42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES

Vítor Neves

2009/2010

Capítulo 1

Sucessões e séries de funções

1.1 Sucessões

$$\mathcal{F}(D,\mathbb{R}) \ := \ \{f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

Definição 1.1.1 ***Sucessão de funções*** *é uma aplicação de* $\mathbb{N}$ *em* $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \ &\equiv \ (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \ \equiv \ (f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots)\\ &\equiv \ (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)\\ &\equiv \ (f_1, f_2, \cdots) \ \equiv \ (f_1(x), f_2(x), \cdots)\end{aligned}$$

Definição 1.1.2 ***Formas de convergência*** *de uma sucessão de funções* $f_n : D \to \mathbb{R}$ *para uma função* $f : D \to \mathbb{R}$

1. ***Pontual***

$$\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

$$N \text{ depende de } x \text{ e de } \varepsilon, \ N = N(x,\varepsilon)$$

2. ***Uniforme***

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in D \ \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq N \ \Rightarrow \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

$$N \text{ só depende } \varepsilon, \ N = N(\varepsilon)$$

Exemplo 1.1.1 Com $D = [0, 1]$

1. $f_n(x) := x^n$ converge pontualmente e não uniformemente para
$$f(x) \; := \; \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[\end{cases}$$
2. $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$ converge pontualmente e não uniformemente para
$$f(x) \; := \; \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$$
3. $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$ converge pontualmente (uniformemente?) para 0.
4. $f_n(x) := 2n^2xe^{-n^2x^2}$ converge pontualmente (uniformemente?) para 0.

Teorema 1.1.1 *Se uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ converge uniformemente para uma função $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ também converge pontualmente para f.*

Teorema 1.1.2 *Se todas as funções $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ são contínuas e $f_n \to f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ uniformemente, então f é contínua.*

Teorema 1.1.3 *A sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ converge uniformemente para $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ se e apenas se qualquer das condições seguintes se verifica*
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$$

1. $\forall n, m \geq N \quad \forall x \in D \;\; [n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$

2. $\forall n \geq N \; \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in D \;\; [n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_{n+m}(x)| < \varepsilon]$

Teorema 1.1.4 *A sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ converge uniformemente para $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ se e apenas se qualquer das condições seguintes se verifica*
$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \left[n \geq N \Rightarrow \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right] \qquad (1.1)$$
$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (1.2)$$

1.2 Integração

Teorema 1.2.1
Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$, todas as f_n são integráveis (à Riemann) em $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ e f também é integrável (à Riemann) em $[a,b]$ então

1. $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$

2. *De facto a sucessão de termo geral definido por*

$$u_n(x) \;:=\; \int_a^x f_n(t)\,dt \qquad (x\in[a,b];n\in\mathbb{N})$$

   converge uniformemente para o integral indefinido

$$u(x) \;:=\; \int_a^x f(t)\,dt \quad (x\in[a,b])$$

1.3 Diferenciação

Teorema 1.3.1 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções reais diferenciáveis no intervalo $[a,b]$, suponha-se que $c\in[a,b]$ e que as derivadas f_n' são contínuas em $[a,b]$; suponha-se ainda que*

$$f_n(c) \;\to\; d\in\mathbb{R} \tag{1.3}$$

$$f_n'\to g\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}) \qquad \textit{uniformemente} \tag{1.4}$$

$$f(x) \;:=\; \int_c^x g(t)\,dt + d \quad (a\le x\le b) \tag{1.5}$$

Nestas condições

1. $f_n\to f$ *uniformemente em* $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$

2. *Em particular* $f'\equiv g$.

Exemplo 1.3.1 Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \ := \ \begin{cases} |x| & \text{se } \frac{1}{2n} \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{1}{2n^2} - x^2} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2n} \end{cases}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to |\cdot|$ uniformemente, todas as f'_n são diferenciáveis, mas $|\cdot|$ não é.

1.4 Séries de funções

1.4.1 Generalidades

A cada sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associa-se uma **série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \equiv \quad \sum_{n\geq 1} f_n \quad \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \equiv \quad \big(\textbf{soma} \ \ \text{(da série)}\big)$$

Ponto a ponto

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \equiv \quad \sum_{n\geq 1} f_n(x) \quad \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (x \in D)$$

Definição 1.4.1

1. *Uma **série converge pontualmente ou uniformemente** quando tal acontece respectivamente com a sucessão das suas somas parciais.*

2. *A **série resto de ordem** $n \in \mathbb{N}$ de uma série é definida por*

$$R_n(x) \ := \ \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

Teorema 1.4.1 *Considere-se a série de funções* $S := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$

1. *S converge sse*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad & R_n \textit{ converge} && (1.6)\\ \exists n \in \mathbb{N} \qquad & R_n \textit{ converge} && (1.7)\\ \lim_n R_n(x) \;=\; & 0 \; (x \in D) && (1.8) \end{aligned}$$

2. *A convergência de S é pontual ou uniforme consoante respectivamente a convergência de* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é pontual ou uniforme.*

Teorema 1.4.2 *Uma série uniformemente convergente de funções contínuas é uma função contínua.*

Teorema 1.4.3 ***(Critério de Weierstrass)***
Se $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma série numérica absolutamente convergente e* $S := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *é uma série em* $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *tais que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in D \quad |f_n(x)| \leq |a_n|\,,$$

então S converge uniformemente.

1.4.2 Séries de Potências

Definição 1.4.2 *Quando $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma série numérica e $x_0, a_0 \in \mathbb{R}$,*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \quad :\equiv \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

diz-se uma série de potências (de $x - x_0$).

Teorema 1.4.4 *Considere a série de potências*

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n .$$

Se

$$\rho \ := \ \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

1. *$S(x)$ converge absolutamente quando $x \in I := \left]x_0 - \rho, x_0 + \rho\right[$.*
2. *S converge uniformemente em $[a, b]$ quando $[a, b] \subseteq \left]x_0 - \rho, x_0 + \rho\right[$.*
3. *S é contínua em I.*
4. *$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \left(x - x_0\right)^{n-1} \quad (x \in I)$.*
5. *Quando $[a, b] \subseteq I$,*

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b \left(x - x_0\right)^n \, dx.$$

em particular, para qualquer $x \in I$,

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} (x - x_0)^n. \quad (1.9)$$