Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2º sem. 2010/11

EXERCÍCIOS 4

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica, de período $T > 0$.

   (a) Mostre que quando f é diferenciável, f' é periódica de período T.

   (b) Suponha que f é contínua e $F' \equiv f$. Mostre que F é periódica de período T se e só se $\int_0^T f(x)dx = 0$.

2. (a) Verifique que valem as seguintes identidades trigonométricas (no contexto das séries de Fourier também chamadas **fórmulas de transformação logarítmica**)

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \qquad (1)\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\,\alpha\,\sin\,\beta \qquad (2)\\ \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\,\alpha\cos\beta \qquad (3)\end{aligned}$$

   (b) Utilize a alínea anterior para mostrar que, quando $\omega = \frac{2\pi}{T}$, o conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}\right\} \bigcup \left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega\cdot)|\ n \in \mathbb{N}\right\} \bigcup \left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\text{sen}(n\omega\cdot)|\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

   é ortonormado no espaço vectorial real das funções reais periódicas de período $T > 0$, integráveis em média quadrática em $[0, T]$, munido do quase produto interno

$$f \bullet g \ := \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

   .

3. Determine as séries de Fourier das (extensões periódicas das) funções de período 2π definidas de seguida:

$(a) f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$

$(b) f(x) = \begin{cases} x+\pi & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases}$

$(c) f(x) = 1 \quad (-1 < x \leq 1)$

$(d) f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$(e) f(x) = x^2 \quad (0 < x \leq 2)$

$(f) f(x) = \begin{cases} -x^2 & 0 < x \leq 1 \\ x^2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$(g) f(x) = |x| \quad (-2 < x \leq 2)$

$(h) f(x) = \begin{cases} -1 & 1 < |x| \leq 2 \\ 1 & |x| \leq 1 \end{cases}$

$(i) f(x) = e^x \quad (-\pi < x \leq \pi)$

4. Suponha que $T > 0$ e considere $f : \left]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \to \mathbb{R}$.

   (a) A **extensão par** de f com período $T > 0$ é a extensão periódica da função f_p definida por

   $$f_p(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & -\frac{T}{2} < x \leq 0 \\ f(-x) & 0 < x \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

   A **série de cosenos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_p. Determine as séries de cosenos das funções do exercício anterior (3).

   (b) A **extensão ímpar** de f com período $T > 0$ é a função f_i definida por

   $$f_i(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

   A **série de senos** de f é, por definição, a série de Fourier de f_i. Determine as séries de senos das funções do exercício 3.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, utilize as extensões periódicas de período 2π das funções f para verificar as somas indicadas.

   (a) $f(x) = x - \pi,\ se\ -\pi < x \leq \pi;\qquad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases};\qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

   (**Sug:** Utilize a forma complexa da série de Fourier)

6. Utilize a equação de Parseval – com funções de período 2π – para verificar as igualdades seguintes

   $(a)\quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad (b)\quad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} \qquad (b)\quad \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$

7. Mostre que seja qual for $x \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge mas não é uma série de Fourier.