GUIÃO da disciplina de Análise Matemática I

1 Funções reais de variável real

1.1 Noções elementares sobre funções reais de variável real

Definição 1.1.1 (Função)
Dados dois conjuntos A e B (diferentes do vazio), chama-se FUNÇÃO definida com valores de A para B a toda a correspondência entre A e B que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B. Ao considerarmos a função

$$\begin{array}{rccl} f & : & A & \longrightarrow & B \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} ,$$

a x chama-se a variável independente (e toma valores em A), enquanto que y toma valores em B e é chamada variável dependente (dado que os seus valores dependem dos valores que a variável x toma).

À expressão ou fórmula que traduz o modo como a variável y depende da variável x chama-se expressão analítica da função f. A função f diz-se real de variável real quando $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.2 (Domínio e contradomínio)
Seja f uma função real de variável real. Chama-se DOMÍNIO de f ao conjunto dos valores reais que têm imagem pela função f, isto é, ao conjunto dos números reais para os quais a expressão analítica de f está bem definida. Chama-se CONTRADOMÍNIO de f ao conjunto dos valores reais que são imagem pela função f dos elementos do domínio, denotando-se tal conjunto por $f(D)$ – onde D representa o domínio de f.

Definição 1.1.3 (Gráfico de uma função)
Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chama-se GRÁFICO DA FUNÇÃO f ao conjunto

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in D,\ y = f(x) \in \mathbb{R}\} .$$

Decorre da definição de cima que G_f é o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, quando x percorre o domínio D_f. Observe que, por exemplo, uma circunferência não representa o gráfico de uma função.

Exemplo 1.1.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Temos como exemplos de funções:*

(a) *a função constante:* $f(x) = k$, *com* $k \in \mathbb{R}$;

(b) *a função identidade:* $f(x) = x$;

(c) *a função linear:* $f(x) = ax$, *para um certo* $a \in \mathbb{R}$;

(d) *a função afim:* $f(x) = ax + b$, *para determinados* $a, b \in \mathbb{R}$;

(e) *a função polinomial:* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$; *em particular, se* $n = 2$; $f(x) = ax^2 + bx + c$ *é uma função quadrática, se* $n = 3$; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *é uma função cúbica;*

(f) *função potência:* $f(x) = x^a$; *onde* a *é uma constante; em particular, se* $a = \frac{1}{n}$, *então* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; *onde* n *é um inteiro positivo, é uma função raiz; temos que* $D_f = [0, +\infty)$ *se* n *é par e* $D_f = \mathbb{R}$ *se* n *é ímpar;*

(g) *a função racional:* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, *onde* p *e* q *são funções polinomiais. Note que* $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) \neq 0\}$;

(h) *a função algébrica: função construída usando operações algébricas começando com polinómios; por exemplo,* $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$; $D_f = \mathbb{R}$;

(i) *função definida por ramos: definida de forma diversa em diferentes partes de seu domínio; por exemplo,* $f(x) = \begin{cases} 50 - 2x & \textit{se } x \geq 20 \\ (x+1)^4 & \textit{se } x < 20 \end{cases}$.

Definição 1.1.5 (Zeros)
Chamam-se ZEROS DA FUNÇÃO f os elementos x do domínio de f tais que $f(x) = 0$.

Definição 1.1.6
Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se:

- CRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) \geq f(y)$;
- DECRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) \leq f(y)$;
- ESTRITAMENTE CRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) > f(y)$;
- ESTRITAMENTE DECRESCENTE quando para todo o $x, y \in D$ tal que $x > y$ se tem $f(x) < f(y)$;
- MONÓTONA quando é crescente ou decrescente;
- ESTRITAMENTE MONÓTONA quando é estritamente crescente ou estritamente decrescente;

- PAR quando, para todo o $x \in D$, se tem $-x \in D$ e $f(x) = f(-x)$;
- ÍMPAR quando, para todo o $x \in D$, se tem $-x \in D$ e $f(x) = -f(-x)$.

Definição 1.1.7 (Função limitada)
Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se LIMITADA se

$$\exists_{c \in \mathbb{R}^+} \; : \; |f(x)| < c \, , \quad \forall x \in D.$$

Definição 1.1.8 (Restrição de uma função a um conjunto)
Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $S \subset D$. A RESTRIÇÃO de f a S, designada por $f_{|S}$, é a aplicação de S em $\mathbb{R}$ tal que $f_{|S}(x) = f(x)$ para cada $x \in S$.

Definição 1.1.9 (Função injectiva, sobrejectiva e bijectiva)
Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ diz-se:
INJECTIVA quando $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, $\forall_{x,y \in A}$;
SOBREJECTIVA quando $\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \; : \; f(x) = y$;
BIJECTIVA quando é injectiva e sobrejectiva.

Definição 1.1.10 (Operações com funções)
Dadas funções $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ e dado $x \in D_f \cap D_g$, podemos definir algumas operações com funções:

(a) SOMA: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

(b) PRODUTO: $(fg)(x) = f(x)g(x)$;

(c) QUOCIENTE: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, se $g(x) \neq 0$.

Definição 1.1.11 (Função composta)
Sendo $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ e $g : Z \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$ duas funções, a COMPOSTA de f após g, denotada por $f \circ g$, é a função definida do seguinte modo: 1. o domínio de $f \circ g$ é o conjunto $S = \{x \in Z \; : \; g(x) \in X\}$; 2. para cada $x \in S$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Definição 1.1.12 (Função inversa)
A INVERSA de uma função injectiva $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a aplicação

$$\begin{array}{rccl} g & : & f(D) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) = x \; , \end{array}$$

para cada $x \in D$ (tornando-se assim verdade que $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$). Representaremos a inversa de f por f^{-1}.

Pensando no gráfico de f^{-1},

$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y) \in G_f\} \ ,$$

torna-se evidente que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos relativamente à recta $y = x$ (ou seja, um é obtido a partir do outro por troca do eixo dos xx's com o eixo dos yy's), pois

$$(x_0, y_0) \in G_f \Leftrightarrow (y_0, x_0) \in G_{f^{-1}} \ .$$

1.2 Funções trigonométricas

Considere-se a circunferência de centro na origem do plano e possuindo raio unitário (descrita pela equação $x^2 + y^2 = 1$).

Vamos denotar por P_θ (para $\theta \in [0, 2\pi[$) o ponto da circunferência tal que o ângulo $< P_0 O P_\theta$ (para $P_0 = (1,0)$) é θ (medido em radianos e no sentido anti-horário).

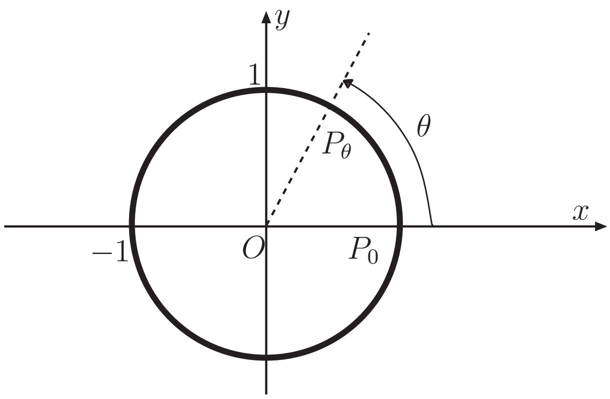

Figura 1: Construção associada ao seno e co-seno.

De forma equivalente, podemos dizer que $\theta/2$ é a área do sector $P_0 O P_\theta$ (orientação anti-horária), ou que θ é a medida do comprimento do arco de circulo $P_0 P_\theta$ (medida no sentido anti-horário).

As coordenadas de P_θ são definidas por

$$P_\theta =: (\cos\theta, \sin\theta) \ .$$

Definição 1.2.1 (Função periódica e período de uma função)
Diz-se que uma função f real de variável real com domínio D é PERIÓDICA se existe um número real positivo p tal que $f(x + p) = f(x)$, para todo o $x \in D$ (inferindo-se naturalmente desta última igualdade que os respectivos pontos $x + p$ também pertencem a D). Neste caso, ao número p dá-se a designação de PERÍODO da função f.

As duas funções seno e co-seno definidas deste modo em $[0, 2\pi[$ (possuindo imagem $[-1, 1]$) são estendidas periodicamente a todo o $\mathbb{R}$ escolhendo

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x - 2k\pi) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \\ & 2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi\,, \\ \sin x = \sin(x - 2k\pi) & \text{para algum } k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Note-se que as definições anteriores de seno e co-seno (análogas às dadas na Escola Secundária) são *puramente descritivas*. Quer-se com isto salientar que – por exemplo – elas não permitem um cálculo de $\sin 1$ com uma precisão arbitrária...

Definições mais profundas das funções trigonométricas requerem novos conceitos de *Análise Matemática*, tais como limites, séries, continuidade e integração.

Tal irá portanto ser feito mais à frente mas para já pode-se recordar as relações:

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$

(ii) $\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

(iv) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;
$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, para cada $k \in \mathbb{Z}$;

(v) sin é uma função ímpar: $\sin(-x) = -\sin x\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$
cos é uma função par: $\cos(-x) = \cos x\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$

(vi) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$
$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$

(vii) $\sin x = \sin(\pi - x)\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,; \qquad \cos x = -\cos(\pi - x)\,, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\,;$

(viii) sin é crescente em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e decrescente em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Partindo das *fórmulas de adição* para o seno e o co-seno

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,, \quad \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \end{cases}$$

é possível deduzir directamente as:

- *Fórmulas de ângulo-duplo*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

- *Fórmulas de metade-do-ângulo*

$$
\begin{aligned}
|\cos x| &= \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \\
|\sin x| &= \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}
\end{aligned}
$$

- *Fórmulas do produto*

$$
\begin{aligned}
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\ \cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\ \sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

A função tangente

$$
\begin{array}{rclcl}
\tan & : & \mathbb{R}\setminus\left\{x=\frac{\pi}{2}+k\pi \ :\ k\in\mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & x & \longmapsto & \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}\ ,
\end{array}
$$

é obviamente periódica com período π e ímpar.

Veremos mais tarde (por uso de novos métodos a apreender) que a função tan é estritamente crescente em cada intervalo de periodicidade $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ $(k\in\mathbb{Z})$ e é sobrejectiva (sobre $\mathbb{R}$).

