departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Verifique quais das seguintes expressões definem produtos internos no espaço vectorial real indicado.

   (a) em $\mathbb{R}^2$:

   i. $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$;
   ii. $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$;
   iii. $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;
   iv. $(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

   (b) em $\mathbb{R}^3$:

   i. $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$;
   ii. $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_3y_3$;
   iii. $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_3$;
   iv. $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$.

2. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e seja $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Define-se traço da matriz A como sendo o escalar $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.

   Prove que a seguinte expressão define um produto interno de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

   $$A \bullet B = \mathrm{tr}(A^T B), \quad \text{com } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

3. Considere o espaço vectorial real $P_2[x]$. Prove que a seguinte expressão define um produto interno em $P_2[x]$:

   $$p(x) \bullet g(x) = \int_0^1 p(x)g(x)dx, \quad \text{com } p(x), g(x) \in P_2[x].$$

4. Calcule a norma do vector:

   (a) $u = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$, supondo fixo neste espaço vectorial real os produtos internos referidos no exercício 1.(a) i. e 1.(a) ii..

   (b) $v = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$, supondo fixo neste espaço vectorial real o produto interno referido no exercício 1.(b) i.

   (c) $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, supondo fixo nesse espaço vectorial real o produto interno definido no exercício 2.

   (d) $p(x) = 2x^2 + 1 \in P_2[x]$, supondo fixo nesse espaço vectorial real o produto interno definido no exercício 3.

5. Seja E um espaço euclidiano e sejam u, v e w vectores de E tais que:

$$u \bullet v = 2, \quad v \bullet w = -3, \quad w \bullet u = 5, \quad \|u\| = 1, \quad \|v\| = 2 \quad \text{e} \quad \|w\| = 3$$

   Calcule:

   (a) $(u + v) \bullet (w + v)$;
   (b) $(2v - w) \bullet (3u + 2w)$;
   (c) $\|u + v\|$;
   (d) $\|u - 2v + 4w\|$.

6. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores $a = (1, 2, 1)$ e $b = (-1, 1, 1)$. Calcule o ângulo entre a e b, para cada dos seguintes produtos internos de $\mathbb{R}^3$:

   (a) $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$;
   (b) $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2 + 2x_3y_3$;
   (c) $(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + 2x_3y_3$.

7. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Calcule, para cada alínea, o seno e o coseno do ângulo formado pelos vectores a e b.

   (a) $a = (1, 1, 1)$ e $b = (1, -2, 3)$;
   (b) $a = (1, 1, -1)$ e $b = (6, -3, 1)$;
   (c) $a = (1, -1, 2)$ e $b = (2, 2, -5)$.

8. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico. Sejam $u = (1, -1, 2)$, $v = (0, 1, -2)$ e $w = (2, 2, 0)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Determine um vector a tal que:

   (a) a é ortogonal a u e a v e tem norma $\sqrt{10}$;
   (b) a é ortogonal a v e a w e tem norma $\sqrt{15}$.

9. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno definido por:

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

   Calcule a norma do vector $u = (2, -1)$ e encontre um vector unitário v tal que $\angle(u, v) = \frac{\pi}{3}$.

10. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, determine, para cada alínea, os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que os vectores a e b são ortogonais.

   (a) $a = (2, \alpha, 1)$ e $b = (4, -2, -2)$;
   (b) $a = (-1, 2, \alpha)$ e $b = (-5, -2\alpha, -1)$;
   (c) $a = (\alpha, -1, -3)$ e $b = (\alpha, 1, 1)$.

11. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico, todos os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais ao vector $(1, 1, -1)$.

12. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, o produto interno definido por:

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3.$$

   (a) Diga para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ os vectores $a = (2, \alpha, 1)$ e $b = (\alpha + 1, 2, -1)$ são ortogonais.

   (b) Determine um vector unitário w ortogonal a $u = (1, -1, 2)$ e a $v = (2, 1, -1)$.

13. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, o produto interno definido por:

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_3y_3.$$

Sejam $u = (0, -1, \alpha)$ e $v = (\beta, 0, -1)$. Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais $\|u\| = \sqrt{3}$ e u é ortogonal a v.

14. Considere a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

   (a) Mostre que φ é um produto interno.

   (b) Nas alíneas seguintes, considere o produto interno acima definido.

      i. Calcule o produto interno entre os vectores $u = (1, 3)$ e $v = (2, -1)$.

      ii. Determine a expressão geral da norma de um vector arbitrário de $\mathbb{R}^2$.

      iii. Calcule o ângulo entre os vectores $a = (1, 1)$ e $b = (2, 1)$.

      iv. Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que $(m, 1)$ é ortogonal a $(2, 3)$.

15. Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e seja ϕ um endomorfismo de E. Sejam ainda $u, v \in E$. Prove que:

   (a) $4u \bullet v = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$;

   (b) $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$;

   (c) $u \bullet v = 0$ se e só se $\|u + v\| = \|u - v\|$;

   (d) $\|\phi(u)\| = \|u\|$ se e só se $\phi(u) \bullet \phi(v) = u \bullet v$.

   (e) $\angle(u, v) = \angle(-u, -v)$;

   (f) $\angle(u, v) = \pi - \angle(u, -v)$;

   (g) u e v são ortogonais se e só se $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

1. são produto interno as alíneas (a) i. e ii. e (b) i.

4. (a) i. $\|u\| = \sqrt{47}$; ii. $\|u\| = \sqrt{76}$; (b) i. $\|v\| = \sqrt{14}$; (c) $\|M\| = \sqrt{15}$; (d) $\|p(x)\| = \sqrt{\frac{47}{15}}$.

5. (a) 8; (b) -33; (c) 3; (d) $\sqrt{241}$.

6. (a) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; (b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$; (c) $\arccos\left(\frac{2\sqrt{55}}{55}\right)$.

7. (a) $\cos(\angle(a,b)) = \frac{\sqrt{42}}{21}$ e $\operatorname{sen}(\angle(a,b)) = \sqrt{\frac{19}{21}}$;
   (b) $\cos(\angle(a,b)) = \frac{2}{\sqrt{138}}$ e $\operatorname{sen}(\angle(a,b)) = \sqrt{\frac{67}{69}}$;
   (c) $\cos(\angle(a,b)) = -\frac{5\sqrt{198}}{99}$ e $\operatorname{sen}(\angle(a,b)) = \sqrt{\frac{49}{99}}$.

8. (a) $a = \left(0, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ou $a = \left(0, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$;
   (b) $a = \left(-\frac{2\sqrt{15}}{3}, \frac{2\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ ou $a = \left(\frac{2\sqrt{15}}{3}, -\frac{2\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

9. $\|u\| = 1$ e $v = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ou $v = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

10. (a) $\alpha = 3$; (b) $\alpha = 1$; (c) $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$.

11. $(a, b, a+b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

12. (a) $\alpha \in \{5+\sqrt{17}, 5-\sqrt{17}\}$; (b) $w = \left(\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{7}{\sqrt{70}}\right)$ ou $w = \left(-\frac{1}{\sqrt{70}}, -\frac{3}{\sqrt{70}}, -\frac{7}{\sqrt{70}}\right)$.

13. $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ ou $\alpha = -\sqrt{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

14. (b) i. -12; ii. $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{(x_1)^2 - 2x_1x_2 + 3(x_2)^2}$; iii. $\angle(a,b) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; iv. $m = 7$.