42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II

Sistemas 2(azuld)

Teorema 6.6.2

Vítor Neves

2009/2010

Suponha-se que $\Omega \supseteq [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ *, para algum* $\alpha > 0$ *e que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é contínua, e lipschitziana em* y*. O problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ f(x_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

tem solução única $y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$*, seja qual for* $y_0 \in \mathbb{R}$*.*

Dem.

Seja L uma constante de Lipschitz para f em $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times \mathbb{R}$ e defina

$$\begin{array}{rcl} M_0 & := & \text{máx}\{|f(x,y_0)|\ |x - x_0| \leq \alpha\} \\ u_0(x) & = & y_0 \quad (|x - x_0| \leq \alpha) \\ u_{n+1}(x) & = & y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dx \quad (|x - x_0| \leq \alpha,\ n \geq 0) \end{array}$$

A ***unicidade*** de solução é consequência da proposição 6.4.1

Como não existe limitação vertical no domínio de f, as iterações u_n estão bem definidas.

Convergência uniforme

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall x \in I_\varepsilon \quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{(L|x - x_0|)^n}{n!}\alpha M_0 \tag{5.2}$$

Esquema de demonstração de (5.2) por indução

$$\begin{array}{rcl} |u_1(x) - u_0(x)| & \leq & \alpha M_0 = \dfrac{(L|x - x_0|)^0}{0!}\alpha M_0 \quad (x \in I_\varepsilon) \\ |u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)| & \leq & \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} |f(t, u_{n+1}(t)) - f(t, u_n(t))| dt \right| \\ & \leq & L \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| dt \right| \\ & \leq & L \left| \displaystyle\int_{x_0}^{x} \dfrac{(L|t - x_0|)^n}{n!} \alpha M_0 dt \right| \\ & = & \dfrac{(L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\alpha M_0 \end{array}$$

Segue-se que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{máx}\{|u_n(x) - u_{n-1}(x)| : \ x \in I_\varepsilon\} \ \leq \ \frac{(L\varepsilon)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha M_0 \qquad (5.3)$$

Portanto, pelo critério de Weierstrass,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - u_{n-1}(x) \ \text{ converge uniformemente } \ \text{em } I_\varepsilon;$$

mas

$$u_n(x) \ = \ y_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - u_{k-1}(x),$$

pelo que, para alguma função $u : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}$,

u_n *converge uniformemente para* u *em* $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

O problema de Cauchy (5.1)

Analogamente ao que se fez para o teorema de Picard-lindeloef, pode provar-se que

$f(x, u_n(x))$ *também converge uniformemente em* I_ε *para* $f(x, u(x))$,

e tem-se

$$\begin{aligned} y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \ &= \ y_0 + \lim_n \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt \\ &= \ \lim_n \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt \right) \\ &= \ \lim_n u_{n+1}(x) \\ &= \ u(x). \end{aligned}$$

Em suma: u é solução do problema (5.1). $\square$