Tem-se adicionalmente que:

- $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

- $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

- $\tan\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

- $\sin\alpha = \dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

- $\cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$

Considerando a função cotangente

$$\begin{array}{rcll} \cot & : & \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \, : \, x \neq k\pi \, , \quad k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x} \, , \end{array}$$

é imediato que

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \, , \quad \alpha \neq k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \tan\beta \, , \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \tan\alpha \;\; \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= 1 \\ \cot\alpha \;\; \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= 1 \, . \end{aligned}$$

Por fim, definem-se adicionalmente as funções cosec e sec da seguinte forma:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \, , \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \, ,$$

para os valores de x que não anulam os anteriores denominadores (respectivamente).

1.3 Funções inversas das funções trigonométricas

Dado que a *restrição principal* da função seno, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, é sobrejectiva e estritamente crescente, então é invertível.

A sua função inversa $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ é crescente (por ser a inversa de uma função crescente) e, por definição, satisfaz

$$\arcsin(\sin x) = x \, , \quad \forall_{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \qquad \text{e} \qquad \sin(\arcsin y) = y \, , \quad \forall_{y \in [-1,1]}$$

ou

$$\begin{cases} \arcsin y = x \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = y \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Faz-se notar que se podem naturalmente definir inversas da função sin com outros domínios (diferentes da restrição principal).

A função $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ é sobrejectiva e estritamente decrescente e assim sendo é invertível.

A sua função inversa $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ é definida por

$$\arccos(\cos x) = x \, , \quad \forall_{x \in [0,\pi]} \qquad \text{e} \qquad \cos(\arccos y) = y \, , \quad \forall_{y \in [-1,1]}$$

ou

$$\begin{cases} \arccos y = x \\ y \in [-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = y \\ x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Dado que $x - \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se e só se $x \in [0,\pi]$ e

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin h(x)\ , \quad h(x) := \frac{\pi}{2} - x\ ,$$

vem

$$\arccos y = h^{-1}(\arcsin y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin y\ , \quad \forall_{y\in[-1,1]}\ .$$

Dado que a *restrição principal* da função tangente, $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, é sobrejectiva e estritamente crescente, então existe a sua função inversa $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ que por definição satisfaz

$$\begin{cases} \arctan(\tan x) = x \ , & \forall_{x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \\ \tan(\arctan y) = y \ , & \forall_{y\in\mathbb{R}} \end{cases}\ .$$

Perante as definições de cima, podemos imediatamente deduzir a seguinte relação entre arctan e arcsin: sendo $y \in]-1,1[$ e $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tais que $\sin x = y$, ou equivalentemente, $x = \arcsin y$, temos

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

i.e.,

$$\arcsin y = x = \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)\ .$$

Dado que a *restrição principal* da função cotangente, $\cot :]0,\pi[\to \mathbb{R}$, é sobrejectiva e estritamente decrescente, existe a sua função inversa $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ definida por

$$\operatorname{arccot} x = y \quad \text{se e só se} \quad \cot y = x\ , \quad \forall_{y\in]0,\pi[}\ .$$

Dado que $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan f(x)$, $f(x) := \frac{\pi}{2} - x$, $x \in]0,\pi[$, tem-se

$$\operatorname{arccot} x = f^{-1}(\arctan x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x\ , \quad x \in \mathbb{R}\ .$$

1.4 Funções hiperbólicas

Designa-se por SENO HIPERBÓLICO a função

$$\begin{array}{rccl} \sinh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\ , \end{array}$$

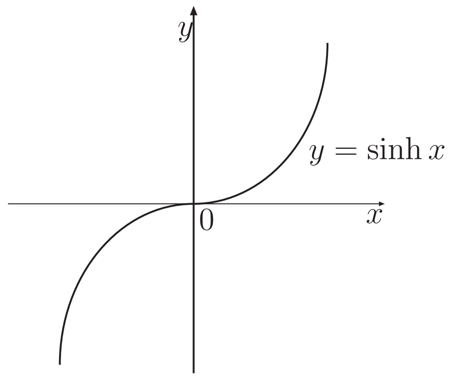

Figura 2: Gráfico da função sinh.

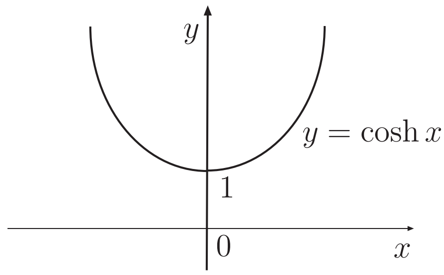

Figura 3: Gráfico da função cosh.

e chama-se CO-SENO HIPERBÓLICO à função

$$\begin{array}{rccl} \cosh & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} .$$

É simples de observar que sinh é uma função ímpar com contradomínio $\mathbb{R}$ e cosh é uma função par com contradomínio $[1, +\infty[$. Adicionalmente,

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 .$$

Na realidade, é desta última relação que provém o nome das funções hiperbólicas dado que se escolhermos $x = \cosh \alpha$ e $y = \sinh \alpha$ obtemos a equação da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.

Com o uso destas duas últimas funções pode-se ainda considerar as novas funções:

- TANGENTE HIPERBÓLICA: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$
- COTANGENTE HIPERBÓLICA: $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$, $x \neq 0$

- SECANTE HIPERBÓLICA: $\text{sech}x = \dfrac{1}{\cosh x}$
- CO-SECANTE HIPERBÓLICA: $\text{cosech}x = \dfrac{1}{\sinh x}\,, \qquad x \neq 0$

Tal como ocorre nas funções trigonométricas, existem várias relações entre as função hiperbólicas:

$$1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x \qquad\qquad \coth^2 x - 1 = \text{cosech}^2 x$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x\, \cosh y \pm \cosh x \sinh y \qquad\qquad \sinh(2x) = 2\sinh x\, \cosh x$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x\, \cosh y \pm \sinh x \sinh y \qquad\qquad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x\ \tanh y} \qquad\qquad \tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$

1.5 Noções topológicas básicas da recta real

Definição 1.5.1 (Vizinhança de um ponto)
Seja $p \in \mathbb{R}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Chama-se VIZINHANÇA de centro p e raio ϵ – ou vizinhança ϵ de p – ao intervalo $]p-\epsilon, p+\epsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x-p| < \epsilon\}$. Tal representa-se por $\mathscr{V}_\epsilon(p)$.

Definição 1.5.2 (Ponto interior e exterior)
Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$ (i.e., $C \subset \mathbb{R}$) e $p \in \mathbb{R}$. Diz-se que p é um PONTO INTERIOR a C se existir uma vizinhança de p contida em C.

Diz-se que p é um PONTO EXTERIOR a C se existir uma vizinhança de p contida no complementar de C, i.e. contida em $\mathbb{R} \setminus C$.

Definição 1.5.3 (Interior e exterior de um conjunto)
O conjunto dos pontos interiores de um conjunto C designa-se por INTERIOR DE C e representa-se por $\text{int}\,(C)$.

O conjunto dos pontos exteriores de um conjunto C designa-se por EXTERIOR DE C e representa-se por $\text{ext}\,(C)$.

Definição 1.5.4 (Ponto fronteiro)
Diz-se que p é um PONTO FRONTEIRO do conjunto C se toda a vizinhança de p intersecta C e $\mathbb{R} \setminus C$.

Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de um conjunto C chama-se FRONTEIRA de C e representa-se por $\text{fr}\,(C)$.

Proposição 1.5.5 *Seja C um qualquer subconjunto da recta real. Tem-se:*

(i) $\text{int}\,(C) \cap \text{ext}\,(C) = \emptyset$

(ii) $\text{int}\,(C) \cap \text{fr}\,(C) = \emptyset$

(iii) $\text{fr}\,(C) \cap \text{ext}\,(C) = \emptyset$

(iv) $\text{int}\,(C) \cup \text{fr}\,(C) \cup \text{ext}\,(C) = \mathbb{R}$.

Definição 1.5.6 (Fecho ou aderência)
Ao conjunto $\overline{C} = C \cup \text{fr}\,(C)$ chama-se FECHO ou ADERÊNCIA de C. Diz-se que p é um ponto aderente a C se $p \in \overline{C}$.

Observe-se que $\overline{C} = \text{int}\,(C) \cup \text{fr}\,(C)$.

Definição 1.5.7 (Conjuntos abertos e fechados)
Seja $C \subset \mathbb{R}$. Diz-se que C é ABERTO se $C = \text{int}\,(C)$. Diz-se que C é FECHADO se $\overline{C} = C$.

Proposição 1.5.8 *Seja C um subconjunto da recta real.*

(i) *C é fechado se e só se* $\text{fr}\,(C) \subset C$.

(ii) *C é fechado se e só se* $\mathbb{R} \setminus C$ *é aberto.*

(iii) *C é aberto se e só se* $\mathbb{R} \setminus C$ *é fechado.*

Definição 1.5.9 (Ponto de acumulação; derivado)
Seja $p \in \mathbb{R}$ e $C \subset \mathbb{R}$. Diz-se que p é PONTO DE ACUMULAÇÃO de C se toda a vizinhança de p intersecta $C \setminus \{p\}$, ou por outras palavras, se em qualquer vizinhança de p existe pelo menos um elemento de C diferente de p.

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de C dá-se a designação de DERIVADO de C e representa-se por C'.

Definição 1.5.10 (Ponto isolado)
Diz-se que p é um ponto isolado de um subconjunto C de $\mathbb{R}$ se $p \in C$ e existe (pelo menos) uma vizinhança V de p tal que $V \cap C = \{p\}$.

Proposição 1.5.11 *Seja C um qualquer subconjunto da recta real. Tem-se:*

(i) $\overline{C} = C \cup C'$

(ii) *Todo o ponto interior de C pertence a C*

(iii) *Nenhum ponto exterior a C pertence a C*

(iv) *Todo o ponto de C é aderente a C*

(v) *Um ponto fronteiro a C pode ou não pertencer a C*

(vi) *Um ponto aderente a C pode ou não pertencer a C*

(vii) *Um ponto de acumulação de C pode ou não pertencer a C*

(viii) *Se $a \in \operatorname{int}(C)$, então a é ponto de acumulação de C*

(ix) *Um ponto isolado de C pertence a C*

(x) *Nenhum ponto isolado é ponto de acumulação.*

Definição 1.5.12 (Majorantes e minorantes)
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que a é um MAJORANTE de C se $a \geq x, \forall x \in C$.

Diz-se que b é um MINORANTE de C se $b \leq x, \forall x \in C$.

Definição 1.5.13 (Conjunto majorado, minorado e limitado)
Seja C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que C é MAJORADO se admitir majorantes. Diz-se que C é MINORADO se admitir minorantes. Se C for majorado e minorado diz-se LIMITADO.

