

e resto $|R_6(1)| \leq \frac{1}{15 \cdot 7!} = \frac{1}{75600}$.

2. O mesmo para $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \dots$$

e para $n = 5$ temos a precisão desejada

$$|R_5(\pi)| \leq \frac{\pi^{13}}{13 \cdot 13!} \approx 0.000035869 \dots$$

3 Séries de Fourier

Nesta secção vamos estudar um segundo tipo de expansão em série, baseado em funções elementares periódicas (co-senos, senos ou exponenciais complexas), ditas, *séries de Fourier*¹. Porque estas têm a interpretação física de sinal que evolui ao longo do tempo, representaremos estas funções por $f = f(t)$.

Definição 3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), diz-se *periódica*, de período $T > 0$ (ou T -periódica), se satisfizer

$$f(t + T) = f(t), \quad (3.1)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Note-se que a mudança de variável $\tau = t + T$ conduz a $f(t) = f(\tau - T)$, para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Aplicando recursivamente a condição de periodicidade, obtém-se $f(t) = f(t + kT)$ para todo o $t \in \mathbb{R}$ e todo o inteiro $k \in \mathbb{Z}$. Diremos então que f tem por domínio $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$.

As funções co-seno e seno são 2π -periódicas, donde $A \cos(\omega t)$, [resp. $A \sin(\omega t)$], para $A > 0$, $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega}[$, têm período $\frac{2\pi}{\omega}$, com A a *amplitude da onda* e ω a sua *frequência*, (medida, em geral, em Hz , número de oscilações por segundo).

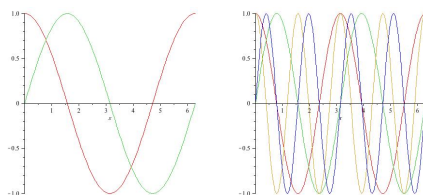


Figura 4: Gráfico de seno / co-seno; gráficos de diferentes modulações destas. Note-se o desfasamento entre seno e co-seno, ou seja, a translação $\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin(t)$.

¹Jean-Baptiste Fourier (1768-1839) introduziu o conceito em 1807, para efeitos de resolução da equação do calor.

3.1 Definição e representação de séries de Fourier

Relembre-se que, se as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são absolutamente convergentes, então o critério de Weierstrass assegura a convergência uniforme da série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

para uma função contínua $S = S(t)$ em todo o subintervalo fechado e limitado de \mathbb{R} . Adicionalmente, S é também T -periódica, com $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

No que se segue, vamos considerar o espaço vectorial das funções reais de variável real, contínuas e T -periódicas em \mathbb{R} . Designaremos este espaço por $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.

Lema 3.1 (Propriedades). *Para todo $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ tem-se*

i) f é limitada em \mathbb{R} ;

ii) $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$, para todo $a \in \mathbb{R}$;
em particular, $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ ($a = -\frac{T}{2}$).

A demonstração é trivial e deixada como exercício.

Lema 3.2 (Fecho relativamente à convergência uniforme). *Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ que converge uniformemente para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.*

Imediato, por aplicação do Teorema 1.2.

Definição 3.2. *Para $f, g \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, define-se o produto interno real*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t)g(t)dt. \quad (3.2)$$

Este produto interno induz, no espaço vectorial $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, a norma (dita, norma em média quadrática, ou norma- L_2) dada por

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt. \quad (3.3)$$

Diremos que

- 1) f é ortogonal a g , e escrevemos $f \perp g$, se $\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$;
- 2) a sucessão $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em norma- L_2 para f sse

$$\lim_n \|f_n - f\|_2 = \lim_n \left(\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

A norma em média quadrática mede a energia da função, vista como um sinal em tempo; por isso, é também chamada *norma de energia* na Física.

Exemplo 3.1. *O sistema de funções reais de variável real*

$$\{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), n \in \mathbb{N}\} \quad (3.4)$$

em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, com $T = \frac{2\pi}{\omega}$, é um sistema ortogonal, mas não ortonormado.

