3. Matrizes invertíveis. Determinantes

3.1 Matrizes invertíveis

Note-se que têm sido consideradas propriedades das operações com as matrizes semelhantes às que já são familiares com os números reais. Dada uma matriz quadrada, formule-se, no conjunto das matrizes quadradas, a noção correspondente ao inverso de um número real não nulo. Considere-se então o conceito de matriz invertível.

Nesta secção consideram-se apenas matrizes quadradas.

Definição 3.1. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. A matriz A diz-se* ***invertível*** *(ou* ***não singular****) se existe uma matriz quadrada $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

A matriz B designa-se por ***inversa*** *de A.*

Se não existir inversa, a matriz diz-se *singular*.

Exemplo 3.2. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Esta matriz é invertível. De facto, seja*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então $AB = BA = I$, ou seja, a matriz B é inversa de A.

Proposição 3.3. *A inversa de uma matriz quadrada é única.*

Demonstração. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e sejam B e C inversas de A. Por definição,

$$AB = BA = I_n = AC = CA.$$

Logo $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$. □

Uma vez que a inversa é única, representa-se a inversa de A por A^{-1}.

Observação 3.4. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, prova-se (ver Teorema 3.43) que se, para alguma matriz quadrada B de ordem n, $AB = I_n$ então $BA = I_n$ e, consequentemente, B é inversa de A.*
Então, para verificar se uma dada matriz B é a inversa de A apenas é necessário verificar que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$, ou seja, não é necessário verificar as duas igualdades.

Exercício 3.5. *Mostre, usando a definição, que a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não admite inversa.*

3.1.1 Propriedades da inversa

Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Algumas propriedades da inversa são:

- **Propriedade 1:** I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$.

- **Propriedade 2:** Se A é invertível, então A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

- **Propriedade 3:** Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

  Demonstração. Como $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ são matrizes invertíveis, existem $A^{-1}, B^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que $AA^{-1} = I_n$ e $BB^{-1} = I_n$. Pelo que:

  $$\begin{aligned} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} && \text{pela associatividade do produto de matrizes} \\ &= AI_nA^{-1} && \text{por definição de inversa} \\ &= AA^{-1} && \text{por definição de elemento neutro do produto de matrizes} \\ &= I_n && \text{por definição de inversa.} \end{aligned}$$

  Pela observação 3.4, e como a inversa de uma matriz é única, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB, isto é, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e, portanto, AB é invertível. □

  Informalmente, pode dizer-se que a inversa do produto é o produto das inversas pela ordem inversa. Este resultado pode ser generalizado ao produto de várias matrizes:

  $$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},$$

- **Propriedade 4:** Se A é invertível, então A^k é invertível e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

  Demonstração. Pode demonstrar-se esta propriedade por dois processos distintos:

  <u>1º processo</u>
  Como $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n$. Donde

  $$\begin{aligned} \left(A^k\right)\left(A^{-1}\right)^k &= \underbrace{A\cdots A(A}_{k \text{ vezes}}\underbrace{A^{-1})A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k \text{ vezes}} && \text{pela associatividade do produto de matrizes} \\ &= \underbrace{A\cdots A}_{k-1 \text{ vezes}}\; I_n \underbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k-1 \text{ vezes}} && \text{por definição de inversa} \\ &= \underbrace{A\cdots A(A}_{k-1 \text{ vezes}}\underbrace{A^{-1})A^{-1}\cdots A^{-1}}_{k-1 \text{ vezes}} && \text{pela associatividade do produto de matrizes} \\ &\;\;\vdots && \vdots \\ &= AA^{-1} = I_n && \text{por definição de inversa.} \end{aligned}$$

Pela observação 3.4, podemos concluir que A^k é invertível e $\left(A^{-1}\right)^k$ é a inversa de A^k, isto é, $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

2^{o} processo
Demonstre-se, por indução matemática, que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira para $k \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{P}(k)$ é a proposição

$$\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k, \tag{3.1}$$

ou seja, tem-se que:

a) provar que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira para $k = 1$;
b) supor $\mathcal{P}(k-1)$ verdadeira para provar que $\mathcal{P}(k)$ é verdadeira.

