departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Sejam F e G subespaços vectoriais do espaço vectorial indicado. Determine a intersecção desses subespaços vectoriais.

   (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$ e $G = \langle(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;

   (b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \ \wedge \ x + y = 0\}$ e $G = \langle(1, 1, 1)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;

   (c) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = z \ \wedge \ x + y = 0\}$ e $G = \langle(1, 1, 0), (3, -1, 4)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;

   (d) $F = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ e $G = \langle(0, 1, 1), (1, 0, 1)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;

   (e) $F = \langle(1, -1, 1), (0, 1, 1)\rangle$ e $G = \langle(1, 1, 2), (-1, 1, 1)\rangle$, em $\mathbb{R}^3$;

   (f) $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + w = 0 \ \wedge \ x + 2y - z + 2w = 0\}$ e $G = \langle(1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 1, 1)\rangle$, em $\mathbb{R}^4$;

   (g) $F = \langle(1, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\rangle$ e $G = \langle(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\rangle$, em $\mathbb{R}^4$;

   (h) $F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : a + b + c = 0 \ \wedge \ a - d - 2c = 0\}$ e $G = \langle 1 + x + x^2 + x^3, x + x^2 + x^3, 1 + x^3\rangle$, em $P_3[x]$;

   (i) $F = \langle 1 + x + x^4, 1 - x\rangle$ e $G = \langle 1 + x, 1 + x + x^2, 1 - x^2 + x^4\rangle$, em $P_4[x]$;

   (j) $F = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 1\}$ e $G = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   Observação: dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$.

2. Sejam F e G subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$. Para cada caso, determine os valores do parâmetro real k para os quais a reunião $F \cup G$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y = 0 \ \wedge \ x - z = 0\}$ e $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : kx + 2y - z = 0\}$;

   (b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 0 \ \wedge \ z - y = 0\}$ e $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + ky - 2z = 0\}$.

3. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, o subespaço vectorial

$$F = \langle(1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (-5, -2, 1, 3)\rangle$$

   e o conjunto $G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \ \wedge \ 2x + z + w = 0\}$.

   (a) Verifique que G é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Determine as dimensões dos subespaços vectoriais F, G, $F + G$ e $F \cap G$.

   (c) Averigúe se $F \cup G$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

4. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os subespaços vectoriais

$$F = \langle (1,0,1),(2,-3,1) \rangle \quad \text{e} \quad G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$$

   (a) Determine uma base e a dimensão de cada subespaço vectorial.
   (b) Determine a intersecção dos dois subespaços vectoriais.
   (c) Determine a dimensão de $F+G$ e, sem efectuar cálculos, indique $F+G$.
   (d) Verifique se G é um subespaço complementar de F em $\mathbb{R}^3$.

5. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços vectoriais

$$F = \langle (1,2,3,6),(4,-1,3,6),(5,1,6,12) \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle (1,-1,1,1),(2,-1,4,5) \rangle$$

   (a) Determine a intersecção dos dois subespaços vectoriais.
   (b) Amplie uma base de $F \cap G$ de modo a obter uma base de F; analogamente, amplie essa mesma base de $F \cap G$ de modo a obter uma base de G.
   (c) A partir das duas bases anteriormente determinadas, obtenha uma base para $F+G$ e determine $F+G$.

6. Considere, no espaço vectorial real $P_3[x]$, os subespaços vectoriais

$$F = \langle 1+x, 1-x^3 \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle 1+x+x^2, x-x^3, 1+x+x^3 \rangle$$

   (a) Determine a intersecção dos dois subespaços vectoriais.
   (b) Diga se a reunião dos dois subespaços vectoriais é ou não um subespaço vectorial de $P_3[x]$.

7. Considere, no espaço vectorial real $P_3[x]$, o conjunto

$$F = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : b = c = d = 0\}$$

   e o subespaço vectorial $G = \langle 2x^2+1, x^2+2x, 4x-2 \rangle$.

   (a) Mostre que F é subespaço vectorial de $P_3[x]$ e determine uma sua base.
   (b) Indique uma base e a dimensão de G.
   (c) Determine $F+G$ e verifique que se trata de soma directa.

8. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços vectoriais

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\} \;\text{ e }\; T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = 0\}.$$

   (a) Verifique que $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.
   (b) Indique dois outros subespaços U e V distintos de S e T tais que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

9. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, o conjunto

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \ \wedge \ y + 2z - w = 0\}$$

e o subespaço vectorial $G = \langle(1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, -1)\rangle$.

(a) Mostre que F é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Indique uma base de F.

(c) Determine $F \cap G$.

(d) Indique uma base para $F + G$.

(e) Determine um subespaço complementar de F em $\mathbb{R}^4$.

10. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky = t \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

onde k e t são parâmetros reais.

(a) Discuta o sistema em função de k e t.

(b) Para $k = 1$, seja F o subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido pelo sistema homogéneo associado ao dado. Determine uma base de F.

(c) Determine um subespaço complementar de F em $\mathbb{R}^3$.

(d) Calcule a intersecção do subespaço complementar determinado na alínea anterior com o subespaço vectorial $G = \langle(1, -1, 2), (2, 1, 0)\rangle$.

11. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, determine, indicando as respectivas bases, dois subespaços vectoriais F e G tais que

$$F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$$
$$F + G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2x - y + 3z = 0\}$$

12. No espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto

$$Y = \{(1, -2, 1), (0, -3, 1), (2, -1, 1)\}$$

e seja F o subespaço vectorial gerado por Y.

(a) Determine uma base e a dimensão de F.

(b) Verifique se os vectores $u = (1, -5, 2)$ e $v = (1, 0, 2)$ pertencem a F e, em caso afirmativo, determine as suas coordenadas na base que indicou na alínea anterior.

(c) Seja $G = \{(x, x-y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Determine $H = F \cap G$, indicando uma sua base e a dimensão de G e de H.

(d) Será que $F \cup G$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

(e) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída pelo maior número possível de vectores de Y.

13. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z - w = 0\}$$

e o subespaço vectorial $F = \langle (1, 0, p, 0), (1, 1, 2, q) \rangle$, onde p e q são parâmetros reais.

(a) Mostre que S é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Determine os valores de p e q para os quais $F \cup G$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(c) Considere $p = 0$ e $q = -1$.

i. Determine $S + F$ e verifique se é soma directa.

ii. Determine $F + \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$ e verifique se é soma directa.

14. Sejam E um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F, G subconjuntos não vazios de E. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) Se F é um subespaço vectorial de E mas G não é, então $F \cup G$ não é subespaço vectorial de E.

(b) $F \subseteq F + G$ e $G \subseteq F + G$.

(c) Se $F \cap G$ é um subespaço vectorial de E então F e G são subespaços vectoriais de E.

1. (a) $\{(-5z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$; (b) $\{(0,0,0)\}$; (c) $\{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$;
   (d) $\{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$; (e) $\{(x, 3x, 5x) : x \in \mathbb{R}\}$;
   (f) $\{(x, 0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$; (g) $\{(x, 0, x, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$;
   (h) $\{-2bx^3 + bx^2 + bx - 4b : b \in \mathbb{R}\}$; (i) $\{2ax^4 + ax + 3a : a \in \mathbb{R}\}$;
   (j) $\left\{\begin{bmatrix} -b & b \\ b & d \end{bmatrix} : b, d \in \mathbb{R}\right\}$.

2. (a) $k = 7$; (b) $k = 5$.

3. (b) $\dim F = \dim G = 2$, $\dim(F + G) = 3$ e $\dim(F \cap G) = 1$; (c) não.

4. (a) $\dim F = \dim G = 2$, $\mathcal{B}_F = ((1, 0, 1), (2, -3, 1))$ e $\mathcal{B}_G = ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$;
   (b) $F \cap G = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\dim(F + G) = 3$, $F + G = \mathbb{R}^3$; (d) não.

5. (a) $F \cap G = \{(-z, 2z, z, 2z) : x \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $\mathcal{B}_F = ((-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 2))$ e $\mathcal{B}_G = ((-1, 2, 1, 2), (1, 0, 3, 4))$;
   (c) $\mathcal{B}_{F+G} = ((-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 2), (1, 0, 3, 4))$ e
   $F + G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^3 : -x - y - z + w = 0\}$.

6. (a) $F \cap G = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : b = 0 \wedge; c = 3a; \wedge; d = 2a\}$; (b) não.

7. (a) $\mathcal{B}_F = (x^3)$; (b) $\mathcal{B}_G = (2x^2 + 1, x^2 + 2x, 4x - 2)$ e $\dim G = 3$; (c) $F \oplus G = P_3[x]$.

8. (b) $U = \{(x, 0, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}$.

9. (b) $\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 2))$; (c) $F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\}$;
   (d) $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$; (e) $F^\star = G$.

10. (a) sistema impossível: $k = 1$ e $t \in \mathbb{R}$ ou $k = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $t \neq -1$;
    sistema possível e indeterminado: $k = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $t = -1$;
    sistema possível e determinado: $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $t \in \mathbb{R}$;
    (b) $\mathcal{B}_F = ((-1, 1, 0))$; (c) $F^\star = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$; (d) $G \cap F^\star = \left\{\left(x, 0, \frac{2}{3}x\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$.

11. $F = F \cap G$, $\mathcal{B}_F = ((1, 1, 1))$, $G = F \cup G$ e $\mathcal{B}_G = ((1, -2, 0), (0, 3, 1))$.

12. (a) $\mathcal{B}_F = ((1, -2, 1), (0, -3, 1)\rangle$ e $\dim F = 2$; (b) $u \in F$, $u = (1, 1)_{\mathcal{B}_F}$ e $v \notin F$;
    (c) $H = \{(-2z, -5z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_H = ((-2, -5, 1))$ e $\mathcal{B}_G = ((1, 1, 1), (0, -1, 1))$;
    (d) não; (e) $\mathcal{B} = ((1, -2, 1), (0, -3, 1), (0, 0, 1))$.

13. (b) $p = -\frac{1}{2}$ e $q = 5$; (c) i. $S + F = \mathbb{R}^4$ e não é soma directa;
    ii. $F \oplus \langle(1, 1, 1, 1)\rangle = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w + 2z - 3y = 0\}$.

14. (a) F; (b) V; (c) F.