Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Segundo Exame da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 2 horas 26 de Novembro de 2008

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [2.5] Considere a série dada por $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Indique qual é a sucessão das somas parciais associada (a esta série) e, se possível, determine a soma da série.

2. [4.5] Estude a natureza das seguintes séries de termos não negativos:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n^2+1}$

3. [3.0] Estude a natureza das seguintes séries numéricas de termos positivos e negativos. No caso de haver convergência, indique se ela é simples ou absoluta:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^3}$

4. [2.5] Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto $x = 0$ e tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x), & \text{se } x > 0, \\ e^{1/x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Justifique que $f(0) = 0$.
   (b) Verifique se f é diferenciável no ponto $x = 0$.

5. [1.5] Calcule (justificando detalhadamente todos os passos) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

6. [3.0] Para a função f dada por $f(x) = 2\arctan(x) - x$, determine os(as) eventuais:

   (a) Intervalos de monotonia e extremos de f;
   (b) Concavidades e inflexões do gráfico de f;
   (c) Assímptotas ao gráfico de f.

7. [3.0] Sendo f uma função (real de variável real) que possui derivada nula em todos os pontos de um dado intervalo I, demonstre que f é constante em I.
   No caso de usar algum teorema na realização da demonstração aqui solicitada, deve enunciar detalhadamente tal teorema.

— **FIM** —