Assim

a) Para $k = 1$, a proposição (3.1) fica $(A^1)^{-1} = (A^{-1})^1 \Leftrightarrow A^{-1} = A^{-1}$, que é claramente verdadeira;
b) Suponhamos agora que a proposição (3.1) é válida para $k-1$, isto é, é válida a igualdade $\left(A^{k-1}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{k-1}$. Então podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
\left(A^k\right)^{-1} &= \left(A^{k-1}A\right)^{-1} && \text{por definição de potência de matrizes}\\
&= A^{-1}\left(A^{k-1}\right)^{-1} && \text{pela propriedade 3 da inversa}\\
&= A^{-1}\left(A^{-1}\right)^{k-1} && \text{por hipótese de indução}\\
&= \left(A^{-1}\right)^k && \text{por definição de potência de uma matriz.}
\end{aligned}$$

□

- **Propriedade 5:** Se A é invertível, então A^T é invertível e

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Demonstração. Como A é uma matriz invertível, existe A^{-1} e tem-se que:

$$\begin{aligned}
A^T\left(A^{-1}\right)^T &= \left(A^{-1}A\right)^T && \text{pela propriedade transposta do produto}\\
&= (I_n)^T && \text{por definição de inversa}\\
&= I_n && \text{por definição de transposta.}
\end{aligned}$$

Pela observação 3.4, podemos concluir que A^T é invertível e $\left(A^{-1}\right)^T$ é a inversa de A^T, isto é, $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. □

- **Propriedade 6:** Se A é invertível e $\alpha \neq 0$, então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

As demonstrações das propriedades 1, 2 e 6 são deixadas como exercício.

Exercício 3.6. *Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Prove que:*

a) $C^T B (AB)^{-1} \left(C^{-1} A^T\right)^T = I_n$*;*

b) $A^2 = I_n \Leftrightarrow A = A^{-1}$*;*

c) se $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$ *então* $AB = BA$.

3.1.2 Algoritmo de inversão

Veja-se agora como determinar a inversa de uma matriz ou decidir que uma matriz não é invertível.

Exemplo 3.7. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$*. Pretende-se averiguar se A é uma matriz invertível e, em caso afirmativo, determinar a sua inversa, ou seja, determinar uma matriz* $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ *tal que* $AB = I_2$.

Recorde-se que, pela observação 3.4, basta mostrar uma das igualdades da definição de inversa. Ora

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ x+3z & y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{bmatrix} x+2z \\ x+3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad \begin{bmatrix} y+2t \\ y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, o sistema anterior é equivalente à resolução dos dois sistemas de equações lineares seguintes:

$$AX_1 = B_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$AX_2 = B_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que têm a particularidade de terem a mesma matriz dos coeficientes. Aplicando operações elementares na matriz ampliada de cada sistema obtém-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \tag{3.2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{3.3}$$

Tem-se então para soluções dos dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Repare-se que as operações efectuadas em (3.2) *e* (3.3) *são as mesmas. De facto, pode aglutinar-se as operações num só processo, da seguinte forma:*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right] \xrightarrow[L_2' := L_2 - L1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

e, novamente, se confirma que $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Note-se que no exemplo anterior partiu-se de uma matriz ampliada da forma $\left[\begin{array}{c|c} A & I_2 \end{array}\right]$ e chegou-se a uma matriz ampliada da forma $\left[\begin{array}{c|c} I_2 & B \end{array}\right]$, onde $B = A^{-1}$.

Apresenta-se assim um algoritmo para inverter uma matriz quadrada.

Algoritmo de inversão

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Formar a matriz $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$;

2. Executar em $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$ uma sequência de operações elementares sobre as linhas que transformem a matriz A na matriz identidade I_n, obtendo-se no final do processo a matriz $\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$;

. Caso não seja possível obter I_n no lado esquerdo da matriz ampliada, então a matriz A não é invertível.

