Análise Matemática II

Paula Cerejeiras

1 Sucessões e séries de funções

Pressupõe-se o conhecimento de sucessões e séries numéricas leccionadas em Análise Matemática 1.

1.1 Sucessões de funções

No que se segue iremos estudar sucessões e séries dependentes de um parâmetro real x pertencente a um certo domínio[1] ditas *sucessões e séries de funções*.

Como exemplo, tome-se a sucessão numérica de termo geral $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, que tende para o número de Nepper, e. Se substituirmos, na fracção, o numerador por um parâmetro arbitrário x então a correspondente sucessão (agora de termo geral $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$) convergirá para e^x a cada concretização do parâmetro x. Adicionalmente, o novo termo $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pode agora ser encarado como uma função do parâmetro x (com domínio $D = \mathbb{R}$) para cada n fixo.

Definição 1.1 (Sucessão de funções)**.** *Designa-se por sucessão de funções toda a aplicação de* $\mathbb{N}$ *num espaço vectorial de funções reais de variável real com domínio* $D \subset \mathbb{R}$, *ou seja,* $n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = u_n(x)$, *com*

$$u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to u_n(x),$$

e denota-se por

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

e onde a função $u_n = u_n(x)$ *se designa por termo de ordem* n *da sucessão.*

Note-se que uma sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constitui uma *sequência ordenada de funções* cujo domínio, para a variável x, é $D \subset \mathbb{R}$, e onde a cada concretização da variável $x \in D$ corresponde uma sucessão numérica. Em estrito rigor, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ designa a *sucessão de funções* enquanto que

$$(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots)$$

designa a *concretização da sucessão na variável* $x \in D$. Por abuso de linguagem, não faremos distinção entre ambas as notações.

Definição 1.2 (Convergência pontual)**.** *A sucessão de funções* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *(onde* $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$*) converge pontualmente para a função* $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se para cada* $x \in D$ *a sucessão numérica* $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $u(x) \in \mathbb{R}$, *ou seja, se para todo o* $\epsilon > 0$, *existir uma ordem* $N = N(\epsilon, x)$ *tal que*

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \epsilon.$$

A função u *diz-se limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* D, *e escreve-se* $\lim_n u_n = u$.

Exemplo 1.1. *Considerar o domínio* $D = [0, 1]$ *nos exemplos que se seguem.*

[1] Em geral, um intervalo real.

(i) *A sucessão de funções de termo geral* $u_n(x) = x^n$ *converge para* $u(x) = 0,\ x \in [0,1[,\ u(1) = 1$;

(ii) *a sucessão de funções de termo geral* $u_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ *converge para* $u(x) = 0,\ x \in]0,1],\ u(0) = 1$;

(iii) *a sucessão de funções de termo geral* $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ *converge para* $u(x) = 0,\ x \in [0,1]$;

(iv) *a sucessão de funções de termo geral* $u_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$; *converge para* $u(x) = 0,\ x \in [0,1]$.

Na figura seguinte são dados os gráficos dos primeiros termos destas sucessões.

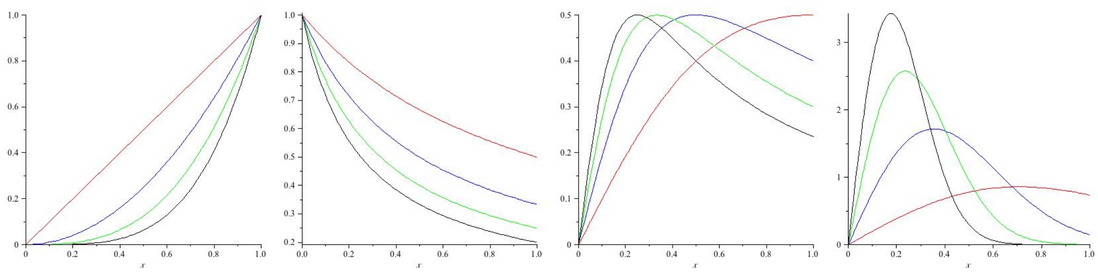


Figura 1: Gráficos dos primeiros quatro termos das sucessões dadas, respectivamente

Note-se que, nos quatro casos, temos sempre sucessões de funções contínuas, mas só os dois últimos limites constituem uma função contínua.

Tal como foi feito nas séries numéricas, as séries de funções são introduzidas à custa da sucessão das suas somas parciais.

Definição 1.3 (Série de funções)**.** *Seja* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *com* $f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ j \in \mathbb{N}$, *uma sucessão de funções reais de variável real, com domínio* D.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, *denota-se por função soma parcial dos primeiros* n *termos de* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *à função*

$$s_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x).$$

A sucessão das funções soma parcial assim obtidas, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *designa-se por série de funções, e denota-se por*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

À função limite da sucessão das funções soma parcial $f = \lim_n s_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *chama-se função soma da série* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$.

A notação $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ representará simultaneamente a *série*, sucessão das suas funções soma parcial,

$$s_1(x) = f_1(x), \quad s_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \ldots, \quad s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x), \quad \cdots,$$

e a *soma da série* f, limite da sucessão das funções soma parcial

$$f(x) = \lim_n s_n(x) = \lim[f_1(x) + \cdots + f_n(x)].$$

Consequências:

(i) Os resultados e teoremas válidos para sucessões e séries numéricas são agora extensíveis a sucessões e séries de funções. Em particular, o limite de uma sucessão de funções, se existir, é único.

(ii) Dos termos da série obtêm-se os termos da sucessão das somas parciais associada. Conversamente, a partir dos termos da sucessão das somas parciais $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ recuperam-se os termos da série por meio da relação de recorrência

$$f_1(x) = s_1(x), \quad f_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), n \geq 2.$$

1.2 Convergência pontual e convergência uniforme

A convergência pontual não é suficiente para garantir a transição, no limite, da continuidade, da primitivação e da diferenciação. Dada a importância destas propriedades, vamos estabelecer critérios que garantam essa transição. Tal requere a introdução de um conceito de convergência mais forte do que a mera convergência pontual.

Definição 1.4 (Convergência uniforme)**.** *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, com* $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, uma sucessão de funções.*

Diremos que a sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* u *em* D*, e denota-se por* $\lim_n u_n \overset{unif}{=} u$ *em* D*, se para todo o* $\epsilon > 0$*, existir uma ordem* $N = N(\epsilon)$ *(independente de* $x \in D$*) tal que*

$$n > N(\epsilon) \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 1.2. *(i) A sucessão de termo geral* $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, x \in [0,1]$ *converge pontualmente para* $u(x) = 0$*. A diferença entre o termo geral da sucessão,* u_n*, e o seu limite* u *é majorável por*

$$0 \leq u_n(x) - u(x) = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n},$$

donde concluimos que, para todo o $\epsilon > 0$*, existe um* $N = N(\epsilon) = \left[\frac{1}{2\epsilon}\right]$ *tal que*

$$n > N(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u(x)| = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n} < \epsilon,$$

ou seja, a sucessão de termo geral $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ *converge uniformente para* $u \equiv 0$ *em* $D = [0,1]$.

(ii) Já a sucessão de termo geral $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in [0,1]$, *que converge pontualmente para o mesmo limite da sucessão anterior, tem a diferença entre o termo geral da sucessão e o seu limite majorada por*

$$0 \leq u_n(x) - u(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{nx}{n^2x^2} = \frac{1}{nx}.$$

Assim, para cada x *fixo em* D, *e um qualquer* $\epsilon > 0$, *podemos determinar um* $N = N(\epsilon, x) = \left[\frac{1}{\epsilon x}\right]$ *(convergência pontual) tal que*

$$n > N(\epsilon, x) \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u(x)| = |\frac{nx}{1+n^2x^2}| \leq \frac{1}{nx} < \epsilon.$$

Todavia, não é possível eliminar, nesta implicação, a dependência de $N = N(\epsilon, x)$ *relativamente à variável* x. *Uma análise mais cuidada da diferença*

$$0 \leq u_n(x) - u(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}\frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2},$$

com o valor $\frac{1}{2}$ *a ser atingido quando* $x = \frac{1}{n}$. *Vamos provar a não-convergência uniforme desta sucessão. Para* $0 < \epsilon < 1/2$, *suponha-se que existe* $N = N(\epsilon)$ *(independente de* $x \in [0,1]$*) para o qual se tem*

$$\forall x \in [0,1], \quad n > N(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u(x)| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Mas provámos acima que para todo o $n > N(\epsilon)$, *há sempre um valor* $x_0 = \frac{1}{n} \in [0,1]$ *para o qual*

$$\left| u_n(\frac{1}{n}) - u(\frac{1}{n}) \right| = \frac{1}{2} > \epsilon,$$

o que contradiz (1.1). A sucessão dada não converge uniformemente em $D = [0,1]$.

Definição 1.5 (Convergência uniforme de série de funções)**.** *Seja* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j = f$, *com* $f, f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, *uma série de funções.*

Diz-se que a série converge uniformemente em D, $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \overset{unif}{=} f(x)$, *se houver convergência uniforme da sucessão das suas somas parciais, de termo geral* $s_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x)$, *para* f *em* D.

Em alternativa ao estudo da sucessão das somas parciais, podemos usar-se a sucessão dos restos, dada por

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \cdots \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x), \ x \in D, \end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Comparando com a sucessão das somas parcias, temos

$$\begin{aligned} s_n(x) + R_n(x) &= \sum_{j=1}^{n} f_j(x) + \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \\ &= f(x) \quad \Leftrightarrow \quad R_n(x) = f(x) - s_n(x), \end{aligned}$$

pelo que a convergência uniforme da sucessão das somas parciais para f corresponde à convergência uniforme da sucessão dos restos para a função identicamente nula.

Exemplo 1.3. *(i) A série*

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, \quad |x| < 1$$

tem por soma $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$, *donde se tem para a sucessão das somas parciais dos primeiros m termos*

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} x^j$$

e a sucessão dos restos tem por termo geral

$$R_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} x^j = x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \cdots = x^n \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Os limites laterais $\lim_{x \to -1^+} |R_n(x)| = \frac{1}{2}$ *e* $\lim_{x \to +1^-} |R_n(x)| = \infty$ *indicam que para* $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ *não existe* N, *independente de* x, *que satisfaça* $|R_n(x)| < \epsilon$, *qualquer que seja o* $x \in]-1, 1[$.

(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$, $x \in \mathbb{R}$, *é convergente (critério de Leibniz). Os termos da sucessão dos seus restos são majoráveis por*

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{x^2+j} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{x^2+n+1} - \frac{(-1)^n}{x^2+n+2} + \frac{(-1)^n}{x^2+n+3} + \cdots \right| \\ &< \frac{1}{x^2+n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

pelo que a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(iii) Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(x^2+1)^n}$, $x \in \mathbb{R}$, *podemos estimar os seus restos por*

$$|R_n(x)| < \frac{x^2}{(x^2+1)^n} < \frac{x^2}{1 + nx^2 + \cdots + x^{2n}} < \frac{x^2}{nx^2} = \frac{1}{n}, \quad \forall x \neq 0,$$

donde a série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

De notar, todavia, que a série dos módulos, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$, já não converge uniformente em $\mathbb{R}$, dado que

$$R_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^j} = \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2+1}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Os próximos teoremas estabelecem condições para a convergência uniforme de sucessões e séries de funções.

Teorema 1.1 (Critério para a convergência uniforme de sucessões)**.** *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções que converge pontualmente para a função $u : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge uniformemente para u em D sse

$$\lim_{n} \sup_{x\in D} |u_n(x) - u_{n+m}(x)| = 0, \quad \forall m = 1, 2, \cdots \tag{1.2}$$

Demonstração.

Necessidade: se a sucessão converge uniformemente para u em D, então para todo $\epsilon > 0$ existe uma ordem $N = N(\epsilon)$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$|u_{n+m}(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ m = 1, 2, \cdots$$

para todo $x \in D$.

