42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES

Vítor Neves

2009/2010

Lema 1.4.1 *Considere a série de potências* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

1. *Se* $\overline{x} \neq 0$ *e* $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ *converge, então* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *converge absolutamente sempre que* $|x| < |\overline{x}|$.

2. *Seja* ρ *o raio de convergência da série.*

   (a) $\rho = \sup\{r \geq 0| \quad \sum_{n\geq 0} a_n r^n$ *converge*$\}$

   (b) *A série diverge quando* $|x| > \rho$.

   (c) *A série pode convergir em qualquer dos extremos do intervalo de convergência.*

   (d) *Quando todos os* $a_n \neq 0$, $\rho = \overline{\lim} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$

Corolário 1.4.1 *O lema anterior vale com as devidas adaptações para séries de potências de* $x - x_0$.

Definição 1.4.3 *Se* ρ *for o raio de convergência da série* $\sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ *o intervalo* $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ *diz-se o* ***intervalo de convergência****;* $\{x \in \mathbb{R}| \ \sum_{n\geq 0} a_n (x - x_0)^n$ *converge*$\}$ *diz-se* ***domínio de convergência****.*

1.5 Séries de Taylor

1.5.1 Teorema de Taylor

Teorema 1.5.1 *Seja* $f :]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^{n+1} *e suponha-se que* $\alpha < a < \beta$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a) \\ &:= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a) \quad (x \in]\alpha, \beta[) \end{aligned}$$

Os restos R_n *podem tomar as formas*

$$\begin{aligned} R_n(x,a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[f^{(n)}(a + s(x-a)) - f^{(n)}(a) \right] (x-a)^n ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n(x,a) &= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a + s(x-a))(x-a)^{n+1} ds \end{aligned}$$

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{n!}(x-x^*)^n(x-a)$$

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$