Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame de Recurso / Análise Matemática I

Duração: 3 horas 31 de Janeiro de 2011

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

1. [1.8] Considere o seguinte conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 \leq 0\}$. Determine:

   (a) $int(A)$, $fr(A)$ e A'.

   (b) $int(A \cap \mathbb{Q})$, $fr(A \cap \mathbb{Q})$ e $(A \cap \mathbb{Q})'$.

   (c) o supremo de A e o supremo de $A \cup \{10\}$.

2. [2.4] Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_1 = 2 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 5).$$

   (a) Mostre por indução matemática que $u_n \leq 5$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostre que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona.

   (c) Justifique porque se pode afirmar que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

   (d) Usando o facto de $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, determine o valor de $L \in \mathbb{R}$.

3. [3.5] Determine a natureza das seguintes séries (sendo que em caso de convergência deverá indicar se esta é simples ou absoluta):

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{\sqrt{n^5+n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+\sqrt{n}}{4n+5}\frac{1}{(-3)^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(5n)!}{n^n}$

4. [1.5] Enuncie o *Teorema da Regra de Derivação da Função Inversa* e use este teorema para deduzir a derivada da função arccos.

5. [1.8] Seja F a função definida no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\arctan t}{t^2+1}\, dt$.

   (a) Mostre que F admite um único extremo e classifique esse extremo.

   (b) Estude o limite $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{F(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$.

6. [3.5] Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^3+x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

7. [1.5] Determine se o seguinte integral impróprio é convergente ou divergente (e em caso de convergência indique qual o valor para o qual converge):

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,dx\ .$$

8. [2.0] Sendo f e g funções contínuas em $[a,b]$, diferenciáveis em $]a,b[$ e tais que g' não se anula em $]a,b[$, demonstre que existe um $c\in]a,b[$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ .$$

9. [2.0] Supondo que u é uma função contínua em $[a,b]$ e v é uma função integrável e não negativa em $[a,b]$, demonstre que existe um $p\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b u(x)v(x)\,dx = u(p)\int_a^b v(x)\,dx\ .$$

—— FIM ——