |x| < 1.
\end{aligned}
$$

2.2 Séries de Taylor

Teorema 2.3. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ numa vizinhança do ponto $c \in int(D)$. Se a função f admitir uma expansão em série de potências*

$$
f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \tag{2.4}
$$

válida no intervalo de convergência $]c-R, c+R[\subset D$, então

(i) f admite derivadas de qualquer ordem em $]c-R, c+R[$;

(ii) $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demonstração. Note-se que as séries obtidas de (2.4) por derivação termo a termo têm o mesmo raio de convergência R da série original, pelo que convergem uniformemente em todos os sub-intervalos fechados de $]c-R, c+R[$. Isto garante que as derivadas de f existem neste intervalo, qualquer que seja a sua ordem (e não apenas numa vizinhança do ponto c).

Pelo Corolário 1.4.1 temos que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$$

em qualquer sub-intervalo fechado de $]c-R, c+R[$. Por indução, obtem-se a expansão em série de $f^{(m)}$

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= m!a_m + \frac{(m+1)!}{1!}a_{m+1}(x-c) + \frac{(m+2))!}{2!}a_{m+2}(x-c)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-c)^{n-m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

válida em $]c-R, c+R[$. Calcule-se agora f, e suas derivadas, no ponto c,

$$f(c) = a_0,\ f'(c) = a_1,\ f''(c) = 2a_2,\ \ldots, f^{(n)}(c) = n!a_n, \ldots$$

□

A série

$$S(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots, \qquad |x-c| < R, \quad (2.5)$$

diz-se a *série de Taylor de f, centrada no ponto c.* De notar que a exigência de f ser de classe C^∞ é uma condição necessária à existência de série de Taylor de f, mas não é suficiente para garantir a igualdade entre f e a série. O seguinte exemplo mostra a não suficiência.

Exemplo 2.5. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. As derivadas de qualquer ordem de f em $c = 0$ existem, e valem zero, pelo que a expansão em série de potências de f, centrada em $c = 0$, é a função identicamente nula.

Definição 2.1. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se analítica em $c \in D$ sse admite uma expansão em série de potências*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

válida numa vizinhança $V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[\subset D$ *do ponto.*

Teorema 2.4 (Teorema de Taylor)**.** *Seja* f *uma função de classe* C^{n+1} *num intervalo* $]c-R, c+R[$. *Então existe uma função* $R_n \in C^{n+1}(]c-R, c+R[)$ *tal que*

i) para todo $x \in]c-R, c+R[$,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x), \tag{2.6}$$

ii) $\lim_{x\to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = 0$.

Demonstração. A função R_n é dada por

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right],$$

donde é de classe C^{n+1} no intervalo $]c-R, c+R[$. De (2.6) tem-se

$$0 = R_n(c) = R_n'(c) = R_n''(c) = \cdots = R_n^{(n)}(c).$$

Prove-se agora o limite. Tem-se

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = \frac{0}{0},$$

pelo que este constitui uma indeterminação. Porque tanto o numerador como o denominador são funções contínuas e diferenciáveis na vizinhança do ponto c, é aplicável a regra de Cauchy. Mas o novo limite,

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}}$$

é de novo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a regra de Cauchy, teremos

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-c)^{n-2}} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando sucessivamente a regra de Cauchy iremos terminar com

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{R_n^{(n)}(c)}{n!} = 0,$$

pelo que todos os anteriores limites existem e

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{R_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(c)}{n!} = 0.$$

□

O polinómio de grau n

$$P_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{2.7}$$

designa-se por *polinómio de Taylor de ordem* n *da função* f, *centrado no ponto* c, e associado a

$$R_{n,c}(x) = f(x) - P_{n,c}(x), \tag{2.8}$$

o *resto de Taylor de ordem* n. Sempre que o ponto c estiver sub-entendido, omiti-lo-emos e escreveremos apenas $P_n(x), R_n(x)$.

Comentários:

(1) Chama-se a atenção para o facto de que apesar dos polinómios de Taylor terem sempre domínio $\mathbb{R}$, as funções que estes aproximar podem ter (e em geral têm) um domínio mais reduzido.

