# 42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
# LIÇÕES X

**Vítor Neves**

2009/2010

# Capítulo 6

# Equações diferenciais ordinárias

## 6.4 Existência e unicidade

$$\begin{cases} y' \;=\; f(x,y) & f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ \&\ \textbf{contínua} \\ y(x_0) \;=\; y_0 & (x_0,y_0)\in\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

**Teorema 6.4.1** *O problema* (6.1) *é equivalente à equação integral seguinte em* $y$*.*

$$y(x) \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt \tag{6.2}$$

**Lema 6.4.1** ***(De Gronwall 1)*** *Se a função* $\varphi : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e para certos* $C, L \in \mathbb{R}_0^+$ *satisfaz*

$$0 \;\leq\; \varphi(x) \;\leq\; C + L\int_a^x \varphi(t)dt \qquad (x\in[a,b]), \tag{6.3}$$

*então*

$$\forall x\in[a,b] \quad \varphi(x) \;\leq\; Ce^{L(x-a)} \tag{6.4}$$

Analogamente

**Lema 6.4.2** ***(De Gronwall 2)*** *Se a função* $\varphi : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é contínua e para certos* $C, L \in \mathbb{R}_0^+$ *satisfaz*

$$0 \ \leq \ \varphi(x) \ \leq \ C + L\int_x^b \varphi(t)dt \qquad (x \in [a, b]), \tag{6.5}$$

*então*

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) \ \leq \ Ce^{L(b-x)} \tag{6.6}$$

**Dem.**

$$\begin{aligned} \Phi(x) \ &:= \ C + L\int_x^b \varphi(t)dt \qquad (x \in [a, b]) \\ \Phi'(x) \ &= \ -L\varphi(x) \ \geq \ -L\Phi(x) \\ \frac{d}{dx}\left(e^{Lx}\Phi(x)\right) \ &\geq \ 0 \\ e^{Lx}\varphi(x) \ \leq \ e^{Lx}\Phi(x) \ &\leq \ e^{Lb}\Phi(b) \ = \ Ce^{Lb} \qquad (a \leq x \leq b) \end{aligned}$$

□

### 6.4.1 Unicidade

**Definição 6.4.1** *Para* $0 \leq L \in \mathbb{R}$*,* $f$ *diz-se* $L-$***Lipschitziana*** *(ou que* satisfaz uma condição de Lipschitz) *em* $y$ *no conjunto* $C \subseteq \Omega$*, quando*

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in C \quad |f(x, y) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \tag{6.7}$$

**Proposição 6.4.1** *Se $f$ é (contínua e) $L-$Lipschitziana em $y$ em $C \subseteq \Omega$, $I \times J$ é o rectângulo $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon] \times [y_0-\delta, y_0+\delta] \subseteq C$, e o problema* (6.1) *tem solução $\phi : I \to J$, então $\phi$ é a única solução definida em $I$.*

**Dem.:** Suponha-se que $\phi$ e $\psi$ são duas soluções de (6.1) em $I$.

***Em*** $[x_0, x_0+\varepsilon]$

$$\begin{aligned} |\phi(x)-\psi(x)| &= \left| y_0 - y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \big| f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t)) \big| dt \\ &\leq 0 + L \int_{x_0}^{x} \big|\phi(t)-\psi(t)\big| dt \end{aligned}$$

Pelo primeiro lema de Gronwall (6.4.1)

$$|\phi(x)-\psi(x)| \;\leq\; 0e^{L(x-x_0)} \;=\; 0. \tag{6.8}$$

***Em*** $[x_0-\varepsilon, x_0]$

$$\begin{aligned} |\phi(x)-\psi(x)| &= \left| y_0 - y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))dt \right| \\ &\leq \int_{x}^{x_0} \big| f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t)) \big| dt \\ &\leq 0 + L \int_{x}^{x_0} \big|\phi(t)-\psi(t)\big| dt \end{aligned}$$

Pelo segundo lema de Gronwall (6.4.2)

$$|\phi(x)-\psi(x)| \;\leq\; 0e^{L(x_0-x)} \;=\; 0. \tag{6.9}$$

□

### 6.4.2 Existência e unicidade

Tenha-se bem presente que $f$ ***é contínua por hipótese***.

**Teorema 6.4.2** ***(de Picard-Lindeloef)***
*Se $f$ é (contínua e) $L-$Lipschitziana em $y$ em $\Omega$, existe algum $\varepsilon > 0$ para o qual o problema de Cauchy* (6.1) *tem solução única definida em* $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

**Dem.**

A ***unicidade*** de solução é consequência da proposição 6.4.1.

A ***existência*** de solução prova-se de seguida.

Tomem-se reais positivos $\varepsilon, \beta, M$, tais que

$$R := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subseteq \Omega \tag{6.10}$$

$$M \geq \text{máx}\{f(x, y)| : (x, y) \in R\} \tag{6.11}$$

$$\varepsilon M \leq \beta \tag{6.12}$$

e defina-se

$$\begin{cases} u_0(x) = y_0 & |x - x_0| \leq \varepsilon \\ u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dx & |x - x_0| \leq \varepsilon, \ n \geq 0 \end{cases} \tag{6.13}$$

$u_n$ vai convergir uniformemente para uma solução única de (6.1).

Defina-se

$$I_\varepsilon := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

**Boa definição de $u_n$**

*Os gráficos de todas as funções $u_n$ estão contidos em $R$*

O gráfico da função constante $u_0$ está,

admita-se que o mesmo acontece com o gráfico de $u_n$;

por (6.12),

$$|u_{n+1}(x) - y_0| \leq |x - x_0| M \leq \varepsilon M \leq \beta$$

portanto

$$\forall x \in I_\varepsilon \quad (x, u_{n+1}(x)) \in R.$$

A afirmação segue por indução.

**Convergência uniforme**

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall x \in I_\varepsilon \quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}\beta \tag{6.14}$$

Esquema de demonstração de (6.14) por indução

$$\begin{aligned}
|u_1(x) - u_0(x)| &\leq \varepsilon M \leq \frac{(L|x-x_0|)^0}{0!}\beta \quad (x \in I_\varepsilon) \\
|u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, u_{n+1}(t)) - f(t, u_n(t))| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| dt \right| \\
&\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \frac{(L|t-x_0|)^n}{n!} \beta dt \right| \\
&= \frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\beta
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{máx}\{|u_n(x) - u_{n-1}(x)| : x \in I_\varepsilon\} \leq \frac{(L\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!}\beta \tag{6.15}$$

Portanto, pelo critério de Weierstrass,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - u_{n-1}(x) \text{ converge uniformemente em } I_\varepsilon;$$

mas

$$u_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - u_{k-1}(x),$$

pelo que, para alguma função $u : I_\varepsilon \to [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$,
*$u_n$ converge uniformemente para $u$ em $I_\varepsilon$.*

**O problema de Cauchy** (6.1)

Pode provar-se que

$f(x, u_n(x))$ *também converge uniformemente em* $I_\varepsilon$ *para* $f(x, u(x))$,

e tem-se

$$\begin{aligned} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt &= y_0 + \lim_n \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt \\ &= \lim_n \left( y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt \right) \\ &= \lim_n u_{n+1}(x) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

Em suma: $u : I_\varepsilon \to \mathbb{R}$ é solução do problema (6.1). $\square$