# 2. Sistemas de equações lineares

## 2.1 Sistemas e matrizes

Nesta secção apresentam-se algumas definições e nomenclatura básicas associadas aos sistemas lineares e a sua relação com as matrizes.

**Definição 2.1.** *Uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{2.1}$$

*onde $a_i \in \mathbb{K}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, é chamada uma* ***equação linear*** *nas incógnitas (indeterminadas) $x_1, \ldots, x_n$. A cada $a_i$ chama-se* ***coeficiente*** *da equação e ao $b$ chama-se* ***termo independente*** *da equação.*

**Exemplo 2.2.** *A equação $-x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 11$ é uma equação linear nas incógnitas $x_1$, $x_2$ e $x_3$ de coeficientes $-1$, $4$ e $-7$ e termo independente $11$.*
*A equação $4x_1 - 5x_2 = x_1x_3$ não é uma equação linear.*

Recordando o produto de uma matriz linha por uma matriz coluna, note-se que a equação (2.1) pode ser representada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

**Definição 2.3.** *Diz-se que o $n-$uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, ou de forma equivalente, $\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix}^T$ é* ***solução da equação*** *(2.1) (ou de (2.2)) se*

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

*ou*

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

*Ao conjunto de todas soluções de (2.1) chama-se* ***conjunto solução*** *de (2.1).*

**Exemplo 2.4.** *Considere a equação $3x_1-x_2+4x_3 = 5$. Esta pode representar-se matricialmente como*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

*Como $3x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \Leftrightarrow x_2 = 3x_1 + 4x_3 - 5$, o conjunto solução da equação dada é*

$$S = \{(x_1, 3x_1 + 4x_3 - 5, x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

*Algumas soluções são, por exemplo, $(0, -5, 0)$, $(1, -2, 0)$, $(0, -1, 1)$.*

A uma "colecção" de um número finito de equações lineares chama-se sistema de equações lineares; mais formalmente:

**Definição 2.5.** *À conjunção de $m$ equações lineares em $n$ incógnitas, com $m, n \in \mathbb{N}$, chama-se **sistema de equações lineares** e pode ser representado por*

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + \cdots + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + \cdots + & a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.3}$$

*onde $a_{ij} \in \mathbb{K}$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, são chamados **coeficientes** do sistema e os $b_i \in \mathbb{K}$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, são os **termos independentes** do sistema.*

Se $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, então diz-se que o sistema é *homogéneo*; caso contrário, isto é, se $b_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ então o sistema diz-se *completo*.

**Exemplo 2.6.** *Considere os seguintes sistemas lineares*

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} \boxed{2}x_1 + \boxed{3}x_2 + \boxed{4}x_3 = 1 \\ \\ \boxed{-1}x_1 + \boxed{5}x_2 + \boxed{0}x_3 = 2 \end{array}\right. \qquad e \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{l} \boxed{1}x_1 - \boxed{2}x_2 = 0 \\ \\ \boxed{-1}x_1 + \boxed{3}x_2 = 0 \end{array}\right. .$$

*O sistema $(S_1)$ é um sistema completo com 2 equações e 3 incógnitas e $(S_2)$ é um sistema homogéneo com 2 equações e 2 incógnitas. Em ambos os sistemas os termos independentes estão marcados por $\bigcirc$ e os coeficientes por $\Box$.*

Atendendo à definição de solução de uma equação linear pode definir-se solução de um sistema de equações lineares.

**Definição 2.7.** *O $n-$uplo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é **solução** do sistema de equações lineares (2.3) se for solução de todas as equações que constituem esse sistema. Ao conjunto de todas as soluções de (2.3) chama-se **conjunto solução** desse sistema.*

**Exemplo 2.8.** *Considere o sistema linear $(S_1)$ do exemplo anterior, o terno $\left(-2, 0, \frac{5}{4}\right)$ é uma solução desse sistema; de facto,*

$$\left\{\begin{array}{l} 2 \times (-2) + 3 \times 0 + 4 \times \frac{5}{4} = 1 \\ -1 \times (-2) + 5 \times 0 + 0 \times \frac{5}{4} = 2 \end{array}\right. .$$