A normalização do sistema (3.4) conduz a

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega t), n \in \mathbb{N} \right\},$$

agora um sistema ortonormado de $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$.²

Teorema 3.1. *Se a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (3.5)$$

converge uniformemente para a função $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $S \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, com $T = \frac{2\pi}{\omega}$, e os seus coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T S(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (3.7)$$

Corolário 3.1.1. *Para todos $T, \omega > 0$ tais que $T\omega = 2\pi$, temos*

$$C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}) \subset \text{Span} \{1, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), n \in \mathbb{N}\}.$$

Note-se que esta inclusão é *estrita*: há funções T -periódicas, mas não contínuas, para as quais ainda é possível calcular os coeficientes (3.6) e (3.7) e cuja série de Fourier associada (3.5) ainda converge. Um exemplo disso é a função *onda quadrada*,

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t \in [2n-1, 2n[\\ 1, & t \in [2n, 2n+1[\end{cases} \quad (3.8)$$

cujos coeficientes são $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$, e $b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}, b_{2n} = 0$, para $n = 1, 2, 3, \dots$

² $\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)];$
 $\sin(A) \sin(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)];$
 $\sin(A) \cos(B) = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$

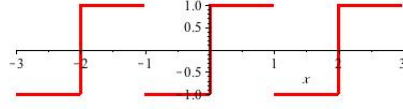


Figura 5: Onda quadrada, $-3 < t < 3$; $T = 2, \omega = \pi$

A definição seguinte estabelece as condições em que é possível estabelecer a série de Fourier para uma função real (resp. complexa) periódica.

Definição 3.3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função T -periódica. Se a função tem energia finita e os integrais (3.6) e (3.7) existem e são finitos para todo $n \in \mathbb{N}_0$ então a série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

diz-se a série de Fourier de f , e os coeficientes a_n, b_n dizem-se os coeficientes de Fourier de f .

Nota:

- i) Da periodicidade de f vem as expressões alternativas para cálculo dos coeficientes

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- ii) Em consequência, se f é uma função par, então $b_n = 0, \forall n$. Da mesma forma, se f é uma função ímpar, então $a_n = 0, \forall n$.
- iii) Toda a função periódica se pode decompor na soma de uma função par com uma função ímpar, via

$$\begin{aligned} f(t) &= \underbrace{\frac{f(t) - f(-t)}{2}}_{f_{\text{ímpar}}(t)} + \underbrace{\frac{f(t) + f(-t)}{2}}_{f_{\text{par}}(t)} \\ &= f_{\text{ímpar}}(t) + f_{\text{par}}(t) \end{aligned}$$

3.2 Convergência em média quadrática

No que se segue, trataremos apenas o caso do espaço de funções $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$. A validade dos próximos resultados no caso de funções nas condições da definição (3.3) é imediata.

Também, e por comodidade de escrita, usaremos a base ortonormada

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad \psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega t) \quad \text{e} \quad \psi_{-n}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega t),$$

donde tiramos

$$\int_0^T \psi_j(t)\psi_l(t)dt = \delta_{j,l} := \begin{cases} 1, & j \neq l \\ 0, & j = l \end{cases} \quad (\text{delta de Kronecker})$$

e para cada coeficiente $d_n = \int_0^T f(t)\psi_n(t)dt$ resulta

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}}d_0, \quad a_n = \sqrt{\frac{2}{T}}d_n, \quad b_n = \sqrt{\frac{2}{T}}d_{-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

O problema da convergência em média quadrática consiste em, dada uma função f , com energia finita num intervalo $[0, T]$, $T > 0$, (isto é, $\|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty$), encontrar o polinómio trigonométrico

$$Q_k(t) = \sum_{n=-k}^k \gamma_n \psi_n(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