Definição 1.5.14 (Supremo e máximo)
Seja C um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que s é o supremo de C se s for o menor dos majorantes de C e representa-se por $\sup(C)$.

Se $\sup(C)$ pertencer a C, diz-se que $\sup(C)$ é o MÁXIMO de C e neste caso representa-se tal número por $\max(C)$.

Teorema 1.5.15 (Propriedade aditiva do supremo) *Seja $\varnothing \subsetneq A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$. Considere-se*

$$A + B = \{x + y : (x, y) \in A \times B\}$$

e suponha-se que ambos A e B possuem supremo. Então $A + B$ também possui supremo e

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Definição 1.5.16 (Ínfimo e mínimo)
Seja C um subconjunto minorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que i é o ÍNFIMO de C se i for o maior dos minorantes de C, representando-se por $\inf(C)$.

Se o ínfimo de C pertencer a C, diz-se que i é o MÍNIMO de C e representa-se por $\min(C)$.

Teorema 1.5.17 (Princípio do Supremo) *Em $\mathbb{R}$, todo o subconjunto X majorado (e não vazio) tem supremo.*

Corolário 1.5.18 (Princípio do Ínfimo) *Em $\mathbb{R}$, todo o conjunto minorado (e não vazio) tem ínfimo.*

1.6 Caso particular das sucessões: Funções reais de variável natural

- **Definições básicas; sucessões monótonas; sucessões limitadas.**

Definição 1.6.1 (Sucessão)
Chama-se SUCESSÃO DE NÚMEROS REAIS a toda a função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Uma sucessão

$$\begin{array}{rccl} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & u_n := u(n) \end{array}$$

pode-se simplesmente denotar por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde à expressão algébrica u_n (que define a sucessão) dá-se a designação de TERMO GERAL DA SUCESSÃO. Por outro lado, a $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} := \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ dá-se a designação de CONJUNTO DOS TERMOS DA SUCESSÃO.

Adicionalmente, faz-se notar que as sucessões podem ser também definidas por recorrência. Tal consiste em somente dar a conhecer explicitamente alguns dos primeiros termos, sendo o termo de ordem n definido através de alguns termos de outras ordens. Um exemplo de uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de tal forma é a dada pelo termo geral

$$u_n = \begin{cases} u_1 = -1/2 \\ u_2 = 5 \\ u_3 = 6 \\ u_n = -4 + u_{n-2} + 2u_{n-1}\,, \quad n \geq 4\,. \end{cases}$$

Definição 1.6.2 (Subsucessão)
Sendo $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões, diz-se que v é uma SUBSUCESSÃO de u se existir uma sucessão estritamente crescente $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (com $w_n \in \mathbb{N}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$) tal que $v = u \circ w$.

Definição 1.6.3 (Sucessão limitada inferiormente, limitada superiormente, limitada)
Uma sucessão diz-se LIMITADA SUPERIORMENTE, se o conjunto dos seus termos for majorado; diz-se LIMITADA INFERIORMENTE, se o conjunto dos seus termos for minorado; diz-se LIMITADA, se o conjunto dos seus termos for limitado.

Definição 1.6.4 (Operações elementares)
Dadas duas sucessões de números reais $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chama-se soma, diferença e produto de u e v às sucessões $u+v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u-v = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $u \cdot v = (u_n \cdot v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Se $v_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, chama-se quociente de u por v à sucessão $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definição 1.6.5 (Sucessão monótona, monótona crescente, monótona decrescente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se MONÓTONA CRESCENTE se $u_{n+1} \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se MONÓTONA DECRESCENTE se $u_{n+1} \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Uma sucessão diz-se MONÓTONA se for monótona crescente ou monótona decrescente.

• **Convergência; sucessões de Cauchy.**

Definição 1.6.6 (Sucessão convergente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se CONVERGENTE para um número real c (ou diz-se que o limite da sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $c \in \mathbb{R}$) e escreve-se

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = c \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\,,$$

se

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n \in \mathscr{V}_\epsilon(c) =]c-\epsilon, c+\epsilon[\;, \quad \forall_{n>p}\;.$$

Teorema 1.6.7 *O limite de uma sucessão convergente é único.*

Teorema 1.6.8 *O limite de uma sucessão constante é essa própria constante.*

Teorema 1.6.9 *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

É claro que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira [pense por exemplo no caso de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$.]

Definição 1.6.10 (Sucessão divergente)
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se DIVERGENTE se não for convergente.

Definição 1.6.11 (Sucessão de Cauchy) [1]
Uma sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ é dita ser uma SUCESSÃO DE CAUCHY se para todo o $\epsilon > 0$ existir um número natural $N(\epsilon)$ (eventualmente dependente de ϵ) tal que $|u_n - u_m| < \epsilon$, para todo o n e m tais que $n \geq N(\epsilon)$ e $m \geq N(\epsilon)$.

Teorema 1.6.12 *Qualquer sucessão de Cauchy é limitada.*

Teorema 1.6.13 *Toda a sucessão limitada tem subsucessões convergentes.*

[1] Augustin Louis Cauchy nasceu a 21 de Agosto de 1789 em Paris, França e faleceu em 23 de Maio de 1857 em Sceaux (perto de Paris), França. Teve uma grande influência na introdução do rigor na Análise Matemática.

Teorema 1.6.14 *Uma sucessão (real) é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.*

Teorema 1.6.15 *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Observe que a proposição recíproca do último resultado não é verdadeira [pense por exemplo no caso de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = 0$ se n é ímpar, e $u_n = 500000000$ se n é par.]

Definição 1.6.16 (Ponto de acumulação de uma sucessão)
Um número real b diz-se um PONTO DE ACUMULAÇÃO DE UMA SUCESSÃO $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se para qualquer $\epsilon > 0$ temos

$$|x_n - b| < \epsilon$$

para infinitos n.

• Infinitamente grandes; infinitésimos; limite superior; limite inferior e demais operações com sucessões.

Definição 1.6.17 (Infinitamente grandes)
Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE POSITIVO (OU QUE TENDE PARA $+\infty$), representando-se por $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n > c\ , \ \ \forall n > p$$

Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE NEGATIVO (OU QUE TENDE PARA $-\infty$), representando-se por $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ se

$$\forall_{c\in\mathbb{R}}\ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad : \quad u_n < c\ , \ \ \forall n > p$$

Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é UM INFINITAMENTE GRANDE EM MÓDULO (OU QUE $|u_n|$ TENDE PARA $+\infty$), se $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitamente grande positivo.

Proposição 1.6.18 *1. Se $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ou $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ou $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, então u não é limitada.*

2. O recíproco da afirmação anterior não é verdadeiro: se $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é limitada, nada nos garante que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ou $|u_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
[Sugestão: considere o exemplo de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = n$ se n é par, e $u_n = 1/n$ se n é ímpar.]

3. Se para uma dada sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, temos $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nada nos garante que u seja crescente (nem que a partir de certa ordem seja crescente).
[Sugestão: pense no exemplo de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $u_n = (-1)^n + n$.]

Definição 1.6.19 (Infinitésimo)
Diz-se que a sucessão $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um infinitésimo se $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Teorema 1.6.20 *[Teorema das sucessões enquadradas] Sejam $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões tais que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ e, a partir de certa ordem,*

$$u_n \le w_n \le v_n \ ,$$

então $w_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.

Teorema 1.6.21 *[Operações com sucessões convergentes] Sejam $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões convergentes e $\lim_{n\to+\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$. Então,*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n = a + b \\
&\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = a - b \\
&\lim_{n\to+\infty}(c \cdot u_n) = c \cdot \lim_{n\to+\infty} u_n = c \cdot a \ , \quad \forall c \in \mathbb{R} \\
&\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot \lim_{n\to+\infty} v_n = ab \\
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_n}{\lim_{n\to+\infty} v_n} = \frac{a}{b} \ , \quad \textit{se} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Definição 1.6.22 (Limite superior e limite inferior de uma sucessão)
Seja $\mathscr{A}$ o conjunto (não vazio) de todos os pontos de acumulação de uma dada sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, contendo $\sup \mathscr{A}$ e $\inf \mathscr{A}$.

A $\sup \mathscr{A}$ e $\inf \mathscr{A}$ chamamos LIMITE SUPERIOR e LIMITE INFERIOR da sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Tais números serão denotados por

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, x_n \qquad \text{e} \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, x_n \ ,$$

respectivamente.

Os números $\overline{a} = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ x_n$ e $\underline{a} = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\ x_n$ são caracterizados pelas seguintes propriedades:

- Para qualquer $\epsilon > 0$, $x_n > \overline{a} - \epsilon$ para infinitos n e $x_n > \overline{a} + \epsilon$ somente para um número finito de n's.
- Para qualquer $\epsilon > 0$, $x_n < \underline{a} + \epsilon$ para infinitos n e $x_n < \underline{a} - \epsilon$ somente para um número finito de n's.

Exemplo: Considerando a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = 2 \qquad \text{e} \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n = 0\ .$$

Teorema 1.6.23 *O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*

1.7 Limites de funções reais de variável real

Definição 1.7.1 (Limite de uma função num ponto)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p um ponto de acumulação de D. Diz-se que ℓ é limite da função f no ponto p, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = \ell$, se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in D\ \wedge\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\ .$$

Noutra notação, podemos escrever

$$\lim_{x\to p} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in \mathscr{V}_\delta(p)\backslash\{p\} \cap D \Rightarrow f(x) \in \mathscr{V}_\epsilon(\ell)\ .$$

Definição 1.7.2
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que D não é majorado. Diz-se que o limite da função f quando $x \to +\infty$ é b, e escreve-se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M>0}\ :\ x \in D \wedge x > M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon\ .$$

Definição 1.7.3
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que D não é minorado. Diz-se que o limite da função f quando $x \to -\infty$ é b, e escreve-se $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{M>0}\ :\ x \in D \wedge x < -M \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon\ .$$

Definição 1.7.4
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que p é um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite da função f no ponto p é $+\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$, se

$$\forall_{N>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in D\ \wedge\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) > N\ .$$

Definição 1.7.5
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponhamos que p é um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite da função f no ponto p é $-\infty$, e escreve-se $\lim_{x\to p} f(x) = -\infty$, se

$$\forall_{N>0}\exists_{\delta>0}\ :\ x \in D\ \wedge\ 0 < |x-p| < \delta \Rightarrow f(x) < -N\ .$$

De forma análoga se podem considerar as noções de

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ .$$

Teorema 1.7.6 *Se $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p é um ponto de acumulação de D, então $\lim_{x\to p} f(x) = b$ se e só se para cada sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite p, com $u_n \in D\setminus\{p\}$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), a sucessão $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tem por limite b.*

Teorema 1.7.7 *O limite de uma função num determinado ponto, quando existe, é único.*

Teorema 1.7.8 *Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, então:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c \ ; \\
&\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c \ ; \\
&\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c \ ; \\
&\textit{se} \quad c \neq 0 \ , \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \ .
\end{aligned}$$

Teorema 1.7.9 *Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de a, então $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = 0$.*

Observe-se que o facto de a função g ser limitada no teorema anterior é fundamental. Se considerarmos o exemplo de $f(x) = x$ e $g(x) = 1/x$, $\lim_{x\to 0} f(x) \cdot g(x) = 1 \neq 0$.