Exemplo 3.8. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Aplicando o algoritmo de inversão:*

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3' := L_3 - L_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3' := L_3 - L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2' := \frac{1}{3}L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[L_1' := L_1 - 2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1' := L_1 + \frac{5}{3}L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{1}{3}L_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Conclui-se então que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Verifique que* $AA^{-1} = I_3$.

Exercícios 3.9. *1. Mostre que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ *é invertível e calcule a sua inversa.*

2. Uma das seguintes matrizes é singular. Calcule a inversa no caso em que é possível.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determine o valor de k *para o qual é singular a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

3.2 Determinantes. Conceitos gerais

Definição 3.10. *Uma* ***permutação*** *dos elementos do conjunto* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *é uma lista desses* n *elementos apresentados por uma qualquer ordem. Representa-se por* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, *onde* $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *para todo* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *e* $i_k \neq i_j$, *para todo* $j \neq k$.

Exemplo 3.11. $(6, 3, 1, 5, 2, 4)$ *é uma permutação de* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

O conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, ..., n\}$ representa-se por S_n. Observe-se que a cardinalidade, isto é, o número de elementos de S_n é $n!$.

Exemplo 3.12. *S_3 é o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, 3\}$ e tem $3! = 6$ elementos. De facto,*

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}.$$

Observação 3.13. *Note-se que para inferir que a cardinalidade de S_4 é $4!$, ou seja, 4 vezes a cardinalidade de S_3, basta notar que, para cada permutação de $\{1, 2, 3\}$ existem 4 permutações distintas de $\{1, 2, 3, 4\}$; de facto, por exemplo, das permutações $(1, 2, 3), (3, 2, 1) \in S_3$ podem construir-se as seguintes permutações de S_4*

$$\begin{array}{llcll}
(1,2,3) & (\underline{\mathbf{4}},1,2,3) & \qquad & (3,2,1) & (\underline{\mathbf{4}},3,2,1) \\
 & (1,\underline{\mathbf{4}},2,3) & & & (3,\underline{\mathbf{4}},2,1) \\
 & (1,2,\underline{\mathbf{4}},3) & & & (3,2,\underline{\mathbf{4}},1) \\
 & (1,2,3,\underline{\mathbf{4}}) & & & (3,2,1,\underline{\mathbf{4}})
\end{array}$$

É esse o caminho para a demonstração por indução de que a cardinalidade de S_n é $n!$.

Definição 3.14. *Dada uma permutação $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$, o par (i_k, i_j), com $k < j$, designa-se uma **inversão** se $i_k > i_j$.*

Note-se que par (i_k, i_j), com $k < j$, é uma inversão se i_k e i_j aparecem na permutação por ordem decrescente.

Exemplo 3.15. *Na permutação $(2, 1, 6, 3, 5, 4) \in S_6$, o par $(2, 1)$ é uma inversão. Também os pares $(6, 3)$, $(6, 5)$, $(6, 4)$ e $(5, 4)$ são inversões. Ao todo nesta permutação ocorrem 5 inversões.*

Observação 3.16. *Para determinar todas as inversões de uma permutação $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ basta considerar o primeiro elemento da permutação i_1 e encontrar todos os elementos que são menores que i_1 e estão colocados do lado direito de i_1; depois repetir o processo para os restantes elementos $i_2, \ldots, i_{n-1}$.*

Definição 3.17. *Uma permutação $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n$ é **par** (respectivamente, **ímpar**) se o número total de inversões que nela ocorrem é par (respectivamente, ímpar).*