que minimiza a norma quadrática

$$\|f - Q_k\|_2^2 = \int_0^T [f(t) - Q_k(t)]^2 dt.$$

Temos,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T [f(t) - Q_k(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T [f(t) - \sum_{n=-k}^k \gamma_n \psi_n(t)]^2 dt \\ &= \int_0^T [f(t)]^2 dt - \sum_{n=-k}^k 2\gamma_n \underbrace{\int_0^T f(t)\psi_n(t)dt}_{=\langle f, \psi_n \rangle} + \sum_{n,j=-k}^k \gamma_n \gamma_j \underbrace{\int_0^T \psi_n(t)\psi_j(t)dt}_{=\langle \psi_n, \psi_j \rangle} \\ &= \int_0^T [f(t)]^2 dt - \sum_{n=-k}^k 2\gamma_n d_n + \sum_{n=-k}^k \gamma_n^2 \\ &= \int_0^T [f(t)]^2 dt + \sum_{n=-k}^k (\gamma_n^2 - 2\gamma_n d_n + d_n^2 - d_n^2) \\ &= \int_0^T [f(t)]^2 dt + \sum_{n=-k}^k (\gamma_n - d_n)^2 - \sum_{n=-k}^k d_n^2 \end{aligned}$$

pelo que $\left(\min \int_0^T [f(t) - Q_k(t)]^2 dt\right)$ é alcançado quando $\gamma_n = d_n$, $n = -k, -k+1, \dots, k-1, k$.

O polinómio trigonométrico $\tilde{Q}_k(t) := \sum_{n=-k}^k d_n \psi_n(t)$, ($n \in \mathbb{N}_0$), associado à função f satisfaz a seguinte desigualdade entre as respectivas energias.

Lema 3.3 (Desigualdade de Bessel). *Sejam $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ e $d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ a sequência dos coeficientes de Fourier de f na base $\{\psi_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Então*

$$\sum_{n=-k}^k d_n^2 \leq \int_0^T [f(t)]^2 dt, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Lema 3.4. *Nas mesmas condições do lema anterior, tem-se que a série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2$*

i) é absolutamente convergente;

ii) satisfaz, no limite, a desigualdade anterior, isto é,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 \leq \int_0^T [f(t)]^2 dt.$$

Isto significa que o polinómio trigonométrico (resp. a série) (3.9) tem a sua energia majorada pela energia do sinal original f .

Definição 3.4 (Convergência em média quadrática). *Uma sequência $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções em $C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ converge em média quadrática para $S \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$, sse*

$$\lim_k \|S - s_k\|_2^2 = \lim_k \left(\int_0^T [S(t) - s_k(t)]^2 dt \right) = 0.$$

Teorema 3.2 (Identidade de Parseval). *Seja $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ e $d = (d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. A série de Fourier associada a f converge em média quadrática sse os seus coeficientes satisfizerem a identidade de Parseval*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^2 = \int_0^T [f(t)]^2 dt.$$

Demonstração. Basta atender a que, para a sequência dos polinómios trigonométricos $(\tilde{Q}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ associados a f , se tem

$$\|f - \tilde{Q}_k\|_2^2 = \int_0^T [f(t) - \tilde{Q}_k(t)]^2 dt = \left(\int_0^T [f(t)]^2 dt - \sum_{n=-k}^k d_n^2 \right) \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow +\infty$. □

Note-se, todavia, que a convergência em média quadrática não implica a convergência pontual.

Exemplo 3.2. *Tome-se a sequência de funções de energia finita no intervalo $[0, 1]$, $\{f_n^j, j = 1, 2, \dots, n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dada por*

$$f_n^j(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

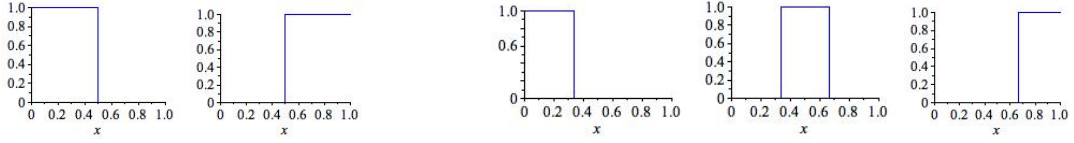


Figura 6: Gráficos de f_2^1 e f_2^2

Gráficos de f_3^1, f_3^2 e f_3^3

A sequência converge em média quadrática para a função nula mas não converge pontualmente em nenhum valor de $t \in [0, 1]$.

