Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II **2010/11**

Soluções e sugestões para os exercícios

Vítor Neves

Folha 1

1. (a) Convergência pontual e não uniforme

   (b) Convergência pontual e não uniforme (relacione com 3(a))

   (c) i. Convergência pontual e não uniforme

   ii. Convergência uniforme

   (d) Convergência pontual e não uniforme

2. Qualquer conjunto finito de números reais tem máximo. Qual o conjunto que interessa utilizar?

3. (a) Recorde o comportamento da sucessão numerador.

   (b) Observe que $\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$

   (c) Recorde os teoremas relevantes.

4. (a) Estude a variação de cada f_n.

   (b) Ambos os limites são zero

   (c) Convergência pontual e não uniforme

5. De nenhum resultado apresentado se pode deduzir que a convergência uniforme de uma sucessão de funções diferenciáveis é suficiente para a convergência da sucessão de derivadas.

6. (a) Duas sucessões que diferem apenas num número finito de termos são ambas convergentes para o mesmo limite ou são ambas divergentes.

   (b) $\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} \neq 0$.

   (c) Convergência pontual e não uniforme

7. $|\operatorname{sen} u| \leq 1 \quad \& \; x^4 \geq 0 \qquad (u, x \in \mathbb{R})$

8. (a) $x^2 \geq 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$
   (b) $\int \frac{1}{k^2+x^2} dx \ = ?$
   (c) *A derivada de uma soma com um número finito de parcelas deriváveis é a soma das derivadas das parcelas.*
   (d) Como diferem as primitivas de uma mesma função?
9. inspire-se nos dois exercícios imediatamente anteriores.

Folha 2

1. (a) Raio de convergência = 1 Domínio de convergência =]0,2[
   (b) Raio de convergência = 2 Domínio de convergência =]-3,1[
   (c) Raio de convergência = $+\infty$ Domínio de convergência (absoluta) = $\mathbb{R}$
   (d) Raio de convergência = 10 Domínio de convergência =]-8,12[
   (e) Raio de convergência = $+\infty$ Domínio de convergência (absoluta) = $\mathbb{R}$
   (f) Raio de convergência = $\frac{1}{2}$ Domínio de convergência = $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$
   (g) Raio de convergência = 4 Intervalo de convergência = $]-4, 4[$
   (Domínio de convergência = ? Procure critérios mais finos que o de convergência absoluta de Cauchy)
   (h) Raio de convergência = 3 Domínio de convergência =]-3,3[
   (i) Raio de convergência = $\sqrt[3]{2}$ Domínio de convergência = $\left]-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right[$
   (j) Raio de convergência = 0 Domínio de convergência = $\{0\}$
   (k) Alínea inexistente
   (l) Raio de convergência = $+\infty$ Domínio de convergência (absoluta) = $\mathbb{R}$
   (m) Raio de convergência = $+\infty$ Domínio de convergência (absoluta) = $\mathbb{R}$
   (n) Raio de convergência = 1 Domínio de convergência = [2,4[
   (o) Raio de convergência = $\frac{1}{3}$ Domínio de convergência = $[\frac{4}{3}, 2]$
   (p) Raio de convergência = $\sqrt{2}$ Domínio de convergência = $\left]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right[$
2. Resolva o exercício com cosh e senh respectivamente em vez de cos e sen.
3. (a) Comece por diferenciar.
   (b) Comece por diferenciar.
   (c) Comece por integrar.
4. Pretendem-se séries de McLaurin
   (a) Comece por diferenciar em $]-1, 1[$
   (b)
   $$(1+x)^\alpha \ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)}{n!} x^n \qquad (|x| < 1)$$
   (c) Comece por diferenciar
   (d) Utilize a alínea (b)

(e) $\operatorname{senh} x \;=\; \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(f) Observe a alínea anterior

(g) $e^{-x} \;=\; e^X$ para $X = ?$.

(h) Inspire-se na alínea anterior.

(i) A multiplicação é distributiva relativamente à adição.

(j) Inspire-se nas alíneas (c) e (g).

(k) Alínea inexistente

(l) $\frac{1+x}{1-x} \;=\; -\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)$

(m) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) \;=\; ?$

(n) $e^{u+v} \;=\; e^u \cdot e^v \quad (u, v \in \mathbb{R})$.