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in D} |u_n(x) - u_{n+m}(x)| &\leq \sup_{x\in D} |u_n(x) - u(x)| + \sup_{x\in D} |u_{n+m}(x) - u(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

donde segue

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |u_n(x) - u_{n+m}(x)| = 0.$$

Suficiência: se

$$\lim_{n} \sup_{x\in D} |u_n(x) - u_{n+m}(x)| = 0$$

para todo $m = 1, 2, \cdots$, então para cada x fixo, a sucessão numérica $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é sucessão de Cauchy e (porque $\mathbb{R}$ é completo) possui limite real $u(x)$.

Temos agora que para $\epsilon > 0$ existe uma ordem $N = N(\epsilon)$ (independente de x) tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u_{n+m}(x)| \leq \sup_{x\in D} |u_n(x) - u_{n+m}(x)| < \epsilon$$

para $m = 1, 2, \cdots$. O resultado obtém-se tomando o limite quando m tende para ∞, mantendo n, x

fixos.

$\square$

Na prática, quando é conhecido o limite pontual $u(x)$ da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é conveniente substituir-se (1.2) pela condição equivalente

$$\lim_n \sup_{x\in D} |u_n(x) - u(x)| = 0.$$

Comentários:

(1) Este resultado corresponde a afirmar que a sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, onde o habitual módulo $|\cdot|$ para valores numéricos (que gera a distância Euclideana em $\mathbb{R}$) é agora substituído por $\sup_{x\in D}|\cdot|$.

(2) O Teorema 1.1 é aplicável a séries de funções, vistas como sucessões das somas parciais.

Exemplo 1.4. *A sucessão de termo geral $u_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$ converge pontualmente para $u(x) = x$. Mas*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| n\sin(\frac{x}{n}) - x \right| = +\infty$$

dado que $\left|n\sin(\frac{x}{n}) - x\right| \geq \left||x| - \left|n\sin(\frac{x}{n})\right|\right|$, logo não há convergência uniforme da sucessão em $\mathbb{R}$.

Todavia, se restringirmos o domínio ao intervalo $[-r,r], r > 0$, então o supremo existe e tem-se

$$\begin{aligned}
0 \leq \sup_{|x|\leq r} \left| n\sin(\frac{x}{n}) - x \right| &= \sup_{0<|x|\leq r} |x| \left| \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} - 1 \right| \\
&= r \sup_{0<|x|\leq r} \left| \frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} - 1 \right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2 (Critério de Weierstrass)**.** *Seja $f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j$, com $f, f_j : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, uma série de funções.*

Se

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$ existir $c_n > 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq c_n, \forall x \in D,\ n = 1, 2, \cdots;$$

(ii) a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge,

então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Demonstração. Aplique-se o Teorema 1.1 à sucessão das somas parciais $s_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in D} |s_n(x) - s_{n+m}(x)| &= \sup_{x\in D} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+m}(x)| \\
&\leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+m} \quad \to 0.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.5. *Se as séries numéricas* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *(resp.* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*) forem absolutamente convergentes então as séries de co-sinos,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ *(resp. de sinos,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$*), convergem uniformemente em qualquer intervalo real.*

1.3 Continuidade, integração e derivação termo a termo

Vamos agora estabelecer critérios que permitam estender propriedades dos termos de uma sucessão de funções (resp., de série de funções) ao limite desta (resp. à série). No que se segue, trataremos primeiro o caso de sucessões, reduzindo o tratamento das séries ao caso da sucessões das suas somas parciais.

O primeiro resultado diz respeito à continuidade, ou seja, em que condições é válida a seguinte troca de limites

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_n u_n(x)\right) = \lim_n\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right)? \tag{1.3}$$

Teorema 1.3 (Continuidade)**.** *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, com* $u_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, uma sucessão de funções contínuas.*

Se a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir uniformemente para* u *em* D*, então* u *é também uma função contínua em* D*.*

Demonstração. Por um lado, da continuidade dos termos da sucessão em cada ponto $x_0 \in D$ vem que, para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ tal que para, todo o $x \in D$ se tem

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por outro lado, da convergência uniforme resulta que, para todo o $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $x \in D$.

Assim, para cada $\epsilon > 0$, fixe-se um $n > N(\epsilon)$ (este último existente em virtude da convergência uniforme). Existe então um $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ tal que para, todo o $x \in D$ se tem

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u(x_0)| < \epsilon.$$

□

Corolário 1.3.1. *Se a série de funções contínuas* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente para* f *em* D*, então* f *é uma função contínua em* D*.*

De notar que o Teorema 1.3 estabelece uma condição **suficiente**, mas **não necessária**. Reveja-se o Exemplo 1.2 *(ii)* para confirmar que uma sucessão pode não convergir uniformemente para o seu limite, e ainda assim o limite ser uma função contínua, e ser válida a igualdade (2.1).

Por um lado, sabemos que a classe das funções contínuas sobre um intervalo limitado e fechado de $\mathbb{R}$ constitui um *espaço vectorial real* quando munido das operações *soma de funções* e *produto de um escalar por uma função.*

Definição 1.6 (Norma sobre espaço vectorial real)**.** *Seja V um espaço vectorial real.*

Uma função $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_0^+$ diz-se uma norma sobre o espaço vectorial real V se para todos $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, se verificar

i) $\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0;$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|;$

iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$

Por outro lado, sabe-se que o supremo de uma função contínua sobre um fechado e limitado de $\mathbb{R}$ coincide com o seu máximo. Assim, é fácil de confirmar que a função $\sup_x |\cdot| = \max_x |\cdot|$ constitui uma norma sobre o espaço vectorial acima descrito. Com efeito, para quaisquer f, g, funções contínuas sobre um intervalo limitado e fechado D em $\mathbb{R}$, e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

i) $\max_{x \in D} |f(x)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \forall x \in D;$

ii) $\max_{x \in D} |\lambda f(x)| = |\lambda| \left(\max_{x \in D} |f(x)|\right);$

iii) $\max_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \max_{x \in D} |f(x)| + \max_{x \in D} |g(x)|.$

Deste modo, o Teorema 1.3 corresponde a garantir que o espaço vectorial das funções contínuas sobre um intervalo limitado e fechado $D \subset \mathbb{R}$, é completo relativamente à norma $\max_{x \in D} |\cdot|$, isto é, qualquer sucessão de Cauchy de elementos desse espaço convergem para um elemento desse mesmo espaço.

Passamos agora aos teoremas referentes à primitivação, e derivação, termo a termo, de sucessões (resp., séries) de funções. Começaremos com o exemplo de uma sucessão de funções integráveis cujo limite não converge para o integral do limite da sucessão.

Exemplo 1.6. *Considere a sucessão de termo geral $u_n(x) = nx(1 - x^2)^n,\ n \in \mathbb{N}$, para $x \in [0, 1]$. Esta sucessão converge pontualmente para $u \equiv 0$ mas*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_n(x) dx &= -\frac{n}{2} \int_0^1 (-2x)(1 - x^2)^n dx \\
&= -\frac{n}{2} \frac{(1 - x^2)^{n+1}}{n + 1} \Big|_0^1 = \frac{n}{2(n + 1)} \longrightarrow \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_n \left(\int_0^1 u_n(x)dx \right) \neq \int_0^1 \left(\lim_n u_n(x) \right) dx.$$

Teorema 1.4 (Integração termo a termo)**.** *Se a sucessão de funções contínuas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para u em $D = [a,b], a < b$, então para quaisquer $x, x_0 \in D$ tem-se que a sucessão das primitivas, de termo geral $U_n(x) = \int_{x_0}^x u_n(t)dt$, converge uniformemente para $U(x) = \int_{x_0}^x u(t)dt$ em D.*

Demonstração. Note-se, primeiro, a continuidade dos termos da sucessão, bem como do seu limite, que garante a existência das primitivas U_n e U. Por que a sucessão converge uniformemente, para todo o $\epsilon > 0$ existe uma ordem $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in D$, se tem

$$n > N \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Então, nessas mesmas condições temos

$$\begin{aligned} n > N \Rightarrow |U_n(x) - U(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (u_n(t) - u(t))dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |u_n(t) - u(t)|\, dt \\ &< \frac{\epsilon}{b-a}|x - x_0| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Corolário 1.4.1. *Se a série de funções contínuas $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ convergir uniformemente em $D = [a,b], a < b$, então para quaisquer $x, x_0 \in D$ tem-se*

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\int_{x_0}^x f_n(t)dt \right) = \int_{x_0}^x \left(\sum_{n=1}^\infty f_n(t) \right) dt.$$

O próximo exemplo ilustra a aplicação destes resultados.

Exemplo 1.7. *Conhecida a série de funções contínuas*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots ,$$

que converge uniformemente em todo o intervalo fechado $[-R, R] \subset]-1, +1[$, é fácil obter a expansão *em série de*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \\ &= \int_0^x (1-t+t^2-\cdots)dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \end{aligned}$$

válido para todo $x \in [-R, R] \subset]-1, +1[$.

Teorema 1.5 (Derivação termo a termo)**.** *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções em* $D = [a, b], a < b$. *Se*

1) a sucessão converge pontualmente para u *em* D;

2) as derivadas u_n' *são contínuas em* D, $n = 1, 2, \cdots$;

3) a sucessão das derivadas termo a termo, $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$, *converge uniformemente em* D;

então $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* u' *em* D.

Demonstração. Designe-se por u^* o limite da sucessão das derivadas, termo a termo, $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$. Pelo Teorema 1.3, u^* é contínua em D.

Integrando vem

$$\begin{aligned} \int_a^x u^*(t)dt &= \lim_n \int_a^x u_n'(t)dt \qquad \textit{por } 3) \\ &= \lim_n (u_n(x) - u_n(a)) \\ &= u(x) - u(a), \quad x \in D, \qquad \textit{por } 1). \end{aligned}$$

Note que a condição 2) é necessária para garantir a existência de $\int_a^x u_n'(t)dt$. Pela unicidade do integral definido de uma função contínua, resulta a igualdade $u^* = u'$ em D.

□

Corolário 1.5.1. *Considere a série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *em* $D = [a, b], a < b$. *Se*

1) a série converge pontualmente para f *em* D;

2) as derivadas f_n' *são contínuas em* D, $n = 1, 2, \cdots$;

3) a série das derivadas termo a termo, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente em* D;

então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *converge uniformemente para* f' *em* D, *ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)', \quad \forall x \in D.$$

2 Séries de Taylor

Na secção anterior lançou-se as bases para a representação de funções em termos de séries de funções elementares. Nas próximas secções vamos estudar séries de Taylor e de Fourier. A ideia chave será a de, dada uma sucessão de funções elementares, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, estudar a classe de funções que admitem uma representação em série do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$, de coeficientes a_n reais, e que possuam propriedades conhecidas, herdadas das funções elementares. A vantagem óbvia de tal abordagem é a de podermos descrever a acção de uma dada operação linear sobre os elementos dessa classe por meio da acção *conhecida* dessa operação sobre as funções elementares.

Questões imediatas são:

a) como obter a série a partir da função dada, e vice-versa;

b) em que domínio é válida a igualdade entre a função original e a série;

c) classes de funções onde se tenha garantida, à partida, essa igualdade;

d) (mais avançado) como obter aproximações da função original por somas finitas das funções simples, mantendo controlo sobre o erro cometido.

Nas secções que se seguem iremos estudar as aplicações deste tipo de representação associadas a famílias concretas de funções elementares. Começaremos pelas séries de potências, em que as funções elementares são monómios,

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2.1 Séries de potências

Designa-se por série de potências uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \tag{2.1}$$

em que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots)$ constitui uma sucessão de reais.

Comentários:

(1) chama-se a atenção para o facto de que em estrito rigor, a expressão $x^0 = 1$ só faz sentido quando $x \neq 0$; todavia, usaremos aqui a convenção $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, com o objectivo de simplificar as fórmulas resultantes;

(2) o caso geral de série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y-y_0)^n = a_0 + a_1(y-y_0) + a_2(y-y_0)^2 + \cdots$$

ditas, séries de potências centradas em $y_0 \in \mathbb{R}$, é redutível ao caso (2.1) por *translação* $x = y - y_0$.