3.3 Convergência pontual

No que se segue, vamos considerar, sem perda de generalidade, funções 2π -periódicas e integráveis à Riemann em $[0, 2\pi]$. Estas funções satisfazem as condições da definição (3.3), dado que o produto de uma função integrável à Riemann num intervalo fechado de \mathbb{R} , por uma função monótona é ainda integrável à Riemann nesse intervalo

As somas parciais da série de Fourier associada a uma tal função f são, respectivamente, $s_0 = \frac{a_0}{2}$ e

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{k=1}^n [\cos(k\tau) \cos(kt) + \sin(k\tau) \sin(kt)] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \underbrace{\left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos[k(\tau - t)] \right\}}_{(I_1)} d\tau. \end{aligned}$$

Para determinação de (I_1) , use-se o facto de que

$$2 \cos(k\theta) \sin(\theta/2) = \sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2},$$

donde

$$\begin{aligned}
(I_1) &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2 \cos[k(\tau - t)] \sin\left[\left(\frac{\tau-t}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k+1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)] - \sin[(2k-1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} \\
&= 1 + \left[-1 + \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} \right] \\
&= \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)},
\end{aligned}$$

e temos

$$s_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} \right\} d\tau.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left\{ \frac{\sin[(2n+1)\left(\frac{\tau-t}{2}\right)]}{\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} \right\} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(s+t) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds \quad (s = \tau - t, ds = d\tau) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(t+u) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)u}{2}\right)}{\sin\frac{u}{2}} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t+s) \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(t-s) + f(t+s)] \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)s}{2}\right)}{\sin\frac{s}{2}} ds \quad (u = -s, du = -ds) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(t-2\tau) + f(t+2\tau)] \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin\tau} d\tau, \quad (s = 2\tau, ds = 2d\tau)
\end{aligned}$$

Isto significa que para todo o $t_0 \in [-\pi, \pi]$ temos que a sucessão numérica $(s_n(t_0))_{n=1}^{\infty}$ é convergente se e só se a sequência numérica dos integrais definidos³

$$\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)] \frac{\sin((2n+1)\tau)}{\sin\tau} d\tau \right)_{n=1}^{\infty} \quad (3.10)$$

converge para um valor finito. Desta forma, o estudo da convergência pontual da série de Fourier associada a f está agora reduzida ao estudo da convergência da sucessão (3.10), que vamos estudar de seguida.

³Cada termo desta sucessão diz-se um *integral de Dirichlet*.

- I) No caso da função constante $f = 1$ obtemos $s_n(t_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau = 1$, independentemente do valor de t_0 , pelo que a sucessão converge para $s(t_0) = 1$ qualquer que seja $t_0 \in [-\pi, \pi]$.
- II) No caso geral, designe-se por $s = s(t_0)$ o limite da sucessão de termo geral (3.10). Vamos mostrar, por construção, que este limite *efectivamente* existe. Tome-se a diferença

$$\begin{aligned} s_n(t_0) - s(t_0) &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)] \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau \right) \\ &\quad - s(t_0) \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)}{2} - s(t_0) \right] \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Assim, teremos $\lim_n s_n(t_0) = s(t_0)$ sse

$$\lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)}{2} - s(t_0) \right] \frac{\sin((2n+1)\tau)}{\sin \tau} d\tau = 0. \quad (3.11)$$

Denote-se $\frac{f(t_0-2\tau)+f(t_0+2\tau)}{2} - s(t_0) := \varphi_{t_0}(\tau)$. Para $0 < \delta < \pi/2$, fixo, divida-se o integral (3.11) em duas partes:

$$\int_0^{\pi/2} \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \int_0^{\delta} \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt + \underbrace{\int_{\delta}^{\pi/2} \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_3)}.$$

Vamos agora provar que (I_3) tende para zero quando $n \rightarrow \infty$. Considere-se o seguinte lema.