Teorema 1.7.10 *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(S) \subset D$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e $\lim_{x\to b} f(x) = c = f(b)$, então $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = c$.*

Definição 1.7.11 (Limite relativo a um conjunto)
Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, S um subconjunto próprio de D (isto é, $S \subset D$ e $S \neq D$) e p um ponto de acumulação de S. Diz-se que b é o limite de f relativo a S quando x tende para p, se o limite da restrição de f a S quando x tende para p é igual a b. Tal limite representa-se por

$$\lim_{\substack{x\to p \\ x\in S}} f(x) = b \ .$$

Definição 1.7.12 (Limite laterais)
Nas condições da última definição:

(i) Se $S = \{x : x \in D \wedge x < p\}$, diz-se que b é o limite à esquerda de f no ponto p e representa-se por $\lim_{x\to p^-} f(x) = b$;

(ii) Se $S = \{x : x \in D \wedge x > p\}$, diz-se que b é o limite à direita de f no ponto p e representa-se por $\lim_{x\to p^+} f(x) = b$.

1.8 Continuidade de funções reais de variável real

Definição 1.8.1 (Continuidade)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D \cap D'$. Dizemos que f é CONTÍNUA em p se e só se

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0} \ : \ x \in D \wedge |x-p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon \ .$$

Os pontos onde a função não é contínua dizem-se pontos de descontinuidade.

Perante a definição acabada de enunciar, vemos que f é contínua em $p \in D \cap D'$ se e só se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Definição 1.8.2 (Continuidade lateral)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $p \in D \cap D'$.

Dizemos que f é CONTÍNUA À ESQUERDA de p se $\lim_{x\to p^-} f(x) = f(p)$.

Dizemos que f é CONTÍNUA À DIREITA de p se $\lim_{x\to p^+} f(x) = f(p)$.

Proposição 1.8.3 *Se f é contínua à esquerda e à direita de p, então f é contínua em p.*

Definição 1.8.4 (Continuidade num conjunto)
Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $C \subset D \cap D'$. Diz-se que f é CONTÍNUA EM C se f é contínua em todos os pontos de C. Em especial, se $C = D \cap D'$ diz-se simplesmente que f é CONTÍNUA.

Proposição 1.8.5 (i) *Toda a função constante é contínua.*

(ii) *Se f e g são contínuas no ponto p, então $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ (neste último caso para funções g com $g(p) \neq 0$) são contínuas nesse mesmo ponto p.*

(iii) *Sendo $f : X \subset \mathbb{R} \to Y \subset \mathbb{R}$ e $g : Z \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}$ duas funções tais que $g(Z) \subset X$, se g é contínua no ponto p e f é contínua no ponto $g(p)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em p.*

Teorema 1.8.6 *[Teorema dos valores intermédios ou de Bolzano][2] Seja f uma função contínua num intervalo I e a e b dois pontos de I tais que $f(a) \neq f(b)$. Então, qualquer que seja o número k estritamente compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um ponto c, estritamente compreendido entre a e b, tal que $f(c) = k$.*

Corolário 1.8.7 *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe um d em $]a,b[$ tal que $f(d) = 0$ (i.e., a função admite pelo menos um zero no intervalo $]a,b[$).*

[2]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano nasceu a 5 de Outubro de 1781 em Praga (presentemente, cidade da República Checa) e faleceu a 18 de Dezembro de 1848 também em Praga.

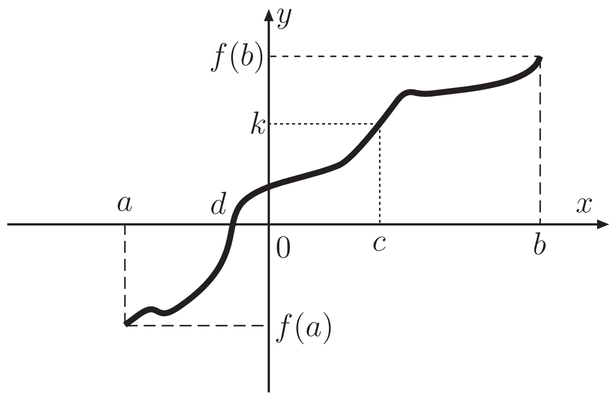

Figura 4: Exemplificação do Teorema de Bolzano e do consequente Corolário 1.8.7.

Teorema 1.8.8 (Teorema de Weierstrass) [3] *Se f é uma função contínua num intervalo fechado e limitado I, então $f(I)$ é também um intervalo fechado e limitado.*

Corolário 1.8.9 *Toda a função contínua num intervalo fechado e limitado, tem nesse intervalo, um máximo e um mínimo.*

Teorema 1.8.10 *Se f é uma função contínua e injectiva num intervalo I, então a função inversa também é contínua.*

1.9 Séries Numéricas

• **Definições iniciais; convergência; divergência.**

Definição 1.9.1 (Série)
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A SÉRIE gerada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e denotada por

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= s_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_k &= s_{k-1} + x_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu a 31 de Outubro de 1815 em Ostenfelde, Westphalia (presentemente Alemanha) e faleceu em 19 de Fevereiro de 1897, em Berlim.

Definição 1.9.2 (Série convergente; soma da série; termos da série; somas parciais da série)
Ainda no âmbito da última definição:

Se a sucessão $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, i.e., se existe um número real (finito) c tal que $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diz-se CONVERGENTE, c diz-se ser a SOMA DA SÉRIE e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = c\ .$$

Os elementos x_n chamam-se TERMOS DA SÉRIE e s_k são designados por SOMAS PARCIAIS DA SÉRIE.

Definição 1.9.3 (Série divergente)
Uma série diz-se DIVERGENTE se a sua sucessão das somas parciais não convergir.

Teorema 1.9.4 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se a série dos termos após m (com $m \in \mathbb{N}$), i.e.,*

$$R_m = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$$

é convergente. Adicionalmente, se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente, então $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Teorema 1.9.5 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série convergente. Então*

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Teorema 1.9.6 *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries convergentes com somas A e B, respectivamente. Se α e β são dois números reais, então a série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$$

converge e tem soma $\alpha A + \beta B$.

Teorema 1.9.7 *Seja $c \in \mathbb{R}$. A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n-1}$ converge se e só se $|c| < 1$.*

- **Critérios de convergência.**

Teorema 1.9.8 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e só se*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ :\ \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \epsilon\ ,\quad se\ \ m \geq n \geq n_0\ .$$

Teorema 1.9.9 *Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é uma série de* <u>*termos não negativos*</u> *e*

$$s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se e só se a sucessão $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Teorema 1.9.10 *[Condensação de Cauchy] Seja $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$. A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e só se a seguinte série converge*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x_{2^k} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_8 + \cdots$$

Teorema 1.9.11 *[Comparação]*

(i) *Se $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é um inteiro fixo e se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.*

(ii) *Se $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é um inteiro fixo e se $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também diverge.*

Teorema 1.9.12 *[Comparação do limite] Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de* <u>*números reais positivos.*</u>

(i) *Se $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

(ii) *Se $\underset{n\to+\infty}{\underline{\lim}} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

Proposição 1.9.13 *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, respectivamente, uma série convergente e uma série divergente, de termos positivos. Nestas condições:*

(i) *se a sucessão de termos positivos $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, então $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n c_n$ converge;*

(ii) *se a sucessão de termos positivos $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente por um número positivo δ, então $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n d_n$ diverge.*

Proposição 1.9.14 *Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, respectivamente, uma série convergente e uma série divergente, de termos positivos. Se os termos de uma dada série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos positivos satisfazem, para todo $n \geq n_0$, com n_0 fixo,*

(i) *a condição $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente*

(ii) *a condição $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.*

Proposição 1.9.15 (Critério da razão) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(i) *Se existe um número* $0 \leq R < 1$ *tal que a partir de certa ordem*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < R\,,$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente.*

(ii) *Se a partir de certa ordem se tem*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1\,,$$

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente.*

Corolário 1.9.16 (Critério de D'Alembert) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos reais não nulos e suponha-se que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L\,.$$

(i) *Se* $L < 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

(ii) *Se* $L > 1$*, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Definição 1.9.17 (Série absolutamente/simplesmente convergente)
(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diz-se ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é convergente.
(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ diz-se SIMPLESMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ é divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ é convergente.

Se tivermos em conta o Teorema 1.9.11 (da comparação), conclui-se que a convergência absoluta implica a convergência.

Proposição 1.9.18 (Teste da Raiz) *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *uma série de termos reais e*

$$r = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

(i) *Se* $r < 1$*, a série converge absolutamente;*

(ii) *Se* $r > 1$*, a série diverge.*

Teorema 1.9.19 (Teste de Leibniz para séries alternadas) [4] *Se* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *e* $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*, então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

converge. Adicionalmente, se

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k \qquad e \qquad S = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

então $|S - s_n| \leq a_{n+1}$*, para* $n = 1, 2, \ldots$*.*

[4] Gottfried Wilhelm von Leibniz viveu entre 1 de Julho de 1646 e 14 de Novembro de 1716, tendo nascido em Leipzig, Alemanha.

2 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}$

2.1 Derivação e diferenciabilidade

Consideremos uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um ponto p do interior de D. Denotemos por s a recta secante ao gráfico de f, que passa pelos pontos $P(p, f(p))$ e $Q(x, f(x))$, de equação $y = m_s x + b$. O declive da recta secante s vai ser dado pela razão incremental

$$m_s = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \ .$$

Se escolhermos pontos Q cada vez mais próximos do ponto P, formamos uma sucessão de rectas secantes s_1, s_2, ..., s_n, ... que se aproximam cada vez mais da posição de uma recta que intersecta o gráfico de f num único ponto: $x = p$ (cf. Definição 2.1.3). Designa-se por *derivada da função* f no ponto de abcissa $x = p$ ao limite, se existir, da razão incremental quando x tende para p. Mais detalhadamente:

Definição 2.1.1 (Derivada)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \ .$$

Para além de $f'(p)$, outros exemplos de notações usadas para indicar o valor da derivada de f em p são: $\frac{df}{dx}(p)$, $Df(p)$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=p}$ e $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=p}$.

