2 Séries de Taylor

1. Determine o intervalo, e o domínio, de convergência das seguintes séries de Taylor:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2^n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{n+1}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-3)^n$

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^2 2^n}$

   (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{n^3}$

   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^n}$

2. Calcule as somas das seguintes séries de potências, bem como os intervalos de convergência em que essa soma é válida:

   (a) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$

3. Calcule a expansão em série de Taylor das seguintes funções, sem se esquecer de indicar o respectivo intervalo de convergência:

   (a) $\sqrt[3]{1+x}$

   (b) $\arcsin x$

   (c) $\sinh x$

   (d) e^{-x}

   (e) $\frac{1-\cos x}{x^2}$

   (f) $\arctan x^2$

   (g) $\frac{1+x}{1-x}$

   (h) $\frac{1}{(1+x)^2}$

   (i) $\ln(1-x^2)$

   (j) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

   (k) $\int_0^x e^{-t^2} dt$

   (l) $\int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt$

4. Mostre que

   (a) $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{x^{2n}}{n!} e^{-x^2}\,dx \right) = 1$

5. Determine o polinómio de Taylor de grau k centrado em c da função f, e estime o erro cometido no intervalo definido por $|x-c| < \frac{1}{5}$, sendo

   (a) $f(x) = \ln x$; $k = 4$ e $c = 1$.

   (b) $f(x) = \arccos x$; $k = 2$ e $c = \frac{1}{2}$.

6. Mostre que, sendo $f^{(n+1)}$ uma função contínua no intervalo $]c-R, c+R[$, então

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$$

   para todo $x \in]c-R, c+R[$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, R > 0)$.

   Sugestão: use indução.

7. Determine, com erro inferior a 10^{-4}, os seguintes integrais.

   (a) $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

   (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(t^2)\,dt$

8. Determine, por recurso ao desenvolvimento em série de Taylor, a função que verifica

   (a) $f'(x) + 2xf(x) = 0$, sujeita às condições $f(0) = 1$.

   (b) $f'(x) - [f(x)]^2 = 0$, sujeita às condições $f(0) = 1$.

   Identifique a função, se possível, sem se esquecer de indicar o intervalo de convergência da série.

9. Calcule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}dt.$$

10. Mostre que a função (dita, *função de Bessel de ordem* 0)

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

   satisfaz

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0$$

11. Seja f_n a sequência de Fibonacci, ou seja, $f_1 = f_2 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

   (a) Calcule o raio de convergência desta série.

   (b) Obtenha uma expressão analítica para $s(x)$.

   (c) Determine o termo f_n, para n arbitrário.