departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Averigúe se o conjunto dado é uma base do espaço vectorial real indicado:
   (a) $\{(3,9),(-4,-12)\}$ de $\mathbb{R}^2$;
   (b) $\{(4,1),(-7,-8)\}$ de $\mathbb{R}^2$;
   (c) $\{(1,1,3),(3,-8,-2),(-2,8,4)\}$ de $\mathbb{R}^3$;
   (d) $\{(1,2,3),(3,-3,-2),(-2,1,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$;
   (e) $\{(1,0,0,0),(0,0,2,0),(1,0,2,1),(0,0,1,2)\}$ de $\mathbb{R}^4$;
   (f) $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ de $P_2[x]$;
   (g) $\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$ de $P_2[x]$;
   (h) $\{3, x+1, x^2, x^3-2\}$ de $P_3[x]$;
   (i) $\{2, x, x^2+x^3, x+x^2+x^3\}$ de $P_3[x]$;
   (j) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
   (k) $\left\{\begin{bmatrix}3 & 6\\ 3 & -6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -8\\ -12 & -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\right\}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores $a=(1,2,1)$, $b=(1,2,2)$ e $c=(3,6,4)$, e seja $S=\{a,b,c\}$.
   (a) Averigúe se S é uma base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine o subespaço gerado pelos vectores a e b.
   (c) Dê um exemplo de um vector u de modo que $\{a,b,u\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

3. Para cada um dos seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real indicado, determine uma base $\mathcal{B}$ e a sua dimensão:
   (a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=2x, z=x\}$, em $\mathbb{R}^3$;
   (b) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\}$, em $\mathbb{R}^3$;
   (c) $S=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : c=a+b\}$, em $\mathbb{R}^3$;
   (d) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 3x+2y+5z=0\}$, em $\mathbb{R}^3$;
   (e) $S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y+z+w=0\}$, em $\mathbb{R}^4$;
   (f) $S=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a-2b=0, c=3d\}$, em $\mathbb{R}^4$;
   (g) $S=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a+b-2c+d=0\}$, em $\mathbb{R}^4$;
   (h) $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : x_1+x_2=0, x_3=x_4\}$, em $\mathbb{R}^5$.

4. Determine uma base $\mathcal{B}$ para o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores:
   (a) $(1,1,-4,-3)$, $(2,0,2,-2)$ e $(2,-1,3,2)$;
   (b) $(-1,1,2,0)$, $(3,3,6,0)$ e $(9,0,0,0)$;
   (c) $(1,-1,0,0)$, $(-2,2,2,1)$, $(-1,1,2,1)$ e $(0,0,4,2)$.

5. Seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + 8z = 0\}$ um subconjunto do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.
   (a) Mostre que A é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine, justificando, uma base para A e indique a sua dimensão.

6. Seja S o subespaço vectorial do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (2,4,0)$ e $v_3 = (1,2,1)$.
   (a) Determine a dimensão de S.
   (b) Averigúe se $u = (-4,-8,0)$ pertence a S.

7. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes vectores:

$$v_1 = (a,6,-1), \quad v_2 = (1,a,-1) \quad \text{e} \quad v_3 = (2,a,-3).$$

   Determine os valores de a para os quais $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

8. Determine uma base ordenada e a dimensão de cada conjunto solução dos seguintes sistemas de equações lineares homogéneos:

(a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x + y + z + w = 0 \\ 5x - y + z - w = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 5z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$

9. Seja $X = \{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}$ um subconjunto do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.
   (a) Mostre que $\langle X \rangle = \mathbb{R}^3$.
   (b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores de X.
   (c) Escreva o vector $u = (-2,3,4)$ como combinação linear dos vectores de X.

10. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   (a) Verifique que $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   (b) Verifique que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ pertencem a S mas não geram S.

   (c) Verifique que as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes mas não formam uma base de S.

   (d) Determine uma base e a dimensão de S.

11. (a) Seja E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Mostre que se u e v são vectores de E linearmente independentes e se $w \notin \langle u, v \rangle$ então u, v e w ainda são linearmente independentes.

   (b) Utilizando a alínea anterior, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha os vectores $(1, 2, 1)$ e $(0, 1, 2)$.

12. Num espaço vectorial real E, mostre que se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de E então $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2 + ae_1, e_3 + be_2\}$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, também é uma base de E.

13. Sejam E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ uma base ordenada de E. Sejam ainda $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$ e $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Prove que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ também é uma base ordenada de E.

14. Seja E um espaço vectorial real e seja $\{a, b, c\}$ um sistema de geradores de E tal que $a + b + c = 0_E$.

   (a) O que pode dizer sobre a dimensão de E?

   (b) Mostre que $E = \langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle = \langle a, c \rangle$.

1. todos os conjuntos são bases excepto os das alíneas (a) , (c) , (e) , (g) e (i) .

2. (a) não; (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2x = 0\}$; (c) por exemplo, $u = (1,0,0)$.

3. (a) $\mathcal{B} = \{(1,2,1)\}$ e $\dim S = 1$;
   (b) $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ e $\dim S = 2$;
   (c) $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1)\}$ e $\dim S = 2$;
   (d) $\mathcal{B} = \{(-2,3,0),(-5,0,3)\}$ e $\dim S = 2$;
   (e) $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(0,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$ e $\dim S = 3$;
   (f) $\mathcal{B} = \{(2,1,0,0),(0,0,3,1)\}$ e $\dim S = 2$;
   (g) $\mathcal{B} = \{(2,0,1,0),(-1,1,0,0),(-1,0,0,1)\}$ e $\dim S = 3$;
   (h) $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0,0),(0,0,1,1,0),(0,0,0,0,1)\}$ e $\dim S = 3$.

4. (a) $\mathcal{B} = \{(1,1,-4,-3),(2,0,2,-2),(2,-1,3,2)\}$;
   (b) $\mathcal{B} = \{(-1,1,2,0),(3,3,6,0)\}$;
   (c) $\mathcal{B} = \{(1,-1,0,0),(-2,2,2,1)\}$.

5. (b) $\mathcal{B}_A = ((3,1,0),(-8,0,1))$ e $\dim A = 2$.

6. (a) $\dim S = 2$; (b) $u \in S$.

7. $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{2, -\frac{3}{2}\right\}$.

8. Sejam S o conjunto solução do sistema de equações linear e $\mathcal{B}$ uma sua base.
   (a) $\dim S = 1$ e $\mathcal{B} = ((1,0,1))$;
   (b) $\dim S = 2$ e $\mathcal{B} = ((-1,-1,4,0),(0,-1,0-1))$;
   (c) $\dim S = 0$ e $\mathcal{B} = \emptyset$;
   (d) $\dim S = 2$ e $\mathcal{B} = ((3,1,0),(-1,0,1))$.

9. (b) $B = ((1,0,5),(1,1,1),(0,3,1))$;
   (c) $u = (1,0,5) + (3-3k)(1,1,1) + k(0,3,1) + (2-k)(-3,0,-2)$, para algum $k \in \mathbb{R}$.

10. (d) $\dim S = 3$ e uma base de S é $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

11. (b) por exemplo, $\mathcal{B} = \{(1,2,1),(0,1,2),(1,0,0)\}$.

14. (a) $\dim E \leq 2$