# 42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
# LIÇÕES VII

**Vítor Neves**

2009/2010

# Capítulo 5

# Transformada de Laplace

## 5.1 Definição e linearidade

**Definição 5.1.1**

1. *A função* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *diz-se* ***seccionalmente contínua*** *(em* $[0, +\infty[$*) quando, seja qual for* $[0, b]$ $(0 < b \in \mathbb{R})$*, a restrição de* $f$ *a* $[0, b]$ *é seccionalmente contínua.*

2. *Suponha-se que para certo* $S \subseteq \mathbb{R}$*,* $\phi : S \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$*. Os integrais* $\int_0^{+\infty} \phi(s,t)dt \quad (s \in S)$ *convergem*

   (a) ***Absolutamente*** *se* $\int_0^{+\infty} |\phi(s,t)|dt$ *converge, seja qual for* $s \in S$*.*

   (b) ***Uniformemente*** *se qualquer das condições seguintes se verifica*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau_0 > 0 \; \forall \tau \geq \tau_0 \forall s \in S \quad \left| \int_\tau^{+\infty} \phi(s,t)dt \right| < \varepsilon$$

$$\lim_{\tau \to +\infty} \sup \left\{ \left| \int_\tau^{+\infty} \phi(s,t)dt \right| \mid s \in S \right\} \to 0$$

**Definição 5.1.2** *Suponha que* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *e existe* $S_f \subseteq \mathbb{R}$ *tal que para qualquer* $s \in S_f$ *está definido* $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$*. A* ***transformada de Laplace*** *de* $f$ *é a função definida por*

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad (s \in S_f)$$

**Teorema 5.1.1** *Se $\lambda \in \mathbb{R}$, as funções $f, g$ têm transformada de Laplace e $S_f \cap S_g \neq \emptyset$, então*

1. *$\lambda f$ tem transformada de Laplace e*

$$\mathcal{L}[\lambda f](s) \; = \; \lambda \mathcal{L}[f](s) \qquad (s \in S_f)$$

2. *$f + g$ tem transformada de Laplace e*

$$\mathcal{L}[f+g](s) \; = \; \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s) \qquad (s \in S_f \cap S_g)$$

## 5.2 Existência

**Definição 5.2.1** *A função seccionalmente contínua $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ diz-se **de ordem exponencial** $\alpha \in \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$\forall t \geq t_0 \quad |f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

*Designe-se $\mathcal{L}$ o conjunto das funções seccionalmente contínuas $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ de ordem exponencial*

**Teorema 5.2.1**

1. *$\mathcal{L}$ é um espaço vectorial real*

2. *Todos os elementos de $\mathcal{L}$ têm transformada de Laplace.*

**Teorema 5.2.2** *Quando $f \in \mathcal{L}$*

1. *Se tem ordem exponencial $\alpha$, $\mathcal{L}[f](s)$ converge absolutamente em $S := \{s \in \mathbb{R} |\; s > \alpha\}$ e uniformemente em qualquer conjunto da forma $\{s \in \mathbb{R} |\; s \geq a > \alpha\} \quad (a \in \mathbb{R})$.*

2. *$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$*

**Teorema 5.2.3** *Suponha-se que*

$$f(t) := \sum_{n\geq 0} a_n t^n \qquad (t \geq 0),$$

$$\exists \alpha, K \in \mathbb{R}^+; N \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!} \qquad (n \geq N),$$

*então*

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{n\geq 0} a_n \mathcal{L}[t^n](s) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (s > \alpha)$$

## 5.3 Translações

**Teorema 5.3.1**

$$\mathcal{L}[e^{a(\cdot)} f](s) = \mathcal{L}[f](s-a) \quad (s > a \in \mathbb{R}) \tag{5.1}$$

$$u_a(t) := \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}[u_a f(\cdot - a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s) \quad (s > a \geq 0) \tag{5.3}$$

## 5.4 Derivadas e primitivas

**Teorema 5.4.1**

1. *Quando existem ambas as transformadas para* $s > a$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+) \qquad (s > a)$$

2. *Se* $f$ *está em* $\mathcal{L}$ *e é seccionalmente contínua, também* $\phi \equiv t \mapsto \int_0^t f(u)du \in \mathcal{L}$.

