# 42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
# LIÇÕES VI pdq

**Vítor Neves**

2009/2010

# Capítulo 4

# Séries de Fourier pdq

## 4.1 Funções complexas de variável real

### 4.1.1 Sucessões e séries complexas

**Definição 4.1.1** *A sucessão de números complexos*

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

***converge*** *para* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *se e só se qualquer das condições seguintes se verifica*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N\ \ |z_n - z| < \varepsilon \tag{4.1}$$

$$\lim_n a_n = a \ \ \&\ \ \lim_n b_n = b \tag{4.2}$$

**Teorema 4.1.1** *Uma sucessão* $(z_n)$ *de números complexos converge se e só se é de Cauchy, i.e., se e só se*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

**Definição 4.1.2** *Uma série complexa* $\sum_{n\geq 0} z_n$ *converge*

1. ***absolutamente*** *quando* $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ *converge;*
2. ***em média quadrática*** *quando* $\sum_{n\geq 0} |z_n|^2$ *converge.*

**Teorema 4.1.2** *Os critérios de convergência absoluta para séries de termo geral real são válidos para séries de termo geral complexo quando* $|\cdot|$ *se entende como valor absoluto ou módulo complexo, em particular*

1. *Para qualquer* $z \in \mathbb{C}$,
$$e^z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$
*converge absolutamente;*

2. *Para qualquer* $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{it} \ = \ cos\, t + i\operatorname{sen} t$$
*ou, de outra forma,*
$$\cos t \ = \ \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t \ = \ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

### 4.1.2 Semi-normas integrais

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \equiv \quad u + iv \qquad \text{com } u, v : D \to \mathbb{R}$$

**Definição 4.1.3** *Suponha que* $\alpha < \beta$*em* $\mathbb{R}$*;* $f$ *é*

1. ***contínua*** *sse* $u$ *e* $v$ *são*

2. ***diferenciável*** *sse* $u$ *e* $v$ *são e*
$$f'(t) \ = \ u'(t) + iv'(t),$$

3. ***integrável*** *(à Riemann)em* $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ *sse* $u$ *e* $v$ *são e*
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \ = \ \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt,$$

4. ***integrável*** *(à Riemann)* **em média quadrática** *se*
$$\int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt \in \mathbb{R}$$

**Teorema 4.1.3** *Quando $f \in \mathcal{L}_2(I)$ e $f$ é periódica com período $T > 0$, então*

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad \int_r^{r+T} f(t)dt \;=\; \int_0^T f(t)dt.$$

**Definição 4.1.4**

1. *Uma função $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diz-se* ***seccionalmente contínua*** *ou* ***contínua por partes*** *se existir uma partição*

$$\{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$$

*tal que as restrições $f : ]x_i, x_{i+1}[ \to \mathbb{C}$ têm prolongamentos contínuos $f : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{C}$ $(0 \leq i \leq n-1)$.*

2. *Note-se por* $\mathbf{SC}([a,b])$ *o conjunto das funções complexas seccionalmente em $[a,b]$.*

**Teorema 4.1.4** *Note-se $I := [a,b]$, para certos $a, b \in \mathbb{R};\ a < b$.*

1. *Seja $\mathcal{L}_2(I)$ o conjunto das funções $f : I \to \mathbb{C}$ $(\alpha < \beta)$ integráveis em média quadrática*

   (a) *Defina-se*

$$f \bullet_I g \;:=\; \int_\alpha^\beta f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f, g \in \mathcal{L}_2(I))$$

   $(\cdot \bullet_I \cdot)$ *é um quase produto interno,*

   (b) *Defina-se*

$$\int_I |f(t)|^2 dt \;=\; \|f\|_{2I} \;:=\; \sqrt{f \bullet_I f} \qquad (f \in \mathcal{L}_2)$$

   i. $\|f\|_{2I} = 0 \;\not\Rightarrow\; f = 0$.

   ii. $\| \, . \, \|_{2I}$ *é uma semi-norma.*

   iii. *Vale a desigualdade de Schwarz*

$$|f \bullet_I g| \;\leq\; \|f\|_{2I}\|g\|_{2I}$$

   iv. $\mathcal{L}_2(I)$ *é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

   v. $\| \cdot - \cdot \|_{2I} : \mathcal{L}_2(I) \to [0, +\infty[$ *é uma semimétrica.*

2. $\mathbf{SC}(I)$ *é subespaço vectorial de $\mathcal{L}_2(I)$ .*

## 4.2 Funções periódicas

$$\begin{aligned}
T &> 0 \\
\omega &= \frac{2\pi}{T} \\
e_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega t} \quad (n \in \mathbb{Z}; t \in \mathbb{R}) \\
I &:= [0, T] \\
f \bullet g &= f \bullet_I g \quad (f, g \in \mathcal{L}_2(I)) \\
\|f\|_2 &= \|f\|_{2I} \\
d_2(f, g) &= \|f - g\|_2
\end{aligned}$$

**Teorema 4.2.1** *Note-se por* $\mathbf{Per}(I)$ *o espaço vectorial dos prolongamentos periódicos a* $\mathbb{R}$*, de período* $T$*, das funções de* $\mathbf{SC}(I)$ *tais que* $f(0) = f(T)$*.*

1. $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *é ortonormado em* $\mathbf{Per}(I)$*.*

