# Análise Matemática II
# Folha de exercícios 2015-16

P. Cerejeiras

---

## 0 Desigualdades, produtos internos e métricas

1. Prove que, se $a, b > 0$ e $0 < \alpha < 1$, temos

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b.$$

   **Sugestão:** aplicar o Teorema de Lagrange à função $f(x) = x^{1-\alpha},\ x \in [a, b]$.

2. Deduza, da alínea anterior, a expressão particular quando $a = |x|^p, b = |y|^q$, onde $p, q \in \mathbb{N}$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

3. (Desigualdade de Hölder) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{d} |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^{d} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

   para todos $x = (x_1, \cdots, x_d), y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ e $p, q \in \mathbb{N}$ são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

   **Sugestão:** considerar as constantes $A = \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{i=1}^{d} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, e aplicar, de seguida, a desigualdade da alínea anterior a cada parcela $\left|\frac{x_i}{A}\frac{y_i}{B}\right|$.

4. (Desigualdade de Minkowskii) Mostre que

$$\left( \sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^{d} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

   para todos $x = (x_1, \cdots, x_d), y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ e $p \in \mathbb{N}$.

   **Sugestão:** decompôr $\sum_{i=1}^{d} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{d} |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ e usar, em cada soma, a desigualdade de Hölder.

5. Considere o espaço vectorial $\mathbb{V}$ das sequências de números reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para as quais $\lim_n a_n = 0$. A aplicação $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{V}$, constitui um produto interno? Justifique.
6. Mostre que as distâncias $d_{\ell_1}, d_{\ell_2}$ e $d_{\ell_\infty}$ são distâncias equivalentes entre si.
7. Descreva as sequências convergentes no espaço métrico $(\mathbb{R}^d, d_{disc})$.
8. Justifique que a distância discreta $d_{disc}$ não é equivalente à métrica $d_{\ell_1}$ em $\mathbb{R}^d$.
9. Mostre que $d_{sup}(f,g) := \sup_{x\in D} |f(x) - g(x)|$ é uma distância no espaço das funções reais de variável real num intervalo $D \subset \mathbb{R}$.

# 1 Sucessões e séries de funções

No que se segue, considere o espaço $X$ das funções reais de variável real no intervalo (não vazio) $D \subset \mathbb{R}$.

1. Estude as seguintes sucessões de funções de termo geral $u_n$ quanto à convergência pontual e à convergência uniforme, isto é, a convergência no espaço métrico $(X, d_{sup})$ :

   (a) $u_n(x) = \sqrt[n]{x}, \quad x \in [0,1]$

   (b) $u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (c) $u_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (d) $u_n(x) = n \sin \frac{x}{n}, \quad x \in [-r,r],\ r > 0$

   (e) $u_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad x > 1.$

   (f) $u_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad x \in [0,1].$

   (g) $u_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0,1].$

   (h) $u_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, \quad x \in [0,1].$

   (i) $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (j) $u_n(x) = \cos(\frac{\pi x}{n}), \quad x \in \mathbb{R}$

   (k) $u_n(x) = \sin(\frac{\pi x}{n}), \quad x \in \mathbb{R}$

   (l) $u_n(x) = (\cos x)^n, \quad x \in \mathbb{R}$

2. Mostre que se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de $X$, o espaço das funções reais de variável real em $\subset \mathbb{R}$, que converge aí pontualmente, e onde $D$ é um conjunto finito, então esta sequência converge em $(X, d_{sup})$.

3. Considere a sucessão de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por

$$u_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right), & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0, & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}.$$

   (a) Determine o limite pontualmente da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

4. Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

   (a) converge pontualmente para a função (soma da série) $S(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $]-1,1[$;

   (b) não converge uniformemente para a função $S$ no intervalo $]-1,1[$;

   (c) converge uniformemente para $S(x) = \frac{1}{1-x}$ no intervalo $D = [-1/2, 1/3]$.

5. Estude quanto à convergência pontual e à convergência em $(X, d_{sup})$ as seguintes séries

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(x^2+1)^n}, \quad x \in \mathbb{R};$

6. Mostre que a série $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^4+k^4}$ é uniformemente convergente e que a função $s$ é contínua em $\mathbb{R}$

7. Caso seja possível, calcule :

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

   (b) $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

8. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, x \in [0,1]$. Mostre que

   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente em $[0,1]$.

   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0, \frac{1}{2}]$ e diga o que pode concluir acerca de

$$\lim_n \int_0^x u_n(t)dt, \quad x \in [0, 1/2].$$

9. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = nx(1-x)^n, x \in [0,1]$. Mostre que

   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge uniformemente em $[0,1]$.

   (b) $\int_0^1 (\lim_n u_n(x))\, dx = \lim_n \int_0^1 u_n(x)dx$.

10. Considere $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e tome $u(x) = \lim_n u_n(x)$.

   (a) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[a,b]$ desde que $0 \notin [a,b]$.

   (b) Determine $\int_0^1 u(x)dx$ e $\lim_n \int_0^1 u_n(x)dx$.

   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.

11. Considere $u_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ e tome $u(x) = \lim_n u_n(x)$.

   (a) Verifique que $\int_0^1 u(x)dx \neq \lim_n \int_0^1 u_n(x)dx$.

   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em $[0,1]$? Justifique.

12. Considere as funções $u_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, dadas por $u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx), n \in \mathbb{N}$. Verifique que

   (a) a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em $(C^\infty(\mathbb{R}), d_{sup})$;

   (b) a sequência $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $u'$, onde $u$ é o limite pontual de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (c) que pode concluir dos resultados obtidos?

13. Considere a série $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$ Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

14. Considere a série $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+k^2}$.

   (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

   (b) Justifique a igualdade $\int_0^1 s(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\arctan\frac{1}{k}$.

   (c) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.

   (d) Indique o conjunto das primitivas da função $s$.

15. Considere a série $s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2\sqrt{n+1}}, x \in \mathbb{R}$

   (a) Mostre que se trata de uma série uniformemente convergente.

   (b) Justifique que $s$ uma função contínua em $\mathbb{R}$

   (c) Determine $\int_0^{\frac{\pi}{2}} s(x)dx$.

   (d) Caso seja possível, calcule $s'(x)$.