42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II

Sistemas 2

Atenção à renumeração

Vítor Neves

2009/2010

Capítulo 6

Equações diferenciais ordinárias

6.5 Sistemas lineares de primeira ordem na forma normal

(**F.R. Dias Agudo, Análise Real Vol. III**
Escolar-Editora 1992)

6.5.1 Generalidades

`Salvo observação em contrário, as funções` f `são contínuas e tão diferenciáveis quanto necessário.`
`Vamos tratar apenas sistemas da forma`

$$y' \;=\; f(x,y) \;=\; A(x)y + B(x) \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= (y_1(x), \cdots, y_n(x)) \\
y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i \le n) \\
y_0 &= (y_{01}, \cdots, y_{0n}) \\
a_{ij} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i, j \le n) \\
B(x) &= (b_1(x), \cdots, b_n(x)) \\
b_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \qquad (1 \le i \le n;\ n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

Proposição 6.5.1 *Uma equação diferencial linear*

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) y^{(n-i)} \;=\; b(x)$$

é equivalente ao sistema linear

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \cdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

com

$$y_i \;=\; y^{(i-1)} \qquad (1 \le i \le n)$$

Teorema 6.5.1 *O integral geral de* (6.1) *é o espaço afim de dimensão n soma do integral geral h da equação homogénea*

$$y' \;=\; A(x)y \tag{6.2}$$

com uma solução particular η

$$\eta' \;=\; A(x)\eta + B(x). \tag{6.3}$$

$$y' \;=\; h + \eta \tag{6.4}$$

Teorema 6.5.2 *Sejam quais forem $(x_0, y_0) \in I \times \Omega$, o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = \; A(x)y + B(x) \\ y(x_0) & = \; y_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

tem uma e só uma solução.

Definição 6.5.1 *Se $\phi_1, \cdots, \phi_n$ são soluções linearmente independentes do sistema homogéneo* (6.2) *a matriz $n \times n$*

$$\Phi(x) \;=\; \begin{bmatrix} \phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \phi_{11}(x) & \cdots & \phi_{n1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{1n}(x) & \cdots & \phi_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

*diz-se uma **matriz fundamental de soluções**.*

Proposição 6.5.2 *Se* $\begin{bmatrix}\phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x)\end{bmatrix}$ *é uma matriz fundamental de soluções, o integral geral de* (6.2) *é dado por*

$$\begin{bmatrix}\phi_1(x) & \cdots & \phi_n(x)\end{bmatrix} C \qquad (C \in \mathbb{R}^n)$$

Teorema 6.5.3 ***(Variação de constantes)***
Considere-se o sistema (6.1)*, sejam* Φ *uma matriz fundamental de soluções do sistema homogéneo* (6.2) *e* $C : I \to \mathbb{R}^n$ *uma função tal que*

$$C' = \Phi^{-1}B. \tag{6.6}$$

A solução de (6.1) *é da forma*

$$y = \Phi C$$

Dem.

$$\begin{aligned}\Phi' &= A\Phi \\ \Phi' C &= A\Phi C \\ (\Phi C)' &= \phi' C + \Phi C' \\ &= A(\Phi C) + B\end{aligned}$$

Note-se que C já inclui uma constante arbitrária n-dimensional . □

Teorema 6.5.4

1. *Se* $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}$*, todos os elementos de* C *são distintos e* $v \in \mathbb{R}^n$*,* $\{e^{\lambda x} v \mid \lambda \in C\}$ *é linearmente independente.*

2. *Se* $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ *e é linearmente independente também* $\{e^{\lambda x} v \mid v \in \mathcal{B}\}$ *é linearmente independente.*

6.5.2 Matriz A constante

Multiplicidades iguais

Teorema 6.5.5 *Suponha-se que $\lambda \in \mathbb{R}$ e $V \in \mathbb{R}^n$. A função $x \mapsto e^{\lambda x}V$ é solução não trivial de $y' = Ay$ sse λ é valor próprio de A associado ao vector próprio $V \neq 0$.*

Corolário 6.5.1 *Se A tem n valores próprios reais distintos λ_i $(1 \le i \le n)$ e os $V_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ $(1 \le i \le n)$ constituem uma base de vectores próprios associada, uma matriz fundamental de soluções será*

$$\left[e^{\lambda_1 x}V_1 \quad \cdots \quad e^{\lambda_n x}V_n\right]$$

Corolário 6.5.2 *Se A tem valores próprios complexos simples $a_j \pm \mathbf{i}\beta_j$ $(1 \le j \le k \le n)$, com vectores próprios (não nulos) associados respectivamente $V_j = U_j + \mathbf{i}W_j$ $(U_j, W_j \in \mathbb{R}^n)$ e $\overline{V_j}$, e valores próprios reais λ_p $(1 \le p \le m)$ simples distintos, de modo que*

$$2k \ + \ m \ = \ n$$

cada valor próprio real dará lugar à solução $e^{\lambda_p x}$ e cada valor complexo dará lugar às soluções

$$e^{a_j x}\big(\cos(bx)U_j - \operatorname{sen}(b_j x)W_j\big) \qquad e^{a_j x}\big(\cos(bx)U_j + \operatorname{sen}(b_j x)W_j\big).$$

O conjunto de todas as soluções descritas é um sistema fundamental.