Lema 2.1. *Para cada série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *convergente em pelo menos um* $x_0 \neq 0$, *existe um único* $R > 0$ *tal que a série converge absolutamente se* $|x| < R$, *e diverge se* $|x| > R$ *(no caso em que* $R < \infty$*).*

Demonstração. Se para $x_0 \neq 0$ a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, então os termos da série são limitados, ou seja, existe um $M > 0$ tal que $|a_n x_0^n| \leq M$, para todos $n \in \mathbb{N}$.

Para todo o x tal que $|x| < |x_0|$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente, pois

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e a série numérica (com x fixo)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = 1 + \left| \frac{x}{x_0} \right| + \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \ldots + \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \ldots$$

converge absolutamente pois constitui uma série geométrica de razão $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$.

Considere-se agora o conjunto $\mathcal{D}$ de todos os $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série de potências converge absolutamente. $\mathcal{D}$ é não vazio (pelo menos $x_0 \in \mathcal{D}$).

Se $\mathcal{D}$ é limitado, defina-se $R = \sup \mathcal{D} < \infty$ (todo o subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ tem supremo aí). Da construção resulta que a série de potências converge se $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.

Se $\mathcal{D}$ é ilimitado, então a série de potências converge em $|x| < +\infty$, e tem-se $R = \infty$. □

O valor R designa-se por raio de convergência da série. Para obter R, use-se o critério de D'Alembert (do quociente) ou o de Cauchy (da raíz).

Chama-se *intervalo de convergência* da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $]-R, R[$. O conjunto de todos os pontos para os quais a série converge designa-se *domínio de convergência* da série. Note que isto implica estudar a convergência nos pontos $x = -R$ e $x = +R$ individualmente.

Exemplo 2.1. *(i)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

Temos, do critério de D'Alembert que

$$L = \lim_n \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_n |x| \frac{n}{n+1} = |x|,$$

donde a série converge absolutamente se $|x| < 1$ *e diverge se* $|x| > 1$. *Assim,* $R = 1$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Pelo critério de D'Alembert,

$$L = \lim_n \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_n |x| \frac{n!}{(n+1)!} = 0 < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Assim,* $R = \infty$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2^2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n} + \ldots$

Então

$$L = \lim_n \left| \frac{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^{n+1}}}{(-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)2^n}} \right| = \lim_n |x|^2 \frac{2n-1}{2(2n+1)} = \frac{|x|^2}{2} < 1,$$

donde temos o intervalo de convergência definido pela inequação $|x| < \sqrt{2}$.

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n} = 1 + \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{16} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{4^n} + \ldots$

Usando o critério de Cauchy,

$$L = \lim_n \sqrt[n]{\left| \frac{(x-2)^n}{4^n} \right|} = \frac{|x-2|}{4} < 1$$

donde o intervalo de convergência é dado pela inequação $|x-2| < 4$.

Teorema 2.1 (Convergência uniforme das séries de potências)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leq \infty$.

A série converge uniformemente em $[-M, M]$, *para todo* $0 < M < R$.

Demonstração. Nestas condições tem-se

(i) $|a_n x^n| \leq |a_n| M^n = c_n$, para todos $x \in [-M, M]$, $n \in \mathbb{N}$;

(ii) a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge absolutamente,

donde, pelo Teorema 1.2 (Critério de Weierstrass), a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em $[-M, M]$, para $0 < M < R$. □

Corolário 2.1.1 (Continuidade de séries de potências)**.** *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *define uma função contínua no intervalo de convergência.*

Teorema 2.2 (Igualdade de séries de potências)**.** *Se duas séries de potências,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, *tem a mesma soma na vizinhança de* $x = 0$, *então as séries coincidem.*

Demonstração. Tome-se uma vizinhança interior ao intervalo de convergência das séries dadas. Pelo Teorema 2.1, teremos garantida a convergência uniforme das séries nessa vizinhança.

Da igualdade

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots \tag{2.2}$$

numa vizinhança de $x = 0$, resulta $a_0 = b_0$ quando tomarmos $x = 0$. Vem então de (2.2) que

$$\begin{aligned} & a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \ldots \\ \Leftrightarrow \quad & x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots) = x(b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 + \ldots) \end{aligned}$$

Use-se agora a continuidade das duas séries das potências (Corolário 2.1.1) para justificar a simplificação

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \ldots = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 + \ldots$$

Tomando de novo $x = 0$, obtemos $a_1 = b_1$. Procedendo deste modo recursivamente vem $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

No que se segue vamos ver técnicas que permitem obter facilmente a expansão em série de potências de uma dada função. O primeiro método baseia-se no conhecimento prévio da soma da série geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{2.3}$$

a qual converge absolutamente no intervalo de convergência definido por $|x| < 1$.

Exemplo 2.2. *(i) A expansão em série de potências de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é feita por aplicação da série anterior. Temos*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &= \frac{1}{1-y} \quad \textit{para } y = -x^2 \\ &= 1 + y + y^2 + \ldots + y^n + \ldots \\ &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + \ldots + (-x^2)^n + \ldots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \end{aligned}$$

com intervalo de convergência dado por $|y| = |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$.

(ii) Semelhante procedimento pode ser aplicado à função

$$\begin{aligned}\frac{3x^2}{1+x} &= 3x^2\frac{1}{1-(-x)}\\ &= 3x^2[1+(-x)+(-x)^2+\ldots+(-x)^n+\ldots]\\ &= 3x^2-3x^3+3x^4-\ldots+3(-1)^n x^{n+2}+\ldots,\end{aligned}$$

cuja expansão que é válida no intervalo de convergência definido por $|x|<1$.

Os seguintes exemplos permitem obter a expansão em série das funções exponencial e da função $(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ (dita, série binomial) por meio de propriedades conhecidas destas.

Exemplo 2.3. *(i) Função exponencial.*

A série

$$E(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

converge absolutamente se $|x|<\infty$. *Porque*

$$\begin{aligned}E(x)E(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!(n-j)!}x^j y^{n-j}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n\\ &= E(x+y),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}E(1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= e,\end{aligned}$$

tem-se $E(x)=e^x$, *em* $\mathbb{R}$ *(unicidade da função exponencial).*

(ii) (Série binomial) $(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Casos particulares: $\alpha=0$ *conduz a* $(1+x)^0\equiv 1$; $\alpha=m\in\mathbb{N}$ *conduz à habitual fórmula binomial*

$$(1+x)^m=x^m+mx^{m-1}+\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}x^{m-2}+\ldots+mx+1.$$

Caso geral: para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$, *temos*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n, \quad |x| < 1,$$

onde $(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$, *se* $n \in \mathbb{N}$, *e* $(\alpha)_0 := 1$.

Prova-se construindo a função

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n,$$

que tem raio de convergência $R = 1$.

O produto satisfaz a igualdade $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) = \varphi(\alpha+\beta)$.

Para um dado $\alpha_0 > 0$ *temos que, para cada* x *fixo em* $]-1,1[$, *a série em* α *converge uniformemente para* $|\alpha| < \alpha_0$ *(critério de Weierstrass).*

Então conclui-se que $\varphi(\alpha) = a^\alpha$, *para um certo* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Com* $a = \varphi(1) = 1 + x$ *a prova fica completa.*

Os lemas que se seguem servem de base às próximas técnicas para uma fácil obtenção da expansão em série de potências de uma dada função.

Lema 2.2 (Integração termo a termo)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leq \infty$. *Então*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{para todo } x \in]-R, R[.$$

Por aplicação do Corolário 1.4.1

Lema 2.3 (Derivação termo a termo)**.** *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $0 < R \leq \infty$. *Então*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad \text{para todo } x \in]-R, R[.$$

Por aplicação do Corolário 1.5.1.

Exemplo 2.4. *(i) Pelo Lema 2.2,*

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \int_0^x \frac{1}{t+1} dt \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots) dt \quad \textit{série convergente em }]-1,1[\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \end{aligned}$$

sendo a expansão válida no intervalo de convergência $x \in]-1,1[$, *o mesmo intervalo de convergência da série a integrar.*

(ii) De forma semelhante, pelo Lema 2.2

$$\begin{aligned} arctan(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^n t^{2n} + \ldots\right] dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \end{aligned}$$

válido para todo $x \in]-1,1[$.

(iii) Usando a série binomial (Exemplo 2.3, com $\alpha = -1/2$*) temos para a função* arcsin

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^x [1 - \frac{1}{2}(-t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-t^2)^2 + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})_n}{n!}(-t^2)^n + \ldots \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(-\frac{1}{2})_n}{n!} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!} x^{2n+1} + \ldots \end{aligned}$$

válido para $x \in]-1,1[$ *(onde* $n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$, *e terminando em* 2 *ou* 1*).*

(iv) Para a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ *tem-se por aplicação do Lema 2.3*

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 2 + 3\cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + \ldots + n\cdot(n-1)x^{n-2} + \ldots\right) \\ &= 1 + \frac{3\cdot 2}{2}x + \frac{4\cdot 3}{2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \ldots \end{aligned}$$

válido para todo $|x| < 1$.

2.2 Séries de Taylor

Teorema 2.3. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ na vizinhança do ponto $c \in int(D)$. Se a função f admitir uma expansão em série de potências*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \tag{2.4}$$

válida no intervalo de convergência $]c-R, c+R[\subset D$, então

(i) f admite derivadas de qualquer ordem no interior desse intervalo;

(ii) $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Demonstração. Note-se que as séries obtidas por derivação termo a termo de (2.4) têm o mesmo raio de convergência R da série original, pelo que convergem uniformemente em todos os sub-intervalos fechados de $]c-R, c+R[$.

Pelo Corolário 1.5.1 temos que

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

em qualquer sub-intervalo fechado de $]c-R, c+R[$. Por indução, obtem-se a expansão em série de $f^{(m)}$

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= m! a_m + \frac{(m+1)!}{1!} a_{m+1}(x-c) + \frac{(m+2))!}{2!} a_{m+2}(x-c)^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (x-c)^{n-m}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

válida em $]c-R, c+R[$. Calcule-se agora f e suas derivadas no ponto c,

$$f(c) = a_0,\ f'(c) = a_1,\ f''(c) = 2a_2,\ \ldots, f^{(n)}(c) = n! a_n, \ldots$$

□

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ diz-se a série de Taylor de f, centrada em $x = c$. De notar que a exigência de f ser de classe C^∞ é uma condição necessária à existência de série de Taylor de f, mas não é suficiente para garantir a igualdade entre f e a série. O seguinte exemplo mostra a não suficiência.

Exemplo 2.5. *A função*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

é de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. As derivadas de f em $c = 0$ existem, para qualquer ordem n, e são nulas, pelo que a expansão em série de potências de f é a função identicamente nula.

Todavia, usando a expansão (conhecida) em série da função exponencial,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |x| < \infty,$$

obtemos uma expansão em série para f do tipo

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n! x^{2n}} + \ldots,$$

válida no intervalo definido por $0 < \left|-\frac{1}{x^2}\right| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 0$.

Definição 2.1. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se analítica em $c \in D$ sse admite uma expansão em série de potências*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

válida numa vizinhança $V_\delta(c) =]c-\delta, c+\delta[\subset D$ do ponto.

Teorema 2.4 (Teorema de Taylor)**.** *Seja f uma função de classe C^{n+1} num intervalo $]c-R, c+R[$. Então existe uma função R_n tal que*

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x), \tag{2.5}$$

para todo $x \in]c-R, c+R[$, com

$$\lim_{x \to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

Demonstração. A função R_n é dada por

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \right],$$

donde é de classe C^{n+1} no intervalo $]c-R, c+R[$. De (2.5) tem-se

$$0 = R_n(c) = R_n'(c) = R_n''(c) = \cdots = R_n^{(n)}(c).$$

Prove-se agora o limite. Tem-se

$$\lim_{x \to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = \frac{0}{0},$$

pelo que este constitui uma indeterminação. Porque tanto o numerador como o denominador são funções contínuas e diferenciáveis na vizinhança do ponto c, é aplicável a regra de Cauchy. Mas o novo limite,

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}}$$

é de novo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando novamente a regra de Cauchy, teremos

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x-c)^{n-2}} = \frac{0}{0}.$$

Aplicando sucessivamente a regra de Cauchy iremos terminar com o limite

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = R_n^{(n)}(c) = 0,$$

pelo que

$$\lim_{x\to c} \frac{R_n(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x\to c} \frac{R_n'(x)}{n(x-c)^{n-1}} = \cdots = R_n^{(n)}(c) = 0.$$

□

O polinómio de grau n

$$P_{n,c}(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{2.6}$$

designa-se por *polinómio de Taylor de ordem n da função f, centrado no ponto c*, e associado a

$$R_{n,c}(x) = f(x) - P_{n,c}(x), \tag{2.7}$$

o *resto de Taylor de ordem n*. Sempre que o ponto c estiver sub-entendido, omiti-lo-emos e escreveremos apenas $P_n(x), R_n(x)$.