(o) Inspire-se na alínea (a).

(p) Procure "a" série e onde esta é uniformemente convergente.

(q) Procure "a" série e onde esta é uniformemente convergente.

(r) Procure "a" série e onde esta é uniformemente convergente.

(s) Procure "a" série e onde esta é uniformemente convergente.

Folha 3

$\log\left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R})$

1. (a) i. Observe a definição

   ii. $x = x - 0$

   iii. Para cada grau e cada centro, o polinómio de Taylor de uma função é único.

   (b) **Uma forma.** Calcule as derivadas $f^{(i)}(1)$ necessárias e substitua na definição: obterá um polinómio de grau 4 em $x-1$.

   Outra forma. Repare que

$$\begin{aligned}\log x \;=\; \log\big(1+(x-1)\big) \;&=\; \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \\ &=\; \lim_n T_1^n \log(x) \qquad (0 < x < 2)\end{aligned}$$

   (c) $T^3_{\frac{1}{2}} f(x) \;=\; \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{8}{9\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)3$

   (d) Todos os polinómios pedidos são nulos.

2. (Pede-se apenas um majorante, não necessariamente o melhor)

   (a) Zero

   (b) $\frac{1}{5!}\frac{4!}{\left(\frac{9}{10}\right)^5}\left(\frac{2}{10}\right)^5$

   (c) $\frac{1}{2\times 5^4} \quad \left(< \; 10^{-3}\right)$

   (d) Majore a própria função.

3. A linerarização deveria mais propriamente designar-se "afinização" se bem que este é um termo muitíssimo pouco utilizado. $A(x) =$ *linearização*; $Q(x) =$ *aproximação quadrática*

   (a) $A(x) = -2+3x \qquad Q(x) = 1-3x+3x^2$
   (b) $A(x) = 1+x \qquad Q(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}$
   (c) $A(x) = -1+x \qquad Q(x) = -\frac{3}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2$
   (d) $A(x) = 2-x \qquad Q(x) = 1+x-x^2$
   (e) $A(x) = \sqrt{2} \qquad Q(x) = \sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}x^2$
   (f) $A(x) = 1 \qquad Q(x) = 1+\frac{1}{2}x^2$

4. Recorde

   I. Dito algo informalmente: *o integral definido de uma série (de funções) uniformemente convergente é a série dos integrais das parcelas*

   II. A demonstração do critério de Leibniz para séries numéricas alternadas.

   (observe que está também perante aspectos, possivelmente novos para si, das razões de validade de certos limites em indeterminações.)

5. Comece por observar que

$$x^{-x} \;:=\; e^{-x\log x} \qquad (x>0).$$

   (Tal permite-lhe, entre outras coisas, uma nova visão do porquê de

$$\lim_{t\to 0^+} t^t \;=\; 1.)$$

   Procure fórmulas de recorrência convenientes.

Folha 4

1. (a) Use a definição
   (b) Por alguma razão se chamará "Teorema Fundamental"...

2. (a) Os primeiros membros devem ser conhecidos.
   (b) Que significa um conjunto ser ortonormado?

3. (a) $T=2\pi, \quad \forall n\in\mathbb{N}_0\; a_n=0, \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$
   (b) $T=2\pi, \quad a_0=\frac{\pi}{2}, \quad \forall n\in\mathbb{N}\;\left[a_n=0 \quad \& \quad b_{2n-1}=0, \quad \& \quad b_{2n}=\frac{-1}{n}\right]$
   (c) $T=2, \quad f(t)\sim 1$
   (d) $T=2, \quad a_0=1, \quad \forall n\in\mathbb{N}\;\left[a_n=b_{2n}=0 \quad \& \quad b_{2n-1}=\frac{2}{(2n-1)\pi}\right]$
   (e) $T=2, \quad a_0=\frac{8}{3}, \quad \forall n\in\mathbb{N}\;\left[a_n=\frac{4}{n^2\pi^2} \quad \& \quad b_n=\frac{-4}{n\pi}\right]$
   (f) $\begin{cases} T=2, \quad a_0=2 \quad \forall n\in\mathbb{N}\;\left[a_n=\int_0^1\left[(-1)^n(s+1)^2-s^2\right]\cos(n\pi s)ds\right] \\ \forall n\in\mathbb{N}\;\left[b_n=\int_0^1\left[(-1)^n(s+1)^2-s^2\right]\operatorname{sen}(n\pi s)ds\right]\end{cases}$