(2) Se f admite uma expansão em série de potências centradas em c, então o resto $R_n(x)$ é obtido a partir dessa série por truncatura dos primeiros n termos, isto é

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

2.3 Estimativas para erro da aproximação por polinómios de Taylor

Vamos agora estudar a qualidade da aproximação de uma dada função por o seu polinómio de Taylor P_n. O *erro cometido na aproximação de* f *pelo polinómio* P_n é dado por

$$Erro_n(x) = f(x) - P_n(x) = R_n(x), \tag{2.9}$$

ou seja, pela *diferença entre a função e o polinómio obtido.*

Note-se, em primeiro lugar, que para estimar este erro, a expressão do resto $R_n = f - P_n$ é praticamente inútil. Todavia, e no caso particular em que a série de Taylor obtida é uma série alternada, então o resto de ordem n é estimável pelo termo de ordem $n+1$, isto é

$$\begin{aligned}
Erro_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k (x-c)^k \\
&= (-1)^{n+1}a_{n+1}(x-c)^{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2}(x-c)^{n+2} + (-1)^{n+3}a_{n+3}(x-c)^{n+3} \\
&\qquad +(-1)^{n+4}a_{n+4}(x-c)^{n+4} + \cdots \\
\Rightarrow &\quad |Erro_n(x)| \leq |a_{n+1}(x-c)^{n+1}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| |x-c|^{n+1}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.6. *O Exemplo 2.4 (i), permite calcular uma aproximação a* $\ln(2)$ *(note que, para* $x = 1$*, temos a série harmónica alternada) dada por*

$$P_7(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420},$$

com um erro estimado por

$$|Erro_7(1)| = |\ln(1+1) - P_7(1)| = \left| -\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \cdots \right| \leq \frac{1}{8} = 0,125.$$

No que se segue iremos mostrar como construir diferentes expressões para o resto

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right]. \end{aligned}$$

Sem perca de generalidade, considere-se $x > c$. Construa-se a função

$$\varphi(y) = f(x) - \left[f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \right],$$

para $y \in [c, x]$. A função φ é contínua em $[c, x]$, diferenciável em $]c, x[$, e verifica

$$\varphi(c) = R_n(x), \quad \text{e} \quad \varphi(x) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &= \frac{d}{dy}\left\{ f(x) - \left[f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \right] \right\} \\ &= -\left[f'(y) + f''(y)(x-y) - f'(y) + \frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - \frac{f''(y)}{2!}2(x-y) + \ldots \right. \\ &\qquad \left. \cdots + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}n(x-y)^{n-1} \right] \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n. \end{aligned}$$

Para qualquer função auxiliar ψ, contínua em $[c, x]$, diferenciável em $]c, x[$, tem-se por aplicação directa do Teorema de Cauchy (AM1) que existe $\xi \in]c, x[$ tal que

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{\psi(x) - \psi(c)}.$$

O mesmo é válido para o caso de $x < c$.

Assim, atendendo a que $\varphi(x) - \varphi(c) = 0 - R_n(x)$ tem-se para esta função a expressão (dependente da escolha da função auxiliar ψ)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\left[\psi(x) - \psi(c)\right] \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \\ &= \frac{\psi(x) - \psi(c)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \quad \text{para } |\xi - c| < |x - c|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Diferentes escolhas da função auxiliar ψ determinam diferentes expressões para o resto R_n.

Teorema 2.5 (Resto de Lagrange). *Seja f uma função de classe $C^{n+1}(]a,b[)$, $a < b$. O resto de Lagrange associado ao polinómio de Taylor de ordem n de f, centrado em $c \in]a,b[$, é dado por*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}, \quad \text{para } |\xi - c| < |x - c|$$

com $x \in]a,b[$.

Demonstração. Tome-se a função auxiliar $\psi(y) = -(x-y)^{n+1}$. A função é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$, com $\psi'(y) = (n+1)(x-y)^n$. Substituindo em (2.10) vem

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{\psi(x) - \psi(c)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \\ &= \frac{0 - (x-c)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Outras formas possíveis para restos (sem demonstração) são:

- **Resto de Cauchy** ($\psi(y) = x - y$):

$$R_n^{Cauchy}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c + \theta(x-c))}{n!}(1-\theta)^n (x-c)^{n+1},$$

  onde $\xi = c + \theta(x-c)$, e $\theta \in]-1,+1[$.

- **Resto do Integral**:

$$R_n^{Integral}(x) := \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

2.4 Aplicações

Cálculo de integrais sem primitiva imediata

1.

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t^2}dt &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots\right) dt, \quad |-t^2| < \infty \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots\end{aligned}$$

com $|x| < \infty$

2. Calcular o integral elíptico

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad |x| < 1$$

pode ser feito usando a série binomial

$$\begin{aligned}E(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} x^{2n} \sin^{2n} \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!!} x^{2n} \sin^{2n} \varphi] d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!!} x^{2n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!}{n!!}\right)^2 x^{2n}\right].\end{aligned}$$

Cálculo da soma de séries numéricas

1.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt\right) \\ &= \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}\right) dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

É importante notar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge absolutamente se $|x| < 1$, logo pelo Corolário 2.1.1 é contínua no seu intervalo de convergência.

2.

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1) n!} &= \lim_{x \to 1^-} \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \\
&= \lim_{x \to 1^-} \arcsin(x) \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

onde de novo a série converge absolutamente se $|x| < 1$, logo é aí contínua, pelo que é possível calcular este limite.

