# ANÁLISE MATEMÁTICA II
# (2005/06 – 2010/11)

Vítor Neves

**Departamento de Matemática**

**Universidade de Aveiro**

**2010/2011**

# Prefácio (2005/2006)

Este é um texto de apoio à disciplina Análise Matemática II que irá sendo aperfeiçoado à medida que a disciplina for decorrendo no semestre — veja-se a propósito a observação abaixo — pelo que muitos comentários de índole menos formal e exemplos, bem como algumas demonstrações, serão apresentados nas aulas teóricas *ou nas aulas teórico-práticas* e não aparecerão sistematicamente no texto podendo, no entanto, vir a ser acrescentados à medida que o semestre decorre. As demonstrações apresentadas basear-se-ão apenas em resultados supostos de conhecimento geral ou outros apresentados no texto.

Perante a necessidade de elaborar estas notas com alguma rapidez (caso contrário, teriam necessariamente utilidade reduzida) e de manter um discurso não demasiadamente codificado por vezes utilizamos linguagem formal de forma informal.

O símbolo $\square$ termina as demonstrações.

**OBSERVAÇÃO:** *É muito importante eliminar qualquer erro tipográfico ou qualquer dúvida conceptual, susceptíveis de ocorrer como consequência de uma elaboração por vezes demasiadamente apressada, pelo que agradecemos comentários, sugestões e correcções, enviadas para*

**vneves@ua.pt**

*de modo a que o texto possa ir sendo adaptado e corrigido.*

# Índice

# Capítulo 1

# Revisões

## 1.0 Números reais

### 1.0.1 Axiomática de corpo

**C1.** A soma é **associativa**:

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z \ = \ x + (y + z).$$

**C2.** A soma tem **elemento neutro**, designado por 0, i.e.

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad x + 0 \ = \ 0 + x \ = \ x.$$

**C3.** Qualquer número real tem **simétrico** i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y \ = \ y + x \ = \ 0.$$

O simétrico do número real $x$ designar-se-á $-x$.

**C4.** A soma é **comutativa**:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R} \quad x + y \ = \ y + x.$$

**C5.** O produto é **associativo**:

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z \ = \ x \cdot (y \cdot z).$$

**C6.** O produto tem **elemento neutro**, designado por 1, i.e.

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 \ = \ 1 \cdot x \ = \ x.$$

Como é habitual, omitir-se-á $\cdot$ entre letras ou entre letras e números.

**C7.** O produto é **comutativo**:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R} \quad xy \ = \ yx.$$

**C8.** Qualquer número real *não nulo* tem **inverso** i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad xy \ = \ yx \ = \ 1.$$

O inverso do número real $x$ designar-se-á $x^{-1}$ ou $\frac{1}{x}$.

**C9.** O produto é **distributivo** relativamente à adição, i.e.,

$$\forall\ x, y, z \in \mathbb{R} \quad [x(y+z) \ = \ xy + xz \quad \wedge \quad (y+z)x \ = \ yx + zx].$$

### 1.0.2 Axiomas de ordenação

**01.** $<$ é uma relação de *ordem total* em $\mathbb{R}$ i.e. goza das propriedades seguintes.

1. $<$ é **anti-reflexiva**:
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \not< x.$$
2. $<$ é **transitiva**:
$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad [[x < y \ \wedge \ y < z] \Rightarrow x < z]\,.$$
3. $<$ é **tricotómica** i.e. para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \neq y$ dá-se uma e só uma das condições seguintes: $x < y$ ou $y < x$.

**O2. Monotonia da soma**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad [y \ < \ z \ \Rightarrow \ x + y \ < \ x + z].$$

**O3. Semi-monotonia do produto**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad [[y \ < \ z \quad \wedge \quad x > 0] \Rightarrow xy \ < \ xz]\,.$$

Por verificar os axiomas **Ci**, $\mathbb{R}$ diz-se um **corpo**; por verificar também os axiomas **Oi**, $\mathbb{R}$ diz-se que um **corpo ordenado**.

O $\{x \in \mathbb{R}|\ 0 < x\}$ designar-se-á por $\mathbb{R}^+$ e os seus elementos chamam-se **números positivos**. Por definição, os números **negativos** são os elementos de $\mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$.

Repare-se que a relação $<$ é necessariamente **anti-simétrica** i.e. *dados quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, *se* $x < y$ *então* $y \not< x$, pois se se pudesse ter simultaneamente $x < y$ e $y < x$, pela transitividade, concluir-se-ia $x < x$, o que não se verifica, em face da anti-reflexividade.

**Notação:** Como é habitual, $x > y$ é uma fórmula equivalente a $y < x$ e $x \geq y$ ou, equivalentemente $y \leq x$, exprime que alguma das condições $x > y$ ou $x = y$ é satisfeita.

### 1.0.3 Outras propriedades

Quaisquer dos resultados seguintes se podem deduzir dos axiomas descritos acima, por isso os apresentamos como teoremas, se bem que não demonstrados. Também **não** se pressupõe que cada resultado se demonstra utilizando apenas os que o precedem.

**Teorema 1.0.1** *Um número real não nulo e o seu inverso têm o mesmo sinal i.e. são ambos positivos ou ambos negativos.*

**Teorema 1.0.2**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad [xy = 0 \quad \Leftrightarrow [x = 0 \ \vee \ y = 0]].$$

**Teorema 1.0.3** *Qualquer quadrado de um número real não nulo é positivo. Em particular*

$$1 \ = \ 1^2 \quad > \quad 0. \tag{1.1}$$

Define-se uma função **valor absoluto** $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$|x| \ = \ \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

**Teorema 1.0.4** *A função $|\cdot|$ goza das propriedades seguintes*

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = |-x|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = 0$ *se e apenas se* $x = 0$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x||y|$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x + y| \leq |x| + |y|$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$.
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad |x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Eis uma importante propriedade da relação $<$:

**Teorema 1.0.5** *Para quaisquer números reais $a, b$ as seguintes condições são equivalentes*

1. $a \leq b$
2. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad a < b + \varepsilon$
3. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad a - \varepsilon < b$.

**Dem.** Verificar que *2* e *3* são equivalentes é um simples exercício de aplicação da monotonia da soma (**O2.**): para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$a \ < \ b+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad a-\varepsilon \ < \ b+\varepsilon-\varepsilon = b$$

e

$$a-\varepsilon \ < \ b \quad \Rightarrow \quad a = a-\varepsilon+\varepsilon \ < \ b+\varepsilon.$$

Passamos a provar que *1* e *2* também são equivalentes.
Admitamos então que vale *1*. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, como $a \leq b < b+\varepsilon$ também $a < b+\varepsilon$ i.e. vale *2*.

Suponha-se agora que não vale *1* i.e. $a \not\leq b$; como $<$ é tricotómica, necessariamente se tem $b < a$; mas então, se tomássemos $\varepsilon = a-b$, $\varepsilon$ seria positivo e valeria a condição impossível $a = b+\varepsilon \not< b+\varepsilon$ (porque $<$ é anti-reflexiva); portanto se não se verifica *1* também não se verifica *2*.

Assim verifica-se *1* se e apenas se *2* se verifica i.e. são condições equivalentes. $\square$

### 1.0.4 Exercícios

Resolva as seguintes equações e inequações.

1. $x(x+3) = 1$
2. $\frac{4x^2-3x-1}{x^2+1} = 0$
3. $\frac{1}{x}(\mid x \mid -3) = 2$
4. $\mid 1-x \mid = 2 \mid x \mid$
5. $\frac{x+3}{x-1} - \frac{1}{x} = 0$
6. $(x^3-4x^2+7x-4)(2-x) = 0$
7. $\frac{x^2-1}{x} > -x$
8. $\frac{x^3-x}{3x+1} \leq 0$
9. $\frac{1}{3x+1} \leq \frac{1}{x}$
10. $\frac{|x|+1}{3-x^2} < 0$
11. $\frac{\sqrt{x^2}}{1-x} \leq 0$
12. $\mid x+1 \mid + \mid x+3 \mid > 2$
13. $\sqrt{2x+6} \geq 2x$
14. $\mid x^2-3x \mid > x-2$
15. $\mid 2x-1 \mid -x \geq 2$
16. $x-2 \geq (\mid x \mid -1)^2$
17. $\frac{x+3}{\sqrt{x}-1} < 0$
18. $\frac{2x-1}{x+1} < 0$
19. $\frac{x}{2x-3} \leq 3$
20. $2x^2-7x+3 > 0$
21. $\frac{x}{x^2+x+1} \geq 0$
22. $\mid x-3 \mid < 4$
23. $\mid x+1 \mid < \mid 2x-1 \mid$
24. $\mid 3-x^{-1} \mid < 1$
25. $\mid \frac{x}{x^2-3} \mid < 2$
26. $\frac{x}{1+|x|} \leq 2$

### 1.0.5 Números racionais

Um conjunto $C$ de números reais diz-se **indutivo** se satisfaz as condições seguintes

1. $1 \in C$.
2. $\forall x \in C \quad x + 1 \in C$.

O maior subconjunto indutivo de $\mathbb{R}$ é o próprio $\mathbb{R}$, o menor é o **conjunto dos números naturais**, que designaremos por $\mathbb{N}$; este conjunto verifica o **Princípio de Indução** em qualquer das versões seguintes (teorema 1.0.6).

> **Notação:** O símbolo $\subseteq$ designa, como é hábito, *inclusão* entre conjuntos i.e. $A \subseteq B$ quando e só quando todos os elementos de $A$ são elementos de $B$, podendo acontecer $A = B$. O símbolo $\subset$ designa *inclusão estrita* i.e. $A \subset B$ quando e só quando $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

**Teorema 1.0.6 (Princípio de Indução)**

1. *Se* $X \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in X$ *e* $x + 1 \in X$ *sempre que* $x \in X$, *então* $X = \mathbb{N}$. *Numa expressão:*

$$[X \subseteq \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \in X \ \wedge \ \forall x \in \mathbb{N} \ [x \in X \Rightarrow x + 1 \in X]] \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{N}$$

2. *Se* $P(x)$ *é uma propriedade verificada por* $1$ *— i.e., vale* $P(1)$ *— e* $k{+}1$ *verifica* $P(x)$ *sempre que o número natural* $k$ *verifica* $P(x)$ *— i.e.,* $\forall k \in \mathbb{N}[P(k) \Rightarrow P(k+1)]$ *— então a propriedade* $P(x)$ *vale para todo o número natural — i.e.,* $\forall k \in \mathbb{N} \ P(k)$. *Numa única expressão:*

$$[P(1) \ \wedge \ \forall k \in \mathbb{N}[P(k) \Rightarrow P(k+1)]] \ \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \ P(k).$$

3. *Se* $X \subseteq \mathbb{N}$ *e para qualquer número natural* $n$ *, quando* $\{x \in \mathbb{N} | \ x < n\} \subseteq X$ *também* $n \in X$, *então* $X = \mathbb{N}$. *De novo tornando mais preciso:*

$$[X \subseteq \mathbb{N} \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}[\{x \in \mathbb{N} | \ x < n\} \subseteq X \Rightarrow n \in X]] \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{N}$$

A formulação 3 no teorema anterior costuma designar-se por *Princípio de Indução Completa* ou *Transfinita.*

**Teorema 1.0.7** $1$ *é o menor número natural.*

**Dem.** Provamos que vale

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq n \tag{1.3}$$

de duas maneiras.

**I. Utilizando a formulação 1.1.6.1**

Defina-se

$$X \ = \ \{n \in \mathbb{N} | \ n \geq 1\}$$

$1 \in X$ porque $1 \leq 1$. Por outro lado, se $n \in X$, por definição de $X$, $n \geq 1$ e $n + 1 \geq 1 + 1 > 1 + 0 = 1$, pela monotonia da soma e porque $1 > 0$ (teorema 1.0.3);

então, por transitividade de $<$, $n+1 \geq 1$ e, de novo por definição de $X$, $n+1 \in X$ e mostrámos que $n+1 \in X$ sempre que $n \in X$; assim, pelo Princípio de Indução (teorema 1.0.6), $X = \mathbb{N}$ ou seja vale (1.3) como queríamos provar.

**II. Utilizando a formulação 1.1.6.2**
Defina-se
$$P(n) \;:=\; 1 \leq n$$
Queremos mostrar que $P(n)$ vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
Como $1 \leq 1$ (pq $\leq$ é reflexiva), vale $P(1)$.
Suponha-se que vale $P(n)$ isto é que $1 \leq n$. Segue-se que $1+1 \leq n+1$ (por monotonia da soma); como já sabemos que $0 < 1$, podemos concluir
$$1 \;=\; 0+1 \;< 1+1 \;\leq\; n+1$$
e, portanto, que $1 < n+1$; em particular de $1 \leq n$ podemos deduzir $1 \leq n+1$, ou seja, de $P(n)$ conclui-se $P(n+1)$.
Pela segunda forma do Princípio de Indução, $P(n)$ vale para todo o $n \in \mathbb{N}$. E termina a primeira demonstração.

$\square$

> **Notação:** A expressão $\alpha := \beta$ significa que a expressão designada por $\alpha$ é definida pela designada por $\beta$.

Continuando a apresentar aplicações do Princípio de Indução:

**Teorema 1.0.8** *Se a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente então*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \;\leq\; f(n).$$

**Dem.** Vamos utilizar a formulação 1.1.6.3.
Seja
$$X \;:=\; \{n \in \mathbb{N}|\; n \leq f(n)\}.$$
Queremos mostrar que $X = \mathbb{N}$, para o que basta mostrar *para todos os $n \in \mathbb{N}$* a validade da implicação
$$\{x \in \mathbb{N}|\; x < n\} \subseteq X \quad \Rightarrow \quad n \in X. \tag{1.4}$$
Comecemos por ver o que se passa se $n = 1$.
Acontece que $\{x \in \mathbb{N}|\; x < 1\} = \emptyset \subseteq X$, portanto deveremos verificar se $1 \in X$.
Ora, todos os $f(n)$ são números naturais, porque $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e, como vimos acima, todos os números naturais são maiores ou iguais a 1; assim $1 \leq f(1)$ i. e. $1 \in X$ e a condição (1.4) vale para 1.
Tome-se agora $n$ arbitrário e suponha-se que $\{x \in \mathbb{N}|\; x < n\} \subseteq X$; como $n-1 < n$, também $n-1 \in X$, portanto $n-1 \leq f(n-1)$; mas então
$$n \;=\; (n-1)+1 \;\leq\; f(n-1)+1 \;<\; f(n)+1$$

porque $f$ também é estritamente crescente; segue-se que $n < f(n) + 1$. Acontece que

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \quad [x < y + 1 \;\Leftrightarrow\; x \leq y] \tag{1.5}$$

portanto $n \leq f(n)$ e $n \in X$ como pretendíamos concluir. A propriedade (1.4) fica demonstrada e pela formulação 3. do Princípio de Indução, $X = \mathbb{N}$. □

### 1.0.6 Exercícios

1. Demonstre a proposição (1.5).

**Exemplo 1.0.1** *A fórmula*

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) \;=\; n^2 \tag{1.6}$$

*vale para todos os números naturais $n$.*

**Dem.** Vamos utilizar a formulação 1 no Teorema 1.1.6. Seja

$$X := \{n \in \mathbb{N}|\ \sum_{i=1}^{n}(2i-1) \;=\; n^2\}.$$

$1 \in X$ porque $1^2 = 1 = 2 \times 1 - 1 = \sum_{i=1}^{1}(2i-1)$; suponha-se que $x \in X$: tem-se

$$\sum_{i=1}^{x+1}(2i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{x}(2i-1) + (2(x+1)-1) \;=\; x^2 + (2x+1) \;=\; (x+1)^2,$$

portanto também $x + 1 \in X$. Pela primeira forma do Princípio de Indução $X = \mathbb{N}$ e a fórmula (1.6) vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Defina-se **secção inicial** de $\mathbb{N}$, como sendo um conjunto $I_n$ dado por

$$I_n \;:=\; \{k \in \mathbb{N}|\ 1 \leq k \leq n\} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

**Teorema 1.0.9 (Princípio de Boa Ordenação)** *Qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem primeiro — ou menor — elemento.*

**Dem.** Suponha-se que

$$\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Vimos acima 1 é o menor elemento do próprio $\mathbb{N}$, portanto o caso $X = \mathbb{N}$ está tratado; em geral, se $1 \in X$, então $1 = \min X$ e nada mais há a provar; assim basta tratar o caso

$$1 \;\notin\; X \subset \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Vamos ver que

$$C := \{n \in \mathbb{N}|\ I_n \subseteq \mathbb{N}\backslash X\} \quad \textit{tem} \quad \textit{maior elemento}. \tag{1.9}$$

Interessa ter presente

$$C \subseteq \mathbb{N} \backslash X \subset \mathbb{N}, \tag{1.10}$$

o que acontece já que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n \in I_n$ e $X \neq \emptyset$ por (1.7).
$1 \in C$ porque $1 \in \mathbb{N}\backslash X$ — (1.8) — e $I_1 = \{1\}$; se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in C$ quando $n \in C$, pelo Princípio de Indução, pode concluir-se $C = \mathbb{N}$, o que não é o caso pois, por (1.10), $C \subset \mathbb{N}$. Segue-se que

*para algum* $m \in \mathbb{N}$ $\quad m \in C$, *mas* $m+1 \notin C$.

Tome-se então $m \in C$ tal que $m+1 \notin C$; podemos retirar duas conclusões, a saber:

- $m+1 \in X$ pois, caso contrário ter-se-ia $m+1 \in C$, já que $I_{m+1} = I_m \cup \{m+1\}$;
- todos os elementos de $X$ são maiores que $m$, pois se $n \leq m$, então $n \notin X$, por definição de $C$.

Como não há números naturais entre $m$ e $m+1$ (releia-se (1.5)), concluimos que os elementos de $X$ são todos maiores ou iguais a $m+1$ i.e. $m+1 = \min X$ e $X$ tem mínimo. $\square$

O conjunto dos números **inteiros**, designado por $\mathbb{Z}$, é a união de $\mathbb{N}$ com o conjunto dos simétricos dos números naturais e com $\{0\}$ i.e.

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n |\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.11}$$

O conjunto dos números **racionais**, designado por $\mathbb{Q}$, é a reunião de $\{0\}$ com o conjunto dos quocientes de números inteiros, mais precisamente:

$$\mathbb{Q} \quad = \quad \left\{ \frac{m}{n} |\ m \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{1.12}$$

**Teorema 1.0.10** *O conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado para as operações de soma e produto e para a relação $<$ restringidas de $\mathbb{R}$.*

Por outras palavras (de facto muito reduzidas, mas suficientes): *a soma e o produto (bem como a diferença e o quociente) de números racionais é um número racional.*
A existência de números reais não racionais, ou seja, números **irracionais** será discutida mais adiante na página 101.

### 1.0.7 Subconjuntos de $\mathbb{R}$ I

Dados números reais $a$ e $b$, os conjuntos definidos de seguida chamam-se **intervalos** de **extremos** $a$ e $b$:

$$[a, b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\} \tag{1.13}$$

$$]a, b[ \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\} \tag{1.14}$$

$$[a, b[ \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b\} \tag{1.15}$$

$$]a, b] \quad := \quad \{x \in \mathbb{R} |\ a < x \leq b\} \tag{1.16}$$

Em (1.13) o intervalo diz-se **fechado**, em (1.14) diz-se **aberto**, em (1.15) diz-se **semi-fechado** á esquerda ou **semi-aberto** à direita, em (1.16) diz-se **semi-fechado** à direita ou **semi-aberto** à esquerda.

Parece-nos claro que, *se $b < a$, todos os intervalos acima são vazios, i.e. são o conjunto vazio; se $b = a$, o primeiro (em (1.13))é o conjunto singular $\{a\}$ e todos os outros são vazios; se $a < b$ nenhum dos intervalos é vazio nem singular*, pois $\frac{a+b}{2}$ e $\frac{3a+b}{4}$ estão em todos eles e são distintos.

Todos os intervalos acima são **limitados**; mas definem-se ainda intervalos **ilimitados**, a saber: considerando que $a \in \mathbb{R}$ põe-se

$$[a, +\infty[ \;:=\; \{x \in \mathbb{R} |\ a \le x\} \tag{1.17}$$
$$]-\infty, a] \;:=\; \{x \in \mathbb{R} |\ a \ge x\} \tag{1.18}$$
$$]a, +\infty[ \;:=\; \{x \in \mathbb{R} |\ a < x\} \tag{1.19}$$
$$]-\infty, a[ \;:=\; \{x \in \mathbb{R} |\ a > x\} \tag{1.20}$$

Em (1.17) e (1.18) os intervalos dizem-se também **fechados**, nos outros dois casos dizem-se **abertos**.

*Para além do intervalo $]-\infty, +\infty[$, que designa o próprio conjunto $\mathbb{R}$, não há mais intervalos que os já definidos.*

**Definição 1.0.1** *Designemos por $C$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e seja $m$ um número real.*

1. *$m$ é um* **majorante** *de $C$ se*
$$\forall x \in C \ x \le m.$$
*$C$ diz-se* **majorado** *ou* **limitado superiormente** *se tem um majorante.*

2. *$m$ é um* **minorante** *de $C$ se*
$$\forall x \in C \ x \ge m.$$
*$C$ diz-se* **minorado** *ou* **limitado inferiormente** *se tem um minorante.*

3. *$C$ diz-se* **limitado** *se for majorado e minorado, caso contrário diz-se* **ilimitado**.

**Teorema 1.0.11** *Seja $C$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

1. *As condições seguintes são equivalentes*
   (a) *$C$ é majorado*
   (b) $\exists a \in \mathbb{R} \quad C \subseteq\ ]-\infty, a]$
   (c) $\exists a \in \mathbb{R} \quad C \subseteq\ ]-\infty, a[$

2. *As condições seguintes são equivalentes*

   (a) *C é minorado*
   (b) $\exists a \in \mathbb{R} \quad C \subseteq [a, +\infty[$
   (c) $\exists a \in \mathbb{R} \quad C \subseteq ]a, +\infty[$

3. *As condições seguintes são equivalentes*
   (a) *C é limitado*
   (b) *Existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que C está contido em algum intervalo de extremos a e b.*
   (c) *C está contido em algum intervalo limitado.*

4. *Todos os intervalos limitados são conjuntos limitados.*

Formas muito úteis de decidir se um conjunto é ou não limitado descrevem-se no teorema seguinte.

**Teorema 1.0.12** *Seja C um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. As condições seguintes são equivalentes.*

1. *C é limitado*
2. $\exists m \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in C \quad |x| < m$
3. $\exists m \in \mathbb{R}^+ \quad C \subseteq ]-m, m[$
4. $\exists m \in \mathbb{R}^+ \; \forall x \in C \quad |x| \leq m$
5. $\exists m \in \mathbb{R}^+ \quad C \subseteq [-m, m]$

**Dem.** $(1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2)$ Como $C$ é limitado por hipótese, podemos tomar $a, b \in \mathbb{R}$ tais que
$$\forall x \in C \quad a \leq x \leq b.$$
Sejam $m_1$ o máximo dos dois valores $|a|, |b|$, i.e. $m_1 = \text{máx}\{|a|, |b|\}$, e $m = m_1 + 1$. Repare-se que $m > 0$. Como $b \leq |b| \leq m_1 < m$, concluímos
$$\forall x \in C \quad a \leq x < m.$$
Por outro lado $-|a| \leq a$; seja $m_2$ o mínimo dos dois valores $-|a|, -|b|$; é fácil verificar que $m_2 = -m_1$ e que
$$-m = -(m_1 + 1) = -m_1 - 1 = m_2 - 1 < m_2 \leq a.$$
Segue-se que
$$\forall x \in C \quad -m < x < m.$$
isto é, vale 3. Mas esta mesma expressão é equivalente a
$$\forall x \in C \quad |x| < m,$$

portanto, em particular $(3 \Rightarrow 2)$. É claro que se $x < y$ também $x \leq y$, pelo que $(2 \Rightarrow 4)$. Mas $|x| \leq m$ é equivalente a $x \in [-m, m]$, portanto 4 e 5 são equivalentes, em particular $(4 \Rightarrow 5)$. Acontece que $[-m, m] \subseteq ]-(m+1), m+1[$ e portanto $(5 \Rightarrow 1)$.
Provámos a seguinte cadeia de implicações

$$1 \;\Rightarrow\; 3 \;\Rightarrow\; 2 \;\Rightarrow\; 4 \;\Rightarrow\; 5 \;\Rightarrow\; 1.$$

Podemos concluir que todas as condições são equivalentes. □

**Teorema 1.0.13** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}$.*

1. *Se $B$ é limitado e $A \subseteq B$, também $A$ é limitado.*
2. *Se $A$ e $B$ são limitados.*
   (a) *O conjunto definido por $A + B := \{a + b |\ a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$ é limitado.*
   (b) *O conjunto definido por $A \cdot B := \{ab |\ a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$ é limitado.*
   (c) *O conjunto definido por $A - B := \{a - b |\ a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$ é limitado.*
   (d) *Para cada $c \in \mathbb{R}$, o conjunto definido por $cA := \{ca |\ a \in A\}$ é limitado.*

Certos majorantes e minorantes são especiais:

**Definição 1.0.2** *Seja $C$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

1. *Se $C$ é limitado superiormente, o* **supremo** *de $C$ é o menor majorante de $C$ e designa-se* $\sup C$. *Se o supremo de $C$ é elemento de $C$, diz-se* **máximo** *de $C$ e designa-se por* $\text{máx}C$.
2. *Se $C$ é limitado inferiormente, o* **ínfimo** *de $C$ é o maior minorante de $C$ e designa-se* $\inf C$. *Se o ínfimo de $C$ é elemento de $C$ diz-se* **mínimo** *de $C$ e designa-se por* $\min C$.

O máximo ou o mínimo de um conjunto podem não existir mesmo quando existem respectivamente o supremo ou o ínfimo; no entanto se existirem, são respectivamente o maior ou o menor elemento dele.

**Lema 1.0.1** *Todo o conjunto finito e não vazio de números reais tem máximo e mínimo, sendo em particular limitado.*

**Dem.** Deixa-se como exercício de aplicação do Princípio de Indução ao número de elementos do conjunto. □

O supremo e o ínfimo gozam das propriedades da maior importância que se reformulam de seguida.

**Teorema 1.0.14** *Sejam $C$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $m$ um número real.*

1. *As seguintes condições são equivalentes*
   (a) $m = \sup C$
   (b) *$m$ é majorante de $C$ e*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists c \in C \quad m - \varepsilon < c \leq m. \tag{1.21}$$

2. *As seguintes condições são equivalentes*
   (a) $m = \inf C$
   (b) *$m$ é minorante de $C$ e*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists c \in C \quad m \leq c < m + \varepsilon. \tag{1.22}$$

**Dem.** Demonstramos apenas a segunda parte. Uma demonstração da primeira pode fazer-se a partir desta trocando respectivamente inf por sup, minorante por majorante, maior por menor, $<$ por $>$, $\geq$ por $\leq$ e $+$ por $-$.
Suponhamos então que vale *2.(a)* i.e. $m = \inf C$. Queremos concluir que vale a condição *2.(b)*. Por definição $m$ é já minorante de $C$, de facto o **maior** minorante; portanto se $\varepsilon > 0$, como $m < m + \varepsilon$, $m + \varepsilon$ **não é** minorante de $C$; daí existe algum elemento $c$ de $C$ tal que $c < m + \varepsilon$ e, como $m$ minora $C$, também $m \leq c$ e concluímos $m \leq c < m + \varepsilon$.
Finalmente suponhamos que vale *2.(b)*. Como, por hipótese, $m$ já é minorante de $C$, resta-nos provar que é o maior. Suponhamos que $m'$ é um minorante de $C$ e utilizemos o teorema 1.0.5 para mostrar que $m' \leq m$: para qualquer $\varepsilon > 0$, por hipótese, existe $c \in C$ tal que $c < m + \varepsilon$; como $m'$ é minorante de $C$ tem-se $m' \leq c < m + \varepsilon$; por transitividade de $<$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad m' < m + \varepsilon,$$

portanto, pelo teorema 1.0.5, $m' \leq m$. □

### 1.0.8 Exercícios

**Observação:** *Nos exercícios que se seguem as propriedades enunciadas do ínfimo ou do supremo pressupõem a existência de cada um deles.*

1. Mostre que, para quaisquer números reais $a,\ b$,
   (a) $\frac{(a+b)-|a-b|}{2} = \min\{a,\ b\}$
   (b) $\frac{(a+b)+|a-b|}{2} = \text{máx}\{a,\ b\}$

2. Seja $A$ um conjunto não vazio de números reais e $-A := \{-x : x \in A\}$. Verifique que:
   (a) $b$ é majorante de $A \Leftrightarrow -b$ é minorante de $-A$
   (b) $b$ é supremo de $A \Leftrightarrow -b$ é ínfimo de $-A$

(c) $b$ é máximo de $A \Leftrightarrow -b$ é mínimo de $-A$

3. Determine, caso seja possível, o ínfimo, mínimo, supremo e máximo de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \mid x \mid < 2\}$
   (b) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < \mid 1 - x \mid \leq 2\}$
   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$
   (d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\}$
   (e) $\{x \in \mathbb{R} : x < \mid x \mid\}$
   (f) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \;\; x = \frac{1-n}{n}\}$
   (g) $\mathbb{Q} \cap \,]-1, 2]$
   (h) $\{\frac{k}{2^n},\; k \in \mathbb{Z},\; n \in \mathbb{N}\} \,\cap\, [1, 3[$

4. Indique se são majorados, minorados ou limitados os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \mid x - 3 \mid = 2 \mid x \mid\} \qquad\qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x^{-1}} < \frac{x^{-1}}{x}\right\}$$

   Indique ainda, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um desses conjuntos.