Definição 2.1.2 (Função diferenciável num ponto)
Note-se que a definição anterior inclui a possibilidade de $f'(p) = \infty$. Por isto mesmo, quando $f'(p)$ existir e for finito, diremos que a função f é DIFERENCIÁVEL NO PONTO p.

Definição 2.1.3 (Recta tangente ao gráfico de uma função)
Quando f é diferenciável num ponto p, chama-se RECTA TANGENTE ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$, à recta que passa por este ponto e tem declive igual a $f'(p)$, isto é, à recta de equação

$$y = f(p) + f'(p)(x - p) \ .$$

Definição 2.1.4 (Derivada à esquerda)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA À ESQUERDA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p^-) := \lim_{x \to p^-} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} .$$

Definição 2.1.5 (Derivada à direita)
Considerando-se uma função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & B \subset \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

e um ponto p do interior de A, designa-se por DERIVADA À DIREITA DE f NO PONTO p ao limite, se existir,

$$f'(p^+) := \lim_{x \to p^+} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} .$$

Perante o exposto, é claro que a derivada de f no ponto p, $f'(p)$, existe se e só se existem e são iguais $f'(p^-)$ e $f'(p^+)$.

Sugestão: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ e após calcular as derivadas laterais de f para $x = 0$ elabore uma conclusão sobre a eventual existência de $f'(0)$.

Definição 2.1.6 (Derivada de ordem n)
Se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de $B \subset A$, podemos definir a função que a cada x de B faz corresponder $f'(x)$. Surge, assim, uma nova função, de domínio B, que representamos por f' e a que chamamos FUNÇÃO DERIVADA DE f EM B.

Considerando f' diferenciável em $C \subset B$, definimos $f'' = (f')' : C \to \mathbb{R}$ como a SEGUNDA DERIVADA DE f EM C.

Se f'' for diferenciável em $D \subset C$, definimos $f''' = (f'')' : D \to \mathbb{R}$ como sendo a TERCEIRA DERIVADA DE f EM D.

Em geral, se a derivada de ordem $n-1$, $f^{(n-1)} : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for diferenciável em $Y \subset X$, definimos $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' : Y \to \mathbb{R}$ como sendo a DERIVADA DE ORDEM n DE f EM Y.

Definição 2.1.7 (Classe C^n (com $n \in \mathbb{N}$) e C^∞)
Se f' for contínua em X, diz-se que f é de CLASSE C^1 EM X e representa-se por $f \in C^1(X)$.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $f^{(n)}$ for contínua em Y diz-se que f é de CLASSE C^n EM Y e representa-se por $f \in C^n(Y)$.

Se $f \in C^n(Z)$, $\forall_{n\in\mathbb{N}}$, diz-se que f é de CLASSE C^∞ EM Z e representa-se por $f \in C^\infty(Z)$.

Sugestão: Verifique que a função $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.8 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e p um elemento do interior de D. Se f é diferenciável no ponto p, então f é contínua em p.*

Note-se que uma função pode ser contínua num dado ponto e não ter derivada nesse ponto. Pense no exemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ que é contínua (em todo o $\mathbb{R}$) mas não é diferenciável em $x = 0$.

Teorema 2.1.9 *Se f e g são funções diferenciáveis em a, então $f \pm g$ e $f \cdot g$ são igualmente funções diferenciáveis em a e*

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a)\\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\ .\end{aligned}$$

Se, além disso, $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\ .$$

Corolário 2.1.10 *Se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções diferenciáveis no ponto a, a sua soma e o seu produto também o são e verificam-se as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(a) &= f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_n'(a)\\ (f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n)'(a) &= f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a) \cdot f_3(a) \cdot \cdots \cdot f_n(a)\\ &\quad + \cdots + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \cdots \cdot f_n'(a)\ .\end{aligned}$$

Corolário 2.1.11 *Se $k \in \mathbb{N}$ e f é diferenciável em p, então também é diferenciável em p a função h, dada por $h(x) = (f(x))^k$ e tem-se*

$$h'(p) = k \cdot (f(p))^{k-1} f'(p)\ .$$

Teorema 2.1.12 (Regra de derivação das funções compostas) *Se $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a, $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $b := g(a)$ e $g(A) \subset B$, então $f \circ g$ é diferenciável em a e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))\, g'(a)\ .$$

Teorema 2.1.13 (Regra de derivação da função inversa) *Seja I um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua e $f^{-1} : J = f(I) \to \mathbb{R}$ a sua inversa. Se f é diferenciável no ponto a e $f'(a) \neq 0$, então f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \, .$$

2.2 Teoremas fundamentais da derivação: Teoremas da Rolle, Lagrange e Cauchy

Definição 2.2.1 (Mínimos e máximos locais; extremos relativos)
Diz-se que uma determinada função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÍNIMO LOCAL (OU RELATIVO) EM $a \in D$ se existir uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a tal que

$$f(x) \geq f(a) \, , \quad \forall_{x \in D \cap \mathscr{V}} \, .$$

Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um MÁXIMO LOCAL (OU RELATIVO) EM $a \in D$ se existir uma vizinhança $\mathscr{V}$ de a tal que

$$f(x) \leq f(a) \, , \quad \forall_{x \in D \cap \mathscr{V}} \, .$$

Os máximos e mínimos relativos designam-se por EXTREMOS RELATIVOS.

Teorema 2.2.2 *Considere-se a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f(a)$ for um mínimo relativo e existirem derivadas laterais em a, então $f'(a^-) \leq 0$ e $f'(a^+) \geq 0$. Se f for diferenciável em a, então $f'(a) = 0$.*

Teorema 2.2.3 *Considere-se a função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $f(a)$ for um máximo relativo e existirem derivadas laterais em a, então $f'(a^-) \geq 0$ e $f'(a^+) \leq 0$. Se f for diferenciável em a, então $f'(a) = 0$.*

Salienta-se que se f é diferenciável, $f'(a) = 0$ é uma condição necessária mas não suficiente para que a função f tenha um extremo em a. Para visualizar tal, sugere-se que considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^3$ – que não tem extremo em $x = 0$, apesar de $h'(0) = 0$.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Rolle) [5] *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ (com $a < b$) e diferenciável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe (pelo menos um) $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

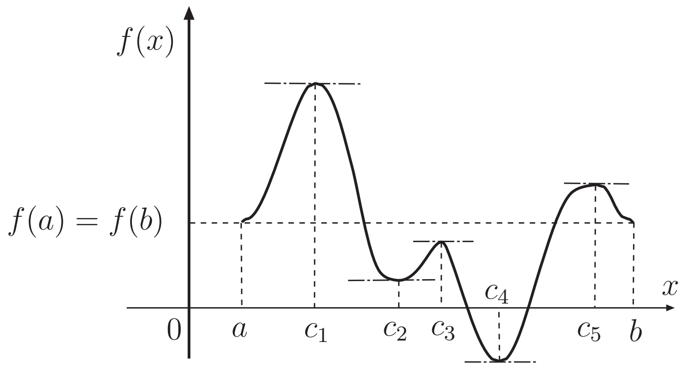

Figura 5: Exemplificação do Teorema de Rolle.

Atendendo à interpretação geométrica da função derivada, anteriormente perspectivada, temos então que – nas condições do teorema de Rolle – a existência de $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$ significa que a tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é horizontal.

A mais popular interpretação física deste teorema é realizada quando os valores de $f(x)$ descrevem a posição de um corpo que se move num dado eixo, em cada instante de tempo x. Nesta situação, o Teorema de Rolle garante que se o corpo ocupou a mesma posição ($f(a) = f(b)$) em dois instantes distintos de tempo ($a \neq b$), então houve (pelo menos) um instante intermédio ($c \in]a, b[$) onde o corpo teve uma paragem ($f'(c) = 0$), ou seja, teve velocidade nula nesse instante intermédio c.

Corolário 2.2.5 *Entre dois zeros de uma função diferenciável num dado intervalo existe (pelo menos) um zero da sua derivada.*

Corolário 2.2.6 *Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo existe, no máximo, um zero da função.*

Se ao acabado de concluir conjugarmos o Teorema de Bolzano (sobre funções contínuas), obtemos imediatamente as seguintes conclusões.

Corolário 2.2.7

(i) *Se a função (nas condições anteriores) assumir valores de sinais contrários para dois zeros consecutivos da derivada, então entre esses dois valores existe um único zero da função.*

(ii) *Se o sinal da função for o mesmo, então não há zero algum da função entre dois zeros da derivada.*

[5] Michel Rolle (1652–1719) foi um matemático francês que publicou o *Traité d'Algèbre* (Tratado sobre Álgebra) em 1690, onde para além de ter introduzido a notação $\sqrt[n]{a}$, demonstrou uma versão polinomial do presente teorema.

Teorema 2.2.8 *[Teorema de Lagrange]*[6] *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ (onde $a < b$) e diferenciável em $]a, b[$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Em termos geométricos, o Teorema de Lagrange garante-nos que na representação gráfica de uma função (contínua no intervalo $[a, b]$ (onde $a < b$) e diferenciável em $]a, b[$) existe pelo menos um ponto $(c, f(c))$ em que a tangente é paralela à corda que une os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$ (dado que estas rectas têm declives iguais).

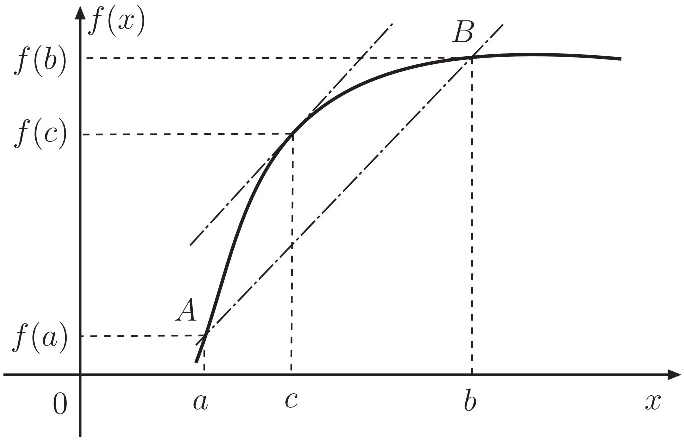

Figura 6: Exemplificação do Teorema de Lagrange.