Comentários:

(1) Chama-se a atenção para o facto de que o polinómio de Taylor tem domínio $\mathbb{R}$, mas que a função que este pretende aproximar pode ter (e em geral tem) um domínio mais reduzido.

(2) Se f admite uma expansão em série de potências centradas em c, então o resto $R_n(x)$ é obtido a partir dessa série por truncatura dos primeiros n termos, isto é

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

2.3 Estimativas para erro da aproximação por polinómios de Taylor

Vamos agora estudar a qualidade da aproximação de uma dada função por o seu polinómio de Taylor P_n. O *erro cometido na aproximação de f pelo polinómio P_n* é dado por

$$Erro_n(x) = |f(x) - P_n(x)|, \tag{2.8}$$

ou seja, pelo *módulo da função resto.* Tal envolve estimar o resto R_n que depende do grau n escolhido para o polinómio, bem como do intervalo de convergência da série.

Note-se, em primeiro lugar, que para o objectivo de estimar o erro cometido ao aproximarmos f pelo seu polinómio de Taylor P_n, a expressão do resto $R_n = f - P_n$ é praticamente inútil. Todavia, no caso particular em que a série de Taylor obtida é uma série alternada, então o resto de ordem n é estimável pelo termo de ordem $n+1$, isto é

$$\begin{aligned}
Erro_n(x) &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k (x-c)^k\right| \\
&= \big|(-1)^{n+1}a_{n+1}(x-c)^{n+1} + (-1)^{n+2}a_{n+2}(x-c)^{n+2} + (-1)^{n+3}a_{n+3}(x-c)^{n+3} \\
&\qquad + (-1)^{n+4}a_{n+4}(x-c)^{n+4} + \cdots\big| \\
&\leq \big|(-1)^{n+1}a_{n+1}(x-c)^{n+1}\big| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}\right|.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.6. *O Exemplo 2.4 (i), permite calcular uma aproximação a* $\ln(2)$ *(note que, para $x = 1$, temos a série harmónica alternada) dada por*

$$P_7(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{319}{420},$$

com um erro estimado por

$$Erro_7(1) = |\ln(1+1) - P_7(1)| = \left|-\frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \cdots\right| \leq \frac{1}{8} = 0,125.$$

No que se segue iremos mostrar como construir diferentes expressões para o resto

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\
&= f(x) - \left[f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n\right].
\end{aligned}$$

Sem perca de generalidade, considere-se $x > c$. Construa-se a função

$$\varphi(y) = f(x) - \left[f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n\right],$$

para $y \in [c,x]$. A função φ é contínua em $[c,x]$, diferenciável em $]c,x[$, e verifica

$$\varphi(c) = R_n(x), \quad \text{e} \quad \varphi(x) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\varphi'(y) &= \frac{d}{dy}\left\{ f(x) - \left[f(y) + f'(y)(x-y) + \frac{f''(y)}{2!}(x-y)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n \right] \right\} \\
&= -\left[f'(y) + f''(y)(x-y) - f'(y) + \frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - \frac{f''(y)}{2!}2(x-y) + \ldots \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}n(x-y)^{n-1} \right] \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.
\end{aligned}$$

Para qualquer função auxiliar ψ, contínua em $[c,x]$, diferenciável em $]c,x[$, tem-se por aplicação directa do Teorema de Cauchy (AM1) que existe $\xi \in]c,x[$ tal que

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{\psi(x) - \psi(c)}.$$

O mesmo é válido para o caso de $x < c$.

Assim, atendendo a que $\varphi(x) - \varphi(c) = 0 - R_n(x)$ tem-se para esta função a expressão (dependente da escolha da função auxiliar ψ)

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= -\left[\psi(x) - \psi(c)\right] \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \\
&= \frac{\psi(x) - \psi(c)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \quad \text{para } |\xi - c| < |x - c|. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Diferentes escolhas da função auxiliar ψ determinarão diferentes expressões para o resto R_n.

Teorema 2.5 (Resto de Lagrange)**.** *Seja f uma função de classe $C^{n+1}(]a,b[)$, $a < b$. O resto de Lagrange associado ao polinómio de Taylor de ordem n de f, centrado em $c \in]a,b[$, é dado por*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}, \quad \text{para } |\xi - c| < |x - c|$$

com $x \in]a,b[$.

Demonstração. Tome-se a função auxiliar $\psi(y) = -(x-y)^{n+1}$. A função é contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a, b[$, com $\psi'(y) = (n+1)(x-y)^n$. Substituindo em (2.9) vem

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{\psi(x)-\psi(c)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \\ &= \frac{0-(x-c)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \end{aligned}$$

□

Outras formas possíveis para restos (sem demonstração) são:

- **Resto de Cauchy** ($\psi(y) = x - y$):

$$R_n^{Cauchy}(x) := \frac{f^{(n+1)}(c+\theta(x-c))}{n!}(1-\theta)^n (x-c)^{n+1},$$

  onde $\xi = c + \theta(x-c)$, e $\theta \in]-1, +1[$.

- **Resto do Integral**:

$$R_n^{Integral}(x) := \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

2.4 Aplicações

Cálculo de integrais sem primitiva imediata

1.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \ldots\right) dt, \quad |-t^2| < \infty \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots \end{aligned}$$

   com $|x| < \infty$

2. Calcular o integral elíptico

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi, \quad |x| < 1$$

pode ser feito usando a série binomial

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} x^{2n} \sin^{2n} \varphi d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!!} x^{2n} \sin^{2n} \varphi] d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!!} x^{2n} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!}{n!!} \right)^2 x^{2n} \right].
\end{aligned}
$$

Cálculo da soma de séries numéricas

1.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^x t^{2n} dt \right) \\
&= \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\
&= \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \lim_{x \to 1^-} \arctan(x) \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

É importante notar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge absolutamente se $|x| < 1$, logo pelo Corolário 2.1.1 é contínua no seu intervalo de convergência.

2.

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n (2n+1) n!} &= \lim_{x \to 1^-} \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \\
&= \lim_{x \to 1^-} \arcsin(x) \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

onde de novo a série converge absolutamente se $|x| < 1$, logo é aí contńua, pelo que é possível calcular este limite.

Aproximação polinomial de funções, com estimativa de erros

1. (Trivial) Aproximar $f(x) = x^3$ por um polinómio de 2^a ordem centrado em $x = 1$ resulta em $P_2(x) = 3x^2 - 3x + 1$, resto $R_2(x) = (x-1)^3$. A Figura 2. mostra os gráficos destas três funções.

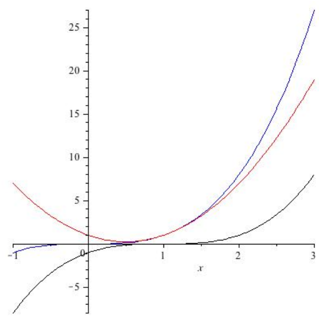


Figura 2: Por ordem: azul - f; vermelho - P_2; negro - R_2;

2. Aproximar $f(x) = e^x$ por um polinómio de 3^a ordem centrado em $x = 0$ resulta em $P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, com resto de Lagrange

$$R_3(x) = \frac{e^\xi}{4!}x^4, \quad \text{para } |\xi| < |x|.$$

A Figura 3. mostra os gráficos destas para $x \geq 0$.

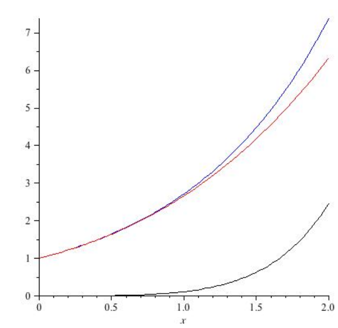


Figura 3: Por ordem: azul - $f(x) = e^x$; vermelho - P_3; negro - R_3;

3. Obter uma aproximação de $\sqrt{2}$, a partir da função $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$. f admite expansão em série de potências centradas na origem (série binomial e, mais importante, alternada) donde o resto pode ser estimado pelo termo de ordem $n+1$ da série. Para $x = 1$ vem

$$|R_n(1)| \leq \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

donde para $n = 4$ temos

$$\sqrt{2} \approx P_4(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2^2}}{2} + \frac{\frac{3}{2^3}}{3!} - \frac{\frac{5!!}{2^4}}{4!} = 1.3984375$$

com um erro máximo de $|R_n(1)| \leq \frac{7}{256} \approx 0.027\ldots$

Aproximação de integrais definidos, com estimativa de erros

1. Obter uma aproximação de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ com erro inferior a 10^{-4}. Temos

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots$$

com esta série a convergir uniformemente em todo o intervalo fechado de $\mathbb{R}$. Sendo a série alternada, o erro cometido é estimado pelo termo de ordem $n + 1$. Assim, uma aproximação de $\int_0^1 e^{-t^2} dt$ com um erro máximo de 10^{-4} pode ser obtida tomando n tal que

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4},$$

ou seja $n > 5$. Assim,

$$P_6(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \cdots - \frac{1}{13 \cdot 6!},$$

e resto $|R_6(1)| \leq \frac{1}{15 \cdot 7!} = \frac{1}{75600}$.

2. O mesmo para $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

e para $n = 5$ temos a precisão desejada

$$|R_5(\pi)| \leq \frac{\pi^{13}}{13 \cdot 13!} \approx 0.000035869\ldots$$

3 Séries de Fourier

Nesta secção vamos estudar um segundo tipo de expansão em série, baseado em funções elementares periódicas (co-sinos, sinos ou exponenciais complexas), ditas, *séries de Fourier*[2].

Definição 3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), diz-se periódica, de período $T > 0$ (ou $T-$periódica), se satisfizer*

$$f(x+T) = f(x), \tag{3.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note-se que a mudança de variável $y = x + T$ conduz a $f(y) = f(y - T)$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Aplicando recursivamente a condição de periodicidade, obtém-se $f(x) = f(x + kT)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e todo o inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Diremos então que f tem por domínio $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

A decomposição da função exponencial complexa nas suas partes par e ímpar,

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

indica que, sendo as funções co-sino e sino, 2π-periódicas, então a função e^{ix} é também 2π-periódica. Recorde-se a interpretação geométrica de uma onda complexa

$$Ae^{i\omega x} = A\left[\cos(\omega x) + i\sin(\omega x)\right], \quad A > 0,\ x \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right[,$$

de período $\frac{2\pi}{\omega}$, onde A denota a *amplitude da onda* e ω representa a sua *frequência*.

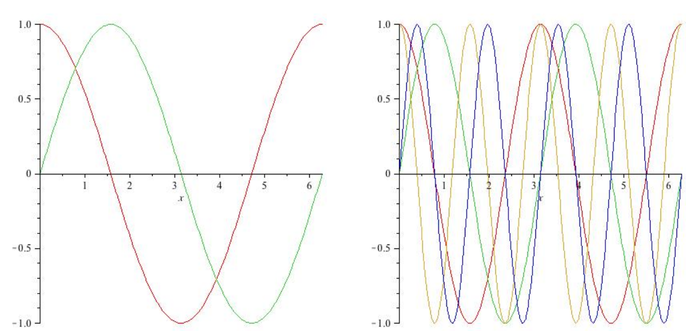


Figura 4: Gráfico de sino / co-sino; gráficos de diferentes modulações destas. Note-se desfasamento entre sino e co-sino, ou seja, a translação $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$.