Para a determinação do conjunto solução de um sistema, podem aplicar-se diversos métodos que "simplificam" o sistema dado em sistemas equivalentes, isto é:

**Definição 2.9.** *Dois sistemas são* ***equivalentes*** *se tiverem o mesmo conjunto solução.*

Um dos métodos para determinar o conjunto solução de um sistema consiste em aplicar determinadas operações sobre as equações do sistema. Essas operações são chamadas *operações elementares sobre equações.* Represente-se por $e_i$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, a $i$-ésima equação de um sistema de equações lineares na forma (2.3). As operações elementares sobre equações são:

I. trocar duas equações
(representa-se por $e_i \leftrightarrow e_j$);

II. multiplicar uma equação por um escalar não nulo
(representa-se por $e_i' := \alpha e_i$, com $\alpha \neq 0$);

III. adicionar a uma equação outra multiplicada por um escalar
(representa-se por $e_i' := e_i + \beta e_j$, com $\beta \in \mathbb{K}$).

Mais, se uma operação elementar sobre equações é executada num sistema o sistema obtido é equivalente ao original (ou seja, tem o mesmo conjunto solução).

Vejamos um exemplo para recordar como determinar o conjunto solução de um sistema de equações lineares, usando este tipo de operações.

**Exemplo 2.10.** *Dado o sistema* $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right.$ *e efectuando as operações elementares acima descritas, obtemos:*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=2 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2':=e_2+e_1} \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x=3 \end{array}\right. \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2':=\frac{1}{2}e_2} \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e_1':=e_1-e_2} \left\{\begin{array}{l} y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

*O conjunto solução é* $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Atendendo ao número de soluções que um sistema de equações lineares admite, este pode ser classificado da seguinte forma:

- **impossível**: quando não tem solução;
- **possível**: quando admite uma ou mais soluções; neste caso pode dizer-se que é:
  - **possível e determinado**: quando tem apenas uma única solução;
  - **possível e indeterminado**: quando tem uma infinidade de soluções; neste caso atribui-se ainda um *grau de indeterminação* ao sistema que é o número de variáveis livres existentes nas soluções.

Veja-se alguns exemplos.

**Exemplos 2.11.** *1. o sistema do Exemplo* 2.10 *é possível e determinado;*

*2. o sistema*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2' := e_2 + e_1} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$
$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{e_1' := e_1 + e_2} \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

*tem o seguinte conjunto solução* $\{(4 - x_3, 3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$. *Logo trata-se de um sistema possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a* 1 *(neste caso, a única variável livre é* $x_3$*).*

*3. o sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{e_2' := e_2 + e_1} \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

*tem como conjunto solução o conjunto vazio* $\emptyset$ *e, portanto, é impossível.*

A informação de um sistema de equações lineares pode ser resumida numa única matriz. Recordando o produto entre matrizes, note-se que é possível representar o sistema (2.3) na seguinte forma matricial:

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

onde à matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz dos coeficientes* (ou matriz simples), à matriz $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz das incógnitas* e à matriz $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ chama-se *matriz dos termos independentes.*

Pode ainda escrever-se uma única matriz com os coeficientes e os termos independentes do sistema:

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

A esta matriz chama-se *matriz ampliada* do sistema (2.3).

**Exemplo 2.12.** *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 7 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

*A sua forma matricial é $AX = B$, com*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

*e a sua matriz ampliada é*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 7 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right].$$

## 2.2 Método de eliminação de Gauss

Recorde-se que nos exemplos anteriores usaram-se determinadas operações elementares sobre equações. Efectuar operações elementares sobre as equações de um sistema é equivalente a efectuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada associada ao sistema. Represente-se por $L_i$, com $i \in \{1, \ldots, m\}$, a $i$-ésima linha da matriz ampliada. Veja-se um exemplo de como resolver um sistema usando a respectiva matriz ampliada.