5. Sejam $A = \{-3, -2\} \cup (\mathbb{Q} \cap [0, 1]\,)$ e $B = ]-4, 2] \cup ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$. Indique, caso existam, os supremos e os ínfimos dos conjuntos $A$, $B$, $A \cup B$ e $A \cap B$.

6. Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios e limitados de números reais tais que $A \subseteq B$. Prove que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

7. Suponha que $A$ e $B$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$ não vazios e limitados. Prove que:
   (a) $A + B$ é limitado
   (b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   (c) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

8. Suponha que $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$. Dado $c \in \mathbb{R}$, seja $cA := \{c\, a : a \in A\}$.
   (a) Prove que, quando $c \neq 0$, $cA$ é limitado se e apenas se $A$ é limitado.
   (b) Sendo $c > 0$, prove que:
      i. $\sup(cA) = c \sup A$
      ii. $\inf(cA) = c \inf A$
   (c) Enuncie e demonstre resultados análogos aos da alínea anterior para o caso $c < 0$.
   (d) Mostre que a afirmação em (a) não é verdadeira se $c = 0$.

9. $A$ e $B$ designam duas partes não vazias e majoradas de $\mathbb{R}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:
   (a) É condição necessária para $A \subseteq B$ que $\sup A \leq \sup B$
   (b) É condição suficiente para $A \subseteq B$ que $\sup A \leq \sup B$
   (c) $\sup(A \cup B) = \sup A + \sup B$
   (d) $\sup(A \cup B) = \text{máx}\, \{\sup A, \sup B\}$

(e) $\sup(A \cap B) = \min\{\sup A, \sup B\}$

10. Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios e limitados de números reais tais que $B \subseteq A$. Suponha que, para cada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x \le y$. Prove que nestas condições se tem $\sup B = \sup A$.

11. Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios e limitados de números reais tais que para todo o $x \in A$ e todo o $y \in B$ se tem $x \le y$. Prove que $\sup A \le \inf B$. Prove ainda que $\sup A = \inf B$ se e só se para todo o $\varepsilon > 0$ existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

12. Sejam $c$ um número real positivo e $A$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, satisfazendo a seguinte condição:

$$x, y \in A \Rightarrow | x - y | < c$$

(a) Mostre que $\sup A - \inf A \le c$.

(b) Mostre que em $(a)$ pode acontecer $(\sup A - \inf A) = c$.

### 1.0.9 Subconjuntos de $\mathbb{R}$ II. Completude

**Axioma de Completude**

**AC** *Todo o subconjunto não vazio e majorado de $\mathbb{R}$ tem supremo.*

Por verificar este axioma , diz-se que $\mathbb{R}$ é um **corpo ordenado completo**. O termo "completo"pode também ter outro significado explicitado no teorema 4.2.7.

**Teorema 1.0.15** *O conjunto dos números naturais não é limitado.*

**Dem.** Já vimos que $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente (teorema 1.0.7). Não sendo vazio — pois $1 \in \mathbb{N}$ — se fosse limitado teria supremo, de acordo com o Axioma de Completude. Suponhamos então que $\mathbb{N}$ é limitado e digamos que $\sup \mathbb{N} = s \in \mathbb{R}$; $s$ não é concerteza máximo, porque, $s < s + 1 \in \mathbb{N}$; pelo teorema 9.13, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s - \frac{1}{2} < m < s$; mas então também $s - \frac{1}{2} < m < m + 1 < s$ e pode concluir-se $1 = (m+1) - m < s - (s - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ou $1 < \frac{1}{2}$, o que não é verdade. Assim $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, logo também não é limitado. □

Uma forma equivalente deste teorema (1.0.15) é

**Teorema 1.0.16 (Propriedade Arquimediana)** *O corpo $\mathbb{R}$ é* **arquimediano** *i.e.*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad b < na \tag{1.23}$$

**Dem.** Suponhamos que $a, b \in \mathbb{R}$ e que $0 < a < b$; existe $n \in \mathbb{N}$ verificando $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$, pelo teorema anterior (4.2.4); mas então $b < na$, porque $a, b > 0$ e o produto é semi-monótono. □

Outra formulação do Axioma de Completude é o seguinte teorema:

Pode garantir-se a existência de números irracionais utilizando o Axioma de Completude. Um exemplo clássico é

$$s \ := \ \sup\{x \in \mathbb{R}|\ x^2 < 2\}.$$

Este supremo existe porque o conjunto em questão, chamemos-lhe $R$, não é vazio — $1 \in R$ — e é concerteza majorado, por exemplo por 4 (ou mesmo por 2, ou por $1,5$...). Sendo fácil provar que $s^2 = 2$ e que $0 < s$ isto é que $s = \sqrt{2}$, e provando-se de seguida que 2 não tem raiz quadrada em $\mathbb{Q}$, conclui-se que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e obtém-se uma demonstração de que existem números irracionais.
Na verdade, há infinitos números irracionais e poderíamos já provar, utilizando o facto de $\sqrt{2}$ ser irracional, mas não só, o seguinte:

**Teorema 1.0.17 (de Densidade)** *Estritamente entre quaisquer dois números reais distintos existem um número racional e um número irracional.*

**Dem.** Suponha-se que $a, b \in \mathbb{R}$ e que $a < b$; tome-se $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$; o que é possível porque $\frac{1}{n}$ é um infinitésimo.

1. Se $a \in \mathbb{Q}$, então
   (a) $a < a + \frac{1}{n} < a + (b - a) < b \quad$ e $\quad a + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$
   (b) $a < a + \frac{1}{n}\sqrt{2} < a + (b - a) < b \quad$ e $\quad a + \frac{1}{n}\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Se $a \notin \mathbb{Q}$, então
   (a) $a < a + \frac{1}{n} < a + (b - a) < b \quad$ e $\quad a + \frac{1}{n} \notin \mathbb{Q}$.
   (b) Suponha-se que $0 < a$ e seja
   $$k := \min\{m \in \mathbb{N}|\ na \leq m \cdot 1 = m\};$$
   tal $k$ existe pela propriedade arquimediana e por $\mathbb{N}$ ser bem ordenado. Tem-se
   $$\frac{k-1}{n} < \ a \ \leq \frac{k}{n} \ < \ a + \frac{1}{n} \ < \ b \quad \& \quad \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}.$$
   (c) Se $a \leq 0$, aplique-se o que acabámos de ver tomando $-b$ em vez de $a$ e $-a$ em vez de $b$; $\quad -\frac{k}{n}$ é o número racional pretendido. □

## 1.1 Continuidade e diferenciabilidade

Sejam $a$ e $b$ números reais tais que $a < b$ e $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ uma função (real de variável real); suponha-se ainda que $\beta \in \mathbb{R}$.

**Definição 1.1.1** *Para $c \in [a, b]$,*

$$\begin{aligned} \beta \ &:= \ \textbf{limite de } f(x) \textbf{ quando } x \textbf{ tende para } c \\ &:= \ \lim_{x \to c} f(x) \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in ]a,b[ \quad [0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \beta| < \varepsilon].$$

*Se $c \in ]a,b[$,*

$$\begin{array}{ccc} & f \quad diz-se & \textbf{contínua}\ em\ c \\ & quando & \\ \lim_{x\to c} f(x) & = & f(c) \\ & ou\ seja & \end{array}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in ]a,b[ \quad [|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon]$$

*$f$ diz-se **contínua** se for contínua em todos os elementos do seu domínio.*

**Observação 1** Para harmonizarmos conceitos, recorde-se que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se diz contínua, quando é contínua em algum interval aberto que contém $[a,b]$, isto é, quando existe um intervalo $]\alpha,\beta[$, tal que $[a,b] \subset ]\alpha,\beta[$, e uma função contínua $\tilde{f} : ]\alpha,\beta[ \to \mathbb{R}$ cuja restrição $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ é precisamente $f$.

**Definição 1.1.2** *Para $c \in ]a,b[$,*

$$\begin{array}{ccc} f\ diz-se\ \textbf{diferenciável} & em\ c & com\,\textbf{derivada}\ f'(c) \\ & se & \\ f'(c) & := & \lim_{x\to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \end{array}$$

*$f$ diz-se **diferenciável** se for **diferenciável** em todos os elementos do seu domínio.*

**Teorema 1.1.1** *Se uma função é diferenciável (resp. em algum ponto do seu domínio) é contínua (resp. nesse mesmo ponto).*

**Teorema 1.1.2** *A função $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ é* **diferenciável** *em $c \in ]a,b[$ se e apenas se existirem um número real $f'(c)$ e funções $\varepsilon : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ e $\epsilon : ]a-c, b-c[ \to \mathbb{R}$ tais que*

$$\forall x \in ]a,b[ \quad f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \varepsilon(x)(x - c) \quad \& \quad \lim_{x\to c} \varepsilon(x) = 0 \tag{1.24}$$

*ou*

$$\forall h \in ]a-c, b-c[ \quad f(c+h) = f(c) + f'(c)h + \epsilon(h)h \quad \& \quad \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0 \tag{1.25}$$

*i.e.*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x - c)}{x - c} \ = \ 0. \tag{1.26}$$

*ou ainda*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} \ = \ 0. \tag{1.27}$$

**Dem.** A equivalência entre as condições (1.24) e (1.26) resulta de se poder tomar

$$\varepsilon(x) \ := \ \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x-c} \ = \ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c);$$

observe-se então que

$$\lim_{x\to c} \varepsilon(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

e aqui estão três formas de definir de $f'(c)$. Analogamente, a equivalência entre as condições (1.25) e (1.27) resulta de se poder tomar

$$\epsilon(h) \ := \ \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} \ = \ \frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c),$$

observando-se de seguida que

$$\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(c+h)-f(c)}{h} - f'(c)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

que são mais três formas de definir $f'$. □

O teorema seguinte costuma designar-se por teorema **de Lagrange**, **dos Acréscimos Finitos**, **da Média** ou **do Valor Médio**.

**Teorema 1.1.3** *Se a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e é diferenciável em $]a,b[$, então existe $c \in ]a,b[$ tal que*

$$f'(c) \ = \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1.28}$$

**Dem.** Considere-se a função auxiliar $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) \ = [f(x) - f(a)](b-a) - [f(b) - f(a)](x-a.)$$

$h$ é contínua e é diferenciável em $]a,b[$ e ainda $h(a) = h(b) = 0$; pelo teorema de Rolle, existe $c \in ]a,b[$ tal que $h'(c) = 0$; como assim

$$0 \ = \ h'(c) \ = \ f'(c)(b-a) - [f(b) - f(a)],$$

o teorema fica demonstrado resolvendo a equação em ordem a $f'(c)$. □

**Teorema 1.1.4 (de Cauchy-l'Hôpital)** *Sejam $f, g$ funções reais de variável real diferenciáveis em algum intervalo $]a,b[$ e $c$ um elemento de $\in ]a,b[$ tal que*

$$\lim_{x\to c} f(x) \ = \ \lim_{x\to c} g(x) \ = \ 0$$

*ou tal que*

$$\lim_{x\to c} f(x) \ = \ \lim_{x\to c} g(x) \ = \ \infty.$$

*Tem-se*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

**Dem.** Vejamos o caso em que $L \in \mathbb{R}$, $f(c) = g(c) = 0$, $f$ e $g$ são de classe $C^1$ e $g'(c) \neq 0$, pelo que

$$L = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} \\
&= \lim_{x\to c} \frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}} \\
&= \frac{f'(c)}{g'(c)} \\
&= L.
\end{aligned}$$

Um estudo completo deste teorema pode encontrar-se em [2, Sec. 7.12 ff]. □

### 1.1.1 Exercícios

1. Mostre que, se $\lim_{x\to c} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \beta \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to c} g(x) = \beta - \alpha$.

2. Calcule os seguintes limites:
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\log x+1}{x}$.
   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^3}$.
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

3. Suponha que $f(x) := e^{x^2 - e^2} - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$
   (a) Mostre que 0, $e$ e $-e$ são *extremantes* locais de $f$, calcule os extremos locais de $f$ e classifique-os.
   (b) Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem quatro soluções simétricas duas a duas e designe-as por $\alpha,\ -\alpha,\ \beta,\ -\beta$, sendo $0 < \alpha < \beta$.
   (c) Qual o domínio da função $x \overset{g}{\mapsto} \log[f(x)]$?
   (d) Decida se o gráfico de $g$ tem ou não assímptotas (**OBS:** Repare que $g$ é par).

4. Suponha que $f(x) := e^{\frac{x}{2}-1}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Mostre que a recta $r$ de equação $y = \frac{x}{2}$ é tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2, 1)$.
   (b) Determine a área da região plana limitada pelo gráfico de $f$, pela recta $r$ da alínea anterior e pelo eixo dos $yy$.

5. (a) Suponha que $f$ e $g$ são funções diferenciáveis no intervalo $I$ e que $f(x) > 0$ para todo o $x \in I$. Prove que se

$$h(x) \ = \ f(x)^{g(x)} \ := \ e^{g(x)log(f(x))},$$

então $h'(x) = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \log(f(x)) \cdot g'(x)$.

(b) Calcule $f'(x)$, sendo $f(x) = (x^2+1)^{2x-1}$.

6. Calcule

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 3^x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{3-x} log\ x)$

(c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^3 + 4x}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x^2 + x)^x$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{log\ (2-x)}$

(g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\ x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$

## 1.2 Integração

**Teorema 1.2.1 (Teorema Fundamental)** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, fixe-se $c \in [a,b]$ e defina-se $F(x) := \int_c^x f(t)dt \qquad (a \leq x \leq b)$. Nestas condições*

$$\forall x \in ]a,b[ \quad F'(x) \ = \ f(x) \tag{1.29}$$

**Dem.** Fixe-se $x \in ]a,b[$. Se $x,\ x+h \in ]a,b[$, temos

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \\ &= f(x(h)) \end{aligned}$$

para algum $x(h)$ entre $x$ e $x+h$ pelo teorema da Média 1.1.3. Vamos ver que

$$\lim_{h \to 0} f(x(h)) \ = \ f(x).$$

Tome-se $\varepsilon > 0$, como $f$ é contínua em $c$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|t-x| < \delta$ então $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$; mas então, se $|h| < \delta$, como $x(h)$ está entre $x$ e $x+h$, $|x(h) - x| < |h| \delta$ e daí $|f(x(h)) - f(x)| < \varepsilon$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ [|h| < \delta \Rightarrow \ |f(x(h)) - f(x)| < \varepsilon]$$

ou seja $\lim_{h \to 0} f(x(h)) \ = \ f(x)$. □

**Teorema 1.2.2 (Fórmula de Barrow)** *Se $F$ e $f$ são funções reais de variável real tais que $\forall x \in ]c,d[ \ F'(x) = f(x)$ e $f$ é contínua, então*

$$\forall a,b \in ]c,d[ \quad [a \leq b \ \Rightarrow \ \int_a^b f(x)dx \ = \ F(b) - F(a)]. \tag{1.30}$$

**Dem.** Defina-se

$$G(x) := \int_a^x f(t)dt \quad \& \quad H(x) := F(x) - G(x) \quad (x \in [a,b]).$$

Pelo teorema Fundamental,

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad (x \in ]a,b[),$$

portanto $H$ é constante, i.e., para certo $k \in \mathbb{R}$

$$H(x) = k \quad (x \in [a,b]);$$

ora $H(a) = F(a) - G(a) = F(a) - 0 = F(a)$ donde $k = F(a)$; mas então

$$H(x) = F(a) \quad (x \in [a,b])$$

e, em particular,

$$\int_a^b f(t)dt \;=\; G(b) \;=\; F(b) - H(b) \;=\; F(b) - F(a).$$

□

**Teorema 1.2.3 (Integração por Partes)** *Dadas funções diferenciáveis $f, g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ com derivadas contínuas, tem-se*

$$\forall \alpha, \beta \in ]a,b[ \quad \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx \;=\; f(x)g(x)]_\alpha^\beta \;-\; \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx. \tag{1.31}$$

**Dem.** Basta observar que $(fg)' = f'g + fg'$ ou, o que é o mesmo, $fg' = (fg)' - f'g$ e portanto, pela fórmula de Barrow,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \;=\; \int_a^b (fg)'(x) - f'(x)g(x)dx \;=\; f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

□

Redesignando

$$F(b) - F(a) \;:=\; F(x)]_a^b\,, \tag{1.32}$$

a equação em (1.30) também costuma escrever-se

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(x)]_a^b\,. \tag{1.33}$$

**Teorema 1.2.4 (de Mudança de Variáveis)** *Se $[a,b] \subseteq ]\alpha,\beta[ \subseteq \mathbb{R}$, a função $\phi : ]\alpha,\beta[ \to [c,d]$ é diferenciável, $\phi'$ é contínua e $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ é contínua, então*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx \;=\; \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt. \tag{1.34}$$

**Dem.** Seja
$$F(x) \ := \ \int_a^x f(t)dt \qquad (t \in [a,b]).$$
Pelo teorema da Fundamental, $F'(x) = f(x)$, portanto
$$\frac{d}{dt}(F \circ \phi)(t) \ = f(\phi(t))\phi'(t)$$
e, pela Fórmula de Barrow,
$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt \ = \ (F\circ\phi)(b) - (F\circ\phi)(a) \ = \ F(\phi(b)) - F(\phi(a)) \ = \ \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$
□

**Teorema 1.2.5 (Teoremas da Média para integrais)**

1. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é contínua então*
$$\exists \theta \in \,]a,b[ \quad \int_a^b f(x)dx \ = \ f(\theta)(b-a). \tag{1.35}$$
2. *Se* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas e* $g$ *tem sinal constante, então*
$$\exists \theta \in \,]a,b[ \quad \int_a^b f(x)g(x)dx \ = \ f(\theta)\int_a^b g(x)dx \tag{1.36}$$

**Dem.** Demonstramos apenas *1.*
Sejam $m := \min f([a,b]) := f(\alpha)$ e $M := \text{máx} f([a,b]) := f(\beta)$.
Se $m = M$, $f$ é constante e
$$\forall \theta \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)dx \ = \ M(b-a) \ = \ f(\theta)(b-a).$$
Se $m < M$, observe-se que
$$m(b-a) \ \le \ \int_a^b f(x)dx \ \le \ M(b-a),$$
o que também pode ser visto como
$$f(\alpha) \ \le \ \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \ \le \ f(\beta).$$
De facto os $\le$ são $<$, porque
$$m(b-a) = I(f,\{a,b\};a,b) < \int_a^b f(x)dx < S(f,\{a,b\};a,b)(b-a) = M(b-a)$$
e podemos utilizar agora o teorema do valor intermédio para garantir a existência de $\theta \in ]a,b[$ (de facto entre $\alpha$ e $\beta$) tal que
$$f(\theta) \ = \ \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$
□

### 1.2.1 Exercícios

1. Determine a área das regiões planas delimitadas pelos gráficos das funções dadas por

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$, $g(x) = x^2 - 4$

   (b) $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \frac{e^2-e^3}{4}(x-1) + e^2$ (Sug.: Avalie as funções em 1 e em $-3$).

   (c) $f(x) = log(x)$, $g(x) = \frac{log(n^{2n})}{n^2-1}(x-n) + log(n)$ (avalie as funções em $n$ e em $1/n$).

2. Calcule $\int_0^1 F(x)\, dx$, onde $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}\, dt$
   (Sugestão: integre por partes)

3. Calcule $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2} dt\right) \quad (x \in \mathbb{R})$

# Capítulo 2

# O Teorema da Função Inversa

## 2.1 Teoremas da Função Composta

**Teorema 2.1.1 (da Função Composta para funções contínuas)** *Sejam $f, g$ funções reais de variável real. Se $c \in \mathrm{dom}(f \circ g)$, $g$ é contínua em $c$ e $f$ é contínua em $g(c)$, então $f \circ g$ é contínua em $c$. De um modo geral, a composição de funções contínuas é uma função contínua.*

**Dem.** Basta tomar em conta a seguinte sequência de equações

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f \circ g)(x) &:= \lim_{x\to c}(f(g(x)) \\
&= f(\lim_{x\to c} g(x)) \quad (\textit{porque } f \textit{ é contínua em } \lim_{x\to c} g(x)) \\
&= f(g(c)) \quad (\textit{porque } g \textit{ é contínua em } c) \\
&:= (f \circ g)(c)).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.1.2 (da Função Composta para funções diferenciáveis; regra da Cadeia)** *Suponha-se que as funções $f : ]c, d[ \to \mathbb{R}$ e $g : ]a, b[ \to ]c, d[$ são diferenciáveis respectivamente em $g(x) \in ]c, d[$ e em $x \in ]a, b[$, então $f \circ g$ é diferenciável em $x$ e*

$$(f \circ g)'(x) \;=\; f'(g(x))g'(x). \tag{2.1}$$

**Dem.** Vamos utilizar o teorema 1.1.2. Comecemos por escever

$$f(g(x) + k) \;=\; f(g(x)) + f'(g(x))k + \epsilon_f(k)k \quad \& \quad \lim_{k\to 0} \epsilon_f(k) = 0 \tag{2.2}$$

$$g(x + h) \;=\; g(x) + g'(x)h + \epsilon_g(h)h \quad \& \quad \lim_{h\to 0} \epsilon_g(h) = 0. \tag{2.3}$$

Considere-se agora a sequência de equações seguinte:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x + h) &:= f(g(x + h)) \\
&= f(g(x) + g'(x)h + \epsilon_g(h)h) \\
&= f(g(x) + (g'(x) + \epsilon_g(h))h),
\end{aligned}$$

tendo-se
$$\lim_{h\to 0}\epsilon_g(h)=0; \tag{2.4}$$
tomando
$$k(h):=(g'(x)+\epsilon_g(h))h,$$
observamos que, nestas condições
$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+h) &= f(g(x))+f'(g(x))k(h)+\epsilon_f(k(h))k(h)\\ &= f(g(x))+f'(g(x))g'(x)h+f'(g(x))\epsilon_g(h)h+\epsilon_f(k(h))(g'(x)+\epsilon_g(h))h\\ &= f(g(x))+f'(g(x))g'(x)h+[f'(g(x))\epsilon_g(h)+\epsilon_f(k(h))(g'(x)+\epsilon_g(h))]h.\end{aligned}$$
Ora
$$\lim_{h\to 0}k(h) \;=\; 0, \tag{2.5}$$
Consequentemente, pela condição (2.2),
$$\lim_{h\to 0}\epsilon_f(k(h))=0; \tag{2.6}$$
ora, pela condição (2.3),
$$\lim_{h\to 0}f'(g(x))\epsilon_g(h) \;=\; f'g(x)\cdot 0 \;=\; 0$$
e, retomando a condição (2.6),
$$\lim_{h\to 0}[f'(g(x))\epsilon_g(h)+\epsilon_f(k(h))(g'(x)+\epsilon_g(h))] \;=\; 0+0(g'(x)+0) \;=\; 0;$$
fazendo
$$\delta(h) \;:=\; f'(g(x))\epsilon_g(h)+\epsilon_f(k(h))(g'(x)+\epsilon_g(h)),$$
temos finalmente
$$(f\circ g)(x+h) \;=\; (f\circ g)(x)+f'(g(x))g'(x)h+\delta(h)h \quad \& \quad \lim_{h\to 0}\delta(h)=0,$$
o que nos diz $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$, pelo teorema 1.1.2. □

## 2.2 O Teorema da Função Inversa

**Teorema 2.2.1** ***(da Função Inversa para funções contínuas)*** *Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais tais que $a<b$ e $c<d$ e $f:]a,b[\to]c,d[$ uma função contínua bijectiva.*

1. *$f$ é estritamente monótona*
2. *$f^{-1}$ é da mesma natureza que $f$, i.e., $f$ e $f^{-1}$ são ambas crescentes ou ambas decrescentes*

3. *$f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$ é contínua*

**Teorema 2.2.2** ***(da Função Inversa para funções diferenciáveis)*** *Sejam $a$, $b$, $c$ e $d$ números reais tais que $a<b$ e $c<d$ e $f:]a,b[\to]c,d[$ uma função bijectiva diferenciável que verifica o seguinte*

$$f' \quad \text{é} \quad \text{contínua} \tag{2.7}$$
$$\forall t \in ]a,b[ \qquad f'(t) \neq 0. \tag{2.8}$$

*Nestas condições, $f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$ é também diferenciável e*

$$\forall x \in ]c,d[ \quad (f^{-1})'(x) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \tag{2.9}$$

Demonstrações completas destes teoremas encontram-se em [13, pág. 309]; de momento pretendemos apenas ter presente uma justificação, importante em si mesma, de alguns cálculos que apresentaremos mais adiante. Fazemos no entanto notar o seguinte:

**Observação 2** (ao teorema 2.2.1)

1. O facto de $\mathbb{R}$ ser corpo ordenado é fundamental para o enunciado: sem ordem não se pode falar de monotonia.

2. A continuidade de $f^{-1}$ está muito relacionada com o facto de todos as sucessões numéricas limitadas terem subsucessões convergentes.

**Observação 3** (ao teorema 2.2.2)

1. A injectividade de $f$ é na verdade consequência de $f'$ ser contínua (condição (2.7)) e não ter zeros (condição (2.8)), tendo portanto sinal constante (pelo Teorema do Valor Intermédio), isto é, $f$ é *estritamente* crescente, se $f'$ for sempre positiva, ou *estritamente* decrescente, se for $f'$ for sempre negativa; assim o teorema mantém-se válido substituindo *bijectiva* por *sobrejectiva*.

2. Admitindo demonstrado que $f'$ é necessariamente diferenciável, a Regra da Cadeia (teorema 2.1.2), permite obter a fórmula (2.9): como $f$ e $f'$ ficam diferenciáveis por hipótese, então a composição $f\circ f^{-1}$ resulta também diferenciável; mas
$$x \;=\; (f\circ f^{-1})(x) \qquad (x\in]c,d[)$$
e portanto
$$1 \;=\; (f\circ f^{-1})'(x) \;=\; f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) \qquad (x\in]c,d[)$$
obtendo-se (2.8) por resolução em ordem a $(f^{-1})'(x)$.

### 2.2.1 Exercícios

1. As funções $x \mapsto \sqrt[n]{x} : \mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}^+ \quad (n \in \mathbb{N})$ são as inversas das potências de expoente $n$ restringidas a $\mathbb{R}^+$. Verifique que

$$\frac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

2. Admita que as funções trigonométricas elementares estão bem definidas. As funções arcsen, arcos, arctan são respectivamente as funções inversas de $\operatorname{sen} : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to ]-1, 1[$, $\cos : ]0, \pi[ \to ]-1, 1[$, $\tan : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \to \mathbb{R}$. Verifique que

$$\operatorname{arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \operatorname{arcos}'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

# Capítulo 3

# Teorema de Taylor

## 3.1 Fórmula de Taylor

As derivadas de ordem $n \quad (n \in \mathbb{N})$, designadas $f^{(n)}$, de uma função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ definem-se do seguinte modo

$$f^{(0)} = f \tag{3.1}$$
$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \tag{3.2}$$

Uma função com $k$ derivadas contínuas diz-se **de classe** $C^k$. Quando uma função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ tem $n$ derivadas, para cada $c \in ]a, b[$, chama-se **polinómio de Taylor de grau $n$ em torno de $c$** a

$$T_c^n f(x) := f(c) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(c)(x-c)^i.$$

O **resto de ordem** $n$ em torno de $c$ da fórmula de Taylor será designado por $R_c^n f(x)$ e define-se por:

$$R_c^n f(x) := f(x) - T_c^n f(x). \tag{3.3}$$

**Teorema 3.1.1 (de Taylor)** *Suponha-se que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a $(n+1)$-ésima derivada da função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ é contínua e que $c \in ]a, b[$. Vale a seguinte fórmula*

$$\forall x \in ]a, b[ \quad f(x) = f(c) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(c)(x-c)^i + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \tag{3.4}$$

**Dem.** É vantajoso considerar aqui que $0 \in \mathbb{N}$. Comecemos então com $n = 0$. Nesta caso a fórmula toma a forma

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t) dt$$

que é válida por ser uma instância da fórmula de Barrow. Suponhamos agora que a fórmula de Taylor vale para $n \in \mathbb{N}$ e que $f$ é de classe $C^{(n+1)+1}$. Tem-se

$$f(x) = f(c) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(c)(x-c)^i + \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \tag{3.5}$$

Como

$$\frac{d}{dt}\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \;=\; -(x-t)^n,$$

pelo teorema de Integração por Partes, tem-se também

$$\begin{aligned}
\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \;&=\; \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_c^x \\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\int_c^x f^{(n+1)+1}(t)(x-t)^{n+1}dt \\
&=\; \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(c)(x-c)^{n+1} \\
&\qquad + \frac{1}{n+1}\int_c^x f^{(n+1)+1}(t)(x-t)^{n+1}dt
\end{aligned}$$

Substituindo adequadamente em (3.5), obtém-se

$$f(x) \;=\; f(c) + \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(c)(x-c)^i + \frac{1}{(n+1)!}\int_c^x f^{((n+1)+1)}(t)(x-t)^{n+1}dt.$$

Pelo teorema de Indução, a fórmula de Taylor vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$ $\square$

**Corolário 3.1.1** *Nas condições da hipótese do teorema anterior (3.1.1), o resto de ordem $n$ pode tomar três formas:*

$$\begin{aligned}
R_c^n f(x) \;&=\; \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\
&=\; \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(c+s(x-c))(x-c)^{n+1}ds \quad (\textbf{\textit{integral}}) \\
R_c^n f(x) \;&=\; \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\theta)(x-\theta)^n(x-c),\ \textit{para algum } \theta \textit{ entre } c \textit{ e } x \quad (\textit{de } \textbf{\textit{Cauchy}}) \\
R_c^n f(x) \;&=\; \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)(x-c)^{n+1},\ \textit{para algum } \theta \textit{ entre } c \textit{ e } x \quad (\textit{de } \textbf{\textit{Lagrange}})
\end{aligned}$$

**Dem.** O resto integral é a forma que utilizámos na demonstração do próprio teorema; a segunda equação resulta do teorema de substituição quando se faz $t := c + s(x-c)$.