Em termos físicos, continuando com a mesma associação física realizada para o Teorema de Rolle, temos que (nas condições do teorema) existe um instante de tempo c onde a velocidade instantânea $f'(c)$ é igual à velocidade média $[f(b)-f(a)]/(b-a)$ entre os instantes de tempo indicados. Precisamente por via desta interpretação, o Teorema de Lagrange também é conhecido como o *Teorema do Valor Médio do Cálculo Diferencial*.

É também interessante agora observar que o Teorema de Rolle é meramente um caso particular do Teorema de Lagrange em que $f(a) = f(b)$.

É claro que os teoremas de Rolle e Lagrange estão longe de serem triviais. Designadamente, as suas teses podem-se perder se por exemplo não tivermos diferenciabilidade apenas num ponto interior ao intervalo. Pense por exemplo no caso da função módulo definida no intervalo $I =]-1, 1[$:

$$\begin{array}{rcccl} |\cdot| & : &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & |x| \ . \end{array}$$

[6] Joseph Louis Lagrange foi um matemático italiano nascido a 25 de Janeiro de 1736 em Turim, Itália, tendo falecido a 10 de Abril de 1813 em Paris, França.

Corolário 2.2.9 *Se f tem derivada nula em todos os pontos de um intervalo, então é constante nesse intervalo.*

Corolário 2.2.10 *Se f e g são duas funções diferenciáveis num intervalo I e se $f'(x) = g'(x)$, $\forall_{x\in I}$, então a função $f - g$ é constante em I.*

Corolário 2.2.11 (i) *Se I é um intervalo e $f'(x) \geq 0$, $\forall_{x\in I}$, então f é crescente em I.*

(ii) *Se I é um intervalo e $f'(x) > 0$, $\forall_{x\in I}$, então f é estritamente crescente em I.*

(iii) *Se I é um intervalo e $f'(x) \leq 0$, $\forall_{x\in I}$, então f é decrescente em I.*

(iv) *Se I é um intervalo e $f'(x) < 0$, $\forall_{x\in I}$, então f é estritamente decrescente em I.*

Teorema 2.2.12 (Teorema de Cauchy) *Se f e g são funções contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em $]a, b[$ e g' não se anula em $]a, b[$, então existe um $c \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Teorema 2.2.13 (Teorema de Taylor) [7] *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ (onde $a < b$), com derivadas contínuas até à ordem $n - 1$ em $[a, b]$ e com derivada de ordem n definida em $]a, b[$. Então, existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que*

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c) .$$

Se a função f é diferenciável até à ordem n em $]a, b[$, com derivada contínua até à ordem $n - 1$ em $[a, b]$, então está nas mesmas condições em qualquer intervalo $[a, x]$, com $x \in [a, b]$. Usando o teorema anterior neste intervalo, temos a chamada FÓRMULA DE TAYLOR:

$$f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c_x)$$

para todo o $x \in [a, b]$, onde $c_x \in]a, x[$.

Ao termo

$$\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c_x)$$

dá-se o nome de RESTO DE LAGRANGE da fórmula de Taylor.

[7] Brook Taylor (1685–1731) foi um matemático inglês que inventou o presente método de expandir funções através de polinómios dependendo de um ponto arbitrário – tal foi publicado em *Methodus in Crementorum Directa et Inversa* (1715).

No caso em que $a = 0$, a fórmula de Taylor é conhecida por FÓRMULA DE MACLAURIN[8]:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(c_x) \ ,$$

para $0 < c_x < x$ ou $x < c_x < 0$.

2.3 Cálculo de limites

Teorema 2.3.1 (Regra de Cauchy) *Seja $x_0 \in [a,b]$ e f e g funções diferenciáveis em $]a,b[$, (com $a < b$) tais que:* (i) $g'(x) \neq 0$, $\forall_{x \in]a,b[}$; (ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ *ou* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. *Então, se existir* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *também existe* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e, adicionalmente,*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Observe-se que se por exemplo surge a dificuldade de f' e g' tenderem conjuntamente para zero, quando $x \to x_0$, e se a f' e g' pode ser aplicado o teorema anterior, obtemos a adicional informação

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \ .$$

2.4 Pontos de estacionaridade; extremos locais; concavidade; assímptotas

Definição 2.4.1 (Pontos de estacionaridade)
Chamam-se PONTOS DE ESTACIONARIDADE de uma função f às raízes da sua derivada, ou seja, aos pontos x tais que $f'(x) = 0$.

Pelo que se viu até aqui, para que uma função, diferenciável num determinado ponto, tenha extremo local nesse ponto é necessário (mas não suficiente) que esse ponto seja um ponto de estacionaridade. Assim, no caso dos pontos de diferenciabilidade, os extremos locais devem ser procurados dentro do conjunto dos pontos de estacionaridade.

Atente-se no entanto que para tal a condição de diferenciabilidade é fundamental: o caso da função módulo ($f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$) é ilustrativo, esta função nem sequer possui derivada em $x = 0$ e, no entanto, $x = 0$ é mínimo local (na realidade até é mínimo absoluto).

[8]Colin MacLaurin (1698–1746) foi um matemático escocês que se tornou discípulo de Isaac Newton (1642–1727).

De qualquer modo – quando na presença de diferenciabilidade – como um ponto de estacionaridade não é necessariamente um ponto de extremo local torna-se necessário determinar condições em que se possa garantir a eventual existência de extremo. Tal será perspectivado de seguida.

Definição 2.4.2
Sejam f e g duas funções cujos domínios contenham o mesmo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Diz-se que o GRÁFICO DE f ESTÁ POR CIMA DO GRÁFICO DE g EM I se $f(x) \geq g(x)$, $\forall_{x \in I}$.

Como se analisou anteriormente, para uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$, o gráfico da função f admite no ponto de abcissa a uma recta tangente de equação $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Definição 2.4.3 (Função convexa num ponto)
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$. Se existe $\epsilon > 0$ tal que, em $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, o gráfico de f está por cima das rectas tangentes ao gráfico de f nos pontos de $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, a função f diz-se CONVEXA NO PONTO a ou então diz-se que o seu gráfico tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA EM a.

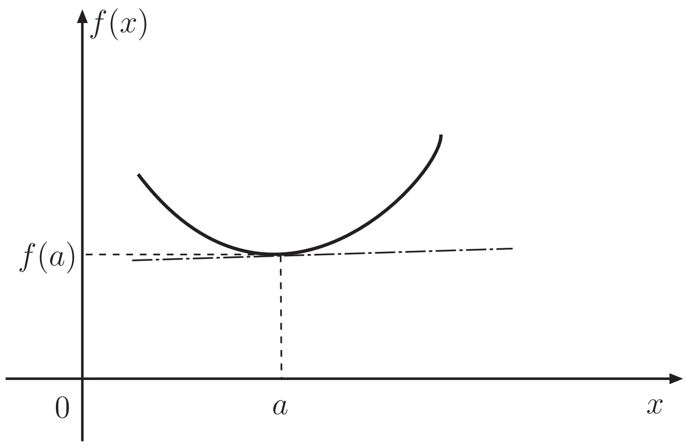

Figura 7: Exemplo de uma função convexa num ponto a.

Definição 2.4.4 (Função côncava num ponto)
Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $a \in \text{int}(I)$. Se existe $\epsilon > 0$ tal que, em $\mathscr{V}_\epsilon(a)$, as rectas tangentes ao gráfico de f estão por cima do gráfico de f, então a função f diz-se CÔNCAVA NO PONTO a ou então diz-se que o seu gráfico tem a CONCAVIDADE VOLTADA PARA BAIXO EM a.

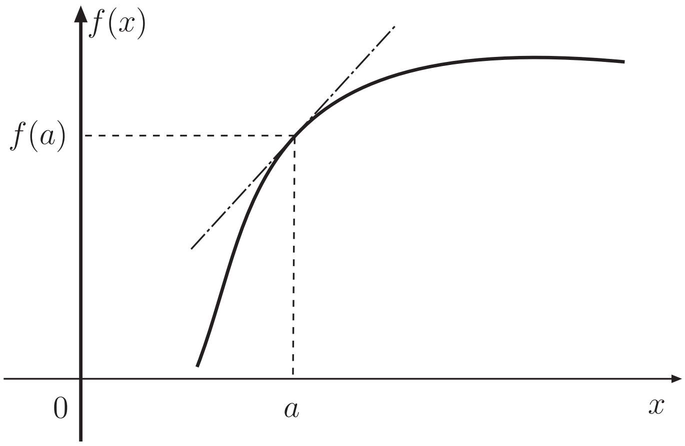

Figura 8: Exemplo de uma função côncava num ponto a.

Definição 2.4.5 (Inflexão)
Caso em que $f'(a) \in \mathbb{R}$: Designando por g a recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, se num dos intervalos $]a-\epsilon, a[$ ou $]a, a+\epsilon[$ (para $\epsilon > 0$) o gráfico de f está por cima do de g e no outro intervalo o gráfico de g está por cima do gráfico de f, então diz-se que a é um PONTO DE INFLEXÃO de f ou que o gráfico de f tem uma INFLEXÃO EM a.
Caso em que $f'(a) = \infty$ e em que $f'(p) \in \mathbb{R}$, para todo o $p \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\setminus \{a\}$:
Se para todos os pontos p de um dos intervalos $]a-\epsilon, a[$ ou $]a, a+\epsilon[$ (para $\epsilon > 0$) o gráfico de f está por cima do da recta tangente ao gráfico de f em $x = p$ e no outro intervalo a recta tangente ao gráfico de f em $x = p$ se situa por cima do gráfico de f, então também se diz que a é um PONTO DE INFLEXÃO de f ou que o gráfico de f tem uma INFLEXÃO EM a.

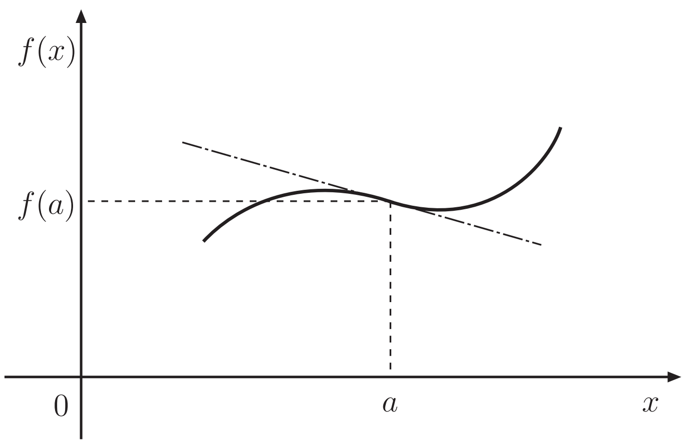

Figura 9: Exemplo de um ponto de inflexão de uma função.