Lema 3.5 (Lema de Riemann). *Seja $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $a < b$ uma função integrável à Riemann no seu domínio. Então*

$$\lim_k \left(\int_a^b g(t) \sin(kt) dt \right) = 0.$$

Demonstração. Para todo o k natural, temos que

$$\left| \int_a^b \sin(kt) dt \right| \leq \left| \frac{\cos(kb) - \cos(ka)}{k} \right| \leq \frac{2}{k}.$$

Use-se uma partição $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ do intervalo dado. Vem

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \sin(kt) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \sin(kt) dt \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin(kt) dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin(kt) dt \end{aligned}$$

onde m_i denota o ínfimo de g no sub-intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Então, para $\Delta_i = |t_{i+1} - t_i|$ e $\omega_i = \sup_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |g(t) - m_i|$, vem

$$\left| \int_a^b g(t) \sin(kt) dt \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta_i + \frac{2}{k} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|.$$

Porque g é integrável à Riemann, o termo $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta_i$ tenderá para zero quando o diâmetro da partição, $\mathcal{P} := \max_i |\Delta_i|$, fôr para zero. O segundo termo, $\frac{2}{k} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|$, tende para zero quando k tende para infinito. \square

Porque a função φ_{t_0} é integrável à Riemann em $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ e o inverso da função seno é monótona nesse intervalo, então a função auxiliar

$$g(t) = \frac{\varphi_{t_0}(t)}{\sin t}$$

é também integrável à Riemann em $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ (onde $0 < \delta < \pi/2$). O resultado pretendido ($\lim_n (I_3) = 0$) vem como consequência directa do Lema de Riemann aplicado a g no intervalo $[\delta, \frac{\pi}{2}]$.

Isto implica também que (3.10) é agora equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \varphi_{t_0}(\tau) \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau \\ &= \lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \left[\frac{f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)}{2} - s(t_0) \right] \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau, \end{aligned}$$

ou seja, a convergência pontual da soma da série de Fourier associada a f depende do comportamento da função numa vizinhança, tão pequena quanto se queira, do ponto x . Este resultado constitui o teorema enunciado de seguida.

Teorema 3.3. (*Teorema de localização de Riemann*) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e integrável à Riemann em $[0, 2\pi]$.*

A sucessão $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, das somas parciais da série de Fourier associada a f , converge pontualmente para a função $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sse

$$\lim_n \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \left[\frac{f(t_0 - 2\tau) + f(t_0 + 2\tau)}{2} - s(t_0) \right] \frac{\sin[(2n+1)\tau]}{\sin \tau} d\tau. \quad (3.12)$$

Vamos agora terminar o processo de construção da função soma da série $s = s(t)$.

Teorema 3.4. *Seja f uma função 2π -periódica e contínua por partes. Então para qualquer t_0 temos*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_n \cos(nt_0) + b_n \sin(nt_0)] = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2},$$

onde $f(t_0^\pm)$ denotam os limites laterais de f no ponto t_0 da recta real.

Demonstração. Como f é contínua por partes existem os limites laterais $f(t_0^+)$, $f(t_0^-)$ para qualquer t_0 da recta real. Construam-se as funções auxiliares

$$\psi_{t_0}^-(t) = \frac{f(t_0 - 2t) - f(t_0^-)}{2}, \quad \psi_{t_0}^+(t) = \frac{f(t_0 + 2t) - f(t_0^+)}{2}.$$

Estas funções são também contínuas por partes, pelo que para todo $\epsilon > 0$ existe pelo menos um $\delta' > 0$ tal que

$$\begin{aligned} t < \delta' &\Rightarrow |f(t_0 - 2t) - f(t_0^-)| < \epsilon, \\ &e \quad |f(t_0 + 2t) - f(t_0^+)| < \epsilon \\ &\Rightarrow |\psi_{t_0}^-(t)| = \left| \frac{f(t_0 - 2t) - f(t_0^-)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \\ &e \quad |\psi_{t_0}^+(t)| = \left| \frac{f(t_0 + 2t) - f(t_0^+)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Vamos agora aplicar o Teorema 3.3 (Teorema de localização de Riemann) à função

$$\varphi_{t_0}(t) = \frac{f(t_0 - 2t) + f(t_0 + 2t)}{2} - \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \psi_{t_0}^-(t) + \psi_{t_0}^+(t).$$

Note-se que tal corresponde a fixar $s(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$.