[2] Jean-Baptiste Fourier (1768-1839) introduziu o conceito em 1807, para efeitos de resolução da equação do calor.

3.1 Definição e representação de séries de Fourier

Relembre-se que, se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, então o critério de Weierstrass assegura a convergência uniforme da série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

para uma função contínua f em todo o subintervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Adicionalmente, f é também T-periódica, com $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

No que se segue, vamos considerar o espaço vectorial das funções reais (ou complexas) de variável real, contínuas[3] e $T-$periódicas em $\mathbb{R}$. Designaremos este espaço por $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Lema 3.1 (Propriedades)**.** *Para todo $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ tem-se*

i) *f é limitada em $\mathbb{R}$;*

ii) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$ *para todo $a \in \mathbb{R}$.*

A demonstração é trivial e deixada como exercício.

Nota: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, com $f(x) = a(x) + ib(x)$, então define-se o integral como

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^T [a(x) + ib(x)]dx := \left(\int_0^T a(x)dx\right) + i\left(\int_0^T b(x)dx\right).$$

Lema 3.2 (Fecho relativamente à convergência uniforme)**.** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ que converge uniformemente para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.*

Imediato, por aplicação do Teorema 1.3

Definição 3.2. *Para $f, g \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, define-se o produto interno*

$$\langle f, g\rangle := \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{3.2}$$

Este produto interno induz, no espaço vectorial $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, a norma (dita, norma em média quadrática, ou norma$-L_2$) dada por

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx. \tag{3.3}$$

Diremos que

1) f é ortogonal a g, e escrevemos $f \perp g$, se $\langle f, g\rangle = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}dx$;

[3]Uma função complexa de variável real diz-se contínua sse as suas parte real e parte imaginária o forem.

2) a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em norma$-L_2$ para f sse

$$\lim_n \|f_n - f\|_2 = \lim_n \left(\int_0^T |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

A norma em média quadrática mede a energia da função, vista como um sinal em tempo; por isso, é também dita *norma de energia*.

Exemplo 3.1. *(i) O sistema de funções complexas de variável real*

$$\{e^{in\omega x}, n \in \mathbb{Z}\} \tag{3.4}$$

constitui um sistema ortogonal, mas não ortonormado em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ (com $T = \frac{2\pi}{\omega}$). Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{in\omega x}\overline{e^{im\omega x}} dx &= \int_0^T e^{i(n-m)\omega x} dx \\ &= \left. \frac{e^{i(n-m)\omega x}}{i(n-m)\omega} \right|_0^T \\ &= \frac{e^{i(n-m)2\pi}}{i(n-m)\omega} - \frac{1}{i(n-m)\omega} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se $n \neq m$. Por outro lado,

$$\int_0^T e^{in\omega x}\overline{e^{in\omega x}} dx = \int_0^T dx = T \neq 0, \quad n = \cdots - 2, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

(ii) O sistema de funções reais de variável real

$$\{1, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x), n \in \mathbb{N}\} \tag{3.5}$$

em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, com $T = \frac{2\pi}{\omega}$, é também um sistema ortogonal, mas não ortonormado. O resultado vem de

$$\int_0^T \cos(n\omega x)\cos(m\omega x) dx = \int_0^T \left(\frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \right) \overline{\left(\frac{e^{im\omega x} + e^{-im\omega x}}{2} \right)} dx$$

em conjunto com a conclusão acima. Proceder do mesmo modo para os restantes elementos do sistema.

Adicional:

1) Ambos os sistemas podem ser facilmente normalizados. A normalização do sistema (3.5) conduz

a

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega x), \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega x), n \in \mathbb{N}\right\},$$

agora um sistema ortonormado de $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

2) As funções $e_n(x) := e^{2\pi i n x}$, onde $n \in \mathbb{Z}$, dizem-se *caractéres de frequência* n e formam um sistema ortonormado de $C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Para $N \in \mathbb{N}$, a combinação finita

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x) \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z}),$$

onde $c_n \in \mathbb{C}, n = -N, \cdots, N-1, N$, designa-se por *polinómio trigonométrico*, com

$$c_n = \langle f, e_n \rangle, \quad n = -N, \cdots, N-1, N,$$

e onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto interno (3.2).

Teorema 3.1. *Se a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

converge uniformemente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, então* $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$*, com* $T = \frac{2\pi}{\omega}$*, e os seus coeficientes são dados por*

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{3.6}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.7}$$

Note-se que há funções que não contínuas e para as quais é possível calcular os coeficientes (3.6) e (3.7). Um exemplo é a função *onda quadrada,*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [2n-1, 2n[\\ 1, & x \in [2n, 2n+1[\end{cases} \tag{3.8}$$

cujos coeficientes são $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \cdots$, e $b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, b_{2n} = 0$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$

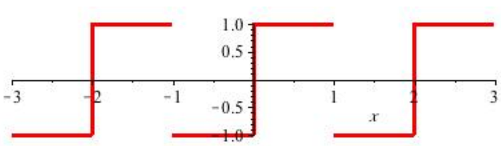


Figura 5: Onda quadrada, $-3 < x < 3$; $\quad T = 2, \omega = \pi$

A definição seguinte estabelece as condições em que é possível estabelecer a série de Fourier para uma função real (resp. complexa) periódica.

Definição 3.3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$) uma função $T-$periódica. Se a função tem energia finita e os integrais (3.6) e (3.7) existem e são finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$ então a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

diz-se a série de Fourier de f, e os coeficientes a_n, b_n dizem-se os coeficientes de Fourier de f.

Nota:

i) Da periocidade de f vem as expressões alternativas para cálculo dos coeficientes

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ii) Em consequência, se f é uma função par, então $b_n = 0, \forall n$. Da mesma forma, se f é uma função ímpar, então $a_n = 0, \forall n$.

iii) Outras representações:

Suponha-se $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$, com $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(A) Tome-se

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\ n = 1, 2, \cdots$$

e determine-se φ_n tal que

$$e^{i\varphi_n} = \frac{1}{A_n}(a_n + ib_n) \text{ ou ainda } \begin{cases} \cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n} \\ \\ \sin\varphi_n = \frac{b_n}{A_n} \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \cos(n\omega x - \varphi_n) &= \cos(n\omega x)\cos(\varphi_n) + \sin(n\omega x)\sin(n\varphi_n) \\ &= \frac{a_n}{A_n}\cos(n\omega x) + \frac{b_n}{A_n}\sin(n\omega x) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega x - \varphi_n). \end{aligned}$$

(B) Para

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx - i\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx, \; n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

vem

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ & n = 1, 2, \cdots \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \end{cases}$$

donde

$$a_0 = 2c_0, \; a_n = c_n + c_{-n}, \; b_n = i(c_n - c_{-n})$$

e

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\omega x}.$$

3.2 Convergência em média quadrática

No que se segue, trataremos apenas o caso do espaço de funções $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. A validade dos próximos resultados no caso de funções nas condições da definição (3.3) é imediata.

Também, e por comodidade de escrita, usaremos a base ortonormada

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}, \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega x) \text{ e } \; \psi_{-n}(x) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega x),$$

donde tiramos

$$\int_0^T \psi_j(x)\psi_l(x)dx = \delta_{j,l}$$

e para cada coeficiente $d_n = \int_0^T f(x)\psi_n(x)dx$ resulta

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}}d_0, \; a_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\; d_n, \; b_n = \sqrt{\frac{2}{T}}\; d_{-n}$$

com $n = 0, 1, 2, \cdots$

O problema da convergência em média quadrática consiste em, dada uma função f, com energia finita num intervalo $[0, T], T > 0$, (isto é, $\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty$), encontrar o polinómio trigonométrico

$$Q_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} q_n\psi_n(x), k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.9}$$

que minimiza a norma quadrática

$$||f - Q_k||_2^2 = \int_0^T [f(x) - Q_k(x)]^2 dx.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^T [f(x) - Q_k(x)]^2 dx \\
&= \int_0^T \sum_{n=-k}^{k} [f(x) - q_n \psi_n(x)]^2 dx \\
&= \int_0^T [f(x)]^2 dx - \sum_{n=-k}^{k} 2q_n \int_0^T f(x)\psi_n(x) dx + \sum_{j,l=-k}^{k} q_j q_l \int_0^T \psi_j(x)\psi_l(x) dx \\
&= \int_0^T [f(x)]^2 dx - \sum_{n=-k}^{k} 2q_n d_n + \sum_{j=-k}^{k} q_j^2 \\
&= \int_0^T [f(x)]^2 dx - \sum_{n=-k}^{k} 2q_n d_n + \sum_{j=-k}^{k} q_j^2 + \sum_{j=-k}^{k} d_j^2 - \sum_{j=-k}^{k} d_j^2 \\
&= \int_0^T [f(x)]^2 dx + \sum_{n=-k}^{k} (q_n - d_n)^2 - \sum_{j=-k}^{k} d_j^2
\end{aligned}$$

pelo que $\left(\min \int_0^T [f(x) - Q_k(x)]^2 dx\right)$ é alcançado quando $q_n = d_n,\ n = -k, -k+1, \cdots, k-1, k$.

O polinómio trigonométrico associado à função f satisfaz a seguinte desigualdade entre as respectivas energias.

Lema 3.3 (Desigualdade de Bessel)**.** *Sejam $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ e $d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a sequência dos coeficientes de Fourier de f na base $\{\psi_k, k \in \mathbb{Z}\}$. Então*

$$\sum_{j=-k}^{k} d_j^2 \leq \int_0^T [f(x)]^2 dx,$$

para todo o $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Lema 3.4. *Nas mesmas condições do lema anterior, tem-se que a série $\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^2$*

i) é absolutamente convergente;

ii) satisfaz, no limite, a desigualdade anterior, isto é,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^2 \leq \int_0^T [f(x)]^2 dx.$$

Isto significa que o polinómio trogonométrico (resp. a série) (3.9) tem a sua energia majorada pela energia do sinal original f.

Definição 3.4 (Convergência em média quadrática). *Uma sequência* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de funções em* $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ *converge em média quadrática para* $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, *sse*

$$\lim_k ||f - f_k||_2^2 = \lim_k \left(\int_0^T [f(x) - f_k(x)]^2 dx \right) = 0.$$

Teorema 3.2 (Identidade de Parseval). *Seja* $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ *e* $d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. *A série de Fourier associada a* f *converge em média quadrática sse os seus coeficientes satisfizerem a identidade de Parseval*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^2 = \int_0^T [f(x)]^2 dx.$$

Demonstração. Basta atender a que, para a sequência dos polinómios ortogonais $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ associados a f, se tem

$$||f - Q_k||_2^2 = \int_0^T [f(x) - Q_k(x)]^2 dx = \left(\int_0^T [f(x)]^2 dx - \sum_{j=-k}^{k} d_j^2 \right)$$

donde se obtém, no limite, o resultado pretendido. ☐

Note-se, todavia, que a convergência em média quadrática não implica a convergência pontual.

Exemplo 3.2. *Tome-se a sequência de funções de energia finita.* $\{f_n^j, j = 1, 2, \cdots, n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *dada por*

$$f_n^j(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}] \\ 0, & caso\ contrário \end{cases},$$

para $j = 1, 2, \cdots, n$.

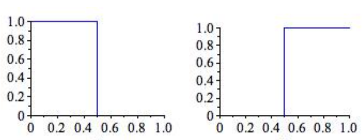
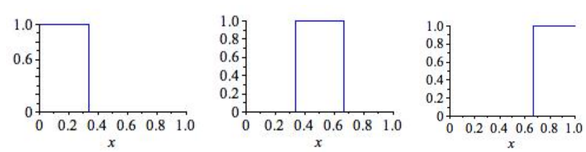


Figura 6: Gráficos de f_2^1 e f_2^2



Gráficos de f_3^1, f_3^2 e f_3^3

A sequência converge em média quadrática para a função nula mas não converge pontualmente em nenhum valor de $x \in [0, 1]$.

