departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Transforme a matriz dada na sua forma escalonada reduzida, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 6 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -9 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Para cada um dos sistemas de equações lineares seguintes:

   i) escreva a matriz simples (ou dos coeficientes);

   ii) escreva a matriz ampliada;

   iii) efectue operações elementares sobre as linhas para reduzir a matriz ampliada à sua forma escalonada reduzida;

   iv) resolva o sistema usando a forma escalonada reduzida obtida em iii).

(a) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ x - 3y + 3z = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x + z = 5 \\ 3x + 4y - 7z = -3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -2x + y + z = 1 \\ x - 5y + 7z = -1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 4x + y - 8z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 8y - 25z = -3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x - 3y + z + w - t = 8 \\ -2x + 6y + z - 2w - 4t = -1 \\ 3x - 9y + 8z + 4w - 13t = 49 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x - 2y + z + 3w - t = 1 \\ -3x + 6y - 4z - 9w + 3t = -1 \\ -x + 2y - 2z - 4w - 3t = 3 \\ x - 2y + 2z + 2w - 5t = 1 \end{cases}$

3. Em cada um dos sistemas de equações lineares dados no exercício anterior, indique:

   i) a característica da matriz simples do sistema;

   ii) a característica da matriz ampliada do sistema;

   iii) o número de incógnitas, o número de soluções e o grau de indeterminação da solução (ou seja, o número de parâmetros da solução).

   Encontre uma relação entre estes valores.

4. Determine três inteiros positivos que satisfaçam o seguinte sistema de equações lineares:
$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 5y + 10z = 44 \end{cases}$$

5. Em cada caso, ou demonstre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que é falsa. Assuma que é dado um sistema de equações lineares cuja matriz simples é a matriz A, a matriz ampliada é a matriz M e a forma escalonada da matriz ampliada é a matriz R.

   (a) M e R têm o mesmo tamanho.

   (b) A característica da matriz A é sempre menor ou igual à característica da matriz M.

   (c) Se R tem uma linha de zeros, há infinitas soluções para o sistema.

   (d) Se o sistema tem mais do que uma solução, R deve ter uma linha de zeros.

   (e) Se o sistema tem uma solução, existem infinitas soluções.

   (f) Se o sistema tem mais incógnitas que equações, então tem infinitas soluções.

   (g) Se todas as linhas da matriz R tem um pivot, o sistema tem pelo menos uma solução.

   (h) Se o sistema tem uma solução então a característica da matriz M é igual à característica da matriz A.

   (i) Se M é uma matriz $m \times n$ e $\mathrm{car}(M) = m$ então o sistema é possível.

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

2. (a) $\{(-2,-10)\}$;
   (b) $\left\{\left(3,\frac{2}{3}\right)\right\}$;
   (c) $\left\{\left(\frac{1}{4}, z+\frac{3}{4}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$;
   (d) $\left\{\left(5-z, \frac{5}{2}z-\frac{9}{2}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$;
   (e) $\{\ \}$;
   (f) $\{\ \}$;
   (g) $\{(3y+3-t, y, 5+2t, 0, t) : t, y \in \mathbb{R}\}$;
   (h) $\{(9+2y+13t, y, -2, -2-4t, t) : t, y \in \mathbb{R}\}$.

3. (a) $\text{car}(A) = \text{car}(M) =$ n.º de inc. $= 2$, n.º de sol.: 1, grau de ind.: 0;
   (b) $\text{car}(A) = \text{car}(M) =$ n.º de inc. $= 2$, n.º de sol.: 1, grau de ind.: 0;
   (c) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 2$, n.º de inc.: 3, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 1;
   (d) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 2$, n.º de inc.: 3, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 1;
   (e) $\text{car}(A) = 2$, $\text{car}(M) = 3$, n.º de inc.: 3, n.º de sol.: 0;
   (f) $\text{car}(A) = 2$, $\text{car}(M) = 3$, n.º de inc.: 3, n.º de sol.: 0;
   (g) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 3$, n.º de inc.: 5, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 2;
   (h) $\text{car}(A) = \text{car}(M) = 3$, n.º de inc.: 5, n.º de sol.: indet., grau de ind.: 2.

4. Por exemplo, $x = 4$, $y = 2$ e $z = 3$.

5. (a) V; (b) V; (c) F; (d) V; (e) F; (f) F; (g) F; (h) V; (i) F.