Multiplicidade algébrica superior

Quando as multiplicidades do valor próprio λ são distintas, procurar-se-ão também soluções da forma

$$\phi(x) \ = \ e^{\lambda x}(V_0 + xV_1 + \cdots + x^k V_k) \quad \& \quad V_i \in \mathbb{R}^n \qquad (1 \le i \le k)$$

para valores adequados de k

1. Determinam-se as soluções correspondentes a cada valor próprio de multiplicidades iguais (se existirem) – uma função $e^{\lambda x}V$ ou por cada valor próprio λ e vector próprio associado independente V, com adaptação adequada no caso de valores próprios imaginários.

2. λ é valor próprio com multiplicidade algébrica superior à multiplicidade geométrica m
   (a) $\mathcal{B}$ uma base do espaço próprio associado a λ.
   (b) $V \in \mathcal{B}$
   (c) $x \mapsto e^{\lambda x} V$
   (d) $V_k := V \;\&\; (A - \lambda I) V_{k-m} = (k-m+1) V_{k-m+1} \quad (1 \leq m \leq k)$

Exponencial de matriz

$$e^{xA} \;:=\; I + \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!} A^n$$

Teorema 6.5.6 *e^{xA} é matriz fundamental de soluções da equação homogénea* (6.2)*.*

Transformada de Laplace

(Não baseado em texto de F. R. Dias Agudo)

Teorema 6.5.7 *Definindo*

$$\mathcal{L}[z] \;:=\; \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[z_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[z_n\right] \end{bmatrix} \qquad (z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$$

Para s em intervalos que não contenham valores próprios de A

$$\mathcal{L}[y](s) \;=\; (sI - A)^{-1} \left(\mathcal{L}[b](s) - u(0)\right).$$

Dem.

$$s \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[y_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[y_n\right] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \cdots \\ y_n(0) \end{bmatrix} \;=\; A \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[y_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[y_n\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[b_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[b_n\right] \end{bmatrix}$$

$$(sI - A) \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[y_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[y_n\right] \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[b_1\right] \\ \cdots \\ \mathcal{L}\left[b_n\right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1(0) \\ \cdots \\ y_n(0) \end{bmatrix}.$$

□

6.6 Existência e unicidade II

Definição 6.6.1 *A função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ diz-se **localmente Lipschitziana na segunda variável** se, para qualquer $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe $\rho > 0$, tal que $f : B_\rho(x, y) \subseteq \Omega \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana na segunda variável, i.e.,*

$$\exists L > 0\ \forall (x, y), (x, z) \in B_\rho(x_0, y_0) \quad \|f(x, y) - f(x, z)\| \le L\|y - z\|.$$

Todas as funções seguintes são supostas contínuas

$$\begin{cases} f_i : \Omega \in \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R} & 1 \le i \le n \\ (x_0, y_{10}, \cdots, y_{n0}) \in \Omega & 1 \le i \le n \end{cases} \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \cdots, y_n) & 1 \le i \le n \\ y_i(x_0) = y_{i0} & 1 \le i \le n \end{cases} \tag{6.8}$$

$$\begin{cases} y := (y_1, \cdots, y_n) \\ f := (f_1, \cdots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{6.9}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Teorema 6.6.1 *Quando a função f definida como acima é localmente Lipschitziana na segunda variável, o problema de Cauchy* (6.10) *tem solução única em algum intervalo máximo (para $\subseteq$) $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$.*

Generalizando um pouco a demonstração de teorema de existência e unicidade 6.4.2 pode demonstrar-se o teorema mais simples seguinte

Teorema 6.6.2 *Suponha-se que $\Omega \supseteq [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, para algum $\alpha > 0$ e que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua, e lipschitziana em y. O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6.11}$$

tem solução única $y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$, seja qual for $y_0 \in \mathbb{R}$.

Corolário 6.6.1 *Quando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, limitada e lipschitziana em y em qualquer faixa vertical o problema de* (6.11) *tem sempre solução única definida em $\mathbb{R}$.*