UNIVERSIDADE DE AVEIRO
Departamento de Matemática

Exame Final 2014/2015

Justifique devidamente as suas respostas.

---

07 de Janeiro de 2015 (Duração: 2,5 horas)

1- Considerando o conjunto de vetores $X = \{(1,-2,\alpha),(3,0,-2),(2,-1,-5)\}$ do e.v. $\mathbb{R}^3$, responda às seguintes questões.

(2) **1.1** Determine os valores de α para os quais X é linearmente dependente.

(2) **1.2** Determine os valores de α para os quais X é uma base de $\mathbb{R}^3$.

*(3)***2-** Sabendo que a aplicação linear $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é tal que

$$\psi(1,2) = (1,1) \qquad \text{e} \qquad \psi(1,1) = (0,1),$$

determine $\psi(3,4)$.

3- Sendo $\mathcal{B} = ((1,0,1),(-1,1,-1),(0,1,1))$ e $\mathcal{B}' = ((-1,0,2),(1,0,-1),(0,1,0))$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, responda às seguintes questões.

(2) **3.1** Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

(1) **3.2** Sendo $\hat{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\hat{u} = (1,2,-1)_{\mathcal{B}}$, determine as coordenadas de $\hat{u}$ na base $\mathcal{B}'$, usando a matriz de mudança de base da alínea anterior.

*(3)***4-** Tendo em conta a propriedades dos determinantes, verifique a identidade:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}\right) = (x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_{n-1}-1).$$

5- Considere o sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & + & w & = & 2 \\ x & & & - & z & - & w & = & 1 \\ x & - & y & & & + & w & = & 2 \\ -2x & + & 2y & & & - & 4w & = & \alpha \end{array}\right. ,$$

onde α é um parâmetro real.

(1) **5.1** Verifique, justificando, que este sistema não é determinado.

(1,5) **5.2** Recorrendo ao teorema fundamental de Rouché, determine o valor de α para o qual o sistema é compatível.

(1,5) **5.3** Considerando o valor de α determinado na alínea anterior, escolha um determinante principal do sistema, indique o correspondente subsistema principal e determine uma solução.

6- Considere a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e responda às seguintes questões.

(1,5) **4.1** Determine o polinómio característico da matriz A e os seus valores próprios.

(1,5) **4.2** Com base nos valores próprios obtidos na alínea anterior diga (justificando) se a matriz A é diagonalizável e qual a multiplicidade geométrica de cada um deles.