**Exemplo 2.13.**

| ***Sistema*** | ***Matriz ampliada*** |
|---|---|
| $\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$ |
| ***1º passo:*** $e_1 \leftrightarrow e_2$ | $L_1 \leftrightarrow L_2$ |
| $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ | $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right]$ |

***2º passo:*** $e_2' := e_2 + 2e_1$
$e_3' := e_3 - 4e_1$

$L_2' := L_2 + 2L_1$
$L_3' := L_3 - 4L_1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 0 - 2x_2 + 15x_3 = -5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 15 & -5 \end{array}\right]$$

***3º passo:*** $e_3' := e_3 + 2e_2$

$L_3' := L_3 + 2L_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_3 = -1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

***4º passo:*** $e_3' := \frac{1}{3}e_3$

$L_3' := \frac{1}{3}L_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

*Assim, obtém-se o sistema equivalente ao inicial*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 0 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 0 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \\ x_2 = 2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

*E o conjunto solução é* $\left\{\left(2, 0, -\frac{1}{3}\right)\right\}$.

É mais fácil trabalhar com a matriz ampliada. Pode-se então resolver um sistema $AX = B$ considerando a sua matriz ampliada $\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$ e executando nela de forma criteriosa operações sobre as linhas. Este tipo de operações chamam-se *operações elementares sobre as linhas* e são elas:

I. trocar linhas
(representa-se por $L_i \leftrightarrow L_j$, com $i \neq j$);

II. multiplicar uma linha por um escalar não nulo
(representa-se por $L_i' := \alpha L_i$, com $\alpha \neq 0$);

III. adicionar a uma linha um múltiplo de uma outra linha
(representa-se por $L_i' := L_i + \beta L_j$, com $\beta \in \mathbb{K}$).

**Exemplo 2.14.** *Dado o sistema* $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ *, resolva-se usando a técnica descrita anteriormente.*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - 3L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -14 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2' := -\frac{1}{4}L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{14}{4} \end{array}\right]$$

*Logo*

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = \frac{14}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{14}{4} = \frac{20-14}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{14}{4} \end{cases}$$

*e o seu conjunto solução é* $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{14}{4}\right)\right\}$.

O que se fez foi um caso particular do **método de eliminação de Gauss**. Antes de formalizar este método apresentam-se algumas definições necessárias.

**Definição 2.15.** *Diz-se que uma matriz está na* ***forma escalonada por linhas*** *se satisfizer as seguintes condições:*

- *se há linhas nulas elas situam-se abaixo das linhas não nulas;*
- *o primeiro elemento não nulo de cada linha (com excepção da primeira) situa-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior;*
- *os elementos que se situam abaixo do primeiro elemento não nulo de cada linha (com excepção da última) são todos nulos.*

Aos primeiros elementos não nulos de cada linha da forma escalonada por linhas chamam-se *pivots*.

**Exemplo 2.16.** *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*As matrizes $A$ e $B$ estão na forma escalonada; mas a matriz $C$ não está.*

**Definição 2.17.** *Diz-se que uma matriz está na* ***forma escalonada reduzida*** *se estiver na forma escalonada por linhas, isto é, satisfizer as condições anteriores e, além disso, cada pivot é igual a 1 e é o único elemento não nulo da sua coluna.*

**Observação 2.18.** *Repare-se que a forma escalonada reduzida é a forma escalonada por linhas onde cada pivot é transformado em 1 e, acima destes, os elementos da matriz são nulos.*

**Exemplo 2.19.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

*As matrizes $A$ e $B$ estão na forma escalonada reduzida.*

**Teorema 2.20.** *Toda a matriz pode ser colocada na forma escalonada mediante uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas.*

Para conseguir transformar uma matriz na sua forma escalonada por linhas executa-se o método de eliminação de Gauss.

**Definição 2.21.** *O* ***método de eliminação de Gauss*** *consiste nos seguintes passos.*
***Passo 1:*** *Se a matriz tiver todos os elementos nulos, pára. A matriz já está na forma escalonada por linhas.*

***Passo 2:*** *Caso contrário, encontre a primeira coluna, da esquerda para a direita, que tenha um elemento não nulo $k$. Mova a linha que o contém para o topo da matriz.*

***Passo 3:*** *[opcional] Multiplique por $\frac{1}{k}$ a primeira linha e obtém-se o primeiro pivot. (este passo pode nem ser feito)*

***Passo 4:*** *Anule cada elemento abaixo do pivot adicionando às linhas correspondentes múltiplos adequados da primeira linha.*

*(Até aqui completamos o processo no que diz respeito à primeira linha. No que se segue, usam-se as restantes linhas, ignorando a primeira linha.)*

***Passo 5:*** *Repita os passos 1 a 4 na matriz formada pelas restantes linhas, até esgotar as linhas todas da matriz.*

Para obter a forma escalonada reduzida de uma matriz aplica-se o *método de eliminação de Gauss-Jordan*.

