Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Terceiro Teste da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 2 horas | 15 de Dezembro de 2010

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [3.0] Considere a função $f(x) = \begin{cases} \sin x \ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.

   (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$, mas não é diferenciável neste ponto.
   (b) Calcule $f'(x)$, para $x \neq 0$.

2. [1.5] Enuncie o *Teorema da Regra de Derivação da Função Inversa* e use este teorema para deduzir a derivada da função arccos.

3. [3.0] Dada uma função real de variável real f que seja diferenciável e $a, b \in \mathbb{R}$ (com $a < b$), demonstre que **se** existe $C \geq 0$ tal que

   $$|f'(x)| \leq C \qquad \text{para todo o } x \in]a, b[$$

   então $\quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad$ para todos os $x, y \in]a, b[$.

4. [5.0] Calcule as seguintes primitivas, justificando todos os passos efectuados:

   $$(a) \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\, dx \ ; \qquad (b) \int x \cos(x^2 + 2)\, dx \ ; \qquad (c) \int (2x + 3)\, e^{3x}\, dx \ .$$

5. [3.5] Calcule o valor dos seguintes integrais definidos, justificando todos os passos efectuados:

   $$(a) \int_1^e \frac{x}{50} \ln x\, dx \ ; \qquad\qquad (b) \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x} dx \, .$$

6. [2.0] <u>Usando integração</u>, mostre que $\frac{4}{3}\pi$ é o volume de uma esfera de raio igual a um.

7. [2.0] Demonstre que **se** f é contínua no intervalo real $[a, b]$ e G é uma primitiva de f em $[a, b]$, **então** $\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$.

—— FIM ——