(g) $T = 4$, $a_0 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left[a_{2n-1} = \frac{-8}{[(2n-1)\pi]^2} \quad \& \quad a_{2n} = b_n = 0\right]$

(h) $T = 4$, $a_0 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left[a_{2n-1} = \frac{(-1)^n 4}{(2n-1)\pi} \quad \& \quad b_n = 0\right]$

(i) $\frac{\text{senh}(\pi)}{\pi} \left\{\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} [\cos(nx) - n\text{sen}(nx)]\right\}$

4. (a) Exercícios nº 3 (f_p)

(a) $f_p(t) = |t| \quad |t| \leq \pi$

(b) $f_p(t) = |t| \quad |t| \leq \pi$

(c) $f_p = f$

(d) $f_p(t) = 1 \quad |t| \leq 1$

(e) $f_p(t) = t^2 \quad |t| \leq 1$

(f) $f_p(t) = -t^2 \quad |t| \leq 1$

(g) $f_p = f$

(h) $f_p = f$

(i) $f_p(t) = \begin{cases} e^{-t} & -\pi \leq t \leq 0 \\ e^t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$

(b) Exercícios nº 3 (f_i)

(a) $f_i = f$

(b) $f_i(t) = t \quad -\pi < t \leq \pi$

(c) $f_i(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$

(d) $f_i(t) = \begin{cases} -1 & -1 < t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$

(e) $f_i(t) = \begin{cases} -t^2 & -1 < t \leq 0 \\ t^2 & 0 < t \leq 1 \end{cases}$

(f) $f_i(t) = \begin{cases} -t^2 & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 & -1 < t < 0 \end{cases}$

(g) $f_i(t) = t \quad -2 < t \leq 2$

(h) $f_i(t) = \begin{cases} 1 & x \in]-2,-1[\cup]0,1] \\ -1 & x \in [-1,0[\cup]1,2] \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

(i) $f_i(t) = \begin{cases} -e^{-t} & -\pi \leq t \leq 0 \\ e^t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$

5. Procure pontos adequados para utilizar o teorema da convergência pontual.

6. Comece por experimentar com séries já obtidas.

7. Vale o seguinte teorema:

Sejam (a_n) e (b_n) sucessões de números reais. Suponha que as somas parciais $\sum_{k=1}^{n} a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ são limitadas e $b_n \to 0$ a decrescer; então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Recorde as séries de Dirichlet.

Folha 5

1. $(a)\quad y^2 - x^2 - 2xyy' = 0 \qquad (b)\quad yy'' = (y')^2$ ou $y\log(y') = xy'$

   $(c)\quad 2y - xy' = 0 \qquad (d)\quad (y')^2 + xy' - y = 0$

2. $(a)\quad y'' = 0 \qquad (b)\quad [y' + (y')^3]^2 + [(y')^2 + 1]^2 = (y'')^2$

   $(c)\quad y'' + y = 0 \qquad (d)\quad y'' - 2y' + y = 0$

3. O processo será semelhante ao da eliminação das constantes arbitrárias nos problemas anteriores: haverá agora que eliminar y'. Procure obter o integral geral indicado.

4. $(a)\quad (x^2 + y^2)^2 = 1 \qquad (b)\quad x^2y^3 = 1$

   $(c)\quad (x - y)^2 - 2(x + y) = 3 \qquad (d)\quad y = x \;\; \& \;\; x > 0$

   Não existência: (a) $y(x_0) < 0$, (c) Por exemplo $x_0 + y(x_0) = -3$.