O resto de Cauchy resulta de uma simples aplicação do primeiro teorema da Média para integrais (equação (1.35)) ao resto integral, considerando que os extremos do intervalo de integração são precisamente $c$ e $x$ e que $t \mapsto f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ é contínua: a sua avaliação em algum $\theta$ entre $c$ e $x$ é precisamente $f^{(n+1)}(\theta)(x-\theta)^n$ .

O resto de Lagrange obtém-se por aplicação do segundo teorema da média (equação (1.36)) também ao resto integral, observando que $t \mapsto (x-t)^n$ não muda de sinal nem em $[c,x]$, se $c \leq x$, nem em $[x,c]$, se $x \leq c$, portanto, existe $\theta$ entre $c$ e $x$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= f^{(n+1)}(\theta)\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta)(x-c)^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Note-se que o resto de Lagrange vale ainda só sob a hipótese de existência de $f^{n+1}$; na verdade, é por vezes útil conhecer uma outra forma integral do resto que, tal como o resto integral, vale mesmo quando $f^{(n+1)}$ é integrável, mas não necessariamente contínua:

**Corolário 3.1.2** *Nas condições da hipótese do teorema anterior (3.1.1), o resto* `de ordem` *$n+1$ pode ainda tomar a forma seguinte*

$$\begin{aligned}R_c^{n+1}f(x) &= \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n\left[f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(c)\right]dt \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-s)^n\left[f^{(n+1)}(c+s(x-c))-f^{(n+1)}(c)\right](x-c)^{n+1}ds\end{aligned}$$

**Dem.** Para demonstrar a primeira forma basta ter em conta a primeira forma do resto integral e observar que $f^{(n+1)}(c)$ é constante relativamente à variável de integração; para a segunda forma use-se de novo o teorema de mudança de variáveis com $t = c + s(x - c)$ $(s \in [0,1])$ . □

**Corolário 3.1.3** *Se $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ é de classe $C^n$, o resto* `de ordem` *$n$ pode tomar a forma seguinte*

$$\begin{aligned}R_c^n f(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_c^x (x-t)^{(n-1)}\left[f^{(n)}(t)-f^{(n)}(c)\right]dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-s)^{(n-1)}\left[f^{(n)}(c+s(x-c))-f^{(n)}(c)\right](x-c)^n ds\end{aligned}$$

**Dem.** De facto este é um corolário do corolário anterior (corolário 3.1.2) que se obtém substituindo $n+1$ adequadamente por $n$, i.e., substituindo $n$ por $n-1$. □

O resto de Taylor é um instrumento muito importante na avaliação de erros de aproximação:

**Teorema 3.1.2** *Suponha-se que para algum $n \in \mathbb{N}$ a $(n+1)-$ésima derivada da função $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ é contínua e que $c \in ]a,b[$. Nestas condições existe $\delta > 0$ tal que, se $x$ é valor aproximado de $c$ com erro inferior a $\delta$, então $T_c^n f(x)$ aproxima*

*$f(x)$ com erro inferior a $(x-c)^n$; mais precisamente: se $[c-\delta, c+\delta] \subseteq ]a,b[$ e $M = \text{máx}\{|f^{(n+1)}(t)| : \ |t-c| \leq \delta\}$, então*

$$\forall x \in [c-\delta, c+\delta] \quad |R_c^n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-c|^{n+1}. \tag{3.6}$$

**Dem.** Nas condições da hipótese podemos utilizar o resto de Lagrange (teorema 3.1.1) tendo-se, para algum $\theta$ para algum $\theta$ entre $c$ e $x$,

$$\begin{aligned} |R_c^n f(x)| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)(x-c)^{n+1} \right|, \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left| f^{(n+1)}(\theta) \right| \left| (x-c)^{n+1} \right|, \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} M |x-c|^{n+1} \end{aligned}$$

□

O polinómio de Taylor é uma forma extremamente eficaz de aproximação da função:

**Teorema 3.1.3** *Suponha-se que, para algum $n \in \mathbb{N}$, a $n$-ésima derivada da função $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ é contínua e que $c \in ]a,b[$. Então*

$$\lim_{x \to c} \frac{R_c^n f(x)}{(x-c)^n} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - T_c^n f(x)}{(x-c)^n} = 0. \tag{3.7}$$

*De facto, $T_c^n f(x)$ é o único polinómio $P(x)$ de grau $n$ em potências de $x-c$ tal que*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - P(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

**Dem.** Comecemos por demonstrar (3.7). Recorde-se que $f(x) - T_c^n f(x) = R_c^n f(x)$.

**(Primeira demonstração)**

De acordo com o teorema 3.1.2, valem as desigualdades seguintes, quando $[c-\delta, c+\delta] \subseteq ]a,b[$ e $M = \text{máx}\{|f^{(n+1)}(t)| : \ |t-c| \leq \delta\}$,

$$0 \leq |R_c^n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M |x-c|^{n+1}$$

portanto

$$0 \leq \frac{|R_c^n f(x)|}{|x-c|^n} \leq \frac{1}{(n+1)!} M |x-c|;$$

como $\lim_{x \to c} |x-c| = 0$, também $\lim_{x \to c} \frac{1}{(n+1)!} M |x-c| = 0$ e daí $\lim_{x \to c} \frac{|R_c^n f(x)|}{|x-c|^n} = 0$, como pretendíamos demonstrar.

**(Segunda demonstração)** Neste caso interessa evidenciar a afirmação constante da equação (3.8).

Diferencie-se para verificar que, se $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}T_c^n f(x) &= \frac{d}{dx}\left(f(c) + f'(c)(x-c) + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(c)(x-c)^i\right) \\
&= f'(c) + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{(i-1)!}f^{(i)}(c)(x-c)^{i-1} \\
&= f'(c) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}(f')^{(i)}(c)(x-c)^i \\
&= T_c^n f'(x);
\end{aligned}$$

resumindo

$$\frac{d}{dx}T_c^n f(x) \;=\; T_c^{n-1} f'(x) \quad (n \geq 1). \tag{3.8}$$

De seguida verifiquemos que o teorema vale para $n = 1$: por (1.26)

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x) - T_c^1 f(x)}{(x-c)} \;=\; \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x-c} \;=\; 0.$$

Suponhamos que o teorema vale para $n \in \mathbb{N}$, i.e., a hipótese de indução pode formular-se

*seja qual for a função $F$ de classe $C^n$*, $\lim_{x\to c}\frac{F(x)-T_c^n F(x)}{(x-c)^n} = 0$

Suponha-se que $f$ é de classe $C^{n+1}$ e observe-se que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x) - T_c^{n+1} f(x)}{(x-c)^{n+1}}$$

é uma indeterminação à qual se pode aplicar a regra de Cauchy-l'Hôpital vindo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}\frac{f(x) - T_c^{n+1} f(x)}{(x-c)^{n+1}} &= \lim_{x\to c}\frac{f'(x) - T_c^n f'(x)}{(n+1)(x-c)^n} \quad (\textit{por } (3.8)) \\
&= \frac{1}{n+1}\lim_{x\to c}\frac{f'(x) - T_c^n f'(x)}{(x-c)^n} \\
&= \frac{1}{n+1}\cdot 0 \;=\; 0
\end{aligned}$$

valendo a penúltima equação por hipótese de indução aplicada a $f'$. Pelo Princípio de Indução, vale (3.7) para qualquer $n \in \mathbb{N}$, como queríamos provar.

A demonstração da unicidade será matéria de exercício (3.1.1.7). □

### 3.1.1 Exercícios

1. Indique o polinómio de Taylor, $T_a^3 f(x)$, de grau 3 para $f$ em $a$ para as seguintes funções.
   (a) $f(x) = \text{arctan} x; \quad a = 0.$
   (b) $f(x) = \text{arcsen} x; \quad a = 0.$
   (c) $f(x) = \text{arcos} x; \quad a = \frac{1}{2}.$
   (d) $f(x) = \log x; \quad a = 1.$
   (e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 1;$
   i. $a = 0$ ii. $a = 1$
   (f) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1; \quad a = 0;$
   (g) $f(x) = x\text{cos}(x-1); \quad a = 1.$
   (h) $f(x) = \log \frac{x}{x+1} + \log 2; \quad a = 1.$

2. Para cada umas das seguintes funções indique o polinómio de Taylor de grau $n$ para $f$ em $a$, $T_a^n f(x)$, e determine a forma integral, a forma de Cauchy e a forma de Lagrange para o resto $R_a^n f(x)$.
   (a) $f(x) = \text{sen} x; \quad a = 0.$
   (b) $f(x) = \text{cos} x; \quad a = 0.$
   (c) $f(x) = \exp x; \quad a = 0.$
   (d) $f(x) = \log x; \quad a = 1.$
   (e) $f(x) = \text{arctan} x; \quad a = 0.$
   **Sugestão**: Comece por mostrar que
   $$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$
   (f) $f(x) = \begin{cases} \exp^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

3. Utilizando os resultados convenientes do exercício anterior calcule os valores indicados com erro inferior a $10^{-4}$.
   (a) $\sin 2$ .
   (b) $\sin 1$ .
   (c) $\text{arctan} 1.$
   (d) $e$ .

4. Determine o polinómio de Taylor de grau 2, $T_4^2 f(x)$, da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Mostre que o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $T_4^2 f(x)$ é inferior a $\frac{1}{2^4}$, para todo $x \in ]3, 5[$.

5. Determine os polinómios de Taylor (de grau indicado e em torno do ponto indicado) para as seguintes funções:
   (a) $f(x) = \log x$, grau $n$, em 2
   (b) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grau 4, em 0

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, grau $n$ em 1.

(d) $f(x) = x^r \quad (r \in \mathbb{Q})$, grau $n$, em $a > 0$.

6. Suponha que $f(x) := \sqrt{x}$ para qualquer $x > 0$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor $T_2^3 f(x)$.

   (b) Indique um majorante do erro da aproximação de $\sqrt{2,1}$ por $T_2^2 f(2,1)$.

7. Demonstre a segunda parte do teorema 3.1.3, por exemplo de acordo com o plano seguinte.

   (a) Duas funções $f$ e $g$ em dizem-se **iguais até à ordem** $n$ em $c$ se

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{(x-c)^n} \;=\; 0.$$

   Mostre que dois polinómios em $x - c$ de grau $\leq n$ que são iguais até à ordem $n$ em $c$, são de facto iguais.

   (b) Recorde o exercício 1.1.1.1, observe que, para qualquer função $P$,

$$\frac{f(x) - T_c^n f(x)}{(x-c)^n} \;=\; \frac{f(x) - P(x) + [P(x) - T_c^n f(x)]}{(x-c)^n}$$

   e conclua a demonstração do teorema 3.1.3.

8. Determine um polinómio de Taylor que lhe permita calcular $e^{10^{-71}}$ com erro inferior a $10^{-20}$.

9. Suponha que

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \& \quad \forall x \in ]-1, +\infty[ \quad f(x) := (1+x)^\alpha$$

   (a) Verifique que $T_0^3 f(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3$

   (b) Utilize $T_0^2 f$ para mostrar que $\sqrt[10]{1 + 10^{-9}} \approx 1 + \frac{1}{10^{10}} - \frac{45}{10^{21}}$ com erro inferior a $10^{-28}$.

   **OBS:** O número no $2^o$ membro é $1,000000000099999999955$ e a sua expressão $1,0000000000999999999955000000$ tem todas as casas decimais exactas.

10. Suponha que $f(x) := e^{x^2 - e^2} - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$. Considerando que $e \approx 2,7182$ com todas as casas decimais exactas, indique um majorante do erro que se comete ao aproximar $f(0)$, que vale exactamente $e^{-e^2}$, por $1 + \sum_{n=1}^{10} \frac{2,7^{2n}}{n!}$ (**OBS:** $2,7^{2n} = (2,7^2)^n$).

## 3.2 Funções Analíticas I

**Definição 3.2.1** *Seja $I$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ — possivelmente não limitado — e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^\infty$. Diz-se que $f$ é* ***analítica*** *em $I$ quando, para cada $c \in I$, existe um número real positivo $\varepsilon$ tal que*

$$]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subseteq I$$

$$e$$

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \ \forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \quad |R_c^n f(x)| \ < \ \delta$$

**Teorema 3.2.1** *Os polinómios e as funções* exp, sen, *e* cos *são analíticas em $\mathbb{R}$; a função $x \overset{f}{\mapsto} \log(1+x)$ é analítica em $]-1,1[$.*

**Dem. (Polinómios)** Suponha-se que, para certo $k \in \mathbb{N}$,

$$f(x) \ = \ a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x^i \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Seja qual for $c \in \mathbb{R}$, as derivadas $f^{(m)}(c)$ são nulas sempre que $m > k$, consequentemente, se $n \geq k$ o resto de Lagrange é nulo pois então, sejam quais forem $c$ e $x$, para algum $\theta$ entre $c$ e $x$, vem

$$R_c^n f(x) \ = \ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)(x-c)^{n+1} \ = \ \frac{1}{(n+1)!} \times 0 (x-c)^{n+1} \ = \ 0,$$

pelo que, seja qual for $\delta > 0$,

$$\forall n \geq k \qquad |R_c^n f(x)| \ < \ \delta$$

e podemos tomar qualquer $\varepsilon$ na definição de analiticidade para $f$. De facto

$$\forall n \geq k \qquad f(x) \ = \ T_c^n f(x).$$

**(exp)** Seja então

$$f(x) \ = \ e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Como todas as derivadas de $f$ são iguais a $f$, de novo utilizando a forma de Lagrange para o resto, sejam quais forem $c$ e $n$, e qualquer $x$ por exemplo em $]c-1, c+1[$, para algum $\theta$ entre $c$ e $x$, vem

$$|R_c^n f(x)| \ = \ \frac{e^\theta}{(n+1)!} |x-c|^{n+1} \ \leq \ \frac{e^{c+1}}{(n+1)!} 1^{n+1} \ = \ \frac{e^{c+1}}{(n+1)!} \ < \ \frac{e^{c+1}}{n};$$

mas então, dado $\delta$ positivo, tomando $p \geq \left[\frac{e^{c+1}}{\delta}\right]$,

$$\forall x \in ]c-1, c+1[ \quad \forall n \geq p \quad |R_c^n f(x)| < \delta$$

e podemos tomar $\varepsilon = 1$ na definição de analiticidade para exp.

**(sen** e **cos)** As sucessivas derivadas de sen ou de cos são da forma $\pm$cos ou $\pm$sen, pelo que $f^{(n+1)}(\theta)$, em quaisquer dos restos de Lagrange, tem sempre valor absoluto $\leq 1$; analogamente ao que fizemos para a função exponencial, podemos tomar $\varepsilon = 1$ e concluir que, se $p \geq \left[\frac{1}{\delta}\right]$

$$\forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \quad \forall n \geq p \quad |R_c^n f(x)| < \delta.$$

**(log)** Em primeiro lugar observe-se que

$$\forall s \neq -1 \; \forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{1+s} \;=\; 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i s^i \;+\; \frac{(-1)^{n+1} s^n}{1+s} \tag{3.9}$$

e que

$$\forall c, t \neq -1 \quad \frac{1}{1+t} \;=\; \frac{1}{1+c}\left(\frac{1}{1+\frac{t-c}{1+c}}\right). \tag{3.10}$$

Tenha-se também em conta que

$$\forall x \in ]-1, +\infty[ \quad \log(1+x) \;=\; \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \tag{3.11}$$

$$= \log(1+c) + \int_c^x \frac{1}{1+t} dt \tag{3.12}$$

e ainda que, se $f(x) = \log(1+x)$, então

$$f^{(i)}(c) \;=\; \frac{(-1)^{i-1}(i-1)!}{(1+c)^i} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

e portanto

$$\frac{f^{(i)}(c)}{i!} \;=\; \frac{(-1)^{i-1}}{i(1+c)^i} \qquad (i \in \mathbb{N}) \tag{3.13}$$

Para não sobrecarregar a argumentação, **suponha-se daqui em diante que**, para algum $\tau \in ]0, 1[$

$$-1 \;<\; c \qquad \& \qquad c - \tau|1+c| < x < c + \tau|1+c| \tag{3.14}$$

ou, de outro modo,

$$-1 \;<\; c \qquad \& \qquad \frac{|x-c|}{1+c} \;<\; \tau \;<\; 1. \tag{3.15}$$

Considere-se agora a sequência de equações seguinte

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= \log(1+c) + \frac{1}{1+c}\int_c^x \left(\frac{1}{1+\frac{t-c}{1+c}}\right) dt \qquad \text{(por (3.10) e (3.12))}\\
&= \log(1+c) + \frac{1}{1+c}\int_c^x \left[1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left(\frac{t-c}{1+c}\right)^i \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{t-c}{1+c}\right)^n}{1+\left(\frac{t-c}{1+c}\right)}\right] dt \qquad \text{(por (3.9))}\\
&= \log(1+c) + \frac{1}{1+c}\left[(x-c) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(1+c)^i}\int_c^x (t-c)^i dt \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+c)^{n-1}}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt\right]\\
&= \log(1+c) + \frac{1}{1+c}\left[(x-c) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+1)(1+c)^i}(x-c)^{i+1} \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{(-1)^{n}}{(1+c)^{n-1}}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt\right]\\
&= \log(1+c) + \frac{1}{1+c}(x-c) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{(i+1)(1+c)^{i+1}}(x-c)^{i+1}\\
&\qquad\qquad + \frac{(-1)^{n}}{(1+c)^{n}}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt\\
&= \log(1+c) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i(1+c)^i}(x-c)^i + \frac{(-1)^{n}}{(1+c)^{n}}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt
\end{aligned}
$$

Recordando a fórmula (3.13) concluímos

$$f(x) \;=\; log(1+x) \;=\; T_c^n f(x) + \frac{(-1)^n}{(1+c)^n}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt$$

ou seja, que

$$R_c^n f(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{(1+c)^n}\int_c^x \frac{(t-c)^n}{1+t}dt \;=\; (-1)^n\int_c^x \frac{\left(\frac{t-c}{1+c}\right)^n}{1+t}dt$$

Repare-se que assim, se $\theta$ está entre $c$ e $x$, então $|\theta - c| < |x-c| < \tau|1+c|$ por (3.15) ou seja

$$0 \;<\; \Theta \;:=\; \left|\frac{\theta-c}{1+c}\right| \;<\tau\;<\;1 \qquad (3.16)$$

e precisamente para algum $\theta$ nestas condições, pelo primeiro Teorema da Média (teorema 1.2.5), com $\Theta$ definido como em (3.16), e tomando

$$\varepsilon \ := \ \tau(1+c) \ > \ 0. \tag{3.17}$$

$$\forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \quad |R_c^n f(x)| \ = \ \frac{\Theta^n}{|1+\theta|} \ < \ \frac{\tau^n}{(1-\tau)(c+1)}. \tag{3.18}$$

Ora, dado $\delta > 0$, para ter $|R_c^n f(x)| < \delta$, para qualquer $x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ ($\varepsilon$ como em (3.17)) basta então ter

$$\frac{\tau^n}{(1-\tau)(c+1)} \ < \ \delta;$$

ainda por (3.16),

$$\frac{\tau^n}{(1-\tau)(c+1)} < \delta \ \Leftrightarrow \ \log\left(\frac{\tau^n}{(1-\tau)(c+1)}\right) < \log\delta \tag{3.19}$$

$$\Leftrightarrow \ n > \frac{\log[(1-\tau)(1+c)\delta]}{\log\tau}. \tag{3.20}$$

Em suma, se $\delta > 0$ e o número natural $p \geq \frac{\log[(1-\tau)(1+c)\delta]}{\log\tau}$, com $\varepsilon$ dado por (3.17),

$$\forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \ \forall n \geq p \quad |R_c^n f(x)| \ < \ \delta.$$

$\square$

**Teorema 3.2.2** ***(Princípio dos Zeros Isolados I)*** *Sejam $I$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Se, para algum $c \in I$, $f(c) = 0$ e todas as derivadas $f^{(n)}(c)$ $(n \geq 1)$ são nulas, então $f$ é identicamente nula em algum intervalo $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ com $\varepsilon > 0$ .*

**Dem.** Observe primeiro que todos os polinómios de Taylor centrados em $c$ são nulos, porque são nulos os seus coreficientes $\frac{f^{(i)}(c)}{i!}$, pelo que, para algum $\varepsilon > 0$

$$\forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x)| \ = \ |R_c^n f(x)|.$$

Como $f$ é analítica, esse $\varepsilon$ pode ser tomado de acordo com a definição 3.2.1; mas então

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \ \forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \quad |f(x)| \ < \ \delta$$

e daí

$$\forall \delta > 0 \ \forall x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \quad |f(x)| \ < \ \delta$$

ou seja $f(x) = 0$ para qualquer $x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. $\square$

`Há funções de classe` $C^\infty$ `que não são analíticas`, por exemplo a definida por

$$f(x) = \begin{cases} \exp^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(Recorde o exercício 3.1.1.2f)

De facto valem dois teoremas aparentemente mais fortes que este e equivalentes entre si, a saber:

**Teorema 3.2.3** ***(Princípio dos Zeros Isolados II)*** *Sejam $I$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Se, para algum $c \in I$, $f(c) = 0$ e todas as derivadas $f^{(n)}(c)$ $(n \geq 1)$ são nulas, então $f$ é identicamente nula em $I$.*

**Teorema 3.2.4** ***(Princípio do Prolongamento Analítico)*** *Duas funções analíticas num mesmo intervalo aberto que coincidam em algum sub-intervalo dele, coincidem de facto na totalidade do intervalo.*

Mas não faremos a sua demonstração.

### 3.2.1 Exercícios

1. Demonstre a condição (3.9).
2. Prove a desigualdade em (3.17).
3. Prove as equivalências (3.19) e (3.20).
4. Mostre que as funções definidas de seguida são analíticas (no seu domínio)
   (a) $f(x) := \frac{1}{1-x}$
   (b) $f(x) := \frac{x}{1-x}$
   (c) $f(x) := \frac{1}{1-x^2}$
   (d) $f(x) := \frac{1}{1-x^3}$
   (e) $f(x) := \frac{1+x+x^2}{(1+x-x^2-x^3)}$
   (f) $f(x) := \log x$
5. Mostre que se duas funções analíticas têm as mesmas derivadas de todas as ordens num certo ponto $c$ do seu domínio, então coincidem em algum intervalo não trivial centrado em $c$.

# Capítulo 4

# Sucessões e Séries numéricas

## 4.1 Sucessões numéricas

Uma **sucessão numérica** ou **sucessão de números reais** é uma aplicação $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a imagem $u(n)$ diz-se **termo de ordem** $n$ da sucessão e pode designar-se por $u_n$; se não há especificação do valor de $n$, $u_n$ também se diz **termo geral**.

> **Notação:** Uma sucessão $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode também ser designada $(u_n)$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente pelo seu termo geral.

### 4.1.1 Sucessões monótonas. Sucessões limitadas

Uma sucessão $u_n$ diz-se **crescente** se verificar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$$

ou seja se for uma função crescente; **estritamente crescente** se verificar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ < \ u_{n+1}$$

i.e. se for uma função estritamente crescente; **decrescente** se verificar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq u_{n+1}$$

ou seja se for uma função decrescente; **estritamente decrescente** se verificar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \ > \ u_{n+1}$$

i.e. se for uma função estritamente decrescente.

**Definição 4.1.1** *Uma sucessão diz-se* **monótona** *se for crescente ou se for decrescente; dir-se-á* **estritamente monótona** *se for estritamente crescente ou estritamente decrescente. Uma sucessão que não é monótona diz-se* **oscilante**.

**Exemplo 4.1.1**

1. As sucessões constantes i.e. sucessões definidas por $u_n = a$ $(n \in \mathbb{N})$, sendo $a$ um número real fixo, são monótonas, mas não estritamente.

2. As **progressões aritméticas** i.e. definidas por $u_n = a + (n-1)r$ $(n \in \mathbb{N})$, com $a$ e $r$ números reais fixos — dos quais $r$ se designa por **razão** — são monótonas; de facto estritamente monótonas se $r \neq 0$.

3. As **progressões geométricas** i.e. definidas por $u_n = a \cdot r^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, com $a$ e $r$ números reais fixos — dos quais $r$ se designa também por **razão** — são monótonas se $r \geq 0$; de facto estritamente monótonas se $1 \neq r > 0$ e o primeiro termo não é nulo.

4. As progressões geométricas de razão negativa e primeiro termo não nulo são oscilantes.

Há no entanto sucessões monótonas e sucessões oscilantes que não se classificam em quaisquer dos exemplos atrás descritos. Na verdade, qualquer sucessão "inclui" de certo modo uma sucessão monótona como vamos ver.

**Definição 4.1.2** *A sucessão $v_n$ diz-se* **subsucessão** *da sucessão $u_n$ se existir uma função* estritamente *crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \;=\; u_{k(n)}.$$

*Em termos mais formais: $v = u \circ k$.*

**Notação:** $u_{k_n} := u_{k(n)}$.

**Teorema 4.1.1** *Toda a sucessão de números reais tem uma subsucessão monótona.*

**Dem.** Tome-se uma sucessão $u_n$. Um termo $u_p$ dir-se-á um **cume** se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_p \geq u_n. \tag{4.1}$$

Se todos os termo da sucessão são cumes, esta é decrescente pois, em particular, vale sempre $u_n \geq u_{n+1}$.

*I. A partir de um certo índice $p$ não há cumes e a sucessão tem uma subsucessão crescente.*

Para tornar o discurso mais claro, defina-se

$$V_p \;:=\; \{n \in \mathbb{N} |\; n > p \quad \wedge \quad u_p < u_n\} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

$V_{p+1} \neq \emptyset$, porque $u_{p+1}$ não é cume por hipótese e $\min V_{p+1}$ existe pelo teorema 1.0.9. Defina-se

$$\begin{aligned} k(1) \;&:=\; p+1 \\ k(2) \;&:=\; \min V_{p+1} = V_{k(1)} \end{aligned}$$

e observe-se que

$$p \ < \ k(1) \ < \ k(2) \quad \wedge \quad u_{k(1)} \ < \ u_{k(2)} \tag{4.2}$$

por definição de $V_{k(1)}$. Mas então, por hipótese, $u_{k(2)}$ também não é cume e $V_{k(2)} \neq \emptyset$ pelo que $\min V_{k(2)}$ existe, podemos tomá-lo como $k(3)$ e

$$p \ < \ k(2) \ < \ k(3) \quad \wedge \quad u_{k(2)} \ < \ u_{k(3)}.$$

De um modo geral, com ajuda do Princípio de Indução, pode provar-se que

$$k(1) \ := \ p+1 \tag{4.3}$$
$$k(n+1) \ := \ \min V_{k(n)} \tag{4.4}$$

define uma função $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verificando

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [k(n) < k(n+1) \quad \wedge \quad V_{k(n)} \neq \emptyset \ \wedge \ u_{k(n)} < u_{k(n+1)}]. \tag{4.5}$$

$u_{k_n}$ é a subsucessão crescente procurada.

*II. A sucessão tem cumes de ordem arbitrariamente grande e a sucessão tem uma subsucessão decrescente.*
Suponha-se então que

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} \quad [n > p \quad \wedge \quad u_n \ \textit{é cume}].$$

Defina-se

$$C_p \ := \ \{n \in \mathbb{N} |\ n > p \quad \wedge \quad u_n \ \textit{é cume}\} \qquad (p \in \mathbb{N}).$$

Estes conjuntos não são vazios por hipótese e portanto todos têm mínimo. De modo análogo ao que vimos no caso anterior, podemos definir

$$k(1) \ := \ \min C_1$$
$$k(n+1) \ := \ \min C_{k(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Deixamos a cargo do leitor mostrar que $u_{k_n}$ é subsucessão decrescente.
Em qualquer caso $u_n$ tem subsucessões monótonas. □

**Definição 4.1.3** *Uma sucessão $u_n$ diz-se* **limitada** *se o conjunto dos seus termos $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ for limitado.*

Repare-se que o conjunto dos termos de uma sucessão crescente é limitado inferiormente e o conjunto dos termos de uma sucessão decrescente é limitado superiormente: $u_1$ é respectivamente mínimo ou máximo; assim, por exemplo, para que uma sucessão crescente seja limitada, basta verificar que o conjunto dos seus termos é limitado superiormente.

Experimentação com sucessões *crescente limitadas*, faz suspeitar que *os termos aproximam o supremo com erro cada vez menor, à medida que a ordem cresce*; em casos simples é mesmo possível demonstrar que a aproximação é tão boa quanto se queira. *Não descrevemos ainda propriedades de* $\mathbb{R}$ *suficientes para garantir que, de facto, tal não acontece por acaso.*

De momento enunciamos algumas propriedades das sucessões limitadas.

A **soma**, o **produto**, a **diferença** e o **quociente** de sucessões numéricas $u_n$ e $v_n$, definem-se respectivamente por:

$$\begin{aligned}(u+v)_n &:= u_n + v_n\\ (u\cdot v)_n &:= u_n v_n\\ (u-v)_n &:= u_n - v_n\\ \left(\frac{u}{v}\right)_n &:= \frac{u_n}{v_n}\end{aligned}$$

O próximo teorema é simples consequência do teorema 1.0.13

**Teorema 4.1.2** *A soma, o produto e a diferença de sucessões limitadas é uma sucessão limitada.*

O quociente de sucessões limitadas pode não ser limitado, mas o estudo *formalmente completo* de exemplos não pode ainda ser feito.