Observe-se que, para $\delta > 0$ fixo, o integral (3.12) se divide em

$$\int_0^\delta \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt = \underbrace{\int_0^{\delta'} \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_1)} + \underbrace{\int_{\delta'}^\delta \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt}_{(I_2)},$$

com δ' fixado de acordo com (3.13). De novo, o integral (I_2) tende para zero quando n tende para infinito (Lema de Riemann).

Para (I_1) temos, usando o teorema de valor médio para integrais, que existe um $\xi \in [0, \delta']$ tal que

$$\left| \int_0^{\delta'} \varphi_{t_0}(t) \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right| = \left| \varphi_{t_0}(\xi) \int_0^{\delta'} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right| \leq |\varphi_{t_0}(\xi)| K < \epsilon K,$$

onde $K = \left| \int_0^{\delta'} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt \right|$. Assim, temos também $\lim_n(I_1) = 0$. \square

3.4 Aproximação

Do teorema anterior resulta que, dada uma função f periódica e contínua por partes, a correspondente série de Fourier converge para f nos pontos em que esta é contínua, e para a média do salto, quando é descontínua. Em consequência, se nesses pontos aproximamos uma descontinuidade de salto finito por somas parciais finitas s_n de funções contínuas, tal gera um efeito de oscilação das referidas somas s_n na vizinhança desses pontos: e.g. considerem-se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódica, dada por

$$f(t) = \begin{cases} -\pi, & t \in]-\pi, 0] \\ \pi, & t \in]0, \pi[\end{cases}$$

e a série de Fourier associada a esta.

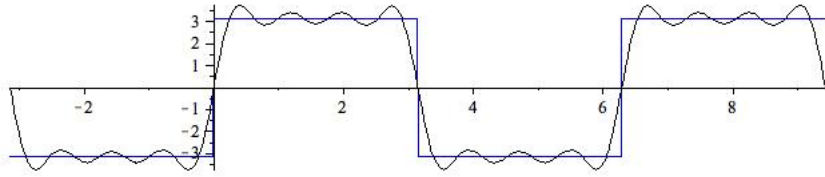


Figura 7: Gráficos de f e da soma parcial dos primeiros 7 termos da correspondente série de Fourier.

Este fenómeno é conhecido por *fenómeno de Gibbs*.

3.4.1 Estimativa para aproximação por polinómios trigonométricos

Teorema 3.5. *Seja $f \in C(\mathbb{R}/T\mathbb{Z})$ uma função com derivada contínua por partes.*

Então, a correspondente série de Fourier associada a f

- i) converge absolutamente em cada ponto $t_0 \in \mathbb{R}$;*
- ii) uniformemente em cada sub-intervalo fechado de \mathbb{R} .*

Demonstração. A demonstração deste teorema assenta em aplicarmos o Teorema 1.1 (critério de Weierstrass) à série de Fourier da função f . Assim, vamos primeiro mostrar que esta existe e, em seguida, que as séries numéricas, cujos termos gerais são os coeficientes a_n e b_n , convergem absolutamente.

Sendo f uma função contínua, então f tem energia finita no intervalo $[0, T]$ e os coeficientes (3.6) e (3.7) existem e são finitos.