Exemplos 3.18. *Vamos estudar a paridade das permutações dos conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{1, 2, 3\}$.*

i) $n = 2$

Permutação	*Total de inversões*	*Paridade*
$(1,2)$	0	*par*
$(2,1)$	1	*ímpar*

ii) $n = 3$

Permutação	*Total de inversões*	*Paridade*
$(1,2,3)$	0	*par*
$(2,3,1)$	2	*par*
$(3,1,2)$	2	*par*
$(3,2,1)$	3	*ímpar*
$(2,1,3)$	1	*ímpar*
$(1,3,2)$	1	*ímpar*

Definição 3.19. *Seja* $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *O* ***determinante*** *de* A*, representa--se por* $\det A$ *ou* $|A|$*, é o escalar*

$$\det A = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{\sigma} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

onde σ *é o número de inversões da permutação* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Resulta imediatamente da definição (e do exemplo anterior) que:

- $\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Exercício 3.20. *Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 2 & b+c \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 4 & c \\ b & -a \end{bmatrix}$. *Sabendo que* $A = B^T$*, determine*

$$\begin{vmatrix} a & b & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Uma mnemónica para o cálculo de determinante de uma matriz do tipo 3×3 é conhecida por *Regra de Sarrus* e tem duas versões:

<u>1ª versão</u>
Repetir as duas primeiras colunas da matriz da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Feito este processo, verifica-se a presença de

- três "diagonais principais": a diagonal principal a_{11}, a_{22}, a_{33} e duas diagonais paralelas a ela: a_{12}, a_{23}, a_{31} e a_{13}, a_{21}, a_{32};
- três "diagonais secundárias": a diagonal secundária a_{13}, a_{22}, a_{31} e duas paralelas a ela: a_{11}, a_{23}, a_{32} e a_{12}, a_{21}, a_{33}.

O determinante será calculado por meio da diferença entre o somatório do produto dos elementos das três diagonais principais e o somatório do produto dos elementos das três diagonais secundárias, isto é:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})\,. \tag{3.4}$$

<u>2ª versão</u>
A regra de Sarrus pode também ser aplicada repetindo-se as duas primeiras linhas da matriz A da seguinte forma:

$$\begin{matrix} A & = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ & & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{matrix}$$

Novamente se verifica a presença de três diagonais principais e três diagonais secundárias. O determinante é calculado da mesma forma, agora com estas diagonais:

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})\,. \tag{3.5}$$

Note que (3.4) e (3.5) são a mesma expressão.

Exemplo 3.21. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Aplicando a regra de Sarrus,*

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ &= (1 \times 3 \times 1 + (-1) \times 1 \times 2 + 2 \times (-1) \times 1) - (2 \times 3 \times 2 + 1 \times 1 \times 1 + (-1) \times (-1) \times 1) \\ &= 3 - 2 - 2 - 12 - 1 - 1 = -15. \end{aligned}$$

Exercício 3.22. *Calcule, aplicando a Regra de Sarrus,* $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$.

3.2.1 Propriedades do determinante

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então:

(P$_1$) Se A tem uma linha (respectivamente, coluna) de zeros então $\det A = 0$;

Exemplo 3.23.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(P$_2$) Se $A = \left[a_{ij}\right]$ é uma matriz triangular (superior ou inferior), então

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Exemplo 3.24.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (-2) \times 1 \times 1 = -10.$$

(P$_3$) Se a uma linha (respectivamente, coluna) de uma matriz A adicionarmos um múltiplo qualquer de uma outra linha (respectivamente, coluna), o valor do determinante não se altera;

Exemplo 3.25.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_2' := L_2 + L_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\boldsymbol{P}_2} 2.$$

(P$_4$) Se A tem duas linhas (respectivamente, colunas) iguais ou proporcionais, então $\det A = 0$;

Exemplo 3.26.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 10 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C_1 = 2C_2} 0.$$

(P$_5$) Se trocarmos entre si duas linhas (respectivamente, colunas) de A, então o valor do determinante muda de sinal;

Exemplo 3.27.

$$-46 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{L_1 \leftrightarrow L_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -46$$

(P$_6$) Se a matriz B se obtém a partir de uma matriz A multiplicando <u>uma</u> das suas linhas (respectivamente, colunas) por um escalar α, então

$$\det B = \alpha \det A$$

Isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.28. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* B *a matriz que se obtém multiplicando a última linha de* A *por* 2, *ou seja,* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Então $\det B = 8$ *e* $\det A = 4$, *isto é,* $\det B = 2 \det A$.