### 4.1.2 Exercícios

1. Estude quanto à monotonia as sucessões de termos gerais:
   (a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{2+n}$
   (b) $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$
   (c) $c_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n!}$
   (d) $d_n = 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}$

2. Verifique que cada uma das sucessões cujos termos de ordem $n$ se definem a seguir é limitada e determine o supremo e o ínfimo do conjunto dos seus termos.
   (a) $u_n := \frac{n+(-1)^n}{n}$
   (b) $u_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
   (c) As sucessões seguintes são definidas por recorrência:
      i. $u_1 = 0 \quad \wedge \quad u_2 = 1 \quad \wedge \quad u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
      ii. $v_1 = 1 \quad \wedge \quad v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $(x_n)$ a sucessão de números reais definida por

$$\begin{aligned}x_1 &= 1\\ x_{n+1} &= \frac{x_n + 2}{2} \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

   (a) Prove, que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < 2$$
   (b) Mostre que $(x_n)$ é uma sucessão crescente.

4. Considere a sucessão definida por

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_{n+1} &= \frac{x_n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   (a) Mostre que $(x_n)$ é decrescente e minorada.

   (b) Mostre que $x_n = \frac{1}{n!}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

5. Suponha que $(u_n)$ é uma sucessão numérica. Prove que

   (a) $u_n$ é progressão aritmética se e apenas se a diferença $u_{n+1} - u_n$ é constante.

   (b) $u_n$ é progressão geométrica não nula e de razão não nula se e apenas se o quociente $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ está definido para todo o $n \in \mathbb{N}$ e é constante.

6. Considere a sucessão $(u_n)$ definida por

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3}{5} \\ u_{n+1} &= \frac{u_n - 3}{6} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   e a sucessão $(v_n)$ tal que $v_n = 5u_n + 3 \quad (n \in \mathbb{N})$.

   (a) Mostre que $(v_n)$ é uma progressão geométrica.

   (b) Estude $(v_n)$ quanto à limitação.

   (c) Determine expressões para $(v_n)$ e $(u_n)$ em termos de $n$.

7. Seja $u_n$ uma sucessão numérica. Mostre que

   (a) $u_n$ é limitada se e apenas se todas as suas subsucessões são limitadas.

   (b) $u_n$ é monótona se e apenas se todas as suas subsucessões são monótonas.

## 4.2 Convergência

**Definição 4.2.1** *A sucessão $(u_n)$* **converge** *para o número real $a$ se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma ordem a partir da qual $u_n$ é valor aproximado de $a$ a menos de $\varepsilon$; mais formalmente*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} [n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| < \varepsilon]. \tag{4.6}$$

Se a sucessão $u_n$ converge para $a$, escreve-se $u_n \to a$ ou $a = \lim u_n$ ou $a = \lim_{n \to +\infty} u_n$. Uma sucessão diz-se **convergente** se tiver limite, caso contrário diz-se **divergente**.

**Teorema 4.2.1**

1. *Toda a sucessão constante é convergente; mais precisamente: se para algum* $a \in \mathbb{R}$ *e para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$, *então* $u_n \to a$.

2. *O valor absoluto de uma sucessão convergente é convergente; mais precisamente: se para algum* $a \in \mathbb{R}$, $u_n \to a$, *então* $|u_n| \to |a|$..

3. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

**Dem.** *1.* Se $u_n \equiv a \in \mathbb{R}$, então $u_n \to a$ porque $\forall n \in \mathbb{N} |u_n - a| = 0$ e $0 < \varepsilon$, seja qual for $\varepsilon > 0$. A definição vale para qualquer $\varepsilon > 0$ com $p = 1$.

*2.* Se $u_n \to a \in \mathbb{R}$, então $|u_n| \to |a|$ porque

$$||u_n| - |a|| \;\leq\; |u_n - a|.$$

Assim, se a partir de alguma ordem $|u_n - a| < \varepsilon$, a partir da *mesma* ordem $||u_n| - |a|| < \varepsilon$.

*3.* Este resultado depende ainda do lema 1.0.1. Vejamos então. Se $u_n \to a \in \mathbb{R}$, em particular se $\varepsilon = 1$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\{u_n |\; n \geq p\} \subseteq ]a-1, a+1[$. Se

$$m \;=\; \min\{u_n |\; n \leq p\} \quad \& \quad M \;=\; \text{máx}\{u_n |\; n \leq p\},$$

então, tomando

$$c \;=\; \min\{m,\; a-1\} \quad \& \quad d \;=\; \text{máx}\{M,\; a+1\}$$

vem

$$\{u_n |\; n \in \mathbb{N}\} \;\subseteq\; ]c, d[.$$

E $\{u_n |\; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. □

**Teorema 4.2.2** *Seja* $u_n$ *uma sucessão numérica convergente; digamos* $u_n \to a \in \mathbb{R}$. *Se* $a \neq 0$, *existe uma ordem a partir da qual o sinal de* $u_n$ *é o mesmo que o de* $a$ *i.e.*

$$u_n \to a < 0 \;\Rightarrow\; \exists p \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}\; [n \geq p \;\Rightarrow\; u_n < 0.] \tag{4.7}$$

$$u_n \to a > 0 \;\Rightarrow\; \exists p \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}\; [n \geq p \;\Rightarrow\; u_n > 0.] \tag{4.8}$$

**Dem.** Trataremos apenas o caso $a < 0$.

Suponha-se então que $u_n \to a < 0$ e tome-se $\varepsilon = |a|$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $p \leq n \in \mathbb{N}$, então $|u_n - a| < \varepsilon = |a|$; mas então

$$\forall n \in \mathbb{N}\; [n \geq p \;\Rightarrow\; u_n \;<\; a + |a| \;=\; a - a \;=\; 0],$$

portanto $u_n < 0$ quando $n \geq p$. □

**Teorema 4.2.3** ***(das sucessões encaixadas)*** *Se $u_n, v_n, w_n$ são sucessões numéricas tais que $u_n \to a \in \mathbb{R},\ v_n \to b \in \mathbb{R},\ w_n \to c \in \mathbb{R}$.*

1. $(\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \quad u_n \leq v_n) \quad \Rightarrow \quad a \leq b$
2. $[\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p\ (u_n \leq v_n \leq w_n) \ \ \& \ \ a = c] \quad \Rightarrow \quad a = b = c$

**Dem.** *(1)* Se $b < a$, pelo teorema 4.2.2, existiria uma ordem $q$, tal que, se $n \geq q$, então $v_n < u_n$; mas assim, se $n \geq \text{máx}\{p, q\}$ ter-se-ia simultaneamente $u_n \leq v_n < u_n$, o que é impossível, portanto $b \not< a$, ou seja $a \leq b$.

*(2)* Pela alínea anterior $a \leq b \leq c = a$, donde $a = b = c$. □

**Observação 4** Veja-se também o exercício 4.2.1.2

**Teorema 4.2.4** *A sucessão $(\frac{1}{n})$ tem limite zero.*

**Dem.** Como $\frac{1}{n} > 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (condições 1.3, 1.3 e **[O3.]**2), o que pretendemos provar pode escrever-se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}[n \geq p \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon]$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}[n \geq p \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n]$$

o que vale, por $\frac{1}{\varepsilon}$ não ser majorante de $\mathbb{N}$, pelo teorema anterior (1.0.15). Em suma verifica-se o que pretendemos provar. □

De um modo geral, uma sucessão que tenha limite zero diz-se um **infinitésimo**.

**Teorema 4.2.5** *Toda a sucessão numérica monótona e limitada é convergente.*

**Dem.** *(I. Sucessões crescentes.)* Seja $u_n$ uma sucessão crescente limitada. Como $\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ e é limitado, tem supremo digamos

$$s \ = \ \sup\{u_n |\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Vamos ver que

$$u_n \ \longrightarrow \ s. \tag{4.9}$$

Tome-se $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Pelo teorema 9.13, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq p$, então $s - \varepsilon < u_p \leq s$. Como $u_n$ é suposta crescente, $n \geq p \ \Rightarrow \ u_p \leq u_n$, pelo que

$$\forall n \geq p \quad s - \varepsilon < u_p \leq u_n \leq s,$$

portanto

$$\forall n \geq p \quad 0 \leq s - u_n \ < \varepsilon.$$

como também $s - u_n = |s - u_n|$ e $\varepsilon$ foi tomado arbitrariamente em $\mathbb{R}^+$,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \quad 0 \leq |s - u_n| \ < \varepsilon.$$

e fica provado (4.9).

*(II. Sucessões decrescentes.)* Poderia reformular-se a demonstração que acabámos de fazer trocando sup por inf, $>$ por $>$, $\leq$ por $\geq$, $+$ por $-$ e vice-versa, mas talvez seja melhor observar que: se $u_n$ é decrescente e limitada, então $-u_n$ é crescente e limitada, pelo que tem limite, digamos $a = \lim -u_n$; segue-se que $u_n \to -a$ (*(4)* no teorema 4.2.9). □

Associada a qualquer sucessão $u_n$ estão funções $f : [0, +\infty[\mathbb{R}$ tais que não só $f(n) = u_n \quad (n \in \mathbb{N})$ mas também $\lim u_n = a$ se e apenas se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Em certos casos uma associação é imediata — por exemplo se $u_n = \frac{1}{1+n}$, uma possibilidade é tomar $f(x) := \frac{1}{1+x}$ — noutros não tão imediata — como escolher $f$ se $u_n = (-1)^n \frac{1}{1+n}$? De um modo geral pode sempre definir-se $f$ do seguinte modo

$$f(x) \ := \begin{cases} u_n & x = n \\ (u_{n+1} - u_n)(x - n) + u_n & n < x < n + 1. \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad (4.10)$$

Veja-se a este propósito o exercício 4.2.1.1

**Teorema 4.2.6 (de Heine-Borel)** *Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes.*

**Dem.** Suponhamos que $u_n$ é sucessão limitada; pelo teorema 4.1.1, tem uma subsucessão monótona, que é também limitada e consequentemente convergente (teorema 4.2.5). □

**Definição 4.2.2** *Uma sucessão* $(u_n)$ *diz-se* **de Cauchy** *se verifica a condição seguinte*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}[m, n \geq p \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon] \qquad (4.11)$$

**Teorema 4.2.7** *Uma sucessão de números reais é convergente se e apenas se é de Cauchy.*

Também por esta razão se diz que $\mathbb{R}$ é completo.
Para demonstrarmos este teorema vamos utilizar os dois lemas seguintes 4.2.1 e 4.2.2

**Lema 4.2.1** *Toda a sucessão numérica de Cauchy é limitada.*

**Lema 4.2.2** *Se uma sucessão de Cauchy tem uma subsucessão convergente, então é ela mesma convergente.*

**Dem. (do lema 4.2.1)** Seja $u_n$ uma sucessão de Cauchy e tomemos $\varepsilon = 1$; pela definição 4.2.2, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p \quad |u_m - u_n| \ < \ \varepsilon,$$

em particular

$$\forall n \geq p \quad |u_p - u_n| \; < \; \varepsilon$$

ou ainda

$$\forall n \geq p \quad u_p - \varepsilon \; < \; u_n \; < \; u_p + \varepsilon; \tag{4.12}$$

seja agora

$$M \; := \; \text{máx}\{u_n | \; 1 \leq n < p\} \qquad \& \qquad \mu \; := \; \min\{u_n | \; 1 \leq n < p\}.$$

Seja qual for $n \in \mathbb{N}$, ou $n < p$, e nesse caso, por (4.12), $\mu \leq u_n \leq M$, ou $p \leq n$, e nesse caso $u_p - \varepsilon \; < \; u_n \; < \; u_p + \varepsilon$; mas então

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \min\{m, \; u_p - \varepsilon\} \; \leq \; u_n \; \leq \; \text{máx}\{M, \; u_p + \varepsilon\}$$

e portanto $u_n$ é limitada. □

**Dem. (do lema 4.2.2)** Seja $u_n$ uma sucessão de Cauchy e suponha-se que a subsucessão $u_{k_n}$ é convergente, digamos que

$$u_{k_n} \; \rightarrow \; a \in \mathbb{R}.$$

Vamos ver que

$$u_n \; \rightarrow \; a. \tag{4.13}$$

Tome-se então $\varepsilon > 0$ como $u_{k_n} \rightarrow a$, existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq p_1 \quad |u_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.14}$$

Como $u_n$ é de Cauchy, existe uma ordem $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p_2 \quad |u_m - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.15}$$

Suponha-se então que

$$n \; \geq \; p := \text{máx}\{p_1, p_2\},$$

por um lado, por (4.14),

$$n \; \geq p_1 \quad \& \quad |u_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por outro lado, pelo teorema 1.0.8,

$$n \leq k_n \qquad \& \qquad k_n, n \geq p \geq p_2, \quad \text{donde} \quad |u_n - u_{k_n}| \; < \frac{\varepsilon}{2}$$

e segue-se que

$$\forall n \geq p \quad |u_n - a| \; \leq \; |u_n - u_{k_n}| + |u_{k_n} - a| \; < \; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A condição (4.13) fica provada. □

Passemos então a demonstrar teorema 4.2.7

**Dem. (do teorema 4.2.7)** Comecemos por ver que *toda a sucessão convergente é de Cauchy*. Suponhamos que $u_n \to a$ e seja $\varepsilon > 0$ qualquer; tome-se $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq p \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2};$$

assim

$$m, n \geq p \quad \Rightarrow \quad \left[|u_m - u_n| \ \leq \ |u_m - a| + |a - u_n| \ < \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right]$$

e, como $\varepsilon$ foi tomado arbitrariamente em $]0, +\infty[$, $u_n$ é de Cauchy.

Vamos agora ver que *toda sucessão de Cauchy é convergente* Suponhamos que $u_n$ é de Cauchy. Pelo lema 4.2.1, $u_n$ é limitada; pelo teorema 4.1.1, $u_n$ tem uma subsucessão monótona que é também limitada e consequentemente convergente (teorema 4.2.5); mas então pelo lema 4.2.2, $u_n$ converge. □

**Teorema 4.2.8**

1. *A soma, a diferença e o produto de sucessões convergentes é convergente;*
2. *O quociente de sucessões convergentes* em que o denominador tem limite não nulo *é convergente.*

Para enunciarmos e demonstrarmos uma forma muito mais precisa deste teorema convém ter presente o teorema 4.2.2.

**Teorema 4.2.9** *Sejam $u_n$ e $v_n$ sucessões numéricas convergentes; digamos $u_n \to a \in \mathbb{R}$ e $v_n \to b \in \mathbb{R}$.*

1. $(u + v)_n \to a + b$
2. $(u - v)_n \to a - b$
3. $(uv)_n \to ab$
4. *Se* $c \in \mathbb{R}$, $\lim cu_n = ca$
5. *Se* $b \neq 0$, *então* $\left(\frac{u}{v}\right)_n \to \frac{a}{b}$

**Teorema 4.2.10** *A função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $c \in ]a, b[$ se e só se para qualquer sucessão $x_n$ de termos em $]a, b[$, quando $x_n \to c$, $f(x_n) \to f(c)$.*

**Dem.** Comecemos por supor que $c \in ]a, b[$, que $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ é contínua, que $x_n \in ]a, b[$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e que $x_n \to c$. Tome-se $\varepsilon > 0$ e um $\delta$ correspondente de modo a que

$$\forall x \in ]a, b[ \quad |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon. \tag{4.16}$$

Como $x_n \to c$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq p \quad |x_n - c| < \delta,$$

mas então, por (4.16),

$$\forall n \geq p \quad |f(x_n) - f(c)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \quad |f(x_n) - f(c)| < \varepsilon,$$

e $f(x_n) \to f(c)$, como pretendíamos mostrar.

Suponhamos agora que $c \in ]a,b[$, que para qualquer sucessão $x_n$ de termos em $]a,b[$, quando $x_n \to c$, $f(x_n) \to f(c)$, mas que $f$ não é contínua em $c$. Tem-se então, para certo $\varepsilon > 0$

$$\forall \delta > 0 \ \exists x(\delta) \in ]a,b[ \quad [|x(\delta) - c| < \delta \ \& \ |f(x(\delta)) - f(c)| \geq \varepsilon]\,,$$

em particular

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x\left(\frac{1}{n}\right) \in ]a,b[ \quad \left[\left|x\left(\frac{1}{n}\right) - c\right| < \frac{1}{n} \quad \& \quad \left|f\left(x\left(\frac{1}{n}\right)\right) - f(c)\right| \geq \varepsilon\right]; \tag{4.17}$$

mas assim, definindo

$$x_n \ := \ x\left(\frac{1}{n}\right),$$

tem-se que $x_n \to c$ porque $|x_n - c| < \frac{1}{n}$ e $f(x_n) \not\to f(c)$, por (4.17), o que contradiz a suposição inicial de que $f(x_n)$ teria limite $f(c)$; portanto $f$ tem de ser contínua em c. □

### 4.2.1 Exercícios

1. (a) Mostre que a função definida em (4.10) verifica $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ se e apenas se $u_n \to a$, seja qual for $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$, então $f(n) \to a$.

   (c) Dê exemplo de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que não existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, mas $f(n) \to 0$.

2. Prove o seguinte **Teorema:**

   *Se $u_n, v_n, w_n$ são sucessões numéricas tais que*

   $$u_n, \ w_n \to a \in \mathbb{R} \quad \& \quad [\exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \quad u_n \leq v_n \leq w_n]\,,$$

   *então $v_n \to a$.*

### 4.2.2 Sucessões não limitadas

Uma sucessão ilimitada não pode ser convergente (teorema 4.2.1), mas pode mesmo assim ter comportamentos regulares que passamos a descrever:

**Definição 4.2.3** *Uma sucessão numérica $u_n$ diz-se*

1. *um* **infinitamente grande positivo** *se verificar*

$$\forall M > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p\ u_n > M$$

*e nota-se $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$;*

2. *um* **infinitamente grande negativo** *se verificar*

$$\forall M < 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p\ u_n < M$$

*e nota-se $u_n \to -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$;*

3. *um* **infinitamente grande** *se verificar*

$$\forall M > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p\ |u_n| > M.$$

*e nota-se $u_n \to \infty$ ou $\lim u_n = \infty$.*

E têm lugar os resultados seguintes:

**Teorema 4.2.11** *Sejam $u_n$ e $v_n$ sucessões de números reais tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq p \Rightarrow u_n \leq v_n].$$

1. *Se $u_n$ é infinitamente grande positivo, o mesmo acontece com $v_n$.*

2. *Se $v_n$ é infinitamente grande negativo, o mesmo acontece com $u_n$.*

**Dem.** Como *a sucessão simétrica de um infinitamente grande positivo é um infinitamente grande negativo*, basta demonstrar *2.* Suponhamos então que, para certo $p \in \mathbb{N}$ se $n \geq p$, então $u_n \leq v_n$ e que $v_n$ é infinitamente grande negativo.

Seja $M$ um número negativo qualquer. seja $q$ uma ordem tal que $n \geq q \Rightarrow v_n < M$; se $n \geq \text{máx}\{p,\ q\}$, então $u_n \leq v_n < M$ e em particular $n \geq \text{máx}\{p,\ q\} \Rightarrow u_n < M$. Como $M$ foi tomado arbitrariamente, $u_n$ é infinitamente grande negativo. □

E ainda, designando $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ a sucessão inversa da sucessão $u_n$:

**Teorema 4.2.12** *A sucessão inversa de um infinitamente grande* de termos não nulos *é um infinitésimo e a sucessão inversa de um infinitésimo* de termos não nulos *é um infinitamente grande.*

**Dem.** Basta observar que, em $\mathbb{R}$, $0 < a < b$ sse $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Em face desta observação espera-se que o leitor termine. □

Um infinitamente grande da maior importância

**Teorema 4.2.13** *Se $c \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, então $(c^n)$ é um infinitamente grande positivo.*

**Dem.** Suponha-se que $c > 1$ e ponha-se $c = 1 + t$, pelo que $t = c - 1 > 0$. Segue-se

$$c^n \;=\; (1+t)^n \;=\; 1 + nt + \sum_{i=2}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i \;>\; 1 + nt.$$

Donde $c^n > 1 + nt$ e, pelo teorema 4.2.11, $c^n$ é infinitamente grande positivo. □

Segue-se um infinitésimo também particularmente importante:

**Teorema 4.2.14** *Se $c \in \mathbb{R}$ e $|c| < 1$, então $(c^n)$ é um infinitésimo.*

**Dem.** Se $|c| = 0$, então $c = 0$ e $c^n \equiv 0 \to 0$.

Se $1 > |c| > 0$ então $\frac{1}{|c|} > 1$; como $\frac{1}{|c|^n} = \left(\frac{1}{|c|}\right)^n$, pelo teorema 4.2.13, $\frac{1}{|c|^n}$ é infinitamente grande positivo; mas então, pelo teorema 4.2.12, $|c|^n \to 0$, i.e. $c^n \to 0$.

□

### 4.2.3 Exercícios

1. Dê um exemplo de uma sucessão que tenha subsucessões crescentes limitadas e subsucessões crescentes ilimitadas.

2. Suponha que $(u_n)$ e $(v_n)$ são sucessões de números reais tais que

$$\begin{cases} u_1 = \alpha & \alpha \textit{ fixo em } \mathbb{R}\backslash\{4\} \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 & (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad \& \qquad \forall n \in \mathbb{N}\ v_n = u_n - 4.$$

   Mostre que

   (a) $(v_n)$ é uma progressão geométrica convergente.

   (b) $\lim u_n = 4$.

3. Suponha que $0 < r < 1$ e que $(u_n)$ e $(v_n)$ são sucessões de números reais tais que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [0 \;\le\; u_n \;\le\; r^n \qquad \wedge \qquad v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i].$$

   Mostre que $(v_n)$ é convergente e $\lim v_n \le \frac{r}{1-r}$.

4. Mostre que

   (a) Se para algum $r \in [0,1[$ a sucessão $u_n$ verifica $\forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - u_n| \leq r^{n-1}$, então é convergente (**SUG:** prove que $u_n$ é de Cauchy).

   (b) Mostre que se a sucessão de números reais $u_n$ verifica as relações de recorrência

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n\left(1 + \frac{1}{n^n}\right), \end{aligned}$$

   então é convergente.

5. Seja $(u_n)$ uma sucessão de números reais não negativos.

   (a) Mostre que $\sqrt[n]{b} \to 1$ quando $b > 0$.

   (b) Mostre que se $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$, então

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = b \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim \sqrt[n]{u_n} = b.$$

   (c) Utilize a sucessão $(u_n)$ definida por

$$\begin{aligned} u_{2p} &= \frac{1}{2^p}, \\ u_{2p-1} &= \frac{1}{2^p} \quad (p \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

   para mostrar que o recíproco da alínea $(a)$ não se verifica.

   (d) Determine $\lim \sqrt[n]{n}$.

   (e) Determine $\lim \sqrt[n]{a^n + 3b^n}$, com $a,\ b \in \mathbb{R}^+$.

   (f) Mostre que se $\lim u_n = b$, então $\lim \sqrt[n]{u_1 u_2 \cdots u_n} = b$ (se uma sucessão de números reais positivos converge para $b$, então a **média geométrica** dos seus $n$ primeiros termos converge também para $b$).

6. Determine os limites das sucessões com os termos gerais $u_n$:

   (a) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

   (b) $u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n}$

   (c) $u_n = \frac{(n-p)!}{n!} \quad (p \in \mathbb{N})$

   (d) $u_n = \frac{\sqrt{3n^4-n^2+3}}{n^2-1}$

   (e) $u_n = \frac{a^n}{n!} \quad (a \in \mathbb{R})$

   (f) $u_n = \left(\frac{a}{n}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R})$

7. Considere a sucessão $(u_n)$ definida por

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}$$

   (a) Calcule os termos $u_1$, $u_2$ e $u_3$.

   (b) Mostre que $(u_n)$ é decrescente.

(c) Mostre que $u_n \to 0$ (Sugestão: utilize o teorema das sucessões enquadradas).

8. Determine o limite das seguintes sucessões

$$v_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{n!}{n+1}} \qquad f_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} \qquad e_n = \frac{2n}{\sqrt[n]{(2n+1)!}}$$

9. Calcule os limites das sucessões cujos termos de ordem $n$ são

$$g_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{n-1} \qquad b_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n+3} \qquad d_n = \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

$$h_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right) \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

$$u_n = \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{k} b_i n^i} \qquad (k, m \in \mathbb{N};\ b_k \neq 0 \neq a_m).$$

10. Calcule de duas maneiras distintas $\lim \frac{n!+\sqrt{n}}{(n+1)!}$.

(a) Directamente, por meio de manipulações algébricas.

(b) Observando primeiro que $\forall n \in \mathbb{N}\ \sqrt{n} \leq n!$.

11. Estude quanto à convergência as sucessões cujos termos de ordem $n$ são

$$u_n = \frac{5^n-\alpha^n}{3^n+7^n},\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad w_n = \frac{2^n+1}{2^n-n}$$

$$v_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}} \qquad z_n = \frac{4+5^{-n}}{2+n^{-2n}}$$

12. Considere as sucessões de termos gerais:

$$a_n = \frac{n^{n+1}(n+1)^{-n}}{n+2}, \qquad b_n = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n}{n!}$$

(a) Prove que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 < b_n \leq \frac{5}{3}$$

(b) Calcule $\lim a_n$.

(c) Mostre que a sucessão $(a_n - b_n)$ é convergente, indicando o respectivo limite.

## 4.3 Séries numéricas

Utilizaremos o termo **série** sem definição formal.

### 4.3.1 Generalidades sobre convergência

Dada uma sucessão $(a_n)$, designa-se por **soma parcial de ordem** $n$ a soma $s_n$ dada por

$$s_n \;:=\; a_1 + \cdots + a_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{4.18}$$

Se a sucessão das somas parciais $s_n$ converge, digamos que para o número real $a$, diz-se que **a série** $a_1 + a_2 + \cdots$ **é convergente** e **tem soma** $a$. Uma série que não seja convergente diz-se **divergente**. Designa-se também $a_n$ por **termo geral** da série. A série $a_1 + a_2 + \cdots$ também se pode designar por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou simplesmente $\sum a_n$.
Uma série diz-se **geométrica** ou **aritmética** se o seu termo geral for uma progressão respectivamente geométrica ou aritmética; a razão do termo geral é também a **razão** da série.

**Teorema 4.3.1**

1. *As séries aritméticas só convergem se tiverem razão nula, caso em que a soma é o primeiro termo. Se a razão é negativa ou positiva a sucessão de somas parciais é infinitamente grande respectivamente negativo ou positivo.*

2. *Uma série geométrica de razão $r$ converge se e apenas se $|r| < 1$.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \;=\; \frac{a}{1-r} \qquad (a \in \mathbb{R};\; |r| < 1). \tag{4.19}$$

**Dem.** Exercício 4.3.2.1
Designa-se por **resto de ordem** $p$ da série $\sum a_n$ a série $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$

**Teorema 4.3.2 (Critério de Cauchy)** *Seja $a_n$ uma sucessão numérica. As condições seguintes são equivalentes*

1. *A série de termo geral $a_n$ é convergente.*

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall m \geq p\ \forall k \in \mathbb{N} \quad |\sum_{i=1}^{k} a_{m+i}| < \varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall m, r \in \mathbb{N}\ [p \leq m \leq r \Rightarrow |\sum_{i=m}^{r} a_i| < \varepsilon]$.

4. *Alguma série resto converge.*

5. *Todas as séries resto convergem.*

**Dem.** Ponha-se $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $s := \lim s_n$ caso exista.

(*1*⇔*2*) $s_n$ convergir é o mesmo que ser de Cauchy portanto o mesmo que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq p \quad |s_m - s_n| < \varepsilon$$

O que também pode escrever-se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall m \geq p\ \forall n > m \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

Como

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \ \{m + k |\ k \in \mathbb{N}\} \ = \ \{n \in \mathbb{N} |\ n > m\},$$

vale a expressão equivalente

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall m \geq p\ \forall k \in \mathbb{N} \quad |s_{m+k} - s_m| < \varepsilon.$$

Acontece que $s_{m+k} - s_m = \sum_{i=1}^{k} a_{m+i}$ e vale *2*.

(*2*⇔*3*) Basta observar que

$$\sum_{i=m}^{r} a_i \ = \ \sum_{i=1}^{r-m+1} a_{m-1+i}$$

e concluir a partir disso.

(*1*⇒*4*) Deixamos ao cuidado do leitor provar que se $s_n \to s$ converge, em particular o resto de ordem 2 converge para $s - a_1$.

(*4*⇒*1*) Suponhamos que por exemplo $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = r_p$. Fica a cargo do leitor mostrar que $s_n \to a_1 + \cdots + a_{p-1} + r_p$.

(*5*⇒*1*) Se todas as séries resto convergem, com a notação do parágrafo anterior $s_n \to a_1 + r_1$.

(*1*⇒*5*) Com a notação dos parágrafos anteriores $r_p = s - \sum_{i=1}^{p} a_i \in \mathbb{R}$. □

Em particular

**Teorema 4.3.3** *O termo geral de uma série convergente é um infinitésimo.*

**Dem.** Observe-se que $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ e utilize-se a alínea *3* do teorema anterior. □

Duas séries dir-se-ão *da mesma natureza* se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.

