Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Terceiro Exame da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 2 horas — 17 de Dezembro de 2008

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [5.0] Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int x^3\, e^{2x^4}\, dx$ (b) $\displaystyle\int e^{x/2}\,(x^2+5)\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} dx$

2. [5.0] Calcule os seguintes integrais (apresentando os resultados sempre na forma mais simplificada possível):

   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{2x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^x \cos x\, dx$ (c) $\displaystyle\int_2^{7/2} \frac{6}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\, dx$

3. [2.5] Determine a área da região

$$\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -1\le x\le 1 \quad\wedge\quad x^2-1\le y\le \arccos x\}.$$

4. [2.5] Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$. No caso de convergir indique qual é o seu valor.

5. [1.0] Caso exista, determine o valor do limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \sin(t^4-1)\, dt}{\sin(x-1)}.$$

6. [4.0]

   (a) Defina *soma de Riemann* de uma função limitada $f : [a,b]\to\mathbb{R}$, relativamente a uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$.

   (b) Sejam g e h funções reais de variável real e integráveis no intervalo $[a,b]$. Demonstre que $g+h$ também é integrável em $[a,b]$ e que

$$\int_a^b (g+h)(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b h(x)\, dx\,.$$

— FIM —