(P$_7$) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exemplo 3.29. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Então $\det B = 32$ *e* $\det A = 4$, *isto é,* $\det B = 2^3 \det A$.

(P$_8$) $\det\left(A^T\right) = \det A$.

Exemplo 3.30.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

(P$_9$) Sejam A' e A'' duas matrizes tais que a linha (respectivamente, coluna) i da matriz A é igual à soma das linhas (respectivamente, colunas) i das matrizes A' e A'' e as outras linhas (respectivamente, colunas) das matrizes A' e A'' são iguais às linhas (respectivamente, coluna) correspondentes da matriz A, então

$$\det A = \det(A') + \det(A'')$$

Isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Exemplo 3.31.

$$20 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 11$$

(P$_{10}$) $\det(AB) = \det A \det B$.

Exemplo 3.32. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Então $AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *e tem-se que* $\det(AB) = -12$ *e* $\det A \det B = 3 \times (-4) = -12$.

(P$_{11}$) Se A é uma matriz invertível então $\det A \neq 0$ e $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.

Exemplo 3.33. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. *Então* $\det A = -3 \neq 0$. *Por outro lado,* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *e* $\det\left(A^{-1}\right) = -\frac{1}{3}$.

Exercício Resolvido 3.34. *Sejam* A *e* B *matrizes reais quadradas de ordem 3 tais que* $\det A = -2$ *e* $\det B = \frac{1}{4}$. *Determine, usando as propriedades:*

a) $\det(3A)$ b) $\det\left(A^3B^{-1}\right)$ c) $\det\left(-BA^T\right)$ d) $\det\left(-\frac{1}{2}\left(B^T\right)^{-1}\right)$

<u>Resolução:</u>

a) $\det(3A) = 3^3 \det A = -54$;

b) $\det\left(A^3B^{-1}\right) = \det\left(A^3\right)\det\left(B^{-1}\right) = (\det A)^3 \frac{1}{\det B} = -2$;

c) $\det\left(-BA^T\right) = \det(-B)\det\left(A^T\right) = (-1)^3 \det B \det A = \frac{1}{2}$;

d) $\det\left(-\frac{1}{2}\left(B^T\right)^{-1}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det\left(\left(B^T\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{8\det(B^T)} = -\frac{1}{8\det B} = -\frac{1}{2}$

Exercício 3.35. *Sejam* $A, B, C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ *matrizes tais que* $\det A = -2$, $\det B = 5$ *e* $\det C = -\frac{1}{2}$. *Determine, usando as propriedades:*

a) $\det(ABC)$ b) $\det(B^2A^TC^{-1})$ c) $\det(-2B)$ e) $\det\left(\frac{1}{3}C^TA^{-1}\right)$

3.2.2 Teorema de Laplace

A definição de determinante pode tornar-se pesada se a matriz for de ordem superior a 3. Observe-se que, por exemplo, existem $4! = 24$ permutações do conjunto $\{1,2,3,4\}$. O próximo resultado permite calcular o determinante de uma forma mais prática.

Definição 3.36. *Seja* $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Seja* $A(i|j)$ *a submatriz quadrada de* A, *de ordem* $n-1$, *que se obtém desta a partir da supressão da linha* i *e da coluna* j. *Chama-se* ***complemento algébrico*** *(ou* ***co-factor****) de* a_{ij}, *e representa-se por* A_{ij}, *ao escalar*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j).$$

Exemplo 3.37. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Então*

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad e \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Teorema 3.38 (Teorema de Laplace). *Seja* $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs},$$

para quaisquer $i, s \in \{1, \ldots, n\}$.