**Teorema 4.3.4**

1. *A natureza de uma série mantém-se quando se altera um número finito de termos.*

2. *Duas séries cujos termos gerais coincidam a partir de alguma ordem são da mesma natureza.*

**Dem.** Se $p$ for o máximo dos índices para os quais $a_n$ pode ser diferente de $b_n$, as séries resto de ordem $p$ são iguais e pode aplicar-se o teorema 4.3.2. $\square$

A algebrização de séries é mais subtil que a das sucessões, no entanto podem definir-se soma, diferença e produto por uma constante.

**Definição 4.3.1** *Sejam $S := \sum a_n$ e $T := \sum b_n$ duas séries e $c$ um número real.*

1. *A* **soma** *de $S$ com $T$ é a série $S + T := \sum(a_n + b_n)$, de termo geral $a_n + b_n$.*
2. *O* **produto de** $S$ **pelo escalar** *$c$ é a série $cS := \sum ca_n$, de termo geral $ca_n$.*

**Teorema 4.3.5** *Sejam $S := \sum a_n$ e $T := \sum b_n$ duas séries e $c$ um número real.*

1. *Se $S$ tem soma $s \in \mathbb{R}$ e $T$ tem soma $t \in \mathbb{R}$, então $S + T$ tem soma $s + t$.*
2. *Se $S$ tem soma $s \in \mathbb{R}$, então $cS$ tem soma $cS$.*

### 4.3.2 Exercícios

1. Suponha que $1 \neq r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que
   $$\sum_{i=0}^{n} r^i \;=\; \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

   (b) Suponha que $u_n = ar^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$. Mostre que
   $$\sum_{i=1}^{n} u_i \;=\; a \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \;=\; \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - r}$$

   (c) Defina $s_n := \sum_{i=1}^{n} u_i$. Prove que $s_n \to \frac{a}{1-r}$ se $|r| < 1$.
   Esta propriedade também costuma descrever-se como
   $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots \;=\; \frac{a}{1 - r}$$

   (d) Suponha que $1 < p \in \mathbb{N}$. Mostre que
   $$\frac{p-1}{p} + \frac{p-1}{p^2} + \frac{p-1}{p^3} + \cdots + \frac{p-1}{p^n} + \cdots \;=\; 1$$

### 4.3.3 Séries de termos não negativos

**Teorema 4.3.6** *Se $a_n \geq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a série $\sum a_n$ converge se e apenas se a sucessão de somas parciais é majorada.*

**Dem.** Recorde-se que $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ portanto, nas condições da hipótese, $s_n$ é crescente sendo limitada sse for convergente. $\square$

**Exemplo 4.3.1** A série *harmónica* $\sum \frac{1}{n}$ é divergente *pois*

$$\sum_{n=1}^{2^p} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{n=2^{i-1}+1}^{2^i} \frac{1}{n} \geq \frac{p+2}{2}.$$

**Teorema 4.3.7 (Critério geral de comparação)** *Sejam $S := \sum a_n$ e $T := \sum b_n$ duas séries tais que, para certo $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq b_n$ para qualquer ordem $n \geq p$.*

1. *Se $T$ converge, também $S$ converge.*

2. *Se $S$ diverge, também $T$ diverge.*

**Dem.** Para $n > p$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n &:= \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} b_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} b_i + \sum_{i=p+1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{p} (a_i - b_i) \\ &:= T_n + \sum_{i=1}^{p} (a_i - b_i). \end{aligned}$$

Como $\sum_{i=1}^{p}(a_i - b_i)$ é constante podemos aplicar o teoremas 4.2.11 e 4.3.6 pois este último afiram que as séries de termos positivos são convergentes ou infinitamente grandes. $\square$

**Corolário 4.3.1** *Sejam $S := \sum a_n$ e $T := \sum b_n$ duas séries tais que $0 \leq a_n$ e $0 < b_n$ para qualquer ordem $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Se a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é majorada*

   (a) *Se $T$ converge, também $S$ converge.*

   (b) *Se $S$ diverge, também $T$ diverge.*

2. *Se $\frac{a_n}{b_n} \to l \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, então $S$ e $T$ são da mesma natureza.*

3. *Se $0 < a_n$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$,*

   (a) *Se $T$ converge, também $S$ converge.*

   (b) *Se $S$ diverge, também $T$ diverge.*

**Dem.** *1.* Se $\frac{a_n}{b_n} < c$ então $a_n \leq cb_n$. Ora é muito fácil verificar que $cT$ e $T$ — porque $c > o$ (justifique!) — são da mesma natureza e aplicar o teorema 1.3.8.

*2.* Observe que, a partir de alguma ordem $(l - \frac{l}{2})\ b_n < a_n < (l + \frac{l}{2})b_n$ (porquê?) e conclua.

*3.* Deixa-se como exercício para o leitor. □

**Teorema 4.3.8 (Critério da razão)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos* positivos.

1. *Se existem $r \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que*
$$\forall n \geq p \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \ < \ 1, \tag{4.20}$$
*então $S$ é convergente.*

2. *Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*
$$\forall n \geq p \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ \geq \ 1, \tag{4.21}$$
*então $S$ é divergente.*

**Dem.** *1.* Repare que nas condições (4.20), para $n > p$ se tem $0 \leq a_n \leq a_p r^{n-p}$ e use o que conhece sobre séries geométricas e o teorema 4.3.2 sobre séries resto.

*2.* Nestas condições $a_{n+1} \geq a_n$ a partir da ordem $p$ e $a_n$ não pode tender para zero, pois passa a ser crescente e positiva. Utilize agora o teorema 4.3.3 □

**Corolário 4.3.2 (Critério de D'Alembert)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos* positivos *e suponha-se que*
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} \ = \ l \in \mathbb{R} \tag{4.22}$$

1. *Se $l < 1$, $S$ converge.*

2. *Se $l > 1$, $S$ diverge.*

**Dem.** *1.* Repare-se que nas condições da hipótese, para $n$ suficientemente grande se tem $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+1}{2} < 1$ e aplique-se o n. 1 do corolário anterior.

*2.* Neste caso $\frac{l+1}{2} > 1$ e podemos aplicar o n. 2 do corolário anterior. □

**Teorema 4.3.9 (Critério da raiz)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos não negativos.*

1. *Se para algum número real $r$*
$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \quad \sqrt[n]{a_n} \ < \ r \ < \ 1, \tag{4.23}$$
*$S$ converge.*

2. *Se*
$$\{n \in \mathbb{N} | \sqrt[n]{a_n} \geq 1\} \text{ é infinito} \tag{4.24}$$
*$S$ diverge.*

**Dem.** *1.* Neste caso, para $n \geq p$, $0 \leq a_n < r^n$ e como $r < 1$ a série resto de ordem $p$ converge — é de termos não negativos e majorada por uma série geométrica convergente — portanto o mesmo acontece com a série propriamente dita.

*2.* Nestas condições $a_n \not\to 0$, pelo que a série não pode convergir. □

**Corolário 4.3.3 (Critério de Cauchy)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos não negativos e suponha-se que*
$$\sqrt[n]{a_n} \;\to\; r \in \mathbb{R}.$$

1. *Se $r < 1$, $S$ converge.*
2. *Se $r > 1$, $S$ diverge.*

**Dem.** Nas condições da hipótese, existe uma ordem $p$ para a qual
$$\forall n \geq p \quad \sqrt[n]{a_n} \; < r + \frac{1-r}{2} \;=\; \frac{r+1}{2} \;<\; 1,$$
e daí
$$\forall n \geq p \quad a_n \;<\left(r + \frac{1-r}{2}\right)^n \;=\; \left(\frac{r+1}{2}\right)^n.$$
Ora o último termo das inequações é o termo geral de uma série geométrica convergente, pelo teorema 4.3.7 a série de termo geral $a_n$ converge. . □

**Teorema 4.3.10** *Se $a_n$ é uma sucessão* decrescente *de termos positivos e $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n := 2^n a_n$, as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza.*

Para $\alpha \in \mathbb{R}$, as séries da forma $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ são chamadas séries **de Dirichlet** com expoente $\alpha$.

**Corolário 4.3.4** *Uma série de Dirichlet com expoente $\alpha$ converge se e apenas se $\alpha > 1$.*

Uma **permutação** de $\mathbb{N}$ é uma aplicação *bijectiva* $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

**Teorema 4.3.11** *Sejam $S := \sum a_n$ uma série de termos não negativos e $\psi$ uma permutação de $\mathbb{N}$. $S$ é da mesma natureza que $\sum a_{\psi(n)}$.*

Dados um conjunto não vazio de números naturais, $K$, e uma sucessão de termos não negativos $a_n$, a expressão $\sum_{k \in K} a_k$ representa a soma dos termos $a_k$ cujo índice $k \in K$; em virtude do teorema anterior (4.3.11), esta definição é adequada pois, se $K$ é finito, a soma é um simples somatório usual e se $K$ é infinito, entende-se como série *não sendo relevante a ordenação dos termos em que a soma é considerada.*

Uma **partição numerável** de $\mathbb{N}$ é um conjunto $\{K^i | \; i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ disjuntos dois a dois tal que $\cup_{i \in \mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

**Teorema 4.3.12** *Sejam $\{K^i|\ i \in \mathbb{N}\}$ uma partição numerável de $\mathbb{N}$ e $\sum a_n$ uma série de termos não negativos. As séries $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in K^i} a_n$ e $\sum a_n$ são da mesma natureza.*

Quando, para qualquer partição numerável $\{K^i|\ i \in \mathbb{N}\}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n \in K^i} a_n$ é convergente diz-se que a série é **somável por blocos**.

### 4.3.4 Convergência absoluta e convergência simples

Se bem que, como vimos no exemplo 4.3.1, $\sum \frac{1}{n}$ diverge, não é muito difícil mostrar que $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge. Na verdade vale o seguinte.

**Teorema 4.3.13 (Critério de Leibniz)** *Se a sucessão $a_n$ é decrescente e tem limite zero, então $\sum (-1)^n a_n$ converge.*

Designando por **alternada** uma série da forma $\sum (-1)^n a_n$ em que todos os $a_n > 0$ são positivos, o teorema anterior também costuma enunciar-se na forma seguinte.

**Teorema 4.3.13'** *Qualquer série alternada cujo termo geral tende para zero a decrescer é convergente*

Quando $a_n \to 0^+$, mas $a_n$ não é decrescente, a série alternada correspondente pode ou não convergir.

**Exemplo 4.3.2**

1. $\sum (-1)^n \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$ converge. 2. $\sum \frac{(-1)^n - 1}{n+1} + \frac{(-1)^n + 1}{2^n}$ diverge.

Quando o termos de uma série não têm sinal determinado, mas a série é convergente, há lugar a duas possibilidades descritas na definição seguinte.

**Definição 4.3.2** *Uma série $\sum a_n$ diz-se* **absolutamente** *convergente se $\sum |a_n|$ converge e diz-se* **simplesmente** *convergente se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum a_n$ converge.*

O teorema seguinte esclarece parte da afirmação anterior.

**Teorema 4.3.14** *Qualquer série absolutamente convergente é convergente*

**Dem.** Suponhamos que $\sum a_n$ converge absolutamente. Vamos verificar que a sucessão de somas parciais é de Cauchy e utilizar o teorema 4.2.7. Sejam então $s_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$ e $S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_n|$ $(n \in \mathbb{N})$. Tome-se $\varepsilon > 0$; por hipótese $S_n$ converge, consequentemente é de Cauchy (teorema 4.2.7) assim, podemos tomar $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}\ [m, n \geq p \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon];$$

então vale a seguinte sequência de condições onde vamos supor que $m > n \geq p$

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= |s_{n+1} + \cdots + s_m| \\ &\leq |s_{n+1}| + \cdots + |s_m| \\ &= S_m - S_n \ = \ |S_m - S_m| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon$ foi tomado arbitrariamente, podemos concluir que $s_n$ é de Cauchy e consequentemente converge. $\square$

Já vimos que o recíproco deste teorema não se verifica. De facto pode provar-se o seguinte (veja-se [13]):

**Teorema 4.3.15 (de Riemann)** *Se uma série é simplesmente convergente, podem reordenar-se os seus termos de modo a que a sucessão resultante de somas parciais convirja para qualquer número previamente fixado.*

Este teorema resulta do facto de o termo geral de uma série convergente ter limite zero e do teorema seguinte. Dada uma sucessão numérica $a_n$ define-se

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & se\ a_n > 0 \\ 0 & caso\ contrário \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n & se\ a_n < 0 \\ 0 & caso\ contrário. \end{cases}$$

**Teorema 4.3.16** *Se a série $\sum a_n$ é simplesmente convergente então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ divergem, ou seja , $\sum a_n^+ = +\infty = \sum a_n^-$.*

### 4.3.5 Convergência absoluta II

Voltando ao estudo da convergência absoluta, os critérios de convergência de séries de termos não negativos dão agora lugar a critérios de convergência absoluta.

**Teorema 4.3.17 (Critério da razão)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos não nulos.*

1. *Se existem $r \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\forall n \geq p \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r \ < \ 1, \tag{4.25}$$

   *então $S$ é absolutamente convergente.*

2. *Se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall n \geq p \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ \geq \ 1, \tag{4.26}$$

   *então $S$ é divergente.*

**Corolário 4.3.5 (Critério de D'Alembert)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos* não nulos *e suponha-se que*

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \ = \ l \in \mathbb{R} \tag{4.27}$$

1. *Se $l < 1$, $S$ converge absolutamente.*

2. *Se $l > 1$, $S$ diverge.*

**Teorema 4.3.18 (Critério da raiz)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série de termos não nulos.*

1. *Se para algum número real $r$*
$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \sqrt[n]{|a_n|} \ < \ r \ < \ 1, \tag{4.28}$$
*$S$ converge absolutamente.*

2. *Se*
$$\{n \in \mathbb{N}| \ \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1\} \text{ é infinito} \tag{4.29}$$
*$S$ diverge.*

**Corolário 4.3.6 (Critério de Cauchy)** *Seja $S := \sum a_n$ uma série numérica e suponha-se que*
$$\sqrt[n]{|a_n|} \ \to \ r \in \mathbb{R}.$$

1. *Se $r < 1$, $S$ converge absolutamente.*
2. *Se $r > 1$, $S$ diverge.*

### 4.3.6 Exercícios

1. Diga se as séries seguintes são convergentes ou divergentes e, no caso de serem convergentes, determine a sua soma.
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n$
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$
   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-9}$
   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$
   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$
   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-1}{2^n}$
   (j) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n}$
   (k) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{(n-2)n}$
   (l) $\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{p}{(n-p)n}$ $(p \in \mathbb{N})$

   As séries exemplificadas nas alíneas a, d, f, j, k e l são chamadas *telescópicas* ou *de Mengoli*.

2. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries convergentes com somas $A$ e $B$, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Prove que
   (a) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n + b_n$ é convergente e tem soma $A + B$.
   (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ é convergente e tem soma $cA$.

3. Estude a natureza das seguintes séries, utilizando os critérios de comparação.
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4+n^2+1}$
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$
   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$

4. Estude a natureza das seguintes séries:
   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2n-1}$
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4+1}$
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6n}{n^4-2^n}$
   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-6}{3(n^2+2n-1)(n^2+5)}$
   (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n}$
   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n4^n}$
   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$
   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\sqrt{n}}$
   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
   (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

5. Seja $(a_n)$ uma sucessão de números reais positivos. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$também converge, mas o recíproco não é verdadeiro.

6. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^2$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ também converge.

7. Prove que se $(a_n)$ é decrescente e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge então $\lim na_n = 0$.

8. Prove que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n > 0$ para todo o $n$ então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ também converge. Prove que o recíproco é verdadeiro.

9. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, será verdade que $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ é convergente? E o recíproco?

10. Estude a natureza da série $\sum \frac{3^n n!}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}$.

11. Verifique que a série seguinte converge mas não converge absolutamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$$

(**OBS:** Pode ser útil mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 0$ ou mesmo que $\forall n \in \mathbb{N}\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2}$).

12. Determine a natureza (convergência, convergência simples ou convergência absoluta) de cada uma das séries seguintes
   (a) $\sum(-1)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$
   (b) $\sum \frac{(-4)^n}{n^2}$
   (c) $\sum(-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$
   (d) $\sum(-1)^n \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^3}$
   (e) $\sum(-1)^n \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$
   (f) $\sum(-1)^{\left[\frac{n}{7}\right]} \frac{2n^2}{n!}$
   (g) $\sum 3^{-(5n+1)}$
   (h) $\sum(-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n$
   (i) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad (p \in \mathbb{Q}^+)$
   (j) $\sum \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$
   (k) $\sum(-1)^{n+1} \frac{1}{n} \frac{1}{(3{,}5)^n}$
   (l) $\sum \frac{(-1)^n + \frac{1}{2}}{n}$
   (m) $\sum \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a > 0)$

13. Que pode dizer quanto à convergência de
   (a) $\sum(-1)^{\left[\frac{1+\sqrt{8n-3}}{2}\right]} \frac{1}{n^5}$?
   (b) $\sum(-1)^{\left[\frac{1+\sqrt{8n-3}}{2}\right]} \frac{1}{n}$?

(c) $\sum (-1)^{\left[\frac{1+\sqrt{8n-3}}{2}\right]} a_n$ quando $a_n \downarrow 0$?

(d) Comente a convergência de séries de termos de sinal variável $\sum u_n$ quando $|u_n| \downarrow 0$

# Capítulo 5

# Sucessões de funções reais

## 5.1 Preliminares

Tal como uma sucessão numérica é uma aplicação de $\mathbb{N}$ num conjunto de números ($\mathbb{R}$, no caso da presente disciplina), uma **sucessão de funções** é uma aplicação de $\mathbb{N}$ num conjunto de funções , $n \mapsto f_n$ (reais de variável real, também no caso da presente disciplina); mas a analogia de certo modo acaba aí mesmo, na definição, pois, por exemplo, passarão a existir duas formas de convergência; vejamos um caso paradigmático:

**Exemplo 5.1.1**

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in [-1,1] \quad f_n(x) \ := \ x^n;$$

para cada $x \in ]-1,1[$, $f_n(x)$ é uma sucessão numérica que tem limite zero (teorema 4.2.14), se $x = 1$, então $f_n(x) \equiv 1 \to 1$, se $x = -1$, então $f_n(x) = (-1)^n$ e não converge, resumindo

$$f_n(x) \ \to \ f(x) \ := \begin{cases} 0 & se\ |x| < 1 \\ 1 & se\ x = 1. \end{cases} \qquad (x \in ]-1,1]);$$

mas há mais "problemas", a saber: se $0 < \varepsilon < 1$, então

$$\forall r \in ]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left[ n \geq \frac{\log \varepsilon}{\log r} \ \Rightarrow \ \forall x \in ]-r,r[ \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right],$$

mas <u>não é verdade</u> que

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \geq p \forall x \in ]-1,1[ \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

pois acontece o seguinte:

$$\left[ |x| < \sqrt[p]{\varepsilon} \ \ \& \ \ n \geq p \right] \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{mas} \quad \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}+1}{2} \ \in \ ]-1,1[ \quad \&$$

$$\left| f_p(\frac{\sqrt[p]{\varepsilon}+1}{2}) - f(\frac{\sqrt[p]{\varepsilon}+1}{2}) \right| \ = \ \left( \frac{\sqrt[p]{\varepsilon}+1}{2} \right)^p \ > \ \sqrt[p]{\varepsilon}^p \ = \ \varepsilon;$$

De facto

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ |x| \leq 1\} \ = \ 1.$$

Por outras palavras: $f_n$ converge para $f$ "ponto a ponto" mas não converge uniformemente.

**Definição 5.1.1** *Dadas uma sucessão de funções reais $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas num conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f : C \to \mathbb{R}$, diz-se que*

1. *$f_n$ converge **pontualmente** para $f$ se para qualquer $x \in C$, $f_n(x) \to f(x)$, isto é,*

$$\forall x \in C \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \ |f_n(x) - f(x)| \ < \ \varepsilon. \tag{5.1}$$

2. *$f_n$ converge **uniformemente** para $f$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \quad \forall x \in C \ |f_n(x) - f(x)| \ < \ \varepsilon \tag{5.2}$$

*ou, de forma equivalente,*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} \ \forall n \geq p \quad \sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in C\} \ \leq \ \varepsilon \tag{5.3}$$

*ou ainda*

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : \ x \in C\} \ \to \ 0. \tag{5.4}$$

**Exemplo 5.1.2** Nestes termos, a sucessão do exemplo 5.1.1 converge pontualmente em $]-1,1]$, mas não uniformemente. De facto o argumento do exemplo prova que a sucessão converge pontualmente em $]-1,1[$ para a função nula, mas não uniformemente.

**Proposição 5.1.1** *Se uma sucessão de funções $f_n$ converge uniformemente no conjunto $C$ para $f : C \to \mathbb{R}$, então também converge pontualmente para $f$ em $C$.*

**Dem.** Tome-se $x_0 \in C$ e $\varepsilon > 0$; como $f_n \to f$ uniformemente, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq p$, então para qualquer $x \in C$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$; mas assim, em particular para $x_0$, esta mesma condição se verifica, isto é, se $n \geq p$, então para qualquer $x \in C$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$; como $\varepsilon$ foi escolhido arbitrariamente e para ele se determinou a ordem $p$ adequada para aproximação a menos de $\varepsilon$, $f_n(x_0) \to f(x_0)$; como $x_0$ foi escolhido arbitrariamente, $f_n(x) \to f(x)$ para qualquer $x \in C$. $\square$

**Teorema 5.1.1** *Suponha-se que* $f_n : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ *é uma sucessão de funções contínuas que converge uniformemente para* $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$*; então*

1. $f$ *é contínua.*
2. *Para quaisquer* $c, d \in ]a,b[$, $\quad \int_c^d f_n(x)dx \to \int_c^d f(x)dx$.
3. *Para qualquer* $c \in ]a,b[$, $\quad x \mapsto \int_c^x f_n(t)dt$ *converge uniformemente para* $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ *em qualquer intervalo fechado e limitado que contenha* $c$ *e esteja contido em* $]a,b[$.
4. *Se as* $f_n$ *são de classe* $C^1$ *e* $f_n'$ *converge uniformemente para* $g$ *em* $]a,b[$, *então* $f' \equiv g$.

**Dem.** 1. Tome-se $c \in ]a,b[$, $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\forall n \geq p \quad \forall x \in ]a,b[ \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\delta}{3} \tag{5.5}$$

$$\forall x \in ]a,b[ \qquad \left[ |x-c| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f_p(x) - f_p(x)| < \frac{\delta}{3} \right]. \tag{5.6}$$

Se $|x-c| < \varepsilon$ tem-se

$$|f(x) - f(c)| \;\leq\; |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(c)| + |f_p(c) - f(c)|; \tag{5.7}$$

Como

$$|f(x) - f_p(x)| < \frac{\delta}{3} \quad \& \quad |f_p(c) - f(c)| < \frac{\delta}{3} \qquad \text{por (5.5)}$$

e

$$|f_p(x) - f_p(c)| < \frac{\delta}{3} \qquad \text{por (5.6),}$$

com (5.7) concluímos que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in ]a,b[ \qquad [|x-c| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \delta]\,;$$

com $c$ e $\delta$ foram escolhidos arbitrariamente, $f$ é contínua em $c$.

2. (Esquema) Observe-se que

$$\begin{aligned}
\left| \int_c^d f(x)dx - \int_c^d f_n(x)dx \right| &= \left| \int_c^d f(x) - f_n(x)dx \right| \\
&\leq \left| \int_c^d |f(x) - f_n(x)|dx \right| \\
&\leq \text{máx}\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \text{ entre } c \text{ e } d\}|c-d|.
\end{aligned}$$

3. (Esquema) Observe-se que, quando $x, c \in ]a,b[$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^x f_n(t)dt \right| &\leq \text{máx}\{|f(t) - f_n(t)| \mid t \text{ entre } c \text{ e } x\}|c-x| \\
&< \text{máx}\{|f(t) - f_n(t)| \mid t \in [\alpha,\beta]\}(b-a).
\end{aligned}$$

4. Comecemos por observar que $g$ é contínua por ser limite uniforme de uma sucessão de funções contínuas; de seguida observe-se que

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt \\
&\to f(c) + \int_c^x g(t)dt \\
&\text{e} \\
f_n(x) &\to f(x), \\
&\text{portanto} \\
f(x) &= f(c) + \int_c^x g(t)dt \\
&\text{e daí} \\
f'(x) &= g(x).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 5.1.2** ***(Critério de Weierstrass)*** *Suponha-se que $\sum a_n$ é uma série convergente de termos não negativos, que $I$ é um intervalo, que as $f_n : I \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) são funções, que*

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad (x \in I; n \in \mathbb{N})$$

*e que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq a_n; \tag{5.8}$$

*então $s_n$ converge uniformemente em $I$ para $F(x) := \sum f_n(x)$, isto é, a série de funções $F$ converge uniformemente em $I$.*

**Dem.** Comecemos por observar que, nas condições da hipótese, $s_n$ converge pontualmente para $F$ em I, e de facto para cada $x \in I$, a convergência de $F(x)$ é absoluta, pelo critério de comparação (teorema 4.3.7). Mais precisamente então

$$\begin{aligned}
\forall x \in I \quad |F(x) - s_n(x)| &= |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.
\end{aligned}$$

Ora

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$$

pelo que a convergência de $s_n$ é mesmo uniforme:

Dado $\varepsilon > 0$, se $p$ é tal que

$$n \geq p \Rightarrow 0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon,$$

então

$$\forall n \geq p \ \forall x \in I \quad |F(x) - s_n(x)| < \varepsilon.$$

□

**Exercícios 5.1.1**

1. Prove
   (a) as afirmações constantes no exemplo 5.1.2
   (b) que as condições em 2 da definição 5.1.1 são equivalentes.

2. Mostre que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty$, é analítica num intervalo $I$, se para cada ponto $c \in I$, existe um intervalo $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subseteq \mathbb{R}$ onde $R_c^n f$ converge uniformemente para zero ou, o que é o mesmo, onde a sucessão dos polinómios de Taylor $T_c^n f$ converge uniformemente para $f$.

3. Considere a sucessão $f_n$, $n \geq 1$, onde $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$.
   (a) Verifique que a sucessão converge em $\mathbb{R}$ para a função $f(x) = x$, mas não uniformemente.
   (b) Prove que a sucessão converge uniformemente para $f(x) = x$ em qualquer intervalo $[-r, r]$, com $r \in \mathbb{R}$.

4. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{nx}{nx^2+1}$. Considere a função $f$ definida por

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

   (a) Esboce os gráficos de $f$ e $f_n$.
   (b) A sucessão $f_n, n \geq 1$, converge uniformemente para $f$ em $\mathbb{R}$?
   (c) Que pode dizer quanto ao tipo de convergência de $f_n$ no intervalo $]0, +\infty[$?
   (d) E no intervalo $[\alpha, +\infty[$, com $\alpha > 0$?

5. Para cada natural $n$, $n \geq 1$, seja $f_n$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}; \\ -2n^2 x + 2n, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Faça o esboço do gráfico de $f_n(x)$.
   (b) Mostre que, para todo o $x \in [0, 1]$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   (c) Calcule $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ e $\int_0^1 [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]dx$. Comente os resultados obtidos.

6. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Verifique que a sucessão $f_n$ converge uniformemente, em $\mathbb{R}$, para a função $f$ dada por $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Verifique que neste caso, $f'(x)$ não é dado por $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$ para todo o $x$. Este resultado está em contradição com o teorema 5.1.1.4 ?

7. Verifique que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^4+n^4}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$. Mostre que a função $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{x^4+n^4}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

## 5.2 Séries de potências

### 5.2.1 Aspectos gerais

Para o que se segue, *passaremos a considerar as sucessões também definidas em* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. A **série de potências** (de $x$) **associada à sucessão** numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ é a função $S(x)$ definida por

$$S(x) \;:=\; a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \;:=\; a_0 + \sum a_n x^n.$$

É imediato que $0 \in \mathrm{dom} S$, i.e., $S(0)$ é uma série convergente (para $a_0$) e de facto pode acontecer $\mathrm{dom} S = \{0\}$ (exercício 5.2.4.1), mas frequentemente o domínio de $S$ é um intervalo não trivial, que tanto pode ser limitado como não limitado, aberto, fechado ou mesmo semi-aberto em qualquer dos extremos (veja-se o exercício 5.2.4.5); interessar-nos-e-mos essencialmente pelos interiores dos intervalos de convergência por razões que serão claras após o teorema 5.2.2.

Recordem-se as convenções $\frac{1}{0} = \infty$ e $\frac{1}{\infty} = 0$. O **raio de convergência** da série $S(x)$ é o elemento $R$ de

$$\overline{\mathbb{R}^+} \;:=\; \{+\infty\} \cup \mathbb{R}$$

definido por

$$R \;:=\; \sup\{r \in [0, +\infty] |\; S(r) \textit{ converge}\}. \tag{5.9}$$

**Teorema 5.2.1** *$S(x)$ converge absolutamente sempre que $|x| < R$ e diverge se $|x| > R$.*

Observe-se que $|x| > +\infty$ é impossível pelo que, para a hipótese $|x| > R$, devemos supor $R \in \mathbb{R}^+$.

**Dem.** Suponha-se que $R$ é raio de convergência de $S(x)$ e que $|x| < R$; tome-se $r$ tal que

$$|x| \;<\; r \;<\; R.$$

Por defininição de $R$, $a_0 + \sum a_n r^n$ converge pelo que $\lim a_n r^n = 0$ e, em particular, para certo $p \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq p \quad |a_n r^n| \;<\; 1.$$

Mas então

$$\begin{aligned} \forall n \geq p \quad |a_n x^n| &= \left| a_n r^n \left(\frac{x}{r}\right)^n \right| \\ &= |a_n r^n| \left| \left(\frac{x}{r}\right)^n \right| \\ &= |a_n r^n| \left(\frac{|x|}{r}\right)^n \\ &< \left(\frac{|x|}{r}\right)^n. \end{aligned}$$

E a série $a_0+\sum a_n x^n$ converge absolutamente por comparação com a série geométrica $1+\sum\left(\frac{|x|}{r}\right)^n$, que converge pois $\frac{|x|}{r}<1$.