2. *Valem as seguintes* ***fórmulas de transformação logarítmica***

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta) \tag{4.3}$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \tag{4.4}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \tag{4.5}$$

3. $\{\frac{1}{\sqrt{T}}\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega\cdot) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\operatorname{sen}(n\omega\cdot) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *é ortonormado em* $\mathbf{Per}(I)$*; designe este conjunto por*

$$\{\alpha_0\} \cup \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

**Definição 4.2.1** *Suponha que $f \in \mathbf{Per}(I) \cap \mathcal{L}_2(I)$.*

1. *A **série de Fourier (complexa)** de $f$ é*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \bullet e_n)\, e_n &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt\, e^{in\omega\cdot} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega\cdot} \\
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt \quad (n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

2. *Se $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, a série de Fourier de $f$ toma a forma*

$$\begin{aligned}
(f \bullet \alpha_0)\alpha_0 &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(f \bullet \alpha_n)\, \alpha_n + (f \bullet \beta_n)\, \beta_n] \\
&= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega\cdot) + b_n \operatorname{sen}(n\omega\cdot)]
\end{aligned}$$

*em que*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\operatorname{sen}(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

3. *Cada soma parcial de ordem $n$ da série de Fourier de $f$ minimiza a distância $d_2(f,g)$ quando $g$ está no espaço gerado por $\{e_k |\ 1 \leq k \leq n\}$ ou por $\{\alpha_i, \beta_j |\ 0 \leq i \leq n \ \&\ 1 \leq j \leq n\}$, i.e., quando $g$ é um polinómio trigonométrico de grau $n$.*

**Teorema 4.2.2** *Suponha que $f \in \mathcal{L}_2(I) \cap \mathbf{Per}(I)$.*

1. $\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \in \mathbb{C} \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$

2. *Se $f$ é par todos os coeficientes $b_n$ são nulos*

3. *Se $f$ é ímpar todos os coeficientes $a_n$ são nulos*

4. *Quando $T = 2\pi$*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{sen}(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

**Teorema 4.2.3** *Suponha que $f \in \mathbf{Per}(I) \cap \mathcal{L}_2(I)$.*

1. ***Desigualdades de Bessel***

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &\geq \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\
\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &\geq \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})
\end{aligned}$$

2. *Quando o período é $2\pi$ as Desigualdades de Bessel tomam a forma*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &\geq 2\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \\
\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &\geq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})
\end{aligned}$$

## 4.3 Convergências

Com a notação estabelecida

**Teorema 4.3.1** *Suponha que $f \in \mathbf{Per}(I) \cap \mathbf{SC}(I)$ e que $f' \in \mathbf{SC}(I)$.*

1. *Para qualquer $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x)\big) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

2. *A série de Fourier de $f$ converge para $f$ em média quadrática em qualquer intervalo $[r, r + nT]$ $(r \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N})$*

   (a) ***Igualdade de Parseval***

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}) \end{aligned}$$

   (b) ***Igualdade de Parseval com período** $2\pi$.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= 2\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\ &= \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}) \end{aligned}$$

3. *A série de Fourier de $f$ converge uniformemente em qualquer intervalo limitado e fechado onde $f$ seja contínua.*

   - *Quando $f$ é contínua (em $\mathbb{R}$), a série de Fourier de $f$ converge uniformemente (em $\mathbb{R}$).*

**Teorema 4.3.2** ***De Weierstrass***
*Qualquer função contínua $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limite uniforme (em $[a, b]$) de uma sucessão de polinómios*

## 4.4 Lemas

**Lema 4.4.1** *Suponha que* $x \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \\
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}
\end{aligned}$$

**Lema 4.4.2** *Suponha-se que* $f \in \mathbf{Per}(2\pi) \cap \mathbf{SC}([0,2\pi])$ *e* $f$ *é real; seja*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1} [a_n \cos(nt) + b_n \operatorname{sen}(nt)]$$

*a sua série de Fourier e designe*

$$\begin{aligned}
s_0 &:= \frac{1}{2}a_0 \\
s_n(t) &:= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)] \quad (n \geq 1) \\
s(t) &:= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k\geq 1} [a_k \cos(kt) + b_k \operatorname{sen}(kt)]
\end{aligned}$$

1. *Tem-se, para* $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
s_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \\
D_n(t)dt &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}t\right)} & 0 < |t| \leq \pi \\ n + \frac{1}{2} & t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. *Se* $f$ *é contínua,* $f' \in \mathbf{SC}([0,2\pi])$ *e* $a'_n$, $b'_n$ *designam os coeficientes de Fourier de* $f'$ *tem-se*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [a'_n = nb'_n \quad \& \quad b'n = -na'n]$$

**Lema 4.4.3**

1. ***(De Riemann-Lebesgue)*** *Se* $g \in \mathbf{SC}([0, 2\pi])$ *então*

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt \; = \; 0$$

2. ***De localização de Riemann***

$$\begin{aligned} \varphi(x,t) \; &:= \; \frac{f(x-2t) + f(x+2t)}{2} \\ s_n(x) - s(x) \; &= \; \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x,t) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,((2n+1)\,t)}{\mathrm{sen}\,t} dt \end{aligned}$$

$$\lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \varphi(x,t) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,((2n+1)\,t)}{\mathrm{sen}\,t} dt \; = \; 0 \qquad (0 < \delta < \frac{\pi}{2})$$