Teorema 2.4.6 *[Regra de Cauchy] Seja f uma função com derivadas contínuas num intervalo I até à ordem 2 e $a \in \text{int}(I)$. Nestas condições:*

(i) *se $f''(a) > 0$, então f é convexa no ponto a;*

(ii) *se $f''(a) < 0$, então f é côncava no ponto a;*

(iii) *se f tem uma inflexão em a, então $f''(a) = 0$.*

Se pensarmos na definição de função e considerarmos uma função f contínua em a tal que $f'(a) = +\infty$ ou $f'(a) = -\infty$, então concluímos que o gráfico de f tem necessariamente uma inflexão no ponto a.

Definição 2.4.7 (Assímptota vertical)
Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto de acumulação de A. Diz-se que a recta de equação $x = a$ é uma ASSÍMPTOTA VERTICAL ao gráfico de f quando se verifica (pelo menos) uma das seguintes ocorrências: $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

Definição 2.4.8 (Assímptota não vertical à direita)
Diz-se que o gráfico de f tem como ASSÍMPTOTA NÃO VERTICAL À DIREITA, a recta $y = mx + b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}, \exists_{C>0} \ : \ |mx + b - f(x)| < \epsilon \ , \ \ \forall_{x>C} \ .$$

Definição 2.4.9 (Assímptota não vertical à esquerda)
Diz-se que o gráfico de f tem como ASSÍMPTOTA NÃO VERTICAL À ESQUERDA, a recta $y = mx + b$, se

$$\forall_{\epsilon>0}, \exists_{C>0} \ : \ |mx + b - f(x)| < \epsilon \ , \ \ \forall_{x<-C} \ .$$

Perante tais definições fica claro se a recta $y = mx + b$ é assímptota à direita, então $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx - b] = 0$, ou seja, $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx] = b$ e também $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{mx+b}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(m + \dfrac{b}{x}\right) = m$. Idênticas igualdades podem ser reproduzidas para o caso da assímptota à esquerda.

Assim sendo, temos directamente as seguintes conclusões.

Teorema 2.4.10

(i) *O gráfico da função f (cujo domínio contém necessariamente um intervalo não majorado) tem uma assímptota à direita se e somente se existirem e forem finitos os limites:*

$$m_d = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \ , \qquad b_d = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m_d\, x] \ .$$

Nestas últimas condições, a assímptota à direita é única e tem como equação $y = m_d x + b_d$.

(ii) *O gráfico da função f (cujo domínio contém necessariamente um intervalo não minorado) tem uma assímptota à esquerda se e somente se existirem e forem finitos os limites:*

$$m_e = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \,, \qquad b_e = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_e\, x] \,.$$

Nestas últimas condições, a assímptota à esquerda é única e tem como equação $y = m_e x + b_e$.

3 Primitivação

3.1 Noções elementares sobre primitivas

Definição 3.1.1 (Primitiva; função primitivável) *Se f e F são funções definidas no intervalo $[a, b]$, F é diferenciável em todos os pontos de $[a, b]$ e se para todo o $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$, diz-se que F é uma* PRIMITIVA *de f em $[a, b]$ e que f é* PRIMITIVÁVEL *em $[a, b]$.*

Em termos de notações, para denotar uma primitiva de uma função $y = f(x)$ é habitual utilizar a notação, $P_x f(x)$, $P_x f$, $Pf(x)$, Pf, $\int f(x)\,dx$ ou $\int f$.

Como se pode verificar, se F for uma primitiva de f, também $F + C$ (em que C é uma constante) é uma primitiva de f.

Proposição 3.1.2 *Sejam F e G duas primitivas de f no intervalo $[a, b]$. Então, $F(x) - G(x) = C$ (em que C é uma constante), isto é, F e G diferem entre si de uma constante.*

Exemplo 3.1.3

Função Primitivável	**Primitiva**
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
x^α , $\alpha \neq -1$, $x > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\psi'(x)\sin\psi(x)$	$-\cos\psi(x) + C$
$\psi'(x)\cos\psi(x)$	$\sin\psi(x) + C$
$\psi'(x)[\psi(x)]^\alpha$, $\alpha \neq -1$, $\psi(x) > 0$	$\dfrac{[\psi(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}$	$\ln\|\psi(x)\| + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{1+[\psi(x)]^2}$	$\arctan\psi(x) + C$
$\dfrac{\psi'(x)}{\sqrt{1-[\psi(x)]^2}}$	$\arcsin\psi(x) + C$

Saliente-se que atendendo à regra de derivação da função composta se concluí que $[F(\phi(x))]' = \phi'(x)\, F'(\phi(x))$, o que nos ajuda na dedução da tabela anterior.

3.2 Propriedades das primitivas

Para simplificar a notação utilizada, iremos usar as igualdades $Pf(x) = Pg(x)$ no sentido de as indicadas primitivas serem iguais a menos de uma constante, isto é, significando que $Pf(x) - Pg(x) = C$, com $C \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.2.1 *Sejam f e g funções primitiváveis no intervalo $[a, b]$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então, no intervalo $[a, b]$, tem-se:*

(a) $P(f + g) = Pf + Pg$;

(b) $P(\beta f) = \beta\, Pf$.

Proposição 3.2.2 *Seja f uma função diferenciável no intervalo $[a, b]$. Então, no intervalo $[a, b]$, $Pf'(x) = f(x) + C$.*

Proposição 3.2.3 *Se f é uma função contínua num intervalo, então f é primitivável nesse intervalo.*

3.3 Primitivação por partes

Proposição 3.3.1 *Sejam f e g funções com derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, neste mesmo intervalo,*

$$P[f'(x)\; g(x)] = f(x)\, g(x) - P[f(x)\, g'(x)]\ .$$

3.4 Primitivação por mudança de variável

Iremos usar a seguinte notação para representar $f(g(t))$:

$$f(g(t)) = f(x)_{|x=g(t)}\ .$$

Proposição 3.4.1 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e $x = \phi(t)$ uma aplicação com derivada contínua e que não se anula. Então,*

$$P_x f(x) = P_t f(\phi(t))\, \phi'(t)_{|t=\phi^{-1}(x)}\ ,$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \left. \int f(\phi(t))\, \phi'(t)\, dt \right|_{t=\phi^{-1}(x)} \\ &= \left. \int f(\phi(t))\, \frac{d\phi}{dt}\, dt \right|_{t=\phi^{-1}(x)} . \end{aligned}$$

Exercício 3.4.2 Calcule $P\dfrac{1}{(2x+1)^2}$.

Nem sempre é muito claro qual a mudança de variável mais recomendada. No entanto, em numerosas situações encontram-se estudadas substituições aconselhadas. Veja-se a seguinte tabela na qual f é uma função irracional dos argumentos indicados. A utilização destas substituições permite transformar a função a primitivar numa função racional que pode ser primitivada por decomposição (ver a próxima secção).

Primitiva	**Substituição**
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ a>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a}$
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}$
$P\,f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ b^2-4ac>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$ onde α é raiz de ax^2+bx+c
$P\,f(e^x)$	$x = \ln t$

Exercício 3.4.3 Calcule $P\dfrac{1}{\sqrt{x^2-50}}$ e $P\dfrac{1+\sqrt{x^2-3x-2}}{x-1}$.

3.5 Primitivação por decomposição

Definição 3.5.1 *Um polinómio diz-se* MÓNICO *se o coeficiente do termo de maior grau é* 1.

A técnica de primitivação de funções racionais por decomposição consiste, numa primeira fase, em decompor em fracções elementares de primitivação imediata – ou quase imediata – a função racional que se pretende primitivar. Os seguintes resultados são relevantes para este propósito.

Proposição 3.5.2 *Sendo F uma qualquer função racional, é possível escrever F na forma*

$$F(x) = H(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}\ , \tag{3.1}$$

em que H, P e Q representam polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico Q.

Como consequência de (3.1), obtemos

$$\int F(x)\,dx = \int H(x)\,dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx\ ,$$

reduzindo-se assim a primitiva inicial à questão das primitivas no segundo membro anterior. Para estas últimas, realçamos o seguinte:

Proposição 3.5.3 *Sejam P e Q polinómios tais que o grau de P é inferior ao grau do polinómio mónico Q. Então $\frac{P}{Q}$ pode decompor-se numa soma de termos elementares dos seguintes dois tipos:*

(a) $\dfrac{a}{(x-r)^k}\,, \qquad a, r \in \mathbb{R}\,, \quad k \in \mathbb{N};$

(b) $\dfrac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}, \qquad b, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

Desta forma, conhecendo as primitivas dos termos elementares (a) e (b), o problema do cálculo de $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ fica resolvido.

Função Primitivável	**Primitiva**
$\dfrac{a}{(x-r)^k}\,, \quad k \in \mathbb{N}$	$\begin{cases} a \ln\lvert x-r\rvert + C\,, & \text{se } k=1 \\ \dfrac{a\,(x-r)^{-k+1}}{-k+1} + C\,, & \text{se } k>1 \end{cases}$
$\dfrac{bx+d}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{b\ln[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{2} + \dfrac{b\alpha+d}{\beta}\arctan\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right) + C$
$\dfrac{bx+d}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^k}, \quad k>1\,,\ k \in \mathbb{N}$	$\dfrac{b(1+t^2)^{-k+1}}{2\beta^{2k-2}(1-k)} + \dfrac{b\alpha+d}{\beta^{2k-1}}\displaystyle\int \dfrac{1}{(1+t^2)^k}\,dt + C\,,\ t = \dfrac{x-\alpha}{\beta}$
$\dfrac{1}{(1+t^2)^k}\,,\ k>1\,,\ k \in \mathbb{N}$	a primitiva aparece pelo *método por partes*, fazendo $\dfrac{1}{(1+t^2)^k} = \dfrac{1}{(1+t^2)^{k-1}} - \dfrac{t}{2}\dfrac{2t}{(1+t^2)^k}$

Analisemos agora como podemos decompor P/Q.