5. $(a)\quad y = e^x - 3 \qquad (b)\quad y = \tan\left(\log(x) + \frac{\pi}{4}\right)$

   $(c)\quad y^2 = \log\left(\frac{1+e^x}{1+e}\right)^2 + 1 \qquad (d)\quad \log\left(\sqrt{1+y^2}\right) = \log\left(\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Folha 6

1. $(a)\quad x^3 - x^2y + y^2 = C \qquad (b)\quad x^3y^3 - x^5 = C \qquad (c)\quad x^2y^3 - 2xy^2 = C$

   $(d)\quad e^{xy} - x^4 = C \qquad (e)\quad \cos y \,\mathrm{sen}\, x - \frac{y^3}{3} = C$

2. $(a)\quad yx^2e^{3x} + \frac{y^3}{3}e^{3x} = C \qquad (b)\quad \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} = C$

   $(c)\quad xy + y\cos y - \mathrm{sen}\, y = C \qquad (d)\quad \frac{1-\cos x}{y^2} + \frac{3}{y} = C$

   $(e)\quad e^{\frac{2}{3}x}\left(-\frac{3y^2}{2} - 6x^2 + 18x - 21\right) = C$

   (f) Procure um factor integrante da forma $(x, y) \mapsto x^m y^n;\; m, n \in \mathbb{Z}$

3. $(a)\quad e^{-y} = -e^x + C \qquad (b)\quad e^x = \frac{e^{2y}}{2} + \frac{y^2}{2} - y + 2\log|y + 1| + C$

   $(c)\quad y\mathrm{sen}y + \mathrm{cos}y = x\mathrm{cos}x - \mathrm{sen}x + C \qquad (d)\quad y = -\frac{1}{\mathrm{sen}x + C}$ ou $y = 0$

4. $(a)\quad y^2 = x^2\log\left(x^2\right) + Cx^2 \qquad (b)\quad y = \log(x^{-x}) + Cx$

$(c)\quad y^2 + 2xy - x^2 = C \qquad (d)\quad e^{-\frac{y}{x}} = \log|x| + C$

5. $(a)\quad y = ke^{-Cx} \qquad (b)\quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} 0 & C>0 \\ +\infty & C<0 \end{cases} \qquad (c)\quad y = ke^{\frac{2}{3}x}$

6. $(a)\quad y = -\frac{x^2+2x+1}{2} + Ce^{2x} \qquad (b)\quad y = \operatorname{sen}x - 1 + \frac{C}{e^{\operatorname{sen}x}} \qquad (c)\quad y = \frac{3x^4-4x+C}{4x}$

(d) $y = \frac{e^{\operatorname{sen}x}+C}{\operatorname{sen}x}$

(e) $y = \frac{a\operatorname{sen}x - \cos x}{1+a^2} + \frac{e^{-5x}}{a-5} + \frac{a-6-a^2}{(1+a^2)(a-5)}e^{-ax}$ se $a \neq 5$. Estude também o caso $a = 5$.

(f) $y = x^2\log|x|$ (g) $y = \frac{x^3}{3} + \lambda e^{-x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$

7. (a) $e^y = 3x^2 + Cx$ (b) $y = e^{(x+1)(x+C)}$.

Folha 7

1. $(a)\quad x(t) = x(0)e^{-kt} \qquad (b)\quad kT = \log 2 \qquad (d)\quad 4g \qquad (e)\quad \frac{5^4}{2\cdot 3^2}$

2. $(a)\quad I(t) = \frac{E}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t} \qquad (b)\quad I(t) = \frac{E_0R\operatorname{sen}(\omega t) - E_0L\cos(\omega t)}{L^2\omega^2+R^2} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$

3. (a) $p(t) = \frac{M}{1+CMe^{-kMt}}$. Soluções de equilíbrio constantes: nula e M.

(b) $\lim_{t\to+\infty} p(t) = M$ $(c)\quad p(t) = \frac{Mp_0}{p_0+(M-p_0)e^{-kMt}}$

4. $(a)\quad v(t) = \frac{gm}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \qquad (b)\quad v(0) = 0 \qquad (c)\quad v(t) \leq \frac{gm}{k}$

Folha 8

1. $(a)\quad y = \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{\lambda-4x^5}} \qquad (b)\quad y = \frac{e^{-2x^2}}{4}\left(\lambda + x^2\right)^2$

$(c)\quad y = \left(\frac{1}{2} + x^2 + \lambda e^{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (d)\quad y = \frac{\sec x}{\lambda + x}$.