3.3 Convergência pontual

No que se segue, vamos considerar, sem perca de generalidade, funções $2\pi-$periódicas e integráveis à Riemann em $[0, 2\pi]$. Estas funções satisfazem as condições da definição (3.3), dado que o produto de uma função integrável à Riemann num intervalo fechado de $\mathbb{R}$, por uma função monótona é ainda integrável à Riemann nesse intervalo

As somas parciais da série de Fourier associada a uma tal função f são, respectivamente, $s_0 = \frac{a_0}{2}$ e

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=1}^{n}[\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos[k(t-x)]\right\}}_{(I_1)} dt. \end{aligned}$$

Para determinação de (I_1), use-se o facto de que

$$2\cos(k\theta)\sin(\theta/2) = \sin\frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin\frac{(2k-1)\theta}{2},$$

donde

$$\begin{aligned} (I_1) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos[k(t-x)]\sin[\left(\frac{t-x}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin[(2k+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)] - \sin[(2k-1)\left(\frac{t-x}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} \\ &= 1 + \left[-1 + \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right] \\ &= \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

e temos

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right\} dt.$$

Assim,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{\sin\left[(2n+1)\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}ds \quad (s=t-x, ds=dt)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\frac{\sin\frac{(2n+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+s)\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x-s)+f(x+s)]\frac{\sin\frac{(2n+1)s}{2}}{\sin\frac{s}{2}}ds \quad (u=-s, du=-ds)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x-2t)+f(x+2t)]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt, \quad (s=2t, ds=2dt)$$

Isto significa que para todo o $x \in [-\pi,\pi]$ temos que a sucessão numérica $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente se e só se a sequência numérica dos integrais definidos[4]

$$\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x-2t)+f(x+2t)]\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}dt\right)_{n=1}^{\infty} \tag{3.10}$$

converge para um valor finito. Desta forma, o estudo da convergência pontual da série de Fourier associada a f está agora reduzida ao estudo da convergência da sucessão (3.10), que vamos estudar de seguida.

I) No caso da função constante $f=1$ obtemos $s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt = 1$, independentemente do valor de x, pelo que a sucessão converge para $s(x)=1$ qualquer que seja $x \in [-\pi,\pi]$.

II) No caso geral, designe-se por $s = s(x)$ o limite da sucessão de termo geral (3.10). Vamos mostrar, por construção, que este limite *efectivamente* existe. Tome-se a diferença

$$s_n(x)-s(x) = \left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}[f(x-2t)+f(x+2t)]\frac{\sin([(2n+1)t]}{\sin t}dt\right)$$
$$-s(x)\left(\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\left[\frac{f(x-2t)+f(x+2t)}{2}-s(x)\right]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt.$$

[4]Cada termo desta sucessão diz-se um *integral de Dirichlet*.

Assim, teremos $\lim_n s_n(x) = s(x)$ sse

$$\lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{f(x-2t)+f(x+2t)}{2} - s(x) \right] \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt = 0. \tag{3.11}$$

Denote-se $\frac{f(x-2t)+f(x+2t)}{2} - s(x) := \varphi_x(t)$. Para $0 < \delta < \pi/2$, fixo, divida-se o integral (3.11) em duas partes:

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_x(t) \frac{\sin[(2n+1)t)]}{\sin t} dt = \int_0^{\delta} \varphi_x(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt + \underbrace{\int_{\delta}^{\pi/2} \varphi_x(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_3)}.$$

Vamos agora provar que (I_3) tende para zero quando $n \to \infty$. Considere-se o seguinte lema.

Lema 3.5 (Lema de Riemann)**.** *Seja $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com($a < b$) uma função integrável à Riemann no seu domínio. Então*

$$\lim_k \left(\int_a^b g(t) \sin(kt) dt \right) = 0.$$

Demonstração. Para todo o k natural, temos que

$$\left| \int_a^b \sin(kt) dt \right| \leq \left| \frac{\cos(kb) - \cos(ka)}{k} \right| \leq \frac{2}{k}.$$

Use-se uma partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ do intervalo dado. Vem

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \sin(kt) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin(kt) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin(kt) dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(kt) dt \end{aligned}$$

onde m_i denota o ínfimo de g no sub-intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Então, para $\Delta_i = |t_{i+1} - t_i|$ e $\omega_i = \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |g(t) - m_i|$, vem

$$\left| \int_a^b g(t) \sin(kt) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta_i + \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Porque g é integrável à Riemann, o termo $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta_i$ tenderá para zero quando o diâmetro da partição, $\mathcal{P} := max_i |\Delta_i|$, fôr para zero. O segundo termo, $\frac{2}{k} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|$, tende para zero quando k tende para infinito. □

Porque a função φ_x é integrável à Riemann em $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ e o inverso da função sino é monótona nesse intervalo, então a função auxiliar

$$g(t) = \frac{\varphi_x(t)}{\sin t}$$

é também integrável à Riemann em $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ (onde $0 < \delta < \pi/2$). O resultado pretendido ($\lim_n(I_3) = 0$) vem como consequência directa do Lema de Riemann aplicado a g no intervalo $[\delta, \frac{\pi}{2}]$.

Isto implica também que (3.10) é agora equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \varphi_x(t)\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt \\ &= \lim_n \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \left[\frac{f(x-2t)+f(x+2t)}{2} - s(x)\right]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt, \end{aligned}$$

ou seja, a convergência pontual da soma da série de Fourier associada a f depende do comportamento da função numa vizinhança, tão pequena quanto se queira, do ponto x. Este resultado constitui o teorema enunciado de seguida.

Teorema 3.3. *(Teorema de localização de Riemann) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2\pi-$periódica e integrável à Riemann em $[0, 2\pi]$.*

A sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, das somas parciais da série de Fourier associada a f, converge pontualmente para a função $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sse

$$\lim_n \frac{2}{\pi}\int_0^\delta \left[\frac{f(x-2t)+f(x+2t)}{2} - s(x)\right]\frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t}dt = 0. \tag{3.12}$$

Vamos agora terminar o processo de construção da função soma da série $s = s(x)$.

Teorema 3.4. *Seja f uma função $2\pi-$periódica e contínua por partes. Então para qualquer x_0 temos*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_n\cos(nx_0) + b_n\sin(nx_0)] = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

onde $f(x_0^\pm)$ denotam os limites laterais de f no ponto x_0 da recta real.

Demonstração. Como f é contínua por partes existem os limites laterais $f(x_0^+),\ f(x_0^-)$ para qualquer x_0 da recta real. Construam-se as funções auxiliares

$$\psi_{x_0}^-(t) = \frac{f(x_0-2t) - f(x_0^-)}{2}, \quad \psi_{x_0}^+(t) = \frac{f(x_0+2t) - f(x_0^+)}{2}.$$

Estas funções são também contínuas por partes, pelo que para todo $\epsilon > 0$ existe pelo menos um

$\delta' > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
t < \delta' \quad \Rightarrow \quad & \left| f(x_0 - 2t) - f(x_0^-) \right| < \epsilon, \\
e \quad & \left| f(x_0 + 2t) - f(x_0^+) \right| < \epsilon \\
\Rightarrow \quad & |\psi^-_{x_0}(t)| = \left| \frac{f(x_0 - 2t) - f(x_0^-)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \\
e \quad & \left| \psi^+_{x_0}(t) \right| = \left| \frac{f(x_0 + 2t) - f(x_0^+)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos agora aplicar o Teorema 3.3 (Teorema de localização de Riemann) à função

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0 - 2t) + f(x_0 + 2t)}{2} - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \psi^-_{x_0}(t) + \psi^+_{x_0}(t).$$

Note-se que tal corresponde a fixar $s(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$.

Observe-se que, para $\delta > 0$ fixo, o integral (3.12) se divide em

$$\int_0^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \underbrace{\int_0^{\delta'} \varphi_{x_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_1)} + \underbrace{\int_{\delta'}^{\delta} \varphi_{x_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_2)},$$

com δ' fixado de acordo com (3.13). De novo, o integral (I_2) tende para zero quando n tende para infinito (Lema de Riemann).

Para (I_1) temos, usando o teorema de valor médio para integrais, que existe um $\xi \in [0, \delta']$ tal que

$$\left| \int_0^{\delta'} \varphi_{x_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right| = \left| \varphi_{x_0}(\xi) \int_0^{\delta'} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right| \leq |\varphi_{x_0}(\xi)|\, K < \epsilon K,$$

onde $K = \left| \int_0^{\delta'} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right|$. Assim, temos também $\lim_n (I_1) = 0$. □

3.4 Aproximação

Do teorema anterior resulta que, dada uma função f periódica e contínua por partes, a correspondente série de Fourier converge para f nos pontos em que esta contínua, e para a média do salto, quando descontínua.

3.4.1 Fenómeno de Gibbs

Em consequência, se nesses pontos aproximamos uma descontinuidade de salto finito por somas parciais finitas s_n de funções contínuas, tal gera um efeito de oscilação das referidas somas s_n na vizinhança desses pontos: e.g. considerem-se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódica, dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, \; x \in]-\pi, 0] \\ \pi, \; x \in]0, \pi[\end{cases}$$

e a série de Fourier associada a esta.

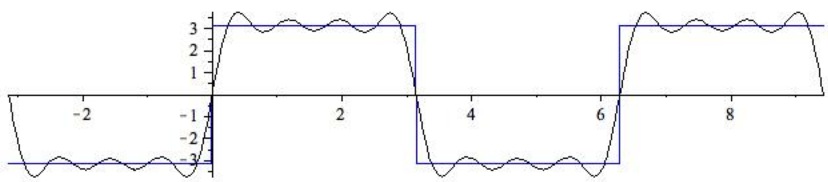


Figura 7: Gráficos de f e da soma parcial dos primeiros 7 termos da correspondente série de Fourier.

Este fenómeno é conhecido por *fenómeno de Gibbs*. A estimativa para a amplitude das oscilações pode ser obtido da forma que se indica a seguir.

Suponha-se f uma função $2\pi-$periódica, e contínua excepto na origem, onde possui salto finito de valor $\Delta f = f(0^+) - f(0^-) = \pi$. É então possível construir uma função contínua g tal que a diferença $h = f - g$ é a função (descontínua) *dentes de serra* dada por $h(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$, se $x \in [0, 2\pi[$, e estendida periodicamente a $\mathbb{R}$.

Desta forma, o estudo do comportamento de f no ponto de descontinuidade $x_0 = 0$ reduz-se ao estudo do comportamento da função de h aí. Sendo a função h uma função ímpar, é fácil de verificar que a série de Fourier que lhe corresponde é

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx).$$

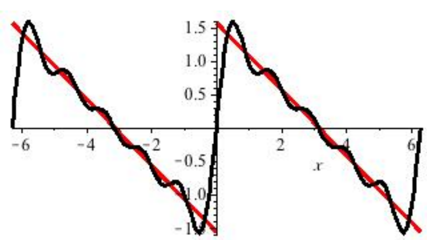


Figura 8: Gráfico da função *Dentes de Serra* e da soma parcial dos primeiros 5 termos da série de Fourier associada.

Seja h_n a função soma parcial dos primeiros n termos da série de Fourier associada a h. O erro cometido é dado por

$$\begin{aligned}
R_n(x) := h_n(x) - h(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin(kx) - \frac{1}{2}(\pi - x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_0^x \cos(kt)dt + \int_0^x \frac{1}{2}dt - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right] dt - \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)t}{2}\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Temos assim $|R_n(0^+)| = \left|0 - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$.

Mais, o erro cometido atinge o valor máximo quando

$$0 = R_n'(x) = \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{2n+1},$$

ou seja

$$E_{max} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)t}{2}\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{\pi}{2}.$$

A mudança de variável $u = \frac{(2n+1)t}{2}$ faz

$$\begin{aligned}
E_{max} &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \frac{\sin\left[\frac{(2n+1)t}{2}\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{\pi}{2} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{(2n+1)\sin(\frac{u}{2n+1})} du - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Para $0 < u < \pi$ temos

$$\begin{aligned}
0 < u < \pi &\Leftrightarrow 0 < \frac{u}{2n+1} < \frac{\pi}{2n+1} \\
&\Rightarrow 0 < \sin\left(\frac{u}{2n+1}\right) < \frac{u}{2n+1} \\
&\Rightarrow 0 < (2n+1)\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right) < u
\end{aligned}$$

pelo que o erro é estimável por

$$\begin{aligned}
E_{max} &> \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du - \frac{\pi}{2} = Si(\pi) - \frac{\pi}{2} \\
&\approx 0.1789 \times \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

ou seja, as somas parciais ultrapassam o salto de h em (aproximadamente) 17,89%.