Este teorema também é conhecido como o desenvolvimento em co-factores para o cálculo do determinante. Na prática, consiste em escolher uma linha (ou uma coluna) e multiplicar cada entrada dessa linha (ou coluna) escolhida pelo co- -factor correspondente, e adicionar os resultados. Isto é, se escolher a linha i, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, então

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Se escolher a coluna s, com $s \in \{1, \ldots, n\}$, então:

$$\det A = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \cdots + a_{ns}A_{ns} = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs}.$$

Exemplo 3.39. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Vamos calcular o determinante de* A *por aplicação directa do teorema de Laplace. Escolha-se a primeira linha:*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} &= 3A_{11} + (-2)A_{12} + 7A_{13} + 0A_{14} \\
&= 3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 8 \\ 0 & -1 & 8 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 6 & -1 & 8 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \\
&\quad +7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3(4 - 48 + 16 + 80) + 2(-2 + 24 + 240 - 8 - 40 + 36) \\
&\quad +7(16 + 96 - 16 + 24) = 1496.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.40. *Seja* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. *Vamos calcular o determinante de* B*, utilizando o teorema de Laplace e as propriedades dos determinantes.*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} & \underset{=}{\mathbf{P}_6} \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{\mathbf{P}_3} \quad 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{T.L.\ C_1} \quad 2 \times 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -4 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{T.L.\ C_1} \quad 2(-3)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\
& = \quad 6(8-3) = 30.
\end{aligned}$$

Exercício Resolvido 3.41. *Sabendo que* $\begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10$, *calcule* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}
10 & = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2+a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2+b_3 & -b_3 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{\mathbf{P}_9} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a_1 & a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_3 & -b_3 \end{vmatrix} \\
& \mathbf{P}_6 \underset{=}{e} \mathbf{P}_4 \quad 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & -a_3 \\ c_1 & c_2 & -c_3 \\ b_1 & b_2 & -b_3 \end{vmatrix} + 0 \\
& \underset{=}{\mathbf{P}_6} -2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\
& \underset{=}{\mathbf{P}_5} \quad 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5.$

Exercícios 3.42. *1. Sabendo que* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2$*, calcule* $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}$.

2. Para quaisquer $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$*, mostre que*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2).$$

3.3 Condições de Invertibilidade

É possível estabelecer uma relação entre a existência ou não da inversa de uma matriz através do determinante, bem como classificar o sistema de equações lineares associado a essa matriz.

Teorema 3.43. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) A é invertível;

b) O sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;

c) $r(A) = n$ e a matriz A pode ser reduzida à matriz I_n por operações elementares sobre linhas;

d) O sistema $AX = B$ é possível e determinado, para qualquer matriz B do tipo $n \times 1$;

e) Existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $AC = I_n$.

Demonstração. Prova-se este resultado através da sequência de implicações

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow a).$$

$a) \Rightarrow b)$

Se A é invertível então existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponha-se que $X_1 \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é uma solução do sistema $AX = 0$, isto é, $AX_1 = 0$. Multiplicando ambos os membros da equação anterior por A^{-1}, pode deduzir-se que:

$$\begin{aligned} AX_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A^{-1}(AX_1) = A^{-1}0 \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)X_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad I_nX_1 = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $X_1 = 0$ e, dada a arbitrariedade de X_1, $AX = 0$ tem uma única solução que é a solução trivial.

b) $\Rightarrow$ *c)*
Se o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial, então é um sistema possível e determinado. Logo $r(A) = r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & 0 \end{array}\right]\right) = n$, o que por sua vez implica que A pode ser reduzida a I_n por operações elementares sobre linhas.

c) $\Rightarrow$ *d)*
Seja $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Como A pode ser reduzida a I_n por operações elementares por linhas, então consegue-se efectuar a redução por linhas

$$\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{c:c} I_n & B' \end{array}\right],$$

com $B' \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Logo $r\left(\left[\begin{array}{c:c} A & B \end{array}\right]\right) = n = r(A)$ e, portanto, o sistema $AX = B$ é possível e determinado.