3. $y' = x^2 + xy \quad \& \quad y(0) = 0$.

(a) Prove que $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i!2^i}{(2i+1)!}x^{2i+1} \quad (n \geq 1)$

(b) Na verdade até há pelo menos dois processos igualmente razoáveis de responder... Um aparentemente mais erudito que outro.

4. Por exemplo verifique que neste caso as hipóteses do teorema de existência e unicidade dispensam condições verticais.

5. (a) $\frac{e^{-x}}{4} + \frac{\cos x}{2} + \lambda e^x + \mu x e^x$ $\qquad$ (b) $x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x \log(\cos x) + \lambda\mathrm{sen}\,x + \mu\cos x$

   (c) $y = c_1(x)e^{-\sqrt{2}x} + c_2(x)e^{\sqrt{2}x}$, $c_1'(x) = -\sqrt{2}x^3 e^{x^2+\sqrt{2}x}$, $c_2'(x) = \sqrt{2}x^3 e^{x^2-\sqrt{2}x}$

   (**OBS.:** *As funções c_i' não têm primitiva elementar*)

   (d)

$$\begin{aligned} y &= c_1(x)e^{-x} + c_2(x)\cos x + c_3(x)\mathrm{sen}\,x \\ c_1'(x) &= \frac{e^x}{2}\left(x^2 + \mathrm{sen}^2\,x\right) \\ c_2'(x) &= -\frac{e^x}{2}\left(x^2 + \mathrm{sen}^2\,x\right)(\cos x + \mathrm{sen}\,x) \\ c_3'(x) &= \frac{e^x}{2}\left(x^2 + \mathrm{sen}^2\,x\right)(\cos x - \mathrm{sen}\,x) \end{aligned}$$

   (e) $y = -\frac{e^x(c_1 + c_2 x + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x} - 1)}{2}$

6. O sistema é de coeficientes constantes pelo que por exemplo pode ser resolvido por condensação. Pode também observar-se que outra apresentação da solução é

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

   e partir daí (também para a alínea (b)).

7. $\left\{\begin{bmatrix} e^t \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

Folha 9

1.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= C_1 e^{\sqrt{2}t}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -(\sqrt{2}+1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{\sqrt{2}t} & e^{-\sqrt{2}t} \\ (\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}t} & -(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= C_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} + C_3 e^{t} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -9 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{5t} \\ e^{t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & e^{5t} & 3e^t \\ 0 & e^{4t} & -9e^t \\ e^{4t} & 5e^{5t} & 7e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{array}{llll}
(a) & F(s) = \frac{2s^2+4s+12}{(s+1)(s^2+4)} & (b) & F(s) = \frac{s^7+120s^2+480}{s^6(s^2+4)} \\
(c) & F(s) = \frac{2s^2-25s+125}{(s-3)(s^2+25)} & (d) & F(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2+1} \\
(e) & F(s) = \frac{e^{-\pi s}+1}{(s^2+1)} & (f) & F(s) = \frac{2e^{-2s}}{(s-2)^3}
\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{llll}
(a) & f(t) = \frac{1}{2}e^t\left[7t^2 + \mathrm{senh}(2t)\right] & (b) & f(t) = \frac{1}{4}u_\pi(t)\mathrm{sen}(4t) \\
(c) & f(t) = 2t^3 e^{-3t} & (d) & f(t) = \frac{1}{5}\left(4e^{4t} + e^{-t}\right) \\
(e) & f(t) = \frac{2}{5}\left[1 - e^{2t}(\cos t + 6\,\mathrm{sen}\, t)\right] & (f) & f(t) = \frac{\mathrm{senh}\, t - \mathrm{sen}\, t}{2}
\end{array}$$

6.

$$\begin{array}{llll}
(a) & y = e^{-x} + 9e^{x} - e^{2x} & (b) & y = \frac{-8}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{3x} + e^{-2x} \\
(c) & y = (1-3x)e^{3x} & (d) & y = \frac{x+4}{4}\mathrm{sen}(2x)
\end{array}$$

(e) $y = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{4}{3}e^{-x} + \frac{5}{12}e^{2x} - \frac{3}{4}e^{-2x}$