   (a) *Se* $f$ *é de ordem exponencial* $\alpha > 0$*, também* $\phi$ *é da mesma ordem*

   (b) *Se* $f$ *é de ordem exponencial* $\alpha \leq 0$*,* $\phi$ *é de ordem exponencial* $0$.

   (c) *Se* $f$ *é de ordem exponencial* $\alpha$

$$\mathcal{L}[\phi](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s) \quad (s > \text{máx}\{\alpha, 0\})$$

**Corolário 5.4.1** *Suponha-se que $f \in \mathcal{L}$ com ordem exponencial $\alpha$. Suponha-se ainda que $f$ é de classe $C^{n-1}$, $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e $f^{(n-1)} \in \mathcal{L}$ com ordem exponencial $\alpha$, então*

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) \; = \; s^n \mathcal{L}[f](s) - \left[\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\right] \quad (s > \text{máx}\{0, \alpha\})$$

**Teorema 5.4.2** *Se $f \in \mathcal{L}$ e tem ordem exponencial $\alpha$, então*

1. $\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) \; = \; \mathcal{L}[-tf(t)](s) \quad (s > \alpha)$
2. $\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s) \; = \; \mathcal{L}\left[(-1)^n t^n f(t)\right]$
3. *Se $g(t) := t^n f(t)$ $(t \geq 0)$, então*

$$\mathcal{L}[g](s) \; = \; (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[f](s) \qquad (s > \alpha)$$

4. *Quando existe $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ tem-se*

$$\int_s^{+\infty} \mathcal{L}[f](\sigma) d\sigma \; = \; \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) \qquad (s > \alpha)$$

## 5.5 Inversão

**Teorema 5.5.1** *Se $f \in \mathcal{L}$ então*

$$\lim_{s \to +\infty} \mathcal{L}[f](s) \; = 0$$

**Teorema 5.5.2** ***(de Lerch)***
*Se $f, g \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ então $f(a) = g(a)$ sempre que $f$ e $g$ são contínuas em $a$; em particular se $f$ e $g$ são contínuas, então $f = g$.*

**Definição 5.5.1** *Suponha-se que as funções $\phi, \psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ são localmente integráveis. Um* ***produto de convolução*** *de $\phi$ por $\psi$, $\phi * \psi$, define-se por*

$$(\phi * \psi)(t) \;:=\; \int_0^t \phi(t-u)\psi(u)du \quad (t \in [0, +\infty[)$$

**Teorema 5.5.3**

1. *O produto de convolução é comutativo.*
2. *O produto de convolução é bilinear*
3. *Quando todos os operadores estão definidos,*

   $$\mathcal{L}^{-1}\big(\mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g]\big)(t) \;=\; (f * g)(t)$$

   *ou*

   $$\mathcal{L}[f * g](s) \;=\; \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g](t)$$

## 5.6 [...]. Dilatações

Esta é de facto a continuação da secção 5.3

**Teorema 5.6.1** *Quando $f$ é de ordem exponencial $\alpha$,*

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)](s) \;= \frac{1}{\lambda}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0; s > \lambda\alpha)$$

## 5.7 Aplicações

### 5.7.1 Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes

**Problema de Cauchy ou de valores iniciais**

Suponha-se que $c_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n \in \mathbb{N})$, $k_i \in \mathbb{R}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ e que a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é contínua e de ordem exponencial

$$\begin{cases} y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-i)} = f(x) & \\ & \\ y^{(i)}(0) = k_i & 1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

se só se

$$\left[s^n + \sum_{i=1}^{n} c_i s^{n-i}\right] \mathcal{L}[y](s) - \sum_{j=1}^{n-1} c_j \left[\sum_{i=0}^{n-1-j} k_i s^{n-1-i}\right] \; = \; \mathcal{L}[f](s)$$

**Problemas integrais com convolução**

Suponha-se que todas a funções em presença têm transformada de Laplace

$$y(x) \; = \; f(x) + \int_0^x y(x-t)g(t)dt$$

se e só se

$$\mathcal{L}[y](s) \; = \; \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[y](s)\mathcal{L}[g](s)$$