Aproximação polinomial de funções, com estimativa de erros

1. (Trivial) Aproximar $f(x) = x^3$ por um polinómio de 2^a ordem centrado em $x = 1$ resulta em $P_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$, resto $R_2(x) = (x-1)^3$. A Figura 2. mostra os gráficos destas três funções.

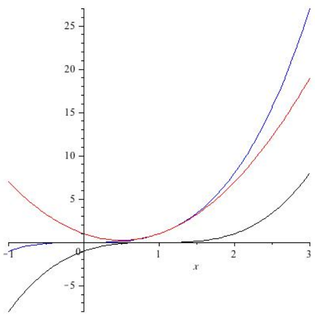

Figura 2: Por ordem: azul - f; vermelho - P_2; negro - R_2;

2. Aproximar $f(x) = e^x$ por um polinómio de 3^a ordem centrado em $x = 0$ resulta em $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, com resto de Lagrange

$$
R_3(x) = \frac{e^\xi}{4!} x^4, \quad \text{para } |\xi| < |x|.
$$

A Figura 3. mostra os gráficos destas para $x \geq 0$.

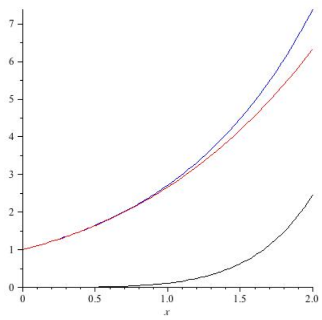

Figura 3: Por ordem: azul - $f(x) = e^x$; vermelho - P_3; negro - R_3;

3. Obter uma aproximação de $\sqrt{2}$, a partir da função $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. f admite expansão em série de potências centradas na origem (série binomial e, mais importante, alternada) donde o resto pode ser estimado pelo termo de ordem $n+1$ da série. Para $x = 1$ vem

$$|R_n(1)| \leq \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

donde para $n = 4$ temos

$$\sqrt{2} \approx P_4(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2^2}}{2} + \frac{\frac{3}{2^3}}{3!} - \frac{\frac{5!!}{2^4}}{4!} = 1.3984375$$

com um erro máximo de $|R_n(1)| \leq \frac{7}{256} \approx 0.027\ldots$

Aproximação de integrais definidos, com estimativa de erros

1. Obter uma aproximação de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ com erro inferior a 10^{-4}. Temos

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots$$

com esta série a convergir uniformemente em todo o intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Sendo a série alternada, o erro cometido é estimado pelo termo de ordem $n+1$. Assim, uma aproximação de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ com um erro máximo de 10^{-4} pode ser obtida tomando n tal que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4},$$

ou seja $n > 5$. Assim,

$$P_6(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \cdots - \frac{1}{13 \cdot 6!},$$

e resto $|R_6(1)| \leq \frac{1}{15 \cdot 7!} = \frac{1}{75600}$.

2. O mesmo para $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

e para $n = 5$ temos a precisão desejada

$$|R_5(\pi)| \leq \frac{\pi^{13}}{13 \cdot 13!} \approx 0.000035869\ldots$$

3 Séries de Fourier

Nesta secção vamos estudar um segundo tipo de expansão em série, baseado em funções elementares periódicas (co-sinos, sinos ou exponenciais complexas), ditas, *séries de Fourier*[1].

Definição 3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), diz-se periódica, de período $T > 0$ (ou $T-$periódica), se satisfizer*

$$f(x + T) = f(x), \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note-se que a mudança de variável $y = x+T$ conduz a $f(y) = f(y-T)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Aplicando recursivamente a condição de periodicidade, obtém-se $f(x) = f(x + kT)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Diremos então que f tem por domínio $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

As funções co-sino e sino são 2π-periódicas, donde $A\cos(\omega x)$, [resp. $A\sin(\omega x)$], para $A > 0$, $x \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right[$, têm período $\frac{2\pi}{\omega}$, com A a *amplitude da onda* e ω a sua *frequência*, (medida, em geral, em Hz, número de oscilações por segundo).

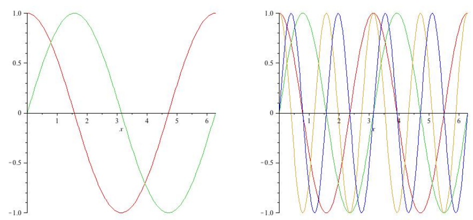

Figura 4: Gráfico de sino / co-sino; gráficos de diferentes modulações destas. Note-se o desfasamento entre sino e co-sino, ou seja, a translação $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.

[1]Jean-Baptiste Fourier (1768-1839) introduziu o conceito em 1807, para efeitos de resolução da equação do calor.