**Definição 2.22.** *O* ***método de eliminação de Gauss-Jordan*** *é composto por duas fases.*
***1ª fase:*** *Aplicar o método de eliminação de Gauss até produzir a forma escalonada por linhas. Transformar todos os pivots em 1.*

***2ª fase:*** *Aplicar o método de eliminação de Gauss de baixo para cima por forma a anular todos os elementos da matriz situados acima e na mesma coluna dos pivots. Para isso, bastará começar na última linha não nula e, de baixo para cima, adicionar a cada linha múltiplos adequados das linhas inferiores.*

**Exemplo 2.23.** *Suponha-se que a matriz ampliada de um sistema tem a forma:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{array}\right]$$

*O Passo 1, do método de eliminação de Gauss, é ignorado uma vez que as entradas da matriz não são todas nulas. No Passo 2 temos que encontrar a primeira coluna (da esquerda para a direita) com o primeiro elemento não nulo. Neste caso é a primeira coluna e o pivot pode ser a entrada* $(3,1)$*. Mova-se a terceira linha (a linha que o contém) para o topo.*

$$\xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{array}\right]$$

*De acordo com o Passo 3, temos que multiplicar a primeira linha por* $\frac{1}{2}$*:*

$$\xrightarrow[L_1' := \frac{1}{2}L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{array}\right]$$

*Agora basta operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot (Passo 4):*

$$\xrightarrow[L_4' := L_4 - 2L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

*O Passo 5 manda considerar a submatriz obtida eliminando a primeira linha e aplicar os Passos 1 a 4 até esgotar as linhas todas:*

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 := \frac{1}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4' := L_4 + 2L_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 := L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := \frac{1}{2}L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*O método da eliminação de Gauss termina aqui e, como tal, poder-se-ia já determinar a solução do sistema*

$$\begin{cases} x + y - \frac{5}{2}z + t = 2 \\ y + \frac{3}{2}z - 2t = \frac{1}{2} \\ z + \frac{3}{2}t = 2 \end{cases}$$

*resolvendo-o "de baixo para cima". No entanto, pode continuar-se a aplicar o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada escalonada por linhas e só depois determinar a solução. A segunda fase desse método manda operar com as linhas da matriz de modo a obter zeros acima dos pivots.*

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - L_2]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 + 4L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{3}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*Assim obtém-se a forma escalonada reduzida da matriz ampliada do sistema. Agora basta passar novamente para sistema e resolver "de baixo para cima":*

$$\begin{cases} x + 9t = \frac{19}{2} \\ y - \frac{17}{4}t = -\frac{5}{2} \\ z + \frac{3}{2}t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{2} - 9t \\ y = -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}t \\ z = 2 - \frac{3}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*O conjunto solução é* $\left\{\left(\frac{19}{2} - 9t, -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}t, 2 - \frac{3}{2}t, t\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$. *Observe-se que existe uma variável livre, a variável* $t$.

**Exercício Resolvido 2.24.** *Seja* $(S)$ *o seguinte sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} -x + 4z = 0 \\ y = -1 \\ -x + y + 4z = -1 \end{cases}.$$