Suponha-se agora que $|x|>R$ e tome-se $s$ tal que

$$|x| \; > \; s \; > \; R.$$

Por defininição de $R$, $a_0+\sum a_n s^n$ diverge. Admita-se que $a_0+\sum a_n x^n$ converge, pelo que $\lim a_n x^n=0$ e, em particular, para certo $q\in\mathbb{N}$

$$\forall n \geq q \quad |a_n x^n| \; < \; 1.$$

Mas então

$$\begin{aligned} \forall n \geq p \quad |a_n s^n| &= \left| a_n x^n \left(\frac{s}{x}\right)^n \right| \\ &= |a_n x^n| \left| \left(\frac{s}{x}\right)^n \right| \\ &= |a_n x^n| \left(\frac{s}{|x|}\right)^n \\ &< \left(\frac{s}{|x|}\right)^n. \end{aligned}$$

E a série $a_0+\sum a_n s^n$ converge absolutamente, por comparação com $1+\sum\left(\frac{s}{|x|}\right)^n$ (que converge pois $\frac{s}{|x|}<1$), e $a_0+\sum a_n s^n$ convergiria, o que é contraditório. Assim $a_0+\sum a_n x^n$ não pode convergir. □

Consequentemente $\{x\in\mathbb{R}|\ S(x)\ \textit{converge}\}$ é um intervalo contido em $[-R,R]$ e chama-se **intervalo de convergência** de $S$.

**Lema 5.2.1** *Se existir* $\lim\sqrt[n]{|a_n|}$ ***em*** $\overline{\mathbb{R}^+}$*, então* $\frac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}}$ *é o raio de convergência de* $S(x)$*.*

**Dem.** Defina-se $R:=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{|a_n|}}$. De acordo com o critério da raiz de Cauchy (corolário 4.3.3), $a_0+\sum a_n x^n$ converge absolutamente, se $|x|<R$ e diverge se $|x|>R$; consequentemente $a_0+\sum a_n r^n$ converge se $r\in[0,R[$ e diverge se $r>R$. $R$ é o raio de convergência por definição. □

As somas parciais de uma série de potências são polinómios

$$s_n(x) \ := \ a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

pelo que uma série de potências é o limite de uma sucessão de funções e sobre ele vale o seguinte (veja-se também o exercício 5.2.4.11):

**Teorema 5.2.2** *Suponha que o raio de convergência da série de potências $S(x)$ é*

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*Se $0 < r < R$ então $S(x)$ converge absolutamente e uniformemente em $[-r, r]$ no seguinte sentido:*

1. *A sucessão de funções*

$$|s_n|(x) \ := \ |a_0| + \sum_{k=1}^{n} |a_k||x|^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   *converge uniformemente para*

$$|S|(x) \ := \ |a|_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x|^n \quad em \quad [-r, r].$$

2. *A sucessão $s_n$ converge uniformemente em $[-r, r]$ para $S$.*

3. *A sucessão das derivadas $s_n'$ converge uniformemente para $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ em $]-r, r[$, i.e., $S$ é diferenciável em $]-R, R[$ e*

$$S'(x) \ = \ a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \ = \ a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{5.10}$$

   *tendo $S'$ o mesmo raio de convergência que $S$.*

**Dem.** A demonstração da primeira parte do teorema 5.2.1 é na verdade uma aplicação disfarçada do critério de Weierstrass (teorema 5.1.2) que demonstra 1 e 2 deste teorema também; deixamos a demostração propriamente dita a cargo leitor.

Quanto à parte 3. Comecemos por observar que $\lim \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ pelo que $S'$ tem também raio de convergência $R$. Assim a convcergência uniforme (e uniforme em valor absoluto) das derivadas $s_n'$ está grantida, restando provar que a série somaa é mesmo $S'$; tal é consequência de 4 do teorema 5.1.1. $\square$

**Corolário 5.2.1** *O teorema 5.2.2 vale também quando todos os $a_n$ são diferentes de zero e*

$$R \quad = \quad \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

**Dem.** Nas condições a hipótese, $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$ e podemos aplicar o lema 5.2.1. $\square$

A cada sucessão numérica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e cada $c \in \mathbb{R}$ fica naturalmente associada uma série de potências de $x - c$ dada por

$$T(x) \;:=\; S(x-c) \;=\; \sum a_n(x-c)^n. \tag{5.11}$$

Se $I$ for o intervalo de convergência de $S$ então $c + I$ é o intervalo de convergência de $T$, em particular se o raio de convergência de $S$ é $R$, então $T(x)$ converge em $]c - R, c + R[$ e $R$ também se diz o intervalo de convergência de $T$.

**Corolário 5.2.2** *Suponha que o raio de convergência da série de potências $S(x)$ é*

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

*e que*

$$T(x) \;:=\; S(x-c).$$

*Se $0 < r < R$ então $T(x)$ converge absolutamente e uniformemente em $[-r, r]$ no seguinte sentido:*

1. *A sucessão de funções*

$$|t_n|(x) \;:=\; |a_0| + \sum_{k=1}^{n} |a_k||x-c|^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   *converge uniformemente para*

$$|T|(x) \;:=\; |a|_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x-c|^n \quad em \quad [c-r, c+r].$$

2. *A sucessão $t_n$ converge uniformemente em $[c - r, c + r]$ para $T$.*

3. *A sucessão das derivadas $t_n'$ converge uniformemente para $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(x - c)^{n-1}$ em $]c - r, c + r[$, i.e., $T$ é diferenciável em $]c - R, c + R[$ e*

$$T'(x) \;=\; a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-c)^n \;=\; a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}, \tag{5.12}$$

   *tendo $T'$ o mesmo raio de convergência que $T$.*

O **produto** de duas séries de potências e $a_0 + \sum a_n x^n$ e $b_0 + \sum b_n x^n$ define-se por

$$(a_0 + \sum a_n x^n)(b_0 + \sum b_n x^n) \;:=\; a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) x^n$$

e tem raio de convergência maior ou igual ao raio de convergência mínimo das duas séries (exercício 5.2.4.7).

### 5.2.2 Funções analíticas II

A cada função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ e a cada ponto $c \in ]a, b[$, associa-se naturalmente a **série de Taylor** centrada em $c$

$$T_c f(x) \quad := \quad f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \tag{5.13}$$

cuja convergência depende como vimos acima do comportamento da sucessão $(\frac{f^{(n)}(c)}{n!})$.

**Teorema 5.2.3** *Uma função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ é analítica se e apenas se*

$$\forall c \in ]a, b[ \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in ]a, b[ \qquad [\ |x - c| < \varepsilon \Rightarrow \qquad f(x) = T_c f(x)]\,.$$

Repare-se a propósito, que este teorema na verdade reenuncia o exercício 5.1.1.2, onde se afirma

**Teorema 5.2.3'** *Uma função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$, de classe $C^\infty$, é analítica se e apenas se, para qualquer $c \in ]a, b[$ a sucessão dos seus restos de Taylor, $R_c^n f$ converge uniformemente para zero em alguma vizinhança de $c$.*

Na verdade, qualquer destes teoremas pode enunciar-se

**Teorema 5.2.3"** *Uma função $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ é analítica se e apenas se é desenvolvível em série de Taylor centrada em qualquer dos pontos do seu domínio.*

Pode mesmo provar-se que

**Teorema 5.2.4** *As séries de potências (de $x - c$) são funções analíticas no interior do seu intervalo de convergência.*

A demonstração deste teorema no contexto presente é demasiadamente trabalhosa pelo que não a apresentaremos.
Às séries de Taylor centradas em 0 dá-se o nome de **séries de McLaurin**.

### 5.2.3 As funções transcendentes elementares

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad (x\in\mathbb{R}) \\
&= e^c+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^c}{n!}(x-c)^n \quad (x,c\in\mathbb{R}). \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad (|x|<1). \\
\log(x) &= \log(c)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nc^n}(x-c)^n \quad (|x-c|<c>0). \\
\mathrm{sen}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} \quad (x\in\mathbb{R}). \\
\mathrm{senh}(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} \quad (x\in\mathbb{R}). \\
\cos(x) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad (x\in\mathbb{R}). \\
\cosh(x) &= \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad (x\in\mathbb{R}). \\
\arctan(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1} \quad (|x|<1).
\end{aligned}
$$

### 5.2.4 Exercícios

1. Mostre que a série de potências de $x$ associada à sucessão

$$
a_n := \begin{cases} 1 & n=0 \\ n^n & n\in\mathbb{N} \end{cases}
$$

   só converge se $x=0$, i.e., $\sum n^n x^n$ só converge quando $x=0$.

2. Determine o raio de convergência e o domínio de convergência das seguintes séries de potências:
   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}$
   (b) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2n}\, x^n$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
   (d) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n)!}$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$
   (f) $1+\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, x^{3n}$
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, x^n$
   (h) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\, x^n$
   (i) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\, x^n$
   (j) $1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\, 4^n}\, x^n$
   (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}\, x^n$
   (l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n\, 3^n \log n}$
   (m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n \log n}$
   (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$
   (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}$

3. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries de potências seguintes são absolutamente convergentes:
   (a) $1+\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n\, 4^n}$

4. Determine conjuntos infinitos de valores de $x \in \mathbb{R}$ onde a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+2}{(2n)!} x^{2n}$ é uniformemente convergente.

5. Determine os conjuntos $I$ tais que $S(x)$ converge para todo o $x \in I$.
   (a) $\sum \frac{x^n}{n}$
   (b) $\sum \frac{x^n}{n^2}$
   (c) $\sum \frac{x^n}{r^n}$ $(r \in \mathbb{R})$

6. O **produto de Cauchy** de séries numéricas $\sum a_n$ e $\sum_n$ é a série $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p+q=n} a_p bq$. Mostre que o produto de séries absolutamente convergentes é absolutamente convergente.

7. Mostre que o raio de convergência de uma série de potências produto é pelo menos o mínimo dos raios de convergência de cada um dos factores.

8. Desenvolva em série de McLaurin a função dada e determine o raio de convergência da série obtida.
   (a) $f(x) := \frac{x}{(1+x^2)^2}$
   (b) $f(x) := e^x \cos(x)$

9. Determine o raio de convergência e a soma das séries seguintes
   (a) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$
   (b) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

10. Demonstre o Teorema 5.2.2.

11. Mostre que o teorema 5.2.2 ainda vale quando não se impõem restrições ao raio de convergência.

12. Demonstre o Lema 5.2.1

13. Demonstre o Corolário 5.2.1

14. Mostre que o corolário 5.2.2 ainda vale quando não se impõem restrições ao raio de convergência.

15. Observando que $\log(x) = \log(c + (x - c)) \quad (x, c > 0)$, deduza a expansão de $\log(x)$ em torno de $c$ da série de McLaurin para $\log(1 + x)$.

16. Observando que $\mathrm{sen}(x) = \mathrm{sen}(c + (x - c)) \quad (x, c \in \mathbb{R})$, deduza das séries de McLaurin de $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ uma expansão de $\mathrm{sen}(x)$ em série de Taylor centrada em $c$.

17. Observando que $\cos(x) = \cos(c + (x - c)) \quad (x, c \in \mathbb{R})$, deduza das séries de McLaurin de $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos(x)$ uma expansão de $\cos(x)$ em série de Taylor centrada em $c$.

## 5.3 Séries de Fourier

No que segue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa uma função **periódica com período** $2\pi$, i.e., tal que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t + 2\pi) \;=\; f(t), \tag{5.14}$$

e **seccionalmente contínua**, i.e., tal que o *conjunto de pontos em que $f$ é descontínua em qualquer intervalo de comprimento $2\pi$ é finito*, mas *existem limites laterais nos pontos de descontinuidade*, ou seja, se $f$ é descontínua em $c$ e existem

$$f(c^-) \;:=\; \lim_{x \to c^-} f(x) \qquad e \qquad f(c^+) \;:=\; \lim_{x \to c^+} f(x) \tag{5.15}$$

### 5.3.1 Generalidades

A função $f$ é integrável e

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \int_c^{c+2\pi} f(x)dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \tag{5.16}$$

**Definição 5.3.1** *Os coeficientes de Fourier da função $f$ são os números reais $a_n$, $b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ definidos por*

$$a_n \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)dx, \qquad\qquad b_n \;:=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(nx) f(x)dx.$$

*A **série de Fourier** de $f$ é*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx))$$

*e escreve-se*

$$f(x) \;\sim\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)). \tag{5.17}$$

**Observação 5**

1. Se $f$ é par, todos os $b_n$ são nulos.
2. Se $f$ é ímpar, todos os $a_n$ são nulos.

As **somas parciais de Fourier de ordem** $n$ com coeficientes $a_n$ e $b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) são as funções

$$S_n(x) \;:=\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)). \tag{5.18}$$

Segue-se um conjunto de equações que convém ter presente.

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(x)]^2dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}[\mathrm{sen}(x)]^2dx = \pi \tag{5.19}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(kx)\sin(nx)dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx = 0 \ (k,n \in \mathbb{N}; k \neq n) \tag{5.20}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(nx)dx \;=\; 0 \quad (k,n \in \mathbb{N}) \tag{5.21}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) \;=\; \frac{\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}x\right) - \mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} \tag{5.22}$$

**Teorema 5.3.1** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica com período $2\pi$, e seccionalmente contínua, então*

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx - \pi\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right]$$

*e portanto vale a* ***desigualdade de Bessel***

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx \;\geq\; \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right). \tag{5.23}$$

**Lema 5.3.1 (de Riemann-Lebesgue)** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica com período $2\pi$, e seccionalmente contínua, então*

$$\lim_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)dx \;=\; 0. \tag{5.24}$$

O $n$-ésimo **núcleo de Dirichlet** de $f$ é definido por

$$D_n(x) \;=\; \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) \;=\; \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}\left(n+\frac{1}{2}x\right)}{2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} & 0 < |x| \leq \pi \\ n + \frac{1}{2} & x = 0. \end{cases}$$

**Lema 5.3.2** *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica com período $2\pi$, e seccionalmente contínua, então as somas parciais $S_n(f)$ da sua série de Fourier são dadas por*

$$S_n(f)(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt. \tag{5.25}$$

**Teorema 5.3.2 (de convergência)** *Suponha-se que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica com período $2\pi$, seccionalmente contínua.*

1. *Se $f$ tem derivadas laterais em $c$, então*

$$\frac{1}{2}[f(c^+) + f(c^-)] \;=\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\mathrm{sen}(nx)).$$

2. *Se $f'$ é periódica com período $2\pi$, e seccionalmente contínua então a convergência da alínea anterior é uniforme em $\mathbb{R}$.*

3. $$\left(\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \;\to\; 0.$$

4. *Vale a **equação de Parseval***

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx \;=\; \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right). \tag{5.26}$$

**Teorema 5.3.3** ***(de aproximação de Weierstrass)*** *Qualquer função contínua de período $2\pi$ é uniformemente aproximada por polinómios trigonométricos.*

## 5.4 Funções não periódicas

Funções não peródicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podem também ser aproximadas por séries de Fourier em intervalos tão grandes quanto se queira. Digamos que a restrição $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua; o seu prolongamento periódico de período $2L$ é definido por

$$\overline{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & -L < x \leq L \\ f(x - k2L) & (2k-1)L < x \leq (2k+1)L \\ & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Uma mudança de variáveis permite "representar" $\overline{f}$ em $]-\pi, \pi]$:

$$\tilde{f}(t) \;:=\; \overline{f}\left(\frac{L}{\pi}t\right) \;=\; f\left(\frac{L}{\pi}t\right).$$

Assim

$$\tilde{f}(t) \;\sim\; \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\mathrm{sen}(nt))$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(t)\text{sen}(nt)dt = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

A **série de Fourier** (do prolongamento periódico) de $f$ é

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

e escreve-se

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

### 5.4.1 Exercícios

1. Demonstre as afirmações feitas na observação 5

2. Mostre que o sistema de funções $S = \{\cos nx : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin nx : n \in \mathbb{N}\}$, definidas em $[a, a+2\pi], a \in \mathbb{R}$, é um sistema ortogonal em $[a, a+2\pi]$ para o produto interno definido por $\langle f, g\rangle = \int_a^{a+2\pi} f.g\,dx$. Construa um sistema ortonormado a partir de $S$.

3. Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções periódicas de período $2\pi$, definidas em $]-\pi, \pi]$ por:

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0; \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

   (b) $f(x) = x + x^2$;

   (c) $f(x) = \begin{cases} -1 - \frac{x}{\pi}, & -\pi < x \leq 0; \\ 1 - \frac{x}{\pi}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$;

   (d) $f(x) = |x|$;

   (e) $f(x) = x^3$;

   (f) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -1; \\ x+1, & -1 < x \leq 0; \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$.

4. Mostre que a série de fourier da função no exercício 3c converge uniformemente em $[-\pi, 0]$. Existirá outra série de Fourier que convirja uniformemente para $f$ no mesmo intervalo?

5. Mostre que $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}cosnx$ em $]-\pi, \pi[$, sendo a convergência uniforme.

6. Considere a função $f$ definida em 3c. Mostre que não existe série de Fourier que convirja uniformemente para $f$ em $]-\pi, \pi[$.

7. Utilizando a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x \leq 0; \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$, conclua que

   $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.

8. Esboce o gráfico da função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

onde a série do segundo membro é a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2\pi$ definida por.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$ .

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0; \\ 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

# Capítulo 6

# Integrais Impróprios

## 6.1 Integrais de primeira espécie

Nesta seccção $I$ designa um intervalo não limitado $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ou $]-\infty, +\infty[$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada integrável em qualquer intervalo limitado e fechado contido em $I$.

**Definição 6.1.1** *Quando existem os limites em presença:*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{y \to +\infty} \int_a^y f(t)dt \tag{6.1}$$

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt := \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt \tag{6.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt := \int_{-\infty}^0 f(t) + \int_0^{+\infty} f(t)dt \tag{6.3}$$

*os integrais nos primeiros membros dizem-se* ***convergentes*** *e chamam-se* ***integrais impróprios de primeira espécie****; se algum dos limites não existe, o integral correspondente diz-se* ***divergente****.*

**Teorema 6.1.1** *Os integrais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ convergem se e apenas se $\alpha > 1$.*

**Dem.** Observe-se que, se $y \to \infty$,

$$\int_1^y \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \log y \to +\infty & \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha} - 1\right] \to +\infty & \alpha < 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha} - 1\right] \to 1 & \alpha > 1. \end{cases}$$

$\square$

**Teorema 6.1.2** *Quando* (6.3) *está definida, também para qualquer $c \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t) + \int_c^{+\infty} f(t)dt. \tag{6.4}$$

**Dem.**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} f(t) &= \lim_{x\to-\infty}\int_x^c f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\left[\int_x^0 f(t)+\int_0^c f(t)\right]\\ &= \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)+\int_0^c f(t)\\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)+\int_0^c f(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_c^{+\infty} f(t) &= = \lim_{y\to+\infty}\left[\int_c^0 f(t)+\int_0^y f(t)\right]\\ &= \int_0^c f(t)+\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\\ &= \int_c^0 f(t)+\int_0^{+\infty} f(t)\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^c f(t)+\int_c^{+\infty} f(t) &= \int_{-\infty}^0 f(t)+\int_0^c f(t)+\int_c^0 f(t)+\int_0^{+\infty} f(t)\\ &= \int_{-\infty}^0 f(t)+0+\int_0^{+\infty} f(t)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\end{aligned}$$

□

**Teorema 6.1.3** *O integral impróprio $\int_{-\infty}^b f(t)dt$ converge se e apenas se $\int_{-b}^{+\infty} f(-t)dt$ converge.*

**Dem.**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b f(t)dt &= \lim_{y\to+\infty}\int_b^y f(t)dt\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(-\int_{-b}^{-y} f(-t)dt\right)\\ &= \lim_{y\to+\infty}\int_{-y}^{-b} f(-t)dt\\ &= \lim_{x\to-\infty}\int_x^{-b} f(-t)dt\end{aligned}$$

□

Perante este teorema (6.1.3), trataremos apenas $\int_a^{+\infty} f(t)dt \quad (a\in\mathbb{R})$ (exercício 6.3.1.3).

**Teorema 6.1.4** *As condições seguintes são equivalentes*

1. $\int_a^{+\infty} f(t)dt \quad (a \in \mathbb{R})$ *converge.*

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x, y > M \quad \left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$ *(Condição de Cauchy).*

3. *Qualquer integral* $\int_b^{+\infty} f(t)dt \quad (b > a)$ *converge e*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_b^{+\infty} f(t)dt \tag{6.5}$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} f(t)dt = 0 \tag{6.6}$$

4. *Existe* $I \in \mathbb{R}$ *tal que, para qualquer sucessão* $x_n$ *tal que* $x_n \to +\infty$, $\lim \int_a^{x_n} f(t)dt = I$.

**Dem.** $(4 \Leftrightarrow 1)$ A condição 4 é equivalente à existência de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, no caso particular em que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ou seja à condição 1.

$(1 \Rightarrow 3)$ Quando $y > b > a$ tem-se

$$\int_b^y f(t)dt = \int_a^y f(t)dt - \int_a^b f(t)dt$$

portanto, por um lado

$$\int_b^{+\infty} f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^b f(t)dt,$$

(6.5) fica provada e $\int_b^{+\infty} f(t)dt$ converge e, por outro lado

$$\begin{aligned}\lim_{b\to+\infty} \int_b^{+\infty} f(t)dt &= \int_a^{+\infty} f(t)dt - \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(t)dt - \int_a^{+\infty} f(t)dt \\ &= 0.\end{aligned}$$

$(3 \Rightarrow 2)$ Admitindo 3 e tomando $x < y$ para simplificar o argumento, tem-se

$$\int_x^y f(t)dt = \int_x^{+\infty} f(t)dt - \int_y^{+\infty} f(t)dt$$

por (6.5); como, por (4.2.4),os integrais no segundo membro tendem para zero quando $x, y \to +\infty$, o mesmo acontece com o primeiro membro e vale a condição 2.

$(2 \Rightarrow 4)$ Pela condição 2, as sucessões $\int_a^{x_n}$ são de Cauchy, e portanto convergem; além disso ainda pela condição 2, se $x_n,\ y_n \to +\infty$,

$$\int_a^{y_n} f(t)dt - \int_a^{x_n} f(t)dt = \int_{x_n}^{y_n} f(t)dt \to 0$$

pelo que $\lim \int_a^{y_n} f(t)dt = \lim \int_a^{x_n} f(t)dt$. $\square$

**Definição 6.1.2** *Quando $\int_a^{+\infty}|f(t)|dt$, $\int_{-\infty}^{b}|f(t)|dt$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$ é convergente, diz-se que o integral impróprio correspondente $\int_a^{+\infty}f(t)dt$, $\int_{-\infty}^{b}f(t)dt$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt$ é **absolutamente convergente**.*

**Teorema 6.1.5** ***(Critérios de comparação)*** *Suponha que $f,g:[a,+\infty[\to[0,+\infty[$ são funções integráveis em todos os intervalos $[a,b]$ $\quad(a<b)$*

1. *Seja $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ $(x\in[a,+\infty[)$. $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ converge se e apenas se $F$ é limitada.*
2. *Se, para algum $M\in\mathbb{R}$ vale $\forall x>M\quad f(x)\le g(x)$, então*
   (a) *Se $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ converge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}f(t)dt$.*
   (b) *Se $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ diverge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}g(t)dt$.*
3. *Se, para algum $M\in\mathbb{R}$ vale $\forall x>M\quad f(x),g(x)>0$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, então*
   (a) *Se $0\neq l\in\mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ e $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ são da mesma natureza.*
   (b) *Se $l=0$,*
      i. *Se $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ converge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}f(t)dt$.*
      ii. *Se $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ diverge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}g(t)dt$.*
   (c) *Quando $l=+\infty$*
      i. *Se $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ diverge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}f(t)dt$.*
      ii. *Se $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ converge, o mesmo acontece com $\int_a^{+\infty}g(t)dt$.*
4. ***(Critério do integral)*** *Se $f$ é decrescente e $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ então $\int_0^{+\infty}f(t)dt$ e $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ são da mesma natureza.*

**Dem.** (1) $F$ é uma função crescente em sentido lato pelo que

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)\;=\;\sup\{F(x)|\;x\ge a\}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

(2) Observe-se que $\int_a^{+\infty}g(t)dt$ converge se e só se $\int_{M+1}^{+\infty}g(t)dt$ converge; ora quando $x>M+1$,

$$0\;\le\;\int_{M+1}^{x}g(t)dt\;\le\;\int_{M+1}^{x}f(t)dt$$

e pode aplicar-se 1, com $M+1$ em vez de $a$, aos dois integrais em presença; como a convergência de $\int_a^{+\infty}f(t)dt$ é equivalente à convergência de $\int_{M+1}^{+\infty}f(t)dt$, as conclusões pretendidas seguem.

(3) Suponha-se que se $x>M$ vale $f(x),g(x)>0$ e que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

(a) Se $l \neq 0$, necessariamente $l > 0$ e para certo $M_1$, virá quando $x > M_1$

$$\frac{l}{2}g(x) \ \leq \ f(x) \ \leq \ \frac{3l}{2}g(x)$$

e podemos aplicar 2, comparando adequadamente $\int_a^{+\infty} \frac{l}{2}g(x)dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)$ e $\int_a^{+\infty} \frac{3l}{2}g(x)$.

(b) Neste caso, para certo $M_1$, virá quando $x > M_1$, $0 \ < \ f(x) \ < \ g(x)$ e podemos de novo aplicar 2.

(c) Neste caso, para certo $M_1$, virá quando $x > M_1$, $0 \ < \ g(x) \ < \ f(x)$ e também podemos aplicar 2.

(4) Defina-se $\lfloor x \rfloor := \text{máx}\{m \in \mathbb{Z} |\ m \leq x\}$ e observe-se que

$$\sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} f(k) + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)dt \quad \leq \quad \int_0^x f(t)dt \quad \leq \quad \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} f(k) + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)dt$$

porque $f$ é decrescente, que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} f(t)dt \quad = \quad 0$$

porque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, e aplique-se 1. □

**Corolário 6.1.1** *As séries de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *convergem se e apenas se* $\alpha > 1$.

**Dem.** Se $\alpha \leq 1$, a série é harmónica ou minorada pela série harmónica, pelo que é divergente. Se $\alpha > 1$, tomando $f(x) := \frac{1}{x^\alpha}$, $f$ é decrescente, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\frac{1}{n^\alpha} = f(n)$, podendo portanto aplicar-se o critério do integral 4 no teorema 6.1.5.□

## 6.2 Integrais de segunda espécie

Nesta seccção $I$ designa um intervalo limitado $[a, b[$ ou $]a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função ilimitada integrável em qualquer intervalo fechado contido em $I$.

**Definição 6.2.1** *Chama-se integral impróprio de* ***segunda espécie*** *de $f$ em $I$ a qualquer dos limites*

$$\int_a^b f(t)dt \quad := \quad \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(t)dt \tag{6.7}$$

$$\int_a^b f(t)dt \quad := \quad \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt \tag{6.8}$$

*Quando existem, estes integrais dizem-se* ***convergentes****, caso contrário dizem-se* ***divergentes****.*

A mudança de variáveis $t \mapsto a - t + b$ transforma o intervalo $]a, b]$ no intervalo $[a, b[$ e portanto $\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ e $\lim_{y\to b^-} \int_a^y f(b - t + a)dt$ existem ou não simultâneamente; assim sendo limitar-nos-emos a tratar integrais impróprios do tipo (6.7); para estes valem teoremas muito semelhantes aos anteriores, de facto com demonstrações análogas, a saber.

**Teorema 6.2.1** *Os integrais impróprios* $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ *convergem se e apenas se* $\alpha < 1$.

**Teorema 6.2.2** *Para qualquer* $c \in [a, b[$,

$$\int_a^b f(t)dt \;=\; \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \tag{6.9}$$

**Teorema 6.2.3** *As condições seguintes são equivalentes*

1. $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
2. *Seja qual for a sucessão* $x_n \to b^-$, *a sucessão* $\int_a^{x_n} f(t)dt$ *converge.*
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in ]b-\delta, b[\quad \left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon$ *(Condição de Cauchy).*
4. *Qualquer integral* $\int_c^b f(t)dt \quad (b > c \geq a)$ *converge e* $\lim_{c\to b^-} \int_c^b f(t)dt = 0$.

**Definição 6.2.2** *Quando o integral impróprio* $\int_a^b |f(t)|dt$ *converge diz-se que* $\int_a^b f(t)dt$ *é **absolutamente convergente**.*

**Teorema 6.2.4** ***(Critérios de comparação)*** *Suponha que* $f, g : [a, b[\to [0, +\infty[$ *são funções ilimitadas integráveis em todos os intervalos* $[a, c] \quad (c < b)$

1. *Seja* $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ $(x \in [a, b[)$. $\int_a^b f(t)dt$ *converge se e apenas se* $F$ *é limitada.*
2. *Se, para algum* $\delta > 0$ *vale* $\forall x \in ]b-\delta, b[\quad f(x) \leq g(x)$, *então*
   (a) *Se* $\int_a^b g(t)dt$ *converge, o mesmo acontece com* $\int_a^b f(t)dt$.
   (b) *Se* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge, o mesmo acontece com* $\int_a^b g(t)dt$.
3. *Se, para algum* $\delta > 0$ *vale* $\forall x \in ]b-\delta, b[\quad f(x), g(x) > 0$ *e* $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *então*
   (a) *Se* $0 \neq l \in \mathbb{R}$, $\int_a^b f(t)dt$ *e* $\int_a^b g(t)dt$ *são da mesma natureza.*
   (b) *Se* $l = 0$,
      i. *Se* $\int_a^b g(t)dt$ *converge, o mesmo acontece com* $\int_a^b f(t)dt$.
      ii. *Se* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge, o mesmo acontece com* $\int_a^b g(t)dt$.
   (c) *Quando* $l = +\infty$
      i. *Se* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge, o mesmo acontece com* $\int_a^b f(t)dt$.
      ii. *Se* $\int_a^b f(t)dt$ *converge, o mesmo acontece com* $\int_a^b g(t)dt$.