d) $\Rightarrow$ *e)*
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, defina-se $B_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ a matriz coluna com todas as entradas nulas excepto a entrada $(i, 1)$ que é igual a 1, isto é, $B_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$.
Então, por hipótese, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, o sistema $AX = B_i$ tem uma única solução, diga-se $X_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Seja $C = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$. Então

$$\begin{aligned} AC &= A\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} && \text{por definição de produto entre matrizes} \\ &= \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{bmatrix} && \text{por definição de } X_i,\ AX_i = B_i \\ &= I_n && \text{por definição de } B_i. \end{aligned}$$

Ou seja, existe $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AC = I_n$.

e) $\Rightarrow$ *a)*
Por hipótese, existe uma matriz quadrada C de ordem n tal que $AC = I_n$. Para mostrar que A é invertível basta mostrar que também se tem $CA = I_n$.
Primeiro mostra-se que o sistema homogéneo $CX = 0$ admite apenas a solução trivial. Seja $X' \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $CX' = 0$. Então

$$X' = I_n X' = (AC)X' = A(CX') = A0 = 0.$$

Ou seja, $X' = 0$ e, portanto, $CX = 0$ tem apenas a solução trivial. Como *b)* $\Rightarrow$ *e)*, existe uma matriz $C' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $CC' = I_n$. Mas então

$$A = AI_n = A(CC') = (AC)C' = I_nC' = C'.$$

E, portanto, $CA = AC = I_n$, ou seja, A é invertível. $\square$

Foi visto nas propriedades dos determinantes que se uma matriz é invertível então o seu determinante é não nulo. Prova-se mesmo que esta condição é necessária e suficiente.

Teorema 3.44. *Uma matriz quadrada A é invertível se e só se* $\det A \neq 0$.

Demonstração. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

"$\Rightarrow$" Suponha-se que A é uma matriz invertível. Então existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n$. Como o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes de cada uma das matrizes ($\mathbf{P}_{10}$), temos

$$\det A \det\left(A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det\left(I_n\right) = 1. \tag{3.6}$$

Suponhamos, por absurdo, que $\det A = 0$. Então, de (3.6), vem que $0 = 1$. Logo $\det A \neq 0$.

"$\Leftarrow$" A demonstração da implicação recíproca é mais complicada e não será efectuada. □

Exercício Resolvido 3.45. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, *onde α é um parâmetro real. Determine os valores de α para os quais a matriz A é invertível.*

Resolução: *Comece-se por calcular o determinante de A.*

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & -2 & -\alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 & 0 \end{vmatrix} &\underset{C_4}{\overset{T.L.}{=}} 1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1}{\overset{T.L.}{=}} (-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha^2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (-2\alpha + \alpha^2) \\
&= \alpha(\alpha - 2).
\end{aligned}$$

Por teorema anterior, A é invertível se e só se $\det A \neq 0$. *Portanto, A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $2 - \alpha \neq 0$, ou seja, A é invertível para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.*

Exercício 3.46. *Seja* $A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix}$, *onde β é um parâmetro real. Determine os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ admite apenas a solução trivial.*

3.4 Cálculo da inversa a partir da matriz adjunta

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se *matriz dos complementos algébricos de* A, e representa-se por $\hat{A}$, à matriz quadrada de ordem n definida por:

$$\hat{A} = [A_{ij}]$$

onde A_{ij} é o complemento algébrico da entrada a_{ij}, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Definição 3.47. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***matriz adjunta de*** *A, e representa-se por* $\operatorname{adj} A$, *à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é,*

$$\operatorname{adj} A = (\hat{A})^T.$$

Exemplo 3.48. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *Então*

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & -8 \\ -5 & -7 & 4 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\operatorname{adj} A = (\hat{A})^T = \begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.49. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. *Verifique que* $A = \operatorname{adj} A$.