*Determine, caso exista, o seu conjunto solução.*

<u>Resolução:</u> *A sua matriz ampliada é:*

$$M = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

*Passo 1: Anular os elementos da 1ª coluna que se encontram abaixo do pivot da 1ª linha. Para isso efectua-se a operação* $L_3' := L_3 - L_1$, *obtendo-se*

$$M_1 = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

*Passo 2: Anular o elemento da $2^a$ coluna que se encontram abaixo do pivot da $2^a$ linha. Para isso efectua-se a operação $L_3' := L_3 - L_2$ e obtém-se*

$$M_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*Passo 3: Transformar os pivots de cada linha em 1; para isso basta fazer a operação $L_1' := -L_1$, obtendo-se*

$$M_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

*A matriz $M_3$ é a matriz ampliada de um sistema $(S')$ equivalente a $(S)$:*

$$\begin{cases} x - 4z = 0 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

*que é um sistema possível e indeterminado; qualquer terno da forma $(4z, -1, z)$, com $z \in \mathbb{R}$, é solução de $(S')$ e, consequentemente, o conjunto solução de $(S)$ é $\{(4z, -1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.*

Vejamos agora um exemplo em que a transformação dos pivots é feito no final para evitar trabalhar com números fraccionários.

**Exercício Resolvido 2.25.** *Resolve o sistema* $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ -4x + 2y + z = -5 \end{cases}$*, aplicando o método de eliminação de Gauss.*

<u>Resolução:</u> *A sua matriz ampliada é:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 + 2L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := \frac{1}{2}L_1 \\ L_2' := \frac{1}{3}L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

*A matriz resultante é a matriz ampliada de um sistema equivalente ao dado:*

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{3}{2} \\ z = -\frac{1}{3} \\ 0 = 1 \end{cases}$$

*O sistema é impossível. Note-se que era desnecessário efectuar as últimas três operações elementares para concluir que o sistema não admite soluções.*

**Exercício 2.26.** *Resolve o sistema* $\begin{cases} 3y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$ *, usando o método de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan.*

## 2.3 Discussão de sistemas

No método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) obtém-se, para uma dada matriz, sempre o mesmo número de pivots. Isto é, matrizes escalonadas obtidas de uma mesma matriz têm o mesmo número de pivots.

**Definição 2.27.** *A* ***característica*** *de uma matriz $A$ é o número de pivots de uma qualquer matriz escalonada obtida de $A$ por aplicação sucessiva de operações elementares sobre as linhas de $A$. Representa-se por $r(A)$ ou $\text{car}(A)$.*

Note-se que se $A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ então $r(A) \leq \min\{m, n\}$.

Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é dada por $AX = B$, com $A$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $B$ uma matriz do tipo $m \times 1$. Na resolução pelo método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) faz-se:

**Passo 1:** Forma-se a matriz ampliada $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]$;

**Passo 2:** Aplicar a $M$ o método em causa; no decurso da aplicação do método, podem acontecer duas situações:

- **a)** se surgir uma linha do tipo $\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{array}$, com $\alpha \neq 0$, então o sistema é impossível.
- **b)** se não surgir, terminar o processo até obter uma matrix escalonada por linhas (ou reduzida). Represente-se essa matriz por $\widetilde{M}$.

**Passo 3:** (somente no caso **b)**) Na matriz $\widetilde{M}$, o número de colunas sem pivot corresponde ao número de variáveis livres a considerar. Isto é, o número de variáveis livres é dado por:

$$n - r(A) = n - r(\widetilde{M})$$

Para escolher as variáveis dependentes e as livres pode-se efectuar o seguinte raciocínio:

- *variáveis livres* são as que correspondem a colunas sem pivot;
- *variáveis dependentes* são as outras, isto é, as que correspondem a colunas com pivot

Se $\widetilde{M}$ tiver pivots em todas as colunas correspondentes às incógnitas, isto é, $r(A) = r(\widetilde{M}) = n$ então não existem variáveis livres e o sistema é possível e determinado.

Pode então enunciar-se o seguinte teorema:

**Teorema 2.28.** *Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, onde $A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ e $B$ é uma matriz do tipo $m \times 1$. Há exactamente três possibilidades para a sua classificação:*

1. *$AX = B$ é possível e determinado se e só se $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) = n$;*
2. *$AX = B$ é possível e indeterminado se e só se $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) < n$ e, nesse caso, diz-se que o sistema tem grau de indeterminação $n - r(A)$;*
3. *$AX = B$ é impossível se e só se $r(A) \neq r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right)$.*

**Exemplo 2.29.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = -2 \\ y + z = a \\ z = b \end{cases}$$

*Para determinar a relação entre os valores de $a$ e $b$ para que o sistema seja possível, comece-se por construir a matriz ampliada do sistema:*