**Dem.** 1. Tal como na secção anterior, $F$ é crescente e $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} F(x) = \sup\{F(x)|\ a \le x < b\}$.
Para demonstrar as restantes propriedades, substitua-se nas demostrações correspondentes da secção anterior $+\infty$ por $b$, $M$ por $b-\delta$, $M_1$ ou $M+1$ por $b-\delta_1$, para $\delta_1$ conveniente. □

## 6.3 Integrais mistos

Um **integral misto** será um integral com intervalo de integração ilimitado e onde a função integranda poderá não estar definida em alguns pontos ou ser ilimitada em alguns subintervalos, mas seja integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ contido no seu domínio, por exemplo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$$

Tal integral deve entender-se como a soma dos vários integrais próprios ou impróprios implícitos correspondentes a uma partição do intervalo de integração por intervalos; ainda reportando-nos ao mesmo exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx \quad := \quad & \int_0^1 \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx \\ & + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{9}{5}} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} + \int_{\frac{9}{5}}^{2} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx \\ & + \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx\end{aligned}$$

Por definição: *o integral será convergente se* **todos** *os integrais associados à partição o forem.*

**Teorema 6.3.1** *Se $f$ e $g$ são funções integráveis em qualquer intervalo $[a, b]$ contido na intersecção dos seus domínios, a qual por sua vez, contém o intervalo $]c, d[$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então vale a seguinte equação*

$$\int_c^d (\lambda f(x) + g(x))dx \;=\; \lambda \int_c^d f(x)dx + \int_c^d g(x)dx$$

### 6.3.1 Exercícios

1. Prove o teorema 6.1.3.

2. Prove o teorema 6.1.5.

3. Enuncie e demonstre teoremas análogos aos apresentados para $\int_{-\infty}^b f(t)dt \quad (b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

4. Prove o teorema 6.2.2.

5. Prove o teorema 6.2.3.

6. Prove que quando $f$ é ilimitada no intervalo $[a, b[$ e integrável em qualquer intervalo fechado nele contido, então $\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$ e $\lim_{y\to b^-}\int_a^y f(b-t+a)dt$ existem ou não simultâneamente.

7. Prove o teorema 6.2.4.

8. Prove os teoremas 6.1.1 e 6.2.1.

9. Estude a natureza dos integrais impróprios de primeira espécie:
   a) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos x\, dx$
   b) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx$
   c) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x\, dx$
   d) $\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}\, dt \qquad (s > \alpha)$
   e) $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2+4}\, dx$
   f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\, dx$
   g) $\int_0^{+\infty} te^{-st}\, dt \qquad (s > 0)$

10. Estude, em função de $\alpha \in \mathbb{R}$, a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\, dx$.

11. Verifique que $\int_0^{+\infty} e^{-st}\cos(\alpha t)\, dt = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $s \in \mathbb{R}^+$.

12. Estude a natureza dos integrais impróprios de segunda espécie:
    a) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$
    b) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|}\, dx$
    c) $\int_0^1 \log x\, dx$
    d) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\, dx$
    e) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}$
    f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$
    g) $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\, dx$

13. Mostre que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2$.

14. Estude, utilizando o critério de comparação, a natureza dos seguintes integrais impróprios:
    a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$
    b) $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\, dx$
    c) $\int_0^{+\infty} e^{x^2}\, dx$
    d) $\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}}\, dx$
    e) $\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\, dx$
    f) $\int_{-1}^{0} \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

15. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:
    (a) $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$
    (b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\, dx$
    (c) $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\sin\sqrt{x}\, dx$
    (d) $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$
    (e) $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\, dx$
    (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\, dx$
    (g) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
    (h) $\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\, dx$
    (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$
    (j) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\log^3 x}\, dx$
    (k) $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\, dx$
    (l) $\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$
    (m) $\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\, dx$
    (n) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$
    (o) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{\log|x|}{x}\, dx$
    (p) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\, dx$

16. Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \le 2 \\ \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$. Determine $m$ de modo a que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

17. Mostre que:

    (a) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$ é convergente quando $p > 0$ e $q > 0$.
    (a função definida por $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$, $p > 0$ e $q > 0$, chama-se integral euleriano de primeira espécie ou *função beta*).

    (b) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx$ é convergente quando $p > 0$.
    (a função definida por $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\, dx$, $p > 0$, chama-se integral euleriano de segunda espécie ou *função gama*).

18. Sejam $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & x \notin \mathbb{N} \end{cases} \tag{6.10}$$

$$g(x) = \begin{cases} n^2x - n^3 + 1, & x \in [n - \frac{1}{n^2}, n] \quad \& \quad n \in \mathbb{N}; \\ -n^2x + n^3 + 1, & x \in ]n, n + \frac{1}{n^2}] \quad \& \quad n \in \mathbb{N}; \\ 0, & x \notin \bigcup\{[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}] : n \in \mathbb{N}\} \end{cases} \tag{6.11}$$

    Mostre que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x)$ não existem, mas $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx$ são convergentes. Calcule o valor dos integrais impróprios.

19. Prove o teorema 6.3.1

## 6.4 Transformada de Laplace

**Definição 6.4.1** *A* ***transformada de Laplace*** *da função $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ é a função $L[f]$ definida por*

$$L[f](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

*sempre que o integral do segundo membro converge.*

**Definição 6.4.2** *A função $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ diz-se* ***de ordem*** *(ou* ***de tipo****)* ***exponencial*** *à direita se*

$$\exists M, c, a > 0\ \forall t > c \quad |f(t)| \le Me^{at} \tag{6.12}$$

**Lema 6.4.1** *Suponha-se que $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ é contínua, que $F(x) := \int_0^x f(t)dt \quad (x \ge 0)$ e que $F$ é de ordem exponencial à direita. Então*

1. *$f$ tem transformada de Laplace.*

2. *Em algum intervalo não limitado à direita $L[f](s) = sL[F](s)$.*

**Dem.** 1 e 2 serão de facto provadas simultaneamente. Suponha-se que para certos $M, c, a > 0$

$$\forall t > c \quad |F(t)| \ \leq Me^{at}. \tag{6.13}$$

Para qualquer $x > 0;\ s > c$,

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-st} f(t)dt &= e^{-st}F(t)\big]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x se^{-st}F(t)dt \\ &= e^{-sx}F(x) + s\int_0^x e^{-st}F(t)dt.\end{aligned}$$

Em face de (6.13)

$$\lim_{x\to+\infty} \left|e^{-sx}F(x)\right| \ \leq \ \lim_{x\to+\infty} \left|e^{-(s-a)x}\right| \ = \ 0$$

pelo que

$$L[f](s) \ = \ \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}f(t)dt \ = \ \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-st}F(t)dt \ = \ sL[F](s) \qquad (s > a)$$

□

**Teorema 6.4.1** *Qualquer função contínua em $[0, +\infty[$ de ordem exponencial à direita tem transformada de Laplace.*

1. *O conjunto $\Lambda$ das funções contínuas em $[0, +\infty[$ de ordem exponencial à direita, munido da soma e do produto por escalares (reais) usuais é um espaço vectorial real.*

2. *A transformada de Laplace é um operador linear em $\Lambda$, i.e,*

$$L[f + \lambda g] \ = \ L[f] + \lambda L[g] \qquad (f, g \in \Lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}). \tag{6.14}$$

3. *Se $f$ é constante, digamos $f(x)0 = c \in \mathbb{R}$ $(x \geq 0)$, então*

$$L[f](s) \ := \ L[c] \ = cL[1] \ = \ c\frac{1}{s} \quad (s > 0) \tag{6.15}$$

4. *Se $f$ é de classe $C^n$ em $[0, +\infty[$, $f^{(n-1)} \in \Lambda$, então em algum intervalo $[a, +\infty[$,*

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}](s) &= s^n L[f](s) - \left[\sum_{i=0}^{n-2} s^{n-1-i} f^{(i)}(0) \ + f^{(n-1)}(0)\right] && (6.16) \\ &= s^n L[f](s) - \left[s^{n-1}f^(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + f^{(n-1)}(0)\right] && (6.17)\end{aligned}$$

**Observação 6** *As hipóteses do lema 6.4.1 acima, do teorema 6.4.1 bem como a alínea 1 do mesmo teorema, podem ser enfraquecidas no sentido em que continuam a verificar-se para funções seccionalmente contínuas.*

**Dem.** As demontrações das propriedades 1, 2 e 3 deixam-se a cargo do leitor. Demonstramos 3 por indução.
Para $n = 1$ aplique-se o lema 6.4.1 e (6.15), observando que

$$f(x) - f(0) \;=\; \int_0^x f'(t)dt,$$

donde, para $s$ em algum intervalo não limitado à direita,

$$L[f'](s) \;=\; s\left(L[f](s) - \frac{f(0)}{s}\right) \;=\; sL[f](s) - f(0). \tag{6.18}$$

Admitindo a validade da fórmula (6.16) para $n$ e tendo de novo em conta (6.18),

$$\begin{aligned}
L[f^{(n+1)}](s) &= L[f^{(n)'}](s) \;=\; sL[f^{(n)}](s) - f^{(n)}(0)\\
&= s\left[s^n L[f](s) - \left[\sum_{i=0}^{n-2} s^{n-1-i} f^{(i)}(0) \;+ f^{(n-1)}(0)\right]\right] - f^{(n)}(0)\\
&= s^{n+1}L[f](s) - \left[\sum_{i=1}^{n-1} s^{n-i} f^{(i)}(0) \;+ s f^{(n-1)}(0)\right] - f^{(n)}(0)\\
&= s^{n+1}L[f](s) - \left[\sum_{i=1}^{(n+1)-2} s^{(n+1)-1-i} f^{(i)}(0) + f^{((n+1)-1)}(0)\right]
\end{aligned}$$

pelo que (6.16) também vale com $n+1$ em vez de $n$; pelo Princípio de Indução a fórmula vale para todo o $n \in \mathbb{N}$. □

Um exemplo de aplicação de (6.16).

**Exemplo 6.4.1** Suponhamos que se pretende determinar uma função real de variável real $f$ tal que

$$\begin{cases} f'' + f \equiv 1 \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

e procuremos uma função de crescimento exponencial à direita. Aplicando a transformada a ambos os membros da equação obtemos

$$\left(s^2 L[f](s) - sf(0) - f'(0)\right) \;+\; L[f](s) \;=\; \frac{1}{s}$$

ou seja

$$L[f](s)\left(s^2+1\right) \;=\; \frac{1}{s}$$

ou ainda

$$L[f](s) \;=\; \frac{1}{s\left(s^2+1\right)} \;=\; \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Sabendo que

$$L[1] = \frac{1}{s} \qquad \& \qquad L[\cos](s) = \frac{s}{s^2+1},$$

Concluímos que

$$L[f] = L[1-\cos]$$

pelo que poderá ser $f(x) = 1-\cos(x)$ e esta é de facto uma solução para o problema.

### 6.4.1 Exercícios

1. Verifique a seguinte tabela.

| $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ | $f(t)$ | $\mathcal{L}[f](s)$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s}$ | $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\text{sen}(at)$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ |
| $\text{senh}(at)$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ |
| $t\text{sen}(at)$ | $\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ | $t\cos(at)$ | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ |
| $t\text{senh}(at)$ | $\frac{2as}{(s^2-a^2)^2}$ | $t\cosh(at)$ | $\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$ |
| $\sin(at) - at\cos(at)$ | $\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$ | $at\cosh(at) - \text{senh}(at)$ | $\frac{2a^3}{(s^2-a^2)^2}$ |

2. Utilizando a transformada de Laplace determine funções $y$ que satisfaçam as condições requeridas:

(a) $\begin{cases} 2y' + 3y = e^4 t \\ y(0) = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3y' - 4y = \sin(t) \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' + 3y = te^{2t} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y'' + y = \text{sen}(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

# Capítulo 7

# Equações Diferenciais Ordinárias. Uma introdução

## 7.1 Introdução

Suponha-se que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $F$ é uma função real de $n+1$ variáveis reais, digamos $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Uma **equação diferencial ordinária de ordem** $n$ é uma equação da forma

$$F(x, y, \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) \;=\; 0 \tag{7.1}$$

na qual $y$ representa uma função real incógnita da variável $x$ com $n$ derivadas. Uma **solução de** (7.1) em algum intervalo $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ será uma função real $\phi$ tal que

$$F(x, \phi(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x), \phi^{(n)}(x)) \;=\; 0 \qquad (x \in ]a, b[); \tag{7.2}$$

em particular deverá verificar-se $(x, \phi(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x), \phi^{(n)}(x)) \in A \quad (x \in ]a, b[)$. O **integral geral** da equação (7.1) em $]a, b[$ é o conjunto de todas as suas soluções em $]a, b[$ ou também uma fórmula que o defina. Uma **condição inicial** é um conjunto de equações

$$y^{(i)}(x_0) = y_i \qquad\qquad (y_i \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n-1);$$

um **problema de valores iniciais** ou **de Cauchy** é um sistema

$$\begin{cases} F(x, \phi(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x), \phi^{(n)}(x)) \;=\; 0 & (x \in ]a, b[) \\ y^{(i)}(x_0) = y_i & (y_i \in \mathbb{R}; 0 \leq i \leq n-1); \end{cases} \tag{7.3}$$

## 7.2 Equações de variáveis separáveis

Uma equação diferencial diz-se **de variáveis separáveis** no intervalo $]a, b[$, se existirem funções contínuas reais de variável real $p, q$ de tal modo que a equação se pode reduzir à forma

$$q(y)y' \;=\; p(x) \quad (a < x < b). \tag{7.4}$$

Se

$$P'(x) = p(x) \quad \& \quad Q'(x) = q(x) \quad (a < x < b). \tag{7.5}$$

O integral geral em $]a,b[$ da equação é o conjunto de funções $\phi\ :]a,b[\to\mathbb{R}$ que satisfazem a condição

$$Q(\phi(x)) \ = \ P(x) \qquad (x\in ]a,b[) \tag{7.6}$$

Se $Q$ for injectiva,

$$\phi(x) \ = \ Q^{-1}(p(x)) \qquad (x\in ]a,b[).$$

**Exemplo 7.2.1** Uma equação de variáveis separáveis muito simples, para a qual $Q$ não é injectiva é

$$2yy' = 2x.$$

A fórmula (7.6) diz-nos que as soluções verificam

$$y^2 \ = \ x^2+c \quad (c\in\mathbb{R}).$$

Pode mostrar-se que, quando $x^2+c>0 \quad (a<x<b)$, o integral geral da equação é constituído por todas as funções $y$ definidas a seguir: se $c>0$,

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x^2+c} \quad (a<x<b;\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \\ y & = & -\sqrt{x^2+c} \quad (a<x<b;\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \end{array}$$

ou, quando $c<0$,

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sqrt{x^2+c} \quad (\sqrt{-c}\le a<x<b;\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \\ y & = & -\sqrt{x^2+c} \quad (\sqrt{-c}\le a<x<b<;\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \\ y & = & \sqrt{x^2+c} \quad (a<x<b\le -\sqrt{-c};\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \\ y & = & -\sqrt{x^2+c} \quad (a<x<b\le -\sqrt{-c};\ a,b\in\overline{\mathbb{R}}) \end{array}$$

### 7.2.1 Exercícios

Resolva as seguintes equações diferenciais e problemas de Cauchy.

1. $yy'=4x \quad y(1)=-3$
2. $xy'=4y \quad y(1)=-3$
3. $y'=2xy^2 \quad y(2)=1$
4. $y'=e^x(1-y^2)^{\frac{1}{2}} \quad y(0)=\frac{1}{2}$
5. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2} \quad y(2)=3$
6. $e^y y'=4 \quad y(0)=2$
7. $2(y-1)y'=e^x \quad y(0)=-2$
8. $2y'=y(y-2)$
9. $3y^2y'=(1+y^3)\text{cos}x$
10. $(\cos^2 x)y'=(1+y^2)^{\frac{1}{2}}$
11. $(\cos^2 x)y'=y^2(y-1)\text{sen}x$
12. $(\text{cos}y)y'=1.$

## 7.3 Forma normal

Quando em (7.1)

$$F(x,y,\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)}) \ = \ y^{(n)}-f(x,y,\cdots,y^{(n-1)}),$$

para alguma função contínua $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diz-se que a equação é redutível à **forma normal**

$$y^{(n)} \;=\; f(x, y, \cdots, y^{(n-1)}) \qquad (7.7)$$

Uma solução de (7.7) em algum intervalo $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ será uma função real $\phi$ tal que

$$\phi^{(n)}(x) \;=\; f(x, \phi(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x)) \qquad (x \in ]a, b[); \qquad (7.8)$$

em particular deverá verificar-se $(x, \phi(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x)) \in B \quad (x \in ]a, b[)$.

### 7.3.1 Equações lineares de primeira ordem

Considerem-se as funções contínuas $p, q : ]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O integral geral (em $]a, b[$) da equação **linear de primeira ordem**

$$y' \;=\; p(x)y + q(x) \qquad (7.9)$$

é o conjunto de funções da forma

$$y \;=\; e^{P(x)} \int e^{-P(x)} q(x)dx \quad \& \quad P'(x) = p(x) \qquad (x \in ]a, b[)$$

ou, mais especificamente, se $P'(x) = p(x)$ e $R'(x) = e^{-P(x)}q(x) \qquad (x \in ]a, b[)$

$$y \;=\; \lambda e^{P(x)} + e^{P(x)} R(x) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}; x \in ]a, b[) \qquad (7.10)$$

### 7.3.2 Exercícios

1. Verifique que (7.10) se pode escrever

$$y \;=\; y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)dt} q(s)ds \qquad (x_0; x \in ]a, b[)$$

2. Resolva as seguintes equações diferenciais
   (a) $y' + 2xy = x$
   (b) $xy + y = 3x^3 - 1 \quad (x > 0)$
   (c) $y' + e^x y = 3e^x$
   (d) $y' - \tan(x)y = e^{\sin(x)} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$
   (e) $y + 2xy = xe^{-x^2}$

### 7.3.3 Equações lineares de segunda ordem e coeficientes constantes

Sejam $a, b$ números reais e $f : ]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ uma função contínua; considere-se a equação **linear de segunda ordem e coeficientes constantes** $a$, $b$, redutível à forma normal

$$y'' + ay' + by \;=\; f(x). \qquad (7.11)$$

Se $f \equiv 0$ a equação diz-se **homogénea**, sendo $y'' + ay' + by \;=\; 0$ a **equação homogénea associada** a (7.11); o **polinómio característico** da mesma equação é $p(r) := r^2 + ar + b$.

**Lema 7.3.1** *Se $u$ é solução da equação homogénea associada a (7.11), a substituição $y = zu$ transforma a equação em*

$$uz'' + (2u' + au)z' \;=\; f(x) \tag{7.12}$$

*que é uma equação linear de primeira ordem em $z'$. Se além disso $u$ não tiver zeros, a equação (7.12) é equivalente a*

$$z'' + (2\frac{u'}{u} + a)z' \;=\; \frac{f(x)}{u} \tag{7.13}$$

**Dem.**

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (z''u + 2z'u' + zu'') + a(z'u + zu') + b(zu) \\ &= uz'' + (2u' + au)z' + (u'' + au' + bu)z \\ &= uz'' + (2u' + au)z. \end{aligned}$$

□

### 7.3.4 Exercícios

1. Observando que $\frac{d^2}{dt^2}\cos(at) = -a^2\cos(at)$, resolva a equação diferencial $y'' + 4y = 1$
2. Observe que se $u(x) := x^2 - 1$, então $u'' - xu' + 2u = 0$. Resolva a equação diferencial $y'' - xy' + 2y = e^x$.

**Lema 7.3.2** *Se $s$ é raiz real do polinómio característico da equação (7.11), então $x \mapsto e^{sx}$ é solução da equação homogénea associada em $\mathbb{R}$.*

**Teorema 7.3.1** *Suponha-se que o polinómio característico de (7.11) tem as raízes reais $s, t$, que $R'(x) = f(x)e^{-sx}$ e $S'(x) = e^{(t-s)x}R(x)$.*

1. *$x \mapsto e^{sx}S(x)$ é solução da equação (7.11).*
2. *Se $s \neq t$, então o integral geral de (7.11) é dado pela fórmula*

$$y = \lambda e^{tx} + \mu e^{sx} + e^{sx}S(x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}; x \in ]\alpha, \beta[) \tag{7.14}$$

3. *Se $s = t$, então o integral geral de (7.11) é dado pela fórmula*

$$y = \lambda x e^{sx} + \mu e^{sx} + e^{sx}S(x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}; x \in ]\alpha, \beta[). \tag{7.15}$$

**Dem.** 2. Pelo lema 7.3.1, a substituição $y = ze^{sx}$ transforma a equação (7.11) em

$$z'' + (2s + a)z' \;=\; f(x)$$

ou

$$z'' \;=\; -(2s + a)z' + f(x). \tag{7.16}$$

Como $s, t$ são raízes do polinómio característico, $a = -(s+t)$, e a equação (7.16) toma a forma

$$z'' = (t-s)z' + f(x).$$

Como vimos na subsecção 7.3.1, com $P(x) = e^{(t-s)x}$ e $R'(x) = e^{(s-t)x}f(x)$, ter-se-á

$$z' = \alpha e^{(t-s)x} + e^{(t-s)x}R(x)$$

1. Se $s \neq t$, virá

$$z = \frac{\alpha}{t-s}e^{(t-s)x} + \mu + S(x) \qquad (\alpha, \mu \in \mathbb{R}; x \in ]\alpha, \beta[)$$

ou

$$y = \lambda e^{tx} + \mu e^{sx} + e^{sx}S(x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}; x \in ]\alpha, \beta[)$$

pois $\alpha$ é arbitrário e $t - s \neq 0$.

3. Demonstra-se analogamente, considerando que, quando $s = t$, $e^{(t-s)x} \equiv 1$. $\square$

**Teorema 7.3.2** *Se $u \pm iv \in \mathbb{C}$ são raízes imaginárias (conjugadas) do polinómio característico,*

1. *$x \mapsto e^{ux}\cos(vx)$ e $x \mapsto e^{ux}\mathrm{sen}(vx)$ são soluções da equação homogénea associada.*

2. *Se $\eta$ for uma solução de (7.11), as funções da forma*

$$y = \lambda e^{ux}\cos(vx) + \mu e^{ux}\mathrm{sen}(vx) + \eta(x) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}; x \in ]\alpha, \beta[) \tag{7.17}$$

*são também soluções da equação.*

A definição de $\eta$ pode ser feita como na demostração do teorema anterior, mas a fórmula resultante é demasiadamente complicada. Veremos adiante que (7.17) *é de facto o integral geral de* (7.11) *nas condições do teorema* 7.3.2.

### 7.3.5 Exercícios

Resolva as seguintes equações diferenciais

1. $y'' - 2y' - 3y = x$
2. $y'' - 2y' + y = e^x$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$
4. $y'' + 2y' + 5y = 1$

### 7.3.6 Equações lineares de segunda ordem e coeficientes analíticos

Suponhamos agora que os coeficientes da equação são funções $a, b$ e que $a, b, f : I := ]\alpha, \beta[ \to \mathbb{R}$:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \tag{7.18}$$

e consideramos, para cada $x_0 \in I$, para $x$ em algum intervalo aberto centrado em $x_0$,

$$a(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{7.19}$$

$$b(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{7.20}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{7.21}$$

Como solução da equação (7.18), procuramos uma série de potências

$$s(x) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n (x - x_0)^n \tag{7.22}$$

que seja solução da equação em algum intervalo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$: substituindo em (7.18) $a$ e $b$ como dados em (7.19) e (7.20), e dados ainda $s_0$ e $s_1$, obtêm-se as seguintes relações de recorrência

$$(n+2)(n+1)s_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n} [a_{n-k}(k+1)s_{k+1} + b_{n-k}s_k] + c_n \tag{7.23}$$

Pode mostrar-se que as condições de recorrência, definem de facto uma sucessão $s_n$ para a qual a *série* (7.22) *tem raio de convergência pelo menos igual ao mínimo dos raios de convergência das séries para* $a, b$ *e* $f$ *e que aquela série é solução do problema de valores iniciais em causa.*
Repare-se ainda que

$$s_0 = s(x_0) \quad \& \quad s_1 = s'(x_0)$$

### 7.3.7 Exercícios

1. Determine soluções para os seguintes problemas utilizando desenvolvimentos em série de potências. Estude a convergência das séries obtidas.
   (a) $y' = y + x;\ y(0) = 1$
   (b) $y' = y + x^2;\ y(0) = -2$
   (c) $y' = 2y + x - 1;\ y(0) = 1$
   (d) $(1-x)y' = 1 + x - y;\ y(0) = 0$
   (e) $xy'' + y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
   (f) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
   (g) $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
   (h) $y'' + y\cos(x) = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

2. Compare as soluções que obteve no número anterior com as que pode obter por métodos estudados nas subsecções anteriores.

3. Encontre soluções para a equação **de Hermite**

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

## 7.4 Singularidades

Pode acontecer que a equação diferencial não esteja na forma normal nem a ela se possa reduzir num certo intervalo. Por exemplo

$$xy' + y = 0 \tag{7.24}$$

não pode reduzir-se à forma normal em qualquer intervalo que contenha 0 e por isso se diz que 0 é **ponto singular**; no entanto a equação é bastante simples de resolver: basta observar que $xy' + y$ é a derivada em ordem a $x$ de $x \mapsto xy(x)$ e consequentemente o seu integral geral em $\mathbb{R}$ é dado por

$$xy = c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Uma observação mais atenta mostra que de facto $c$ terá de ser zero, pois $0y(0) = 0$; além disto, se $\varepsilon > 0$, a única função $\phi :] - \varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ tal que $x\phi(x) \equiv 0$ é a função nula, pelo que a única solução de (7.24), em intervalos que contenham zero é a função nula.

Em intervalos aos quais 0 não pertença a equação é redutível à forma normal e as funções $x \mapsto \frac{c}{x} \quad (c \in \mathbb{R})$ formam o integral geral de (7.24).

A utilização de séries de potências é um processo eficaz em muitos casos de singularidades, como se pode verificar nos exercícios seguintes

### 7.4.1 Exercícios

Encontre soluções para as equações diferenciais seguintes

1. (Equação **de Legendre**) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
2. (Equação **de Chebyshev**) $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
3. (Equação **de Bessel**) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
4. (Equação **de Laguerre**) $xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

## 7.5 Equações lineares de ordem $n$ redutíveis à forma normal

Uma equação diferencial linear de ordem $n$ redutível à forma normal cujos coeficientes são as funções $a_i :]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$ tem a forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; f(x), \tag{7.25}$$

sendo $f]a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f \equiv 0$ a equação diz-se **homogénea**.

### 7.5.1 Teoria geral

Comecemos por observar o seguinte teorema cuja demonstração fica a cargo do leitor.

**Teorema 7.5.1** *Dadas funções contínuas $a_i : ]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq n)$, a função $\Phi$ definida do espaço vectorial real das funções de classe $C^n$ no intervalo $]a, b[$, $C^n(]a, b[)$, para o espaço vectorial real das funções contínuas no mesmo intervalo, $C(]a, b[)$, dada por*

$$\Phi(y) \;=\; y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n(x)y$$

*é linear. Consequentemente*

1. *o integral geral da equação homogénea associada a (7.25), $\Phi(y) = 0$, é um subespaço vectorial de $C^n(]a, b[)$, precisamente o núcleo de $\Phi$, $Ker(\Phi)$.*

2. *Para qualquer função contínua $f \in C(]a, b[)$, o integral geral de (7.25) é da forma*
$$Ker(\Phi) + \eta$$
*sendo $\eta \in C(]a, b[)$ uma solução particular qualquer da equação, i.e., tal que $\Phi(\eta) = f$. Por outras palavras: o integral geral da equação (7.25) é a soma de uma solução particular com o integral geral da equação homogénea associada.*

Aceitamos sem demonstração o teorema

**Teorema 7.5.2** *Suponha-se que $x_0 \in ]a, b[$. Se as funções $a_i, f : ]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ são contínuas, para qualquer $(y_0, \cdots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ existe uma e uma só solução da equação (7.25), $y : ]a, b[ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^n$, satisfazendo as condições iniciais*

$$y(x_0) = y_0, \qquad y^{(i)}(x_0) = y_i \qquad\qquad (0 \leq i \leq n-1).$$

Uma consequência muito importante deste teorema:

**Teorema 7.5.3** *O integral geral da equação homogénea associada a (7.25) é um espaço vectorial real de dimensão $n$.*

**Dem.** De acordo com o teorema 7.5.1, o integral geral é o espaço vectorial $Ker(\Phi)$. Fixe-se $x_0 \in ]a, b[$. Considere-se mais a função linear $\Psi : C^n(]a, b[) \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\Psi(y) \;=\; (y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{(n-1)}(x_0)). \tag{7.26}$$

Tomando $f \equiv 0$, o teorema 7.5.2 diz exactamente que $\Psi$ é um isomorfismo de $Ker(\Phi)$ em $\mathbb{R}^n$, consequentemente $Ker(\Phi)$, ou seja o integral geral da equação homogénea em causa, tem dimensão $n$. $\square$

Em face deste resultado, encontradas $n$ soluções linearmente independentes de

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \;=\; 0, \tag{7.27}$$

digamos $\{y_1, \cdots, y_n\}$ também chamado **sistema fundamental de soluções**, e uma solução particular de (7.25), digamos $\eta$, o integral geral de (7.25) é dado por

$$\eta \;+\; \lambda_1 y_1 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n y_n \qquad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}). \tag{7.28}$$

**Definição 7.5.1** *O* ***Wronskiano*** *das funções $y_i : ]a,b[ \to \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n \in \mathbb{N})$, com derivadas pelo menos até à ordem $n-1$, é a função definida por*

$$W(y_1, \cdots, y_n)(x) \;=\; \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{7.29}$$

O Wronskiano é um instrumento para estudar a independência linear

**Teorema 7.5.4** *Se $\{y_1, \cdots, y_n\}$ são soluções de (7.27) no intervalo $]a,b[$, $x_0 \in ]a,b[$ e*

$$W(y_1, \cdots, y_n)(x_0) \;\neq\; 0, \tag{7.30}$$

*então $\{y_1, \cdots, y_n\}$ é um sistema fundamental de soluções de (7.27).*

**Dem.** Considere-se a função $\Psi$ definida em (7.26). A condição (7.30) implica que $\{\Psi(y_i)|\ 1 \le i \le n\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^n$; como $\Psi$ é um isomorfismo, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ é linearmente independente em $Ker(\Phi)$. $\square$

Observando que $x_0$ é arbitrário no teorema anterior, podemos concluir.