O próximo resultado estabelece uma propriedade que permitirá calcular a inversa de uma matriz a partir da sua matriz adjunta.

Teorema 3.50. *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Então*

$$A\,(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I_n.$$

Mais, se A é invertível então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Demonstração. Dada uma matriz $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, tem-se que

$$\begin{aligned}
A\,(\operatorname{adj} A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Pela definição de produto de matrizes, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a entrada (i, i) da matriz $A\,(\operatorname{adj} A)$ é

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \det A,$$

pelo teorema de Laplace aplicado à linha i da matriz A.

Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$ e considere-se a matriz B que se obtém da matriz A, substituindo a linha j por uma linha igual à linha i de A. Então $\det B = 0$, porque a matriz B tem duas linhas iguais. Pelo teorema de Laplace, aplicado à linha j da matriz B, tem-se

$$0 = \det B = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn},$$

que é a entrada (i, j) da matriz $A\,(\operatorname{adj} A)$. Portanto,

$$A\,(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)\, I_n.$$

Se A é invertível, então existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $\det A \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= A^{-1}\left(\frac{\det A}{\det A}\right) I_n \\
&= \frac{1}{\det A} A^{-1} A\,(\operatorname{adj} A) && \text{pela primeira parte do teorema} \\
&= \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A && \text{por definição de inversa}
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.51. *Considere-se a matriz A do exemplo 3.48. Como* $\det A = -6$, *então*

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 & -5 & -4 \\ 8 & -7 & -2 \\ -8 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Exercício 3.52. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Calcule* A^{-1}, *usando a matriz adjunta.*

3.5 Sistemas de Cramer

Definição 3.53. *Sejam* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$. *Diz-se que um sistema de equações lineares na forma matricial* $AX = B$ *é um* ***sistema de Cramer*** *se a matriz* A *é invertível.*

Repare-se que se existe A^{-1} então

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Ou seja, um sistema de Cramer é sempre possível e determinado e a sua única solução é dada por:

$$X = A^{-1}B.$$

Observe-se que, neste tipo de sistemas, basta calcular a matriz inversa de A e efectuar o produto $A^{-1}B$ para obter a solução.

Teorema 3.54 (Regra de Cramer). *Sejam* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $B \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *matrizes tais que o sistema de equações lineares na forma matricial* $AX = B$ *é um sistema de Cramer. Para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *seja* A_j *a matriz que se obtém de* A *substituindo a coluna* j *pela única coluna da matriz* B.

A solução (única) do sistema $AX = B$ *é o n-uplo* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *onde*

$$\alpha_j = \frac{\det(A_j)}{\det A}, \qquad \textit{para todo } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Demonstração. Note-se que, sendo $AX = B$ um sistema de Cramer, então A é uma matriz invertível e a solução do sistema é dada por $X = A^{-1}B$. Seja $\begin{bmatrix}\alpha_1 & \ldots & \alpha_n\end{bmatrix}^T$ essa solução e suponhamos que $B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n\end{bmatrix}^T$. Então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= A^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det A}\,(\operatorname{adj} A)\,B. \end{aligned}$$

Repare-se que a entrada $(j, 1)$ da matriz coluna $(\operatorname{adj} A)\,B$ é

$$A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n = \det A_j,$$

por aplicação do teorema de Laplace à coluna j da matriz A_j. Portanto

$$\alpha_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \qquad \text{para qualquer } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

$\square$

Exemplo 3.55. *Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é $AX = B$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que é um sistema de Cramer uma vez que $\det A = -2 \neq 0$ *e, portanto, A é invertível.*

De acordo com o teorema anterior, a solução deste sistema é o terno (x, y, z) onde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -1 \;\; e \;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = 0$$

Ou seja, a solução do sistema dado é $(1, -1, 0)$ (verifique!).

Exercício 3.56. *Considere-se o sistema de equações lineares cuja forma matricial é $AX = B$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Mostre que este sistema só admite uma solução e calcule-a, aplicando a regra de Cramer.