Proposição 3.5.4 *Consideremos o polinómio mónico Q e todas as suas raízes reais r_k $(1 \le k \le s)$ e raízes complexas $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \le l \le t)$ assim como as respectivas multiplicidades μ_k $(1 \le k \le s)$ das raízes reais e ν_l $(1 \le l \le p)$ das raízes complexas. O polinómio Q pode ser escrito na seguinte forma:*

$$Q(x) = (x-r_1)^{\mu_1}\cdots(x-r_s)^{\mu_s}\,\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{\nu_1}\cdots\left[(x-\alpha_p)^2+\beta_p^2\right]^{\nu_p}\,.$$

Proposição 3.5.5 *Consideremos a função racional P/Q tal que o grau de P é menor do que o grau do polinómio mónico Q. Sejam r_k $(1 \le k \le s)$ todas as raízes reais e $c_l = \alpha_l + \beta_l i$ $(1 \le l \le t)$ todas as raízes complexas de Q, de multiplicidades μ_k $(1 \le k \le s)$ para as raízes reais e ν_l $(1 \le l \le p)$ para as raízes complexas. Então:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{n=1}^{\mu_k}\frac{a_k^{(n)}}{(x-r_k)^n} + \sum_{l=1}^{p}\sum_{m=1}^{\nu_l}\frac{b_l^{(m)}x + d_l^{(m)}}{\left[(x-\alpha_l)^2+\beta_l^2\right]^m}\,.$$

Note-se que os coeficientes desconhecidos na decomposição anterior podem ser calculados pelo método dos coeficientes indeterminados.

4 Integral de Riemann

4.1 Partições de intervalos, somas de Riemann, integrabilidade à Riemann

Definição 4.1.1 *Seja $[a, b]$ um intervalo (com $b > a$). Uma* PARTIÇÃO *de $[a, b]$ é um conjunto de pontos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tal que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\,.$$

A NORMA DA PARTIÇÃO *$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é o número*

$$\|P\| = \max_{1 \le j \le n} |x_j - x_{j-1}|\,.$$

Um REFINAMENTO DA PARTIÇÃO *$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ é uma partição Q de $[a, b]$ tal que $P \subset Q$. Nesta situação diz-se que Q é* MAIS FINA *do que P.*

Definição 4.1.2 *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Chama-se* SOMA DE RIEMANN *de f (relativamente à partição P) ao número*

$$S(f, P) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

com $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, para $1 \le j \le n$.

Definição 4.1.3 (Convergência de uma soma de Riemann)
Seja $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Por definição, diz-se que A SOMA DE RIEMANN DE f (RELATIVAMENTE À PARTIÇÃO P) CONVERGE *para um número $I(f)$, quando $\|P\| \to 0$, se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma partição P_ϵ de $[a, b]$ tal que*

$$P_\epsilon \subset P \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - I(f) \right| < \epsilon$$

para todas as escolhas de $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $1 \le j \le n$. Quando tal sucede, escrevemos abreviadamente

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})\,.$$

Definição 4.1.4 *Seja* $[a, b]$ *um intervalo (com* $b > a$*). Diz-se que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é* INTEGRÁVEL À RIEMANN *em* $[a, b]$ *se* f *é limitada em* $[a, b]$ *e se o limite*

$$I(f) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1})$$

existe.

Quando tal acontece, escrevemos abreviadamente

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$$

e diz-se que $\int_a^b f(x)\, dx$ *é o integral definido de* f *entre* a *e* b*;* f *representa a chamada* FUNÇÃO INTEGRANDA, x *designa-se por* VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO, dx *o* ACRÉSCIMO INFINITÉSIMAL *associado a*

$$\lim_{\|P\| \to 0} (x_j - x_{j-1})$$

e a *e* b *denominam-se por* LIMITE INFERIOR E LIMITE SUPERIOR DE INTEGRAÇÃO, *respectivamente.*

Teorema 4.1.5 *As funções contínuas em intervalos fechados e limitados, são integráveis à Riemann.*

O integral de Riemann de uma função positiva entre a e b pode interpretar-se geometricamente como a área da região do plano limitada superiormente pelo gráfico de f, inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

4.2 Propriedades elementares do integral de Riemann

Proposição 4.2.1 (Linearidade do integral de Riemann) *Sejam* f *e* g *integráveis em* $[a, b]$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, então* $f + g$ *e* αf *são integráveis em* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\ ,$$

$$\int_a^b [\alpha f(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

Proposição 4.2.2 *Se* f *é integrável em* $[a, b]$ *então* f *é integrável em todo o subintervalo* $[c, d]$ *de* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^p f(x)\, dx + \int_p^b f(x)\, dx\ ,$$

para todo o $p \in]a, b[$*.*

Proposição 4.2.3 (Comparação de integrais) *Sejam f e g integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Em particular, se $m \leq f(x) \leq M$, tem-se

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)\ .$$

Proposição 4.2.4 *Se f integrável em $[a,b]$, então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx\ .$$

Proposição 4.2.5 *Se f e g são integráveis em $[a,b]$, então fg é integrável em $[a,b]$.*

Definição 4.2.6 *Para f integrável em $[a,b]$, define-se*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

e

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0 \qquad (\textit{para todo o } c \in [a,b])\ .$$

Proposição 4.2.7 (Teorema da média) *Se f é contínua em $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)\ .$$

4.3 Teorema fundamental do cálculo integral

Definição 4.3.1 (Integral indefinido) *Seja f integrável em $[a,b]$. A função $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, com $x \in [a,b]$, designa-se por* INTEGRAL INDEFINIDO *de f.*

Proposição 4.3.2 *Se f é integrável em $[a,b]$, então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

existe e é contínua em $[a,b]$.

Teorema 4.3.3 (Teorema fundamental do cálculo integral) *Considere-se um intervalo $[a,b]$ (com $b > a$) e uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(a) *Se f é contínua em $[a,b]$, então $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ tem derivada contínua em $[a,b]$ e*

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}{dx} = F'(x) = f(x)\ .$$

(b) **(Fórmula de Barrow)** *Se f é contínua em $[a,b]$ e G é uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(x)|_a^b = G(b)-G(a)\ .$$

Note-se que a *Fórmula de Barrow* apresentada na anterior alínea (b) ocorre mesmo com uma hipótese menos forte: Se F' é integrável em $[a,b]$ então $\int_a^b F'(t)\,dt = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$.

Exemplo 4.3.4 Para calcular $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$, pode-se começar por observar que $-\cos(x)$ é uma primitiva de $\sin(x)$. Então, usando o item (b) da proposição anterior, vem

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x)\,dx &= -\cos(x)|_0^\pi \\ &= -\cos(\pi)-(-\cos(0)) \\ &= -(-1)-(-1) \\ &= 2\end{aligned}$$

4.4 Integração por partes

Proposição 4.4.1 (Fórmula de integração por partes) *Sejam f e g diferenciáveis em $[a,b]$, com f' e g' integráveis em $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx\ .$$

4.5 Integração por mudança de variável

Teorema 4.5.1 (Mudança de variável) *Seja $x=\varphi(t)$ uma função com derivada contínua no intervalo fechado e limitado $[a,b]$, tal que $\varphi(a)\le\varphi(b)$. Se,*

(a) *f for contínua em $\varphi([a,b])$, ou se,*

(b) *φ for estritamente crescente em $[a,b]$ e f for integrável em $[\varphi(a),\varphi(b)]$, então,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\ .$$

4.6 Aplicações do integral definido

Cálculo de áreas

A área $\mathscr{A}$, limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$ $(a < b)$, pode calcular-se recorrendo à seguinte expressão:

$$\mathscr{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \; dx \, .$$

Saliente-se que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \; dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - g(t_j)|(x_j - x_{j-1})$$

facto cuja interpretação geométrica é coerente com a afirmação.

Cálculo de volumes de sólidos de revolução

O volume V de um sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada pelas curvas (correspondentes a funções integráveis não negativas) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e as rectas $x = a$ e $x = b$ $(a \leq b)$, pode ser calculado pela seguinte forma:

$$V = \int_a^b \pi \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \; dx \, .$$

Note-se que

$$\int_a^b \pi \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \; dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} \pi |f^2(t_j) - g^2(t_j)|(x_j - x_{j-1})$$

e tal identidade facilita a interpretação geométrica do volume em causa.

Exercício 4.6.1 Utilizando integração, calcule o volume de uma esfera de raio igual a um.

4.7 Integrais impróprios

A operação de integração pode ser extendida a intervalos não limitados e a funções não limitadas por recurso à noção de integral impróprio. Podem-se distinguir duas situações diferentes: (i) quando os limites de integração são infinitos, isto é, quando o intervalo de integração não é limitado (designando-se tal por INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE PRIMEIRA ESPÉCIE); (ii) quando a função integranda é não limitada no intervalo de integração (usualmente denominados por INTEGRAIS IMPRÓPRIOS DE SEGUNDA ESPÉCIE).

Limites de integração infinitos

Definição 4.7.1 *Seja f uma função integrável em todo o intervalo $[a,\beta]$ com β tal que $[a,\beta]\subset[a,+\infty[$. O* INTEGRAL IMPRÓPRIO*, da função f em $[a,+\infty[$, é o limite*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação, diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ EXISTE *ou* CONVERGE*. Se $\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{\beta} f(x)\,dx$ não existir ou não for finito diz-se que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$* NÃO EXISTE *ou* DIVERGE*.*

Define-se de forma análoga,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \qquad (b\in\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty}\int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to+\infty}\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx \qquad (a\in\mathbb{R}).$$

Exercício 4.7.2 Estude a existência do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^k}\,dx$$

(onde k é um parâmetro fixo pertencente a $[0,+\infty[$).

Funções integrandas não limitadas

Definição 4.7.3 *Seja f uma função integrável em $[a,\alpha]$ (para todo o α tal que $[a,\alpha]\subset[a,c[$) e não limitada em c. O* INTEGRAL IMPRÓPRIO*, da função f em $[a,c]$, é o limite*

$$\int_a^{c} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to c^-}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$$

caso exista e seja finito. Nesta situação diz-se que $\int_a^{c} f(x)\,dx$ EXISTE *ou* CONVERGE*.*

Se $\lim_{\alpha\to c^-}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx$ não existir ou não for finito diz-se que $\int_a^{c} f(x)\,dx$ NÃO EXISTE *ou* DIVERGE*.*

Define-se de forma análoga, $\int_a^b f(x)\,dx$ quando a não limitação de f se verifica no limite inferior de integração $x=a$, ou em $x=c$ pertencente ao interior do intervalo $[a,b]$:

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to c^-}\int_a^{\alpha} f(x)\,dx + \lim_{\beta\to c^+}\int_{\beta}^{b} f(x)\,dx\ .$$

Exercício 4.7.4 Estude a existência do integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx$ (onde k é um parâmetro fixo pertencente a $[0,+\infty[$).