**Corolário 7.5.1** *Um conjunto $\{y_1, \cdots, y_n\}$ de soluções de (7.27) no intervalo $]a,b[$ é linearmente independente se e apenas se $W(y_1, \cdots, y_n)(x) \;\neq\; 0$ para qualquer $x \in ]a,b[$.*

## 7.5.2 Exercícios

1. Verifique que as funções indicadas são soluções da correspondente equação homogénea em $\mathbb{R}$ e decida se as funções são linearmente independentes.

   (a) $y_1 = x,\ y_2 = e^{rx}; \quad y''' - ry'' = 0; \qquad (r \in \mathbb{R})$

   (b) $y_1 = \cos x,\ y_2 = \mathrm{sen} x; \quad y'' + y = 0$

   (c) $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3; \quad y^{(4)} = 0$

   (d) $y_1 = \cos x,\ y_2 = \cosh x; \quad y^{(4)} - y = 0$

   (e) $y_1 = x^2,\ y_2 = \mathrm{sen} x; \quad y'' + y = 0$

2. Suponha que

$$y_1(x) \;=\; x^2, \quad \& \quad y_2(x) \;=\; x|x| \qquad (x \in \mathbb{R})$$

   (a) Verifique que $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.

   (b) Verifique que $W(y_1, y_2)(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

   (c) Há contradição com o corolário 7.5.1?

### 7.5.3 Equações lineares de coeficientes constantes

Se os coeficientes da equação (7.25) são constantes ficam-lhe associados um **polinómio característico**

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n \tag{7.31}$$

e uma **equação característica**

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n \; = \; 0. \tag{7.32}$$

#### Equações homogéneas

Pode encontrar-se um sistema fundamental de soluções da equação homogénea à custa das raizes do polinómio característico (obviamente as soluções da equação característica).

**Teorema 7.5.5** *Sejam $r_i \quad (1 \leq i \leq k)$ as raízes reais (se existirem) do polinómio característico com multiplicidades respectivamente $m_i \quad (1 \leq i \leq k)$, e $a_j + \mathbf{i} b_j \quad (1 \leq j \leq s)$ as suas raízes complexas (se existirem) com multiplicidades respectivamente $M_j \quad (1 \leq i \leq k)$. As funções da forma*

$$\begin{cases} y_p(x) \; = \; x^p e^{r_i x} & (0 \leq p \leq m_i ; 1 \leq i \leq k) \\ w_p(x) \; = \; x^p e^{a_j x} \cos(b_j x) & (0 \leq p \leq M_j ; 1 \leq j \leq s) \\ z_p(x) \; = \; x^p e^{a_j x} \mathrm{sen}(b_j x) & (0 \leq p \leq M_j ; 1 \leq j \leq s). \end{cases} \tag{7.33}$$

*formam um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada a 7.25.*

#### Equações não homogéneas. Variação de constantes

Ainda é possível definir condições que nos permitem obter uma solução particular da equação 7.25, mesmo no caso em que $f \not\equiv 0$.

**Teorema 7.5.6** *Suponha-se que $\{y_1, \cdots, y_n\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada a (7.25) em algum intervalo $I := ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ e que $x_0 \in I$. Defina-se, para $1 \leq k \leq n;\ x \in I$,*

$$W_k(x) \; = \; \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & 0 & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \underbrace{f(x)}_{k} & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$u_k(x) \; = \; \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(t)}{W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(t)} dx.$$

*A função*

$$\eta(x) \; := \; \sum_{k=1}^{n} u_k(x) y_k(x) \qquad (x \in I)$$

*é solução de (7.25).*

**Dem. (para equações de segunda ordem)**
Suponhamos que $\{y_1, y_2\}$ é sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada a

$$y'' + ay' + by \;=\; f(x). \tag{7.34}$$

Procuramos uma solução desta equação (7.34) de forma

$$\eta(x) \;:=\; u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

onde as $u_i$ sejam funções diferenciáveis. Terá então de verificar-se o seguinte

$$(u_1y_1 + u_2y_2)'' \;+\; a(u_1y_1 + u_2y_2)' \;+\; b(u_1y_1 + u_2y_2) \;=\; f.$$

Desenvolvendo e agrupando adequadamente virá

$$\begin{aligned} u_1(y_1'' + ay_1' + by_1) \;&+\; u_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + (y_1u_1'' + y_2u_2'') \\ &+\; 2(y_1'u_1' + y_2'u_2') + a(y_1u_1' + y_2u_2') \\ &=\; f \end{aligned}$$

Como as $y_i$ são soluções da equação homogénea, esta equação é equivalente a

$$(y_1u_1'' + y_2u_2'') \;+\; 2(y_1'u_1' + y_2'u_2') \;+\; a(y_1u_1' + y_2u_2') \;=\; f,$$

por sua vez equivalente a

$$(y_1u_1' + y_2u_2')' \;+\; (y_1'u_1' + y_2'u_2') \;+\; a(y_1u_1' + y_2u_2') \;=\; f; \tag{7.35}$$

se

$$y_1u_1' + y_2u_2' \;=\; 0,$$

a equação (7.35) reduz-se a

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' \;=\; f.$$

bastar-nos-á então que as funções $u_i$ verifiquem, para todos os $x \in I$, o sistema

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) \;+\; y_2(x)u_2'(x) \;=\; 0 \\ y_1'(x)u_1'(x) \;+\; y_2'(x)u_2'(x) \;=\; f(x). \end{cases}$$

Este é um sistema linear em $u_1'(x), u_2'(x)$ que se pode representar

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 0 \\ f(x). \end{bmatrix}$$

Como as $y_i$ são linearmente independentes

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \;=\; W(y_1, y_2)(x) \;\neq\; 0$$

pelo teorema 7.5.4 e os sistemas são de Cramer e terão solução

$$u_1'(x) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)} \qquad u_2'(x) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

Estas equações serão satisfeitas se

$$u_1(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{W_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx \qquad u_2(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \frac{W_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

□

# Capítulo 8

# Sistemas lineares de equações diferenciais (forma normal)

## 8.1 A primeira ordem é suficiente

Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, na forma normal, é um conjunto de equações

$$\begin{cases} y_i' &= f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \\ & 1 \le i \le n, \end{cases} \tag{8.1}$$

onde cada $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Uma condição inicial terá a forma

$$y_i(x_0) = \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n)$$

Uma solução do sistema num certo intervalo $I := ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$ será um conjunto de funções diferenciáveis $\phi_i : ]a, b[ \to \mathbb{R} \quad (1 \le i \le n)$ tais que

$$\begin{cases} \phi_i'(x) &= f_i(x, \phi_1(x), \cdots, \phi_n(x)) \\ (x \in I) & (1 \le i \le n), \end{cases}$$

Se o sistema envolver derivadas de pode superior, pode reduzir-se à primeira ordem por substituição adequada das incógnitas. Por exemplo

$$\begin{cases} y_1'' &= xy_1 + y_1' - e^x y_2 + x \\ y_2'' &= y_1' - y_2' \end{cases}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} y_1' &= u_1 \\ y_2' &= u_2 \\ u_1' &= xy_1 + u_1 - e^x y_2 + x \\ u_2' &= u_1 - u_2 \end{cases}$$

## 8.2 Sistemas lineares de primeira ordem na forma normal

### 8.2.1 Generalidades

Salvo observação em contrário, as funções $f$ são contínuas e tão diferenciáveis quanto necessário.
Vamos tratar apenas sistemas da forma

$$y' \;=\; f(x,y) \;=\; A(x)y + B(x) \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= (y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\
y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i \le n) \\
y_0 &= (y_{01}, \cdots, y_{0n}) \\
a_{ij} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i, j \le n) \\
B(x) &= (b_1(x), \cdots, b_n(x)) \\
b_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i \le n;\; n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

**Proposição 8.2.1** *Uma equação diferencial linear*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} \;=\; b(x)$$

*é equivalente ao sistema linear*

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \cdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

*com*

$$y_i \;=\; y^{(i-1)} \qquad (1 \le i \le n)$$

**Teorema 8.2.1** *O integral geral de* (8.2) *é o espaço afim de dimensão $n$ soma do integral geral $h$ da equação homogénea*

$$y' = A(x)y \tag{8.3}$$

*com uma solução particular $\eta$*

$$\eta' = A(x)\eta + B(x). \tag{8.4}$$
$$y' = h + \eta \tag{8.5}$$

**Teorema 8.2.2** *Sejam quais forem $(x_0, y_0) \in I \times \Omega$, o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = A(x)y + B(x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases} \tag{8.6}$$

*tem uma e só uma solução.*

**Definição 8.2.1** *Se $\phi_1, \cdots, \phi_n$ são soluções linearmente independentes do sistema homogéneo* (8.3) *a matriz $n \times n$*

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(x) & \cdots & \phi_{n1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{1n}(x) & \cdots & \phi_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

*diz-se uma* ***matriz fundamental de soluções****.*

**Proposição 8.2.2** *Se $\begin{bmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções, o integral geral de* (8.3) *é dado por*

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{bmatrix} C \qquad (C \in \mathbb{R}^n)$$

**Teorema 8.2.3** ***(Variação de constantes)***
*Considere-se o sistema (8.2), sejam $\Phi$ uma matriz fundamental de soluções do sistema homogéneo (8.3) e $C : I \to \mathbb{R}^n$ uma função tal que*

$$C' = \Phi^{-1}B. \tag{8.7}$$

*A solução de (8.2) é da forma*

$$y = \Phi C$$

**Dem.**

$$\begin{aligned} \Phi' &= A\Phi \\ \Phi' C &= A\Phi C \\ (\Phi C)' &= \phi' C + \Phi C' \\ &= A(\Phi C) + B \end{aligned}$$

Note-se que $C$ já inclui uma constante arbitrária $n$-dimensional . □

**Teorema 8.2.4**

1. *Se $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}$, todos os elementos de $C$ são distintos e $v \in \mathbb{R}^n$, $\{e^{\lambda x} v |\ \lambda \in C\}$ é linearmente independente.*

2. *Se $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ e é linearmente independente também $\{e^{\lambda x} v |\ v \in \mathcal{B}\}$ é linearmente independente.*

### 8.2.2 Matriz $A$ constante

#### Multiplicidades iguais

**Teorema 8.2.5** *Suponha-se que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathbb{R}^n$. A função $x \mapsto e^{\lambda x} V$ é solução não trivial de $y' = Ay$ sse $\lambda$ é valor próprio de $A$ associado ao vector próprio $V \neq 0$.*

**Corolário 8.2.1** *Se $A$ tem $n$ valores próprios reais distintos $\lambda_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e os $V_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ $(1 \leq i \leq n)$ constituem uma base de vectores próprios associada, uma matriz fundamental de soluções será*

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} V_1 & \cdots & e^{\lambda_n x} V_n \end{bmatrix}$$

**Corolário 8.2.2** *Se $A$ tem valores próprios complexos simples $a_j \pm \mathbf{i}\beta_j$ $(1 \leq j \leq k \leq n)$, com vectores próprios (não nulos) associados respectivamente $V_j = U_j + \mathbf{i}W_j$ $(U_j, W_j \in \mathbb{R}^n)$ e $\overline{V_j}$, e valores próprios reais $\lambda_p$ $(1 \leq p \leq m)$ simples distintos, de modo que*

$$2k \ + \ m \ = \ n$$

*cada valor próprio real dará lugar à solução $e^{\lambda_p x}$ e cada valor complexo dará lugar às soluções*

$$e^{a_j x}\big(\cos(bx)U_j - \operatorname{sen}(b_j x)W_j\big) \qquad e^{a_j x}\big(\cos(bx)U_j + \operatorname{sen}(b_j x)W_j\big).$$

*O conjunto de todas as soluções descritas é um sistema fundamental.*

### Multiplicidade algébrica superior

Quando as multiplicidades do valor próprio $\lambda$ são distintas, procurar-se-ão também soluções da forma

$$\phi(x) \ = \ e^{\lambda x}(V_0 + xV_1 + \cdots + x^k V_k) \quad \& \quad V_i \in \mathbb{R}^n \qquad (1 \leq i \leq k)$$

para valores adequados de $k$

1. Determinam-se as soluções correspondentes a cada valor próprio de multiplicidades iguais (se existirem) – uma função $e^{\lambda x}V$ ou por cada valor próprio $\lambda$ e vector próprio associado independente $V$, com adaptação adequada no caso de valores próprios imaginários.

2. $\lambda$ é valor próprio com multiplicidade algébrica superior à multiplicidade geométrica $m$

   (a) $\mathcal{B}$ uma base do espaço próprio associado a $\lambda$.

   (b) $V \in \mathcal{B}$

   (c) $x \mapsto e^{\lambda x}V$

   (d) $V_k := V$ & $(A - \lambda I)V_{k-m} = (k - m + 1)V_{k-m+1} \quad (1 \leq m \leq k)$

### Exponencial de matriz

$$e^{xA} \ := \ I + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} A^n$$

**Teorema 8.2.6** *$e^{xA}$ é matriz fundamental de soluções da equação homogénea (8.3).*

### 8.2.3 Exercícios

Resolva as seguintes equações diferenciais

1. $y'' + 4y = \cos x$
2. $y'' + 9y = \mathrm{sen}(3x)$
3. $y'' + y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$
4. $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + x^2$
5. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
6. $y'' + y = 2\sin x \sin(2x))$
7. $6y'' + 5y' - 6y = x$
8. $y'' + y = \sec x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$
9. $4y'' - y = e^x$
10. $y''' - y' = x$
11. $y^{(4)} + 16y = \cos x$
12. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = e^x$
13. $y^{(4)} - y = \cos x$

## 8.3 Sistemas lineares

Quando existem funções $b_i,\ a_{ij} : I \to \mathbb{R} \quad (1 \leq\ i, j \leq n)$ tais que

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) \ = \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + b_i(x) \qquad (1 \leq\ i \leq n)$$

o sistema diz-se linear; definindo $Y \ := \ (y_1, \cdots, y_n)$, $A(x) \ := \ [a_{ij}(x)]$, $B(x) := (b_1(x)), \cdots, b_n(x)$, o sistema (8.1) toma a forma

$$Y' \ = \ A(x)Y + B(x). \tag{8.8}$$

Por exemplo, uma equação linear de ordem $n$ pode formalizar-se como um sistema linear de primeira ordem substituindo $y_1 := y,\ y_2 := y',\ \cdots, y_n := y^{(n-1)}$,

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_1' = y_3 \\ \cdots \\ y_n' = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x) y_{i+1} + f(x) \end{cases}$$

ou

$$Y' \ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & a_{n-2}(x) & -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

#### Coeficientes constantes

Se todas as coordenadas da matriz $A(x)$ forem funções constantes, pode por exemplo utilizar-se a Transformada de Laplace para resolver problemas de valores iniciais com condição inicial em 0: se entendermos

$$Y(0) := \ (y_1(0), \cdots, y_n(0)) \quad L[Y] \ := \ (L[y_1], \cdots, L[y_n]) \quad L[B] \ := \ (L[b_1], \cdots, L[b_n])$$

O sistema (8.8) toma a forma

$$sL[Y](s) - Y(0) \;=\; A \times L[Y](s) + L[B](s)$$

e quando $s$ não é valor próprio de $A$

$$L[Y](s) \;=\; (sI - A)^{-1} \times (Y(0) + L[B](s))\,;$$

fórmula que nos dá transformadas definidas para qualquer $s$ maior que o máximo dos valores próprios de $A$. Por inversão, podem obter-se soluções $Y$.

Se $A$ é diagonalizável, digamos que os seus valores próprios são $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, eventualmente repetidos de acordo com a multiplicidade geométrica, e $T$ é uma matriz diagonalizadora, i.e., por exemplo,

$$T^{-1}AT \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

a substituição $Y = TZ$, com $Z = (z_1, \cdots, z_n)$, reduz o sistema a outro equivalente

$$Z' \;=\; (T^{-1}AT)Z + T^{-1}B(x)$$

onde as equações são explicitamente da forma

$$z_i' \;=\; \lambda_i z_i + \beta_i(x) \quad (1 \leq i \leq n) \qquad (\beta_1(x), \cdots, \beta_n(x)) = T^{-1}B(x)$$

# Capítulo 9

# Aproximações sucessivas e existência de solução

## 9.1 Continuidade (muito) elementar

Qualquer função $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tem duas componentes $g_1, g_2 : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tais que

$$g(x) \;=\; (g_1(x), g_2(x)) \qquad (x \in A).$$

**Definição 9.1.1**

1. *Uma função $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diz-se **contínua em** $a \in A$ se qualquer das condições (equivalentes) seguintes se verificar*

   (a) *Para qualquer sucessão numérica $x_n \to a$, tal que $x_n \in A \quad (n \in \mathbb{N})$, se tem $g_1(x_n) \to g_1(a)$ e $g_2(x_n) \to g_2(a)$*

   (b) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall (x, y) \in D \quad [|x - a| < \varepsilon \Rightarrow \|g(x) - g(a)\| < \delta]$;

   (c) *As funções coordenadas $g_i$ são contínuas em $a$.*

   *A função $g$ será contínua se o for em todos os pontos de $A$.*

2. *Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se **contínua em** $(a, b) \in D$ se qualquer das condições (equivalentes) seguintes se verificar*

   (a) *Para quaisquer sucessões numéricas $x_n \to a_1$, $y_n \to a_p$, tais que $(x_n, y_n) \in D \quad (n \in \mathbb{N})$, se tem $f(x_n, y_n) \to f(a, b)$*

   (b) $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall (x, y) \in D \quad [\|(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x, y) - f(a, b)\| < \delta]$;

   *A função $f$ será contínua se o for em todos os pontos de $D$.*

É fácil demonstrar que

**Teorema 9.1.1** *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \to D$ são funções contínuas, então $f \circ g : A \to \mathbb{R}^q$ é contínua.*

### 9.1.1 Exercícios

1. Demonstre o teorema 9.1.1.
2. Dê exemplos de
   (a) Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e descontínua em $(0,0)$
   (b) Duas funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ambas descontínuas, mas cuja composição seja contínua.

## 9.2 Existência e unicidade de solução de um problema de Cauchy

**Lema 9.2.1** *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha-se que $(0, y_0) \in D$. O problema de valores iniciais*

$$\begin{cases} y' &= f(x,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

*é equivalente à equação integral*

$$y(x) \ = \ y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds \tag{9.2}$$

**Dem.** Suponhamos que $y$ é solução de (9.1) em $]a, b[$. Para qualquer $x \in ]a, b[$,

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + \int_0^x y'(t)dt \\ &= y_0 + \int_0^x f(s, y(s))dt. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $y$ é solução do problema integral (9.2), como $s \mapsto f(s, y(s))$ é contínua (definição 9.1.1.1c) e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds\right) \\ &= f(x, y(x)) \end{aligned}$$

□

**Lema 9.2.2** *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, $y_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sucessão de funções e $y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tais que*

$$\begin{array}{rl} \forall x \in I \ \forall n \in \mathbb{N} & (x, y_n(x)) \in D \\ \forall x \in I & (x, y(x)) \in D \\ y_n \ converge \ uniformemente & para \ y \ em \ I \\ f(x, y_n(x)) \ converge \ uniformemente & para \ f(x, y(x)) \ em \ I \end{array}$$

*Nestas condições* $y(x) \ = \ y_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds \qquad (x \in I)$

**Dem.** Esta é uma consequência praticamente imediata do lema 5.1.1.3, tomando $f_n(x) := f(x, y_n(x))$. □

**Teorema 9.2.1** *Suponha que*

$$D = ]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[\subseteq \mathbb{R}^2,$$

$f : D \to \mathbb{R}$ *é contínua e*

$$\sup\{|f(x,y)|\ (x,y) \in D\} \leq M, \tag{9.3}$$

$f$ *é* ***Lipschitziana*** *na segunda variável, i.e., para certo* $L \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[\ \forall y, z \in ]-\beta, \beta[ \quad |f(x,y) - f(x,z)| \leq L|y - z|, \tag{9.4}$$

$$M\alpha < \beta \qquad \& \qquad L\alpha < 1. \tag{9.5}$$

*Nestas condições, a sucessão* $y_n$ *de funções definidas em* $]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ *dada por*

$$y_1(x) \equiv 0 \tag{9.6}$$

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(s, y_n(s))ds \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{9.7}$$

*converge uniformemente para uma solução* $y :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{9.8}$$

*e essa solução é a única tal que* $\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \quad (x, y(x)) \in D$.

**Dem.** Vejamos em primeiro lugar que

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[\forall n \in \mathbb{N} \quad (x, y_n(x)) \in D.$$

Isto é

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[\forall n \in \mathbb{N} \quad |y_n(x))| < \beta. \tag{9.9}$$

Como $y_1(x) = 0$, (9.9) é trivialmente válida; se for verdadeira para $n$ tem-se

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)| &= \left|\int_0^x f(s, y_n(s))ds\right| \\ &\leq \text{máx}\{|f(s, y_n(s))| :\ s \text{ está entre } 0 \text{ e } x\}|x - 0| \\ &< \sup\{|f(s,t)| :\ (s,t) \in D\}\alpha \\ &\leq M\alpha \\ &< \beta \quad (9.13), \end{aligned}$$

consequentemente $(x, y_{n+1}(x)) \in D$; pelo Princípio de Indução, (9.9) está provada.

Observando que, para qualquer $n > 1$ e qualquer $x \in ]-\alpha, \alpha[$,

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_0^x f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq L \sup\{|y_n(x) - y_{n-1}(x)| : \ |x| < \alpha\}\alpha \end{aligned}$$

podemos concluir, por indução, que para qualquer $n > 1$,

$$\sup\{|y_{n+1}(x) - y_n(x)| : \ |x| < \alpha\} \ \leq \ L\alpha \sup\{|y_n(x) - y_{n-1}(x)| : \ |x| < \alpha\}$$

e daí que, para qualquer $n \geq 1$,

$$\sup\{|y_{n+1}(x) - y_n(x)| : \ |x| < \alpha\} \ \leq \ \beta(L\alpha)^{n-1}$$

ou ainda

$$\forall x \in ]-\alpha, \alpha[ \quad |y_{n+1}(x) - y_n(x)| \ \leq \ \beta(L\alpha)^{n-1}. \tag{9.10}$$

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta(L\alpha)^{n-1} \ = \ \beta \sum_{n=1}^{\infty} (L\alpha)^{n-1} \ = \ \frac{\beta}{1 - L\alpha} \in \mathbb{R},$$

Pelo critério de Weierstrass (teorema 5.1.2), a série de termo geral $y_{n+1}(x) - y_n(x)$ converge uniformemente para uma função contínua, $y : ]-\alpha, \alpha[ \to \mathbb{R}$ e tem-se

$$y_n(x) \ = \sum_{i=2}^{n} y_n(x) - y_{n-1}(x) \ \to \ y(x) \quad (|x| < \alpha)$$

uniformemente, o que também implica ser uniforme a convergência $f(x, y_n(x)) \to f(x, y(x))$ em $]-\alpha, \alpha[$ pois

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \ \leq \ L|y_n(x) - y(x)|.$$

Pode então aplicar-se o lema9.2.2 e concluir

$$y(x) = \int_0^x f(s, y(s)) ds.$$

Finalmente, em face do lema 9.2.1, só resta demonstrar que $y$ é a única solução tal que $(x, y(x)) \in D \quad (|x| < \alpha)$. Ora se $z : ]-\alpha, \alpha[ \to ]-\beta, \beta[$ é outra solução do mesmo problema tem-se, para qualquer $x \in ]-\alpha, \alpha[$,

$$\begin{aligned} |y(x) - z(x)| &= \left| \int_0^x f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds \right| \\ &\leq (L\alpha) \sup\{|y(x) - z(x)| : \ |x| < \alpha\} \end{aligned}$$

ou seja

$$\sup\{|y(x) - z(x)| : \ |x| < \alpha\} \ \leq (L\alpha) \sup\{|y(x) - z(x)| : \ |x| < \alpha\}.$$

Como $L\alpha < 1$, tal só é possível se $\sup\{|y(x) - z(x)| : \ |x| < \alpha\} = 0$, i.e., se $y = z$.
□

**Teorema 9.2.2** *Suponha que*

$$D \;=\; ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\times]y_0-\beta, y_0+\beta[\subseteq \mathbb{R}^2,$$

$f : D \to \mathbb{R}$ *é contínua e*

$$\sup\{|f(x,y)|\ (x,y)\in D\} \leq M, \tag{9.11}$$

$f$ *é Lipschitziana na segunda variável, i.e., para certo* $L \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\ \forall y,z \in ]-\beta,\beta[\quad |f(x,y)-f(x,z)| \leq L|y-z|, \tag{9.12}$$

$$M\alpha \;<\; \beta \qquad \& \qquad L\alpha \;<\; 1. \tag{9.13}$$

*Nestas condições, a sucessão* $y_n$ *de funções definidas em* $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\to \mathbb{R}$ *dada por*

$$y_0(x) \;\equiv\; y_0 \tag{9.14}$$
$$y_{n+1}(x) \;=\; y_0 + \int_0^x f(s, y_n(s))ds \quad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{9.15}$$

*converge uniformemente para uma solução* $y : ]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\to \mathbb{R}$ *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' \;=\; f(x,y) \\ y(x_0) \;=\; y_0 \end{cases} \tag{9.16}$$

*e essa solução é a única tal que* $\forall x \in ]x_0-\alpha, x_0 * \alpha[\quad (x, y(x)) \in D.$

**Dem.** Nas condições do enunciado defina-se

$$\begin{aligned} F(x,u) &= f(x+x_0, u+y_0) \quad (|x|<\alpha; |u|<\beta) \\ u(x) &= y(x+x_0)-y_0 \quad (|x|<\alpha) \end{aligned}$$

e observe-se que o problema (9.2) fica equivalente a

$$\begin{cases} u' \;=\; F(x,u) \\ u(0) \;=\; 0 \end{cases}$$

com $|x| < \alpha,\ |u| < \beta$. Aplique-se o teorema 9.2.1 para concluir a existência e unicidade da solução $y$ da existência e unicidade da solução $u$, já que

$$y(x) = u(x-x_0) + y_0 \in ]y_0-\beta, y_0+\eta[\quad (|x-x_0| < \alpha).$$

□

## 9.3 Sistemas de equações (forma normal)

Com reduções semelhantes às feitas a propósito da formulação (8.8), um sistema como definido em (8.1) pode formular-se

$$Y' \;=\; F(x, Y) \quad (x \in I) \tag{9.17}$$

Onde $F : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e se procuram soluções $Y : I \to \mathbb{R}^n$. Generalizando as definições da secção anterior, essencialmente por substituição do valor absoluto $|\cdot|$ pela norma euclidiana $\|\cdot\|$ na definição de continuidade para adaptar a $F$, e considerando que uma condição inicial é agora multidimensional, $y_0 = Y(0) \in \mathbb{R}^n$, os teoremas correspondentes garantem condições para existência e unicidade de soluções de problemas de Cauchy para sistemas de equações diferenciais ordinárias.

# Bibliografia


[1] **Lars V., Ahlfors:** *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979 (printing 1988).

[2] **Apostol, Tom M.:** *Calculus, Vol. 1*, John Wiley & Sons, 1967.

[3] ———— **:** *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974.

[4] **Boulos, Paulo:** *Cálculo Diferencial e Integral* Vol. 1, 1999

[5] ———— **:** *Pré-Cálculo*, Makron, 1999

[6] **Coddington, Earl A.:** *Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1961.

[7] **Dias Agudo, F. R.:** *Equações Diferenciais*, UBI, 1990.

[8] **Lima, Elon Lages:** *Curso de Análise, Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, 2002.

[9] **Goode, S. W.:** *An Introduction to Differential Equations and Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1991.

[10] **Lang, S.:** *Analysis I*, Addison-Wesley, 1968.

[11] **Lima, Elon Lages:** *Curso de Análise, Vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, 2002.

[12] **Rabenstein, Albert L.:** *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Acad. Press 1972.

[13] **Spivak, Michael:** *Calculus*, Reverté 1975.

# Índice