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := \frac{1}{2}L_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[L_4' := L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a-1 \end{array}\right]$$

*Para que o sistema seja possível $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right)$, isto é:*

$$b - a - 1 = 0 \Leftrightarrow b - a = 1.$$

**Exercício Resolvido 2.30.** *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - 2z + 2t = 0 \\ x + 2z - 2t = 0 \\ -x - 2z + at = b \end{cases}.$$

1. *Determine os valores dos parâmetros $a$ e $b$ para os quais o sistema é*

   *i) impossível;*

   *ii) possível e determinado.*

2. *Resolva-o, pelo método da eliminação de Gauss, para $a = 2$ e $b = 0$.*

Resolução: *A sua matriz ampliada é*

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & a & b \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3' := L_3 - L_1 \\ L_4' := L_4 + L_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a+1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3' := L_3 + L_2 \\ L_4' := L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a-1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_4' := L_4 + L_3 \\ L_3' := -L_3}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & b \end{array}\right]$$

1. *i) Se $r(A) \neq r\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right]\right)$ o sistema é impossível; para isso basta que $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ e $b \neq 0$.*

   *ii) O sistema é possível e determinado sse $a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$.*

2. *Se $a = 2$ e $b = 0$ então, pelo que foi feito anteriormente,*

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & a & b \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   *Ou seja, o sistema inicial é equivalente ao sistema:*

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y - 2z + 2t = 0 \\ z + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -4t \\ z = -t \end{cases}$$

   *Assim o conjunto solução é $\{(4t, -4t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.*

## 2.4 Sistemas homogéneos

Foi visto anteriormente que, dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, um sistema de equações lineares homogéneo é um sistema cuja forma matricial é $AX = 0$, ou seja, cuja a matriz dos termos independentes é uma matriz coluna nula.

É fácil verificar que este tipo de sistemas tem pelo menos uma solução, a solução nula

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \in M_{n\times 1}(\mathbb{K}).$$

Esta solução é designada *solução trivial* do sistema homogéneo.

**Exemplos 2.31.** *1. O sistema homogéneo* $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ *tem uma única solução, a solução nula* $(0,0)$.

*2. O sistema* $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ *é um sistema homogéneo possível e indeterminado, cujo conjunto solução é* $\{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$*, ao qual pertence a solução trivial* $(0,0,0)$.

Note-se que, nos exemplos anteriores, o primeiro tem o mesmo número de equações e incógnitas enquanto que o segundo exemplo tem mais incógnitas do que equações. Prova-se então o seguinte:

**Teorema 2.32.** *Se um sistema de equações lineares homogéneo tem mais incógnitas do que equações, então existe uma solução não trivial.*

*Demonstração.* Seja $AX = 0$, onde $A$ é uma matriz do tipo $m \times n$ com $n > m$ (que significa que há mais incógnitas que equações). Uma vez que um sistema homogéneo é sempre possível, então

$$r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & 0 \end{array}\right]\right).$$

Logo $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & 0 \end{array}\right]\right) \leq m < n$. Assim, o sistema é possível e indeterminado e, consequentemente, existe uma solução não trivial. □

Os sistemas de equações lineares homogéneos possuem propriedades muito simples mas bastante úteis.

**Proposição 2.33.** *Seja* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_h \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *é uma solução do sistema homogéneo* $AX = 0$*, então* $\alpha X_h$ *também é solução, para qualquer* $\alpha \in \mathbb{K}$.

*Demonstração.* Se $X_h$ é uma solução do sistema homogéneo $AX = 0$, então $AX_h = 0$. Logo

$$A(\alpha X_h) = \alpha (AX_h) = \alpha 0 = 0,$$

ou seja, $\alpha X_h$ é solução do sistema $AX = 0$. □

**Exemplo 2.34.** *Atendendo ao Exemplo 2.31, 2.,* $(-1,0,1)$ *é uma solução desse sistema e, obviamente, que também o são os ternos*

$$2(-1,0,1)=(-2,0,2),\ -(-1,0,1)=(1,0,-1),\ 10(-1,0,1)=(-10,0,10),\cdots$$

**Proposição 2.35.** *Seja* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_1, X_2 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *são duas soluções do sistema homogéneo* $AX=0$*, então* $X_1+X_2$ *também é solução.*