3.4.2 Estimativa para aproximação por polinómios trigonométricos

Teorema 3.5. *Seja $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ uma função com derivada contínua por partes. Então, a correspondente série de Fourier associada a f*

i) converge absolutamente em cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}$;

ii) uniformemente em cada sub-intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Demonstração. A demonstração deste teorema assenta em aplicarmos o Teorema 1.2 (critério de Weirstrass) à série de Fourier da função f. Assim, vamos primeiro mostrar que esta existe e, em seguida, que as séries numéricas, cujos termos gerais são os coeficientes a_n e b_n, convergem absolutamente.

Sendo f uma função contínua, então f tem energia finita no intervalo $[0, T]$ e os coeficientes (3.6) e (3.7) existem e são finitos.

Para mostrar que as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem absolutamente, vamos estudar a série de Fourier da função derivada f' (note-se que, pelas condições impostas, f' é limitada e integrável em $[0, T]$). Designem-se por α_n e β_n os coeficientes desta série. Estes verificam:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(x)dx = \frac{2}{T}(f(T) - f(0)) = 0 \\
\alpha_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f'(x)\cos(n\omega x)dx \\
&= \frac{2}{T}\left[f(x)\cos(n\omega x)\right]_0^T + \frac{2}{T}\int_0^T n\omega f(x)\sin(n\omega x)dx \\
&= n\omega b_n,
\end{aligned}$$

e, analogamente, tem-se $\beta_n = -n\omega b_n$. Da Identidade de Parseval e do facto de que f' é limitada, ou seja, existe um $M > 0$ para o qual

$$\left|f'(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

resulta

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T \left|f'(x)\right|^2 dx \leq 2M^2 < +\infty.$$

Assim, para as somas parciais vem

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\omega}|\beta_k| \leq \frac{1}{\omega}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}} \leq \frac{\sqrt{2}M}{\omega}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$$

e a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente. Analogamente, a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é também absolutamente convergente e o Critério de Weirstrass é aplicável. $\square$

Vamos terminar esta secção com o teorema que garante que toda a função contínua num intervalo fechado pode ser arbitráriamente aproximada por um polinómio - e indicando, de passagem, como *o obter*!

Teorema 3.6 (Teorema de aproximação de Weierstrass)**.** *Sejam $f \in C([a,b])$ e $\epsilon > 0$. Nestas condições, existe sempre um polinómio $\tilde{P}_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$ para o qual se tem*

$$|f(x) - \tilde{P}_N(x)| < \epsilon.$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$.

Demonstração. Considere-se a transformação afim $x \mapsto t = a + \frac{b-a}{\pi} x$ que aplica o intervalo $[0,\pi]$ em $[a,b]$.

A função auxiliar $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto g(x) = f(a + \frac{b-a}{\pi} x)$ é assim contínua em $[0,\pi]$.

Defina-se agora a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é $2\pi-$periódica e par, como sendo

$$h(x) = \begin{cases} g(-x), & x \in [-\pi, 0] \\ g(x), & x \in]0,\pi] \end{cases} .$$

A nova função é contínua em $\mathbb{R}$, ou seja, $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. A série de Fourier de h é uma série de co-sinos e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que a soma parcial desta,

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx),$$

verifica

$$|F_m(x) - h(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que cada termo $a_k \cos(kx)$ desta soma é uma função analítica, cada F_m pode escrever-se na forma de série de potências $F_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, com raio de convergência $R = \infty$. Porque a série de Fourier converge uniformemente no intervalo fechado $[0,\pi]$, existe uma ordem $N > 0$ para a qual o polinómio $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n$ satisfaz

$$|F_m(x) - P_N(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Assim, para todo $t \in [a,b]$ temos $t = a + \frac{b-a}{\pi} x \;\Leftrightarrow\; \pi \frac{t-a}{b-a} = x$ e

$$\left| f(t) - P_N\left(\pi \frac{t-a}{b-a}\right) \right| \leq |h(x) - F_m(x)| + |F_m(x) - P_N(x)| < \epsilon.$$

Assim, $\tilde{P}_N(t) := P_N\left(\pi \frac{t-a}{b-a}\right)$ é o polinómio procurado. $\square$

4 Transformadas de Laplace

4.1 Definição

O conceito de *transformada de Laplace* resulta da comparação entre um sinal temporal e uma adequada função exponencial. Dado que a função exponencial é invariante sob derivação e o seu comportamento no infinito é conhecido, tal permite extrapolar sob o comportamento do sinal original.[5] Por este motivo, nesta secção denotaremos o argumento das funções pela variável t.

Definição 4.1 (Tipo exponencial)**.** *A função $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ diz-se de tipo exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t},$$

para todo o $t \geq 0$.

Nota: Assim definido, o tipo exponencial *não é único.* Pode ser tornado único se o definirmos como ínfimo do conjunto dos possíveis α.

Exemplo 4.1. *A função constante $t \mapsto 1(t) = 1, \forall t \in [0, \infty[$ é de tipo exponencial* 0. *As funções sino e co-sino (porque majoráveis por* 1*) são-o também.*

Definição 4.2 (Transformada de Laplace)**.** *Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável no seu domínio, isto é, integrável (segundo Riemann) em todo o subintervalo fechado de $[0, \infty[$.*

Designa-se por transformada de Laplace de f no ponto $p \in \mathbb{R}$, e denota-se por $F(p) = L[f](p)$, ao integral impróprio

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{4.1}$$

na condição deste convergir.

É também possvel definir a transformada de Laplace para o caso de $p = s + i\omega \in \mathbb{C}$, via

$$\begin{aligned} L[f](p) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s+i\omega)t}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)\cos(\omega t)e^{-st}dt + i\int_0^\infty f(t)\sin(\omega t)e^{-st}dt. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Exemplo 4.2. *(i) A transformada de Laplace da função constante $t \mapsto 1(t) = 1$, onde $t \in [0, \infty[$, é dada por*

$$L[1](p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}, \quad p > 0;$$

uma vez que $\lim_{t\to\infty} e^{-pt} = 0$ *para* $p > 0$.

[5]Esta ideia vai abrir caminho futuro para o conceito de *transformada de Fourier*, onde os sinais são comparados com ondas $t \mapsto \phi_\xi(t) = e^{-i\xi t}$, de frequência específica $\xi \in \mathbb{R}$.

(ii) A transformada de Laplace da função $f(t) = t^2$, para $t \in [0, \infty[$ é dada por

$$L[t^2](p) = \int_0^\infty t^2 e^{-pt} dt = \frac{2!}{p^3}, \quad p > 0,$$

após efectuarmos integração por partes.

Lema 4.1 (Existência)**.** *Se $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ é localmente integrável em $[0, \infty[$ e de tipo exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$, então existe a sua transformada de Laplace para todo $p > \alpha$.*

Demonstração. Nestas condições, existe $M > 0$ tal que se verifica

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$$

para todo $t \in [0, \infty[$. Tem-se então

$$\begin{aligned} |L[f](p)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-pt} dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{(\alpha - p)t} dt = M \frac{1}{p - \alpha} \end{aligned}$$

para todo $p > \alpha$. $\square$

Em consequência, para toda a função $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, localmente integrável em $[0, \infty[$ e de tipo exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$, temos garantida a existência da *função transformada de Laplace*, dada por

$$p \mapsto L[f](p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt,$$

para todo o p real tal que $p > \alpha$.

Analogamente, se $p = s + i\omega$, então a adaptação do Lema 4.1 às condições (4.2) conduz à existência da função transformada de Laplace para todo o p complexo tal que $\mathrm{Re}(p) = s > \alpha$.

Exemplo 4.3. *A função co-sino tem ordem exponencial* 0*, pelo que a existência da sua transformada de Laplace está garantida para todo $p > 0$. Calculando esta (integrar duas vezes por partes), tem-se*

$$L[\cos(t)](p) = p - p^2 L[\cos(t)](p), \;\; p > 0,$$

donde

$$L[\cos(t)](p) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$

De forma semelhante,

$$L[\sin(t)](p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \;\; p > 0.$$

Teorema 4.1. *Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua com ordem exponencial α. Se a $L[f] = 0$, então $f = 0$.*

A demonstração deste teorema assenta no seguinte lema:

Lema 4.2. *Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que*

$$\int_0^1 h(t)t^n dt = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.3}$$

Então $h = 0$.

Demonstração. A condição (4.3) implica que, para todo e qualquer polinómio P, tem-se

$$\int_0^1 h(t)P(t)dt = 0.$$

Por outro lado, provou-se (Teorema 3.6, de aproximação de Weierstrass) que, sendo h uma função contínua, então é limite uniforme de polinómios, ou seja, para todo o $\epsilon > 0$, existe um polinómio $P_\epsilon(t)$ para o qual se tem

$$|h(t) - P_\epsilon(t)| < \epsilon, \quad \forall t \in [0,1].$$

Dado que $\lim_{\epsilon\to 0} P_\epsilon = h$ resulta agora de (4.3) que

$$0 = \lim_{\epsilon\to 0} \int_0^1 h(t)P_\epsilon(t)dt = \int_0^1 [h(t)]^2 dt,$$

donde se conclui $h = 0$. □

Vamos agora passar a demonstração do Teorema 4.1.

Demonstração. De acordo com as hipóteses, $0 = L[f](p)$ para todo $p > \alpha$. Em particular, escolhido que seja um certo $p_0 > \alpha$ (fixo), teremos para os valores $p = p_0 + n + 1$, onde $n = 0,1,2,\ldots$, que

$$0 = L[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}e^{-nt}e^{-t}dt, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Proceda-se agora à mudança de variável

$$u = e^{-t}, \quad du = -e^{-t}dt, \quad t_0 = 0 \Rightarrow u_0 = 1, \quad t_1 = +\infty \Rightarrow u_1 = 0,$$

donde tiramos

$$0 = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-p_0 t}e^{-nt}e^{-t}dt = \int_0^1 \left[f(-\ln u)u^{p_0}\right] u^n du, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

e, em virtude do Lema 4.2, temos

$$\begin{aligned} 0 &= f(-\ln u)u^{p_0}, \quad \text{para todo o } u \in [0,1] \\ &= f(t)e^{-p_0 t}, \quad \text{para todo o } t = -\ln u \in [0,\infty[. \end{aligned}$$

Porque a função exponencial não se anula, então temos o resltado pretendido, $f(t) = 0$, para todo o $t \in [0, \infty[$. $\square$

Corolário 4.1.1 (Unicidade)**.** *Sejam $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ funções contínuas com a mesma ordem exponencial α.*

Se $L[f](p) = L[g](p)$ para todo o $p > \alpha$, então $f = g$ no intervalo $[0, \infty[$.

Imediato, por aplicação do Teorema 4.1.

4.2 Propriedades

Lema 4.3. *Sejam $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ funções localmente integráveis, com a mesma ordem exponencial α, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então*

i) (Linearidade) $L[\lambda f + g](p) = \lambda L[f](p) + L[g](p), \quad p > \alpha$.

ii) (Translação da Transformada) $L[f](p - \lambda) = L[e^{\lambda t} f(t)](p)$, para todo $p > \alpha + \lambda$.

iii) (Transformada da Translação) $L[f(t - \lambda)](p) = e^{-\lambda p} L[f](p)$, para todo $p > \alpha$ e $\lambda \geq 0$.

iv) (Ampliação) $L[f(\lambda t)](p) = \frac{1}{\lambda} L[f](\frac{p}{\lambda})$, para todo $\lambda > 0$ e $p > \lambda\alpha$.

Este lema é de demonstração imediata, efectuada à custa de convenientes mudanças de variável.

