42707 Análise Matemática II

Vítor Neves

2009/2010

Períodos

Séries de Fourier

Teorema 0.0.1 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $T > 0$, integrável à Riemann, e a um número real.*

$$\int_a^{a+T} f(t)dt \;=\; \int_0^T f(t)dt$$

Dem. Determine-se $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$nT \;\le\; a \;<\; (n+1)T, \tag{1}$$

i.e.

$$n \;:=\; \left\lfloor \frac{a}{T} \right\rfloor \;:=\; \left[\frac{a}{T} \right].$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)dt &= \int_0^T f(t+nT)dt \;=\; \int_0^T f(t+nT)\cdot 1dt & (2)\\
&= \int_{nT}^{(n+1)T} f(s)ds \;=\; \int_{nT}^{a} f(s)ds + \int_a^{(n+1)T} f(s)ds & (3)\\
&= \int_{nT}^{a} f(s+T)\cdot 1ds + \int_a^{(n+1)T} f(t)dt & (4)\\
&= \int_{(n+1)T}^{a+T} f(t)dt + \int_a^{(n+1)T} f(t)dt & (5)\\
&= \int_a^{a+T} f(t)dt. & (6)
\end{aligned}$$

Seguem-se as justificações

(2) f é periódica de período T.

(3) Teorema de mudança de variáveis e aditividade do integral no domínio de integração; (1) motiva esta decomposição.

(4) f é periódica de período T e a variável de integração é muda.

(5) Teorema de mudança de variáveis.

(6) Aditividade do integral no domínio de integração. □