*Demonstração.* Se $X_1$ e $X_2$ são soluções do sistema homogéneo $AX=0$, então $AX_1=0$ e $AX_2=0$. Logo

$$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=0+0=0,$$

ou seja, $X_1+X_2$ é solução do sistema $AX=0$. □

**Exemplo 2.36.** *Atendendo novamente ao Exemplo 2.31, 2.,* $(-3,0,3)$ *e* $(7,0,-7)$ *são duas soluções e, claramente, que também o é o terno*

$$(-3,0,3)+(7,0,-7)=(4,0,-4).$$

Deste modo, mostra-se que qualquer combinação linear de um número finito de soluções de um sistema homogéneo é ainda uma solução desse sistema, isto é:

**Proposição 2.37.** *Seja* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_1,\ldots,X_p \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *são soluções do sistema homogéneo* $AX=0$*, então* $\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_pX_p$ *também é solução.*

A demonstração fica como exercício.

Observe-se que este facto não é válido para sistemas de equações lineares completos.

Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Para qualquer sistema de equações lineares completo cuja forma matricial é $AX=B$, podemos considerar o *sistema homogéneo associado* cuja forma matricial é $AX=0$.

**Exemplo 2.38.** *Dado o sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y=3 \\ x-y-z=4 \end{cases},$$

*a sua forma matricial é* $AX=B$ *onde* $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

*O sistema homogéneo associado é*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

*cuja forma matricial é* $AX=0$.

O próximo resultado estabelece que o conjunto solução de um sistema de equações lineares completo pode ser obtido "somando" uma solução particular desse sistema com o conjunto solução do sistema homogéneo associado.

**Teorema 2.39.** *Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Seja $X_p \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ uma solução particular do sistema de equações lineares $AX = B$. Então, $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é solução desse sistema se e só se existe uma solução $X_h \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ do sistema homogéneo associado $AX = 0$ tal que $X_0 = X_p + X_h$.*

*Demonstração.* Por hipótese, $X_p$ é uma solução do sistema completo $AX = B$, ou seja, $AX_p = B$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $X_0$ é também uma solução de $AX = B$, isto é, $AX_0 = B$. Então

$$AX_p = AX_0 \Leftrightarrow AX_p - AX_0 = 0 \Leftrightarrow A(X_0 - X_p) = 0$$

ou seja, $X_h = X_0 - X_p$ é uma solução do sistema homogéneo associado $AX = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $X_h$ é uma solução do sistema homogéneo associado ao sistema dado, ou seja, $AX_h = 0$. Seja $X_0 = X_p + X_h$. Então

$$AX_0 = A(X_p + X_h) = AX_p + AX_h = B + 0 = B.$$

Donde $X_0$ é uma solução do sistema completo $AX = B$.

$\square$

**Exemplo 2.40.** *Considere-se o sistema de equações lineares* $\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$.

*O sistema homogéneo associado é* $\begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$. *Construídas as matrizes ampliadas e aplicado o método de eliminação de Gauss obtém-se:*

$$\left[\, A \,\vdots\, B \,\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.4}$$

*e*

$$\left[\, A \,\vdots\, 0 \,\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2.5}$$

*Logo, de* (2.4), *vem que o sistema completo é equivalente a*

$$\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$$

*e, portanto, significa que é um sistema possível e indeterminado e o seu conjunto solução é* $\{(z-2, 2-3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

*De* (2.5), *vem que o sistema homogéneo associado é equivalente a*

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = -3z \end{array} \right.$$

*o que significa que é também um sistema possível e indeterminado e e o seu conjunto solução é* $\{(z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

*Repare-se que, se no conjunto solução do sistema completo escolhermos uma solução particular, por exemplo, aquela que corresponde a* $z = 0$, *ou seja,* $(-2, 2, 0)$ *então podemos escrever o conjunto solução do sistema completo como soma desta solução particular com o conjunto solução do sistema homogéneo associado:*

$$\{(-2, 2, 0) + (z, -3z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$