Lema 4.4 (Diferenciação)**.** *Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável, de ordem exponencial α.*

i) (Diferenciação da função) Para $n = 1, 2, \ldots$ é válida a identidade

$$L[f^{(n)}](p) = p^n L[f](p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

para todo $p > \alpha$.

ii) (Diferenciação da Transformada)

$$L[t^n f(t)](p) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L[f](p),$$

para todo $p > \alpha$.

Demonstração. i) Considere-se $n = 1$. Usando integração por partes, vem

$$L[f'](p) = pL[f](p) - f(0),$$

dado que ambas as funções, f e f', têm a mesma ordem exponencial. O caso geral obtém-se por recursão.

ii) O integral $\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt$ converge absolutamente para $p > \alpha$, pelo que

$$\frac{d}{dp}\left(\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right) = \int_0^\infty f(t)\left(\frac{d}{dp}e^{-pt}\right)dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt.$$

De novo, o caso geral obtém-se por recursão em n.

□

Lema 4.5 (Primitivação)**.** *Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável, de ordem exponencial α.*

i) (Primitivação da função) $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](p) = \frac{1}{p}L[f](p), \quad p > max\{0,\alpha\}$.

ii) (Primitivação da Transformada) Se o integral $\int_p^\infty L[f](q)dq$ converge para todo $p > \alpha$, então

$$\int_p^\infty L[f](q)dq = L\left[\frac{f(t)}{t}\right](p), \quad p > \alpha.$$

Demonstração. i) Por definição

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right](p) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(\tau)e^{-pt}dt\right)d\tau$$
$$= \int_0^\infty f(\tau)\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_{t=\tau}^{t=\infty}\right]d\tau = \frac{1}{p}\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \frac{1}{p}L[f](p), \quad p > max\{0,\alpha\}.$$

ii) Temos

$$\int_p^\infty L[f](q)dq = \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t)e^{-qt}dt\right)dq = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty f(t)e^{-qt}dq\right)dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\left.\frac{e^{-qt}}{-t}\right|_{q=p}^{q=\infty}dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt, \quad p > \alpha.$$

□

4.3 Funções e operações especiais

4.3.1 Função Heaviside

Definição 4.3. *Designa-se por função Heaviside a função*

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Note-se que o valor que H assume em $t = 0$ é praticamente irrelevante, o que justifica a existência de variadas definições alternativas. Por outro lado, H é uma função limitada, donde tem ordem exponencial zero, o que garante a existência da sua transformada de Laplace.

Lema 4.6. *Seja* $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função localmente integrável, de ordem exponencial* α*. Para* $a \geq 0$ *tem-se*

$$L[f(t-a)H(t-a)](p) = e^{-ap}L[f](p), \quad p > \alpha.$$

Demonstração. Usando a definição temos

$$\begin{aligned} L[f(t-a)H(t-a)](p) &= \int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-pt}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-pt}dt \quad \text{para } a \geq 0 \\ &= \int_0^\infty f(y)e^{-p(y+a)}dy, \text{ onde } \ y = t-a \\ &= e^{-pa}L[f](p), \quad p > \alpha. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.4. *Em particular, resulta da aplicação deste lema, que*

(i)

$$L[H](p) = L[H(t)](p) = L[1(t-0)H(t-0)](p) = e^0 L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad p > 0.$$

(ii) De forma semelhante, para $b > 0$*, tem-se*

$$L[H(b-t)](p) = \int_0^\infty H(b-t)e^{-pt}dt = \underbrace{\int_0^b e^{-pt}dt}_{H(b-t)=0 \ se \ t>b} = \frac{1-e^{-pb}}{p},$$

válida para $p > 0$.

(iii) No caso de funções por ramos, como seja a função abaixo indicada,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,3] \\ 0, & outros \ \ valores, \end{cases}$$

é possível representar f *como uma soma adequada de Heavisides,*

$$f(t) = H(t-1) - H(t-3)$$

e obter deste modo a correspondente transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} L[f](p) &= L[H(t-1)](p) - L[H(t-3)](p) \\ &= e^{-p}L[1](p) - e^{-3p}L[1](p) \\ &= (e^{-p} - e^{-3p})\frac{1}{p}, \quad p > 0. \end{aligned}$$

4.3.2 Convolução

Definição 4.4 (Convolução)**.** *Dadas duas funções* $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, localmente integráveis no seu domínio, define-se a função convolução entre* φ *e* ψ *como a função* $\varphi * \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, onde*

$$t \mapsto \varphi * \psi(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-y)\psi(y)dy.$$

Todavia, a transformada de Laplace é aplicável a funções de domínio $[0, +\infty[$, não de domínio $\mathbb{R}$, pelo que há necessidade de adaptar a definição ao caso em estudo.

Dadas funções $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, localmente integráveis no seu domínio, e efectuando a sua extensão a todo o $\mathbb{R}$, via $f(t) = g(t) = 0, t < 0$ (ou, o que é o mesmo, tomando $f(t) := f(t)H(t)$ e idem para g), podemos agora definir convolução entre f e g como

$$f * g(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy = \int_0^t f(t-y)g(y)dy.$$

A mudança de variável $u = t - y$ resulta na identidade

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-y)g(y)dy = -\int_t^0 f(u)g(t-u)du = g * f(t).$$

Lema 4.7. *Sejam* $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ *funções localmente integráveis, ambas de ordem exponencial* α*. Então*

$$L[f * g](p) = L[f](p)L[g](p), \quad p > \alpha.$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned}
L[f * g](p) &= \int_0^\infty f * g(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-y)g(y)dy\right) e^{-pt}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_y^\infty f(t-y)e^{-pt}dt\right) g(y)dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(u)e^{-p(u+y)}du\right) g(y)dy, \quad u = t - y \\
&= \int_0^\infty \left(e^{-py}L[f](p)\right) g(y)dy, \quad p > \alpha \\
&= L[f](p)L[g](p), \quad p > \alpha.
\end{aligned}$$

□

O Lema 4.7 indica que a transformada de Laplace aplica a convolução entre as funções no produto entre as correspondentes transformadas.

Exemplo 4.5. *Dadas* $f(t) = \cos(t)$ *e* $g(t) = sin(3t)$ *(ambas de tipo exponencial* 0*), temos então* *que*

$$
\begin{aligned}
L[f*g](p) &= L[\cos(t)](p)L[\sin(3t)](p) \\
&= \frac{p}{p^2+1} \times \frac{3}{p^2+9} = \frac{3p}{(p^2+1)(p^2+9)}, \quad p>0.
\end{aligned}
$$

4.3.3 Distribuição delta de Dirac

Definição 4.5 (Delta de Dirac)**.** *Define-se distribuição delta de Dirac $\delta = \delta(t)$ como sendo o limite da sucessão de funções*

$$
g_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 0, & outros \quad valores, \end{cases} , n \in \mathbb{N}.
$$

Em consequência,

1) $\delta(t) = \lim_n g_n(t) = 0$, para todo $t \neq 0$;

2) uma vez que $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, resulta

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt := \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt = 1;
$$

3) para toda a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vem que

$$
f * g_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g_n(y)dy = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t-y)dy.
$$

Pelo Teorema do Valor Médio (AM1) existe $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ tal que

$$
f * g_n(t) = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t-y)dy = \frac{n}{2} f(t-c_n)\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dy = f(t-c_n).
$$

Então,

$$
f * \delta(t) := \lim_n f * g_n(t) = f(t),
$$

dado que $\lim_n c_n = 0$ pois $c_n \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Em conclusão, a distribuição delta de Dirac constitui o elemento neutro da operação convolução.

4) da alínea anterior vem ainda que

$$
L[f](p)L[\delta](p) = L[f](p) = L[\delta](p)L[f](p),
$$

ou seja, $L[\delta](p) = 1$.

Nota: a distribuição delta de Dirac **não é uma função**. Todavia, a interpretação física desta como de um *impulso perfeito com energia constante* 1 justifica a sua importância. Note-se que, em estrito rigor, não sendo uma δ função, não se provou a *efectiva* existência da transformada de Laplace de δ.

Lema 4.8. *Para $a > 0$ vem*

$$L[\delta(t-a)](p) = e^{-pa}L[\delta](p) = e^{-pa}, \quad p > 0.$$

Demonstração. Para $a > 0$, e usando definição dada para a distribuição delta de Dirac, considere-se a sucessão das transformadas de Laplace de g_n,

$$L[g_n(t-a)](p) = \frac{n}{2}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} e^{-pt}dt,$$

para valores de n tais que $a - \frac{1}{n} > 0$. Então

$$L[\delta(t-a)](p) := \lim_n L[g_n(t-a)](p) = \lim_n \frac{\sinh(p/n)}{(p/n)}e^{-pa} = e^{-pa}.$$

□

4.4 Aplicações

Resolução de equações diferenciais

Dada uma equação linear que envolva derivadas, até uma dada ordem $n \in \mathbb{N}$, de um sinal que evolve em tempo $y = y(t)$, conhecidos que sejam os valores iniciais desse sinal y, e respectivas derivadas até à ordem $n-1$, no instante inicial $t = 0$, então a aplicação da transformada de Laplace reduz a *equação linear com derivadas* a uma *equação algébrica na variável* $Y(p) = L[y](p)$. Obtida que seja a expressão para $Y = Y(p)$, o Corolário 4.1.1 permite identificar de forma única a função contínua original $y(t) = L^{-1}[Y](t)$, dita *transformada inversa de Laplace de* $Y = Y(p)$.

Exemplo 4.6. *Determinar a solução da equação diferencial $y'(t) - y(t) = e^t$, com $t \geq 0$, e sujeita a $y(0) = 1$. Aplicando a transformada de Laplace temos*

$$\begin{aligned}
L[y'(t) - y(t)](p) = L[e^t](p) \quad &\Leftrightarrow \quad (pL[y(t)](p) - y(0)) - L[y(t)](p) = \frac{1}{p-1}, \quad p > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (p-1)L[y(t)](p) = \frac{1}{p-1} + y(0) \\
&\Leftrightarrow \quad L[y(t)](p) = \frac{p}{(p-1)^2} = \frac{p-1+1}{(p-1)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad L[y(t)](p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad L[y(t)](p) = L[e^t](p) + L[te^t](p)
\end{aligned}$$

donde obtemos (Corolário 4.1.1) a solução $y(t) = e^t + te^t = (t+1)e^t$.

Resolução de equações integrais

De forma semelhante, uma equação linear que envolva a convolução de um sinal temporal contínuo $y = y(t),\ t \geq 0$, com uma função conhecida pode ser resolvida mediante a aplicação da transformada de Laplace. Esta aplicação reduz a convolução (uma equação integral) para uma equação algébrica na variável $Y(p) = L[y](p)$. Obtida que seja a expressão para $Y = Y(p)$, procede-se da mesma forma que no caso anterior para identificar a função original $y = y(t)$.

Exemplo 4.7. *Determinar a solução da equação integral*

$$y(t) = \sin(t) + \int_0^t y(t-\tau)\sin(\tau)d\tau.$$

Aplicando a transformada de Laplace vem

$$\begin{aligned}
L[y(t)](p) = L[\sin(t) + \int_0^t y(t-\tau)\sin(\tau)d\tau](p) \quad &\Leftrightarrow \quad L[y](p) = \frac{1}{p^2+1} + L\left[y * \sin\right](p), \quad p > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad L[y](p) = \frac{1}{p^2+1} + L[y](p)\frac{1}{1+p^2} \\
&\Leftrightarrow \quad L[y](p) = \frac{1}{p^2} \\
&\Leftrightarrow \quad L[y](p) = L[t](p)
\end{aligned}$$

donde obtemos a solução $y(t) = t$.

Referências

[1] T. Apostol, Calculus, Vol. I e II, John Wiley & Sons, 1967 e 1969

[2] G.M. Fikhtengol'ts, The fundamentals of mathematical analysis, 2 vol., Oxford, 1965

[3] B. Gelbaum, J. Olmsted, J., Counterexamples in Analysis, 1964

[4] M. Spivak, Calculus, Reverté, 1975

[5] T. Tao, Analysis II, 2006