Para mostrar que as séries numéricas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem absolutamente, vamos estudar a série de Fourier da função derivada f' (note-se que, pelas condições impostas, f' é limitada e integrável em $[0, T]$). Designem-se por α_n e β_n os coeficientes desta série. Estes verificam:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(t) dt = \frac{2}{T} (f(T) - f(0)) = 0 \\ \alpha_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f'(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} [f(t) \cos(n\omega t)]_0^T + \frac{2}{T} \int_0^T n\omega f(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= n\omega b_n,\end{aligned}$$

e, analogamente, tem-se $\beta_n = -n\omega b_n$. Da Identidade de Parseval e do facto de que f' é limitada, ou seja, existe um $M > 0$ para o qual

$$|f'(t)| \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

resulta

$$\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^2 + \beta_j^2) \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f'(t)|^2 dt \leq 2M^2 < +\infty.$$

Assim, para as somas parciais vem

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\omega} |\beta_k| \leq \frac{1}{\omega} \sqrt{\sum_{k=1}^n \beta_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \leq \frac{\sqrt{2}M}{\omega} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$$

e a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ é absolutamente convergente. Analogamente, a série numérica $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ é também absolutamente convergente e o Critério de Weierstrass é aplicável. \square

Vamos terminar esta secção com o teorema que garante que toda a função contínua num intervalo fechado pode ser arbitrariamente aproximada por um polinómio - e indicando, de passagem, como *o obter!*

Teorema 3.6 (Teorema de aproximação de Weierstrass). *Sejam $f \in C([a, b])$ e $\epsilon > 0$. Nestas condições, existe sempre um polinómio $\tilde{P}_N(t) = \sum_{n=0}^N c_n t^n$ para o qual se tem*

$$|f(t) - \tilde{P}_N(t)| < \epsilon.$$

qualquer que seja $t \in [a, b]$.

Demonstração. Considere-se a transformação afim $\tau \mapsto t = a + \frac{b-a}{\pi} \tau$ que aplica o intervalo $[0, \pi]$ em $[a, b]$.

A função auxiliar $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tau \mapsto g(\tau) = f(a + \frac{b-a}{\pi}\tau)$ é assim contínua em $[0, \pi]$.

Defina-se agora a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que é 2π -periódica e par, como sendo

$$h(\tau) = \begin{cases} g(-\tau), & \tau \in [-\pi, 0] \\ g(\tau), & \tau \in]0, \pi] \end{cases}.$$

A nova função é contínua em \mathbb{R} , ou seja, $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. A série de Fourier de h é uma série de co-senos e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que a soma parcial desta,

$$F_m(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(k\tau),$$

verifica

$$|F_m(\tau) - h(\tau)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dado que cada termo $a_k \cos(k\tau)$ desta soma é uma função analítica, cada F_m pode escrever-se na forma de série de potências $F_m(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n$, com raio de convergência $R = \infty$. Porque a série de Fourier converge uniformemente no intervalo fechado $[0, \pi]$, existe uma ordem $N > 0$ para a qual o polinómio $P_N(\tau) = \sum_{n=0}^N c_n \tau^n$ satisfaz

$$|F_m(\tau) - P_N(\tau)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall \tau \in [0, \pi].$$

Assim, para todo $t \in [a, b]$ temos $t = a + \frac{b-a}{\pi}\tau \Leftrightarrow \pi \frac{t-a}{b-a} = \tau$ e

$$\left| f(t) - P_N \left(\pi \frac{t-a}{b-a} \right) \right| \leq |h(\tau) - F_m(\tau)| + |F_m(\tau) - P_N(\tau)| < \epsilon.$$

Assim, $\tilde{P}_N(t) := P_N \left(\pi \frac{t-a}{b-a} \right)$ é o polinómio procurado. □

4 Transformadas de Laplace

4.1 Definição

O conceito de *transformada de Laplace* resulta da comparação entre um sinal temporal e uma adequada função exponencial. Dado que a função exponencial é invariante sob derivação e o seu comportamento no infinito é conhecido, tal permite extrapolar sob o comportamento do sinal original.⁴

Definição 4.1 (Tipo exponencial). *A função $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ diz-se de tipo exponencial $\alpha \in \mathbb{R}$ se existir $M > 0$ tal que*

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t},$$

⁴Esta ideia vai abrir caminho futuro para o conceito de *transformada de Fourier*, onde os sinais são comparados com ondas $t \mapsto \phi_\xi(t) = e^{-i\xi t}$, de frequência específica $\xi \in \mathbb{R}$.