42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES VI

Vítor Neves

2009/2010

Capítulo 3

Séries de Fourier

3.1 Álgebra Linear; espaços semi-normados

$$\mathbb{C} \ := \ \{a+ib|\ a,b \in \mathbb{R} \quad \& \quad i^2=-1\}$$

$\mathbb{C}$ supõe-se algebrizado da forma usual como corpo dos números complexos em particular, para $z = a+ib,\ w = c+id \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z+w &= (a+c)+i(b+d) \\ zw &= (ac-bd)+i(ad+bc) \\ \overline{z} &= a-ib \\ |z|^2 &= z\overline{z} \ = \ a^2+b^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}e(z) := a = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathcal{I}m(z) := b = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

$E =$ espaço **quase euclidiano**

i.e

um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ munido de um

quase produto interno

ou

forma sesquilinear hermítica semi-definida positiva

$(\cdot \bullet \cdot) : E^2 \to \mathbb{C}$,

Para quaisquer $x, y, z \in E;\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
y \bullet x &= \overline{x \bullet y} \\
(\lambda x) \bullet y &= \lambda (x \bullet y) \\
(x + y) \bullet z &= (x \bullet z) + (y \bullet z) \\
x \bullet x &\geq 0
\end{aligned}
$$

A **semi norma** $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ verifica, para quaisquer $x, y \in E;\ \lambda \in \mathbb{C}$

$$
\begin{aligned}
\|x\| &:= \sqrt{x \bullet x} \ \geq\ 0 \\
\|\lambda x\| &= |\lambda| \cdot \|x\| \\
\|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \\
\|x - y\| &\geq \big| \|x\| - \|y\| \big| \\
|x \bullet y| &\leq \|x\| \cdot \|y\|
\end{aligned}
$$

Lema 3.1.1 *Se $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão em E, $v \in E$, então*

$$v_n \to v \ \equiv\ \lim_n \|v_n - v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \|v_n\| \to \|v\|.$$

A **semi métrica** ou **semi distância** $d(\cdot, \cdot) : E^2 \to \mathbb{R}$ associada verifica, parta quaisquer $x, y, z \in E$

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &:= \|x - y\| \ \geq\ 0 \\
d(x, y) &= d(y, x) \\
d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z)
\end{aligned}
$$

Teorema 3.1.1 *Dado um conjunto $I \neq \emptyset$, sejam $\mathcal{E} = \{e_i|\ i \in I\}$ um subconjunto ortonormado de E e V o subespaço de E gerado por $\mathcal{E}$.*

1. *Um vector $x \in E$ pertence a V sse existem um conjunto finito $F \subseteq I$ tal que*
$$x = \sum_{i \in F} (x \bullet e_i) e_i$$
2. *Uma **projecção em** V de $x \in E$, $\mathbf{proj}_V(x)$, é um vector de V à menor distância de x.*
   (a) *Quando V tem dimensão finita, ou seja, $I = \{1, \cdots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$*
   $$\sum_{i=1}^{n} (x \bullet e_i) e_i = \mathbf{proj}_V(x) \qquad (x \in E)$$
   (b) *Quando $\mathcal{E} = \{e_n|\ n \in \mathbb{N}\}$ é infinito numerável, para qualquer $x \in E$,*
   $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (x \bullet e_n) e_n &:= \lim_n \sum_{k=1}^{n} (x \bullet b_k) b_k := v \in V \\ &\Downarrow \\ v &= \mathbf{proj}_V(x); \\ \|x\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (x \bullet e_n)^2 \\ \|x\|^2 &\geq \sum_{i=1}^{n} (x \bullet e_i)^2 \qquad (x \in E; n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

   *(**OBS**: Mesmo existindo, a projecção pode não ser única quando $\| \cdot \|$ não é norma)*

3.2 Funções complexas de variável real

3.2.1 Sucessões e séries complexas

Definição 3.2.1 *A sucessão de números complexos*

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + ib_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge *para* $z = a + ib \in \mathbb{C}$ *se e só se qualquer das condições seguintes se verifica*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N\ \ |z_n - z| < \varepsilon \tag{3.1}$$

$$\lim_n a_n = a\ \ \&\ \ \lim_n b_n = b \tag{3.2}$$

Teorema 3.2.1 *Uma sucessão* (z_n) *de números complexos converge se e só se é de Cauchy, i.e., se e só se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq N \quad |z_m - z_n| < \varepsilon$$

Definição 3.2.2 *Uma série complexa* $\sum_{n\geq 0} z_n$ *converge*

1. ***absolutamente*** *quando* $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ *converge;*
2. ***em média quadrática*** *quando* $\sum_{n\geq 0} |z_n|^2$ *converge.*

Teorema 3.2.2 *Os critérios de convergência absoluta para séries de termo geral real são válidos para séries de termo geral complexo quando* $|\cdot|$ *se entende como valor absoluto ou módulo complexo como em* (3.1)*; em particular*

1. *Para qualquer* $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z \ := \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge absolutamente;

2. *Para qualquer* $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{it} \ = \ cos\, t + i\mathrm{sen}\, t$$

ou, de outra forma,

$$\cos t \ = \ \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \mathrm{sen}\, t \ = \ \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

3.2.2 Semi-normas integrais

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad \equiv \quad u + iv \qquad \text{com } u, v : D \to \mathbb{R}$$

Definição 3.2.3 *f é*

1. ***contínua*** *sse u e v são*
2. ***diferenciável*** *sse u e v são e*
$$f'(t) \; = \; u'(t) + iv'(t),$$
3. ***integrável*** *(à Riemann)em $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ sse u e v são e*
$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \; = \; \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt,$$
4. ***integrável*** *(à Riemann)* **em média quadrática** *se*
$$\int_\alpha^\beta |f(t)|^2 dt \in \mathbb{R}$$

Teorema 3.2.3 *O conjunto, $\mathcal{L}_2(I)$, das funções complexas de variável real $f : I := [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $(\alpha < \beta)$ integráveis em média quadrática em I é um espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Defina-se*

$$f \bullet_I g \; := \; \int_\alpha^\beta f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f, g \in \mathcal{L}_2(I))$$

$(\cdot \bullet_I \cdot)$ é uma forma sesquilinear semi-definida positiva ou quase produto interno.

$$\|f\|_{2I} \; := \; \sqrt{f \bullet_I f} \qquad (f \in \mathcal{L}_2)$$

$$\|f\|_{2I} = 0 \; \not\Rightarrow \; f = 0.$$

Teorema 3.2.4 *Quando $f \in \mathcal{L}_2(I)$ e f é periódica com período $T > 0$, então*

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad \int_r^{r+T} f(t)dt \; = \; \int_0^T f(t)dt.$$

3.3 Bases hilbertianas em $\mathcal{L}_2([0,T])$ $(T>0)$

$$\begin{aligned}
T &> 0\\
\omega &= \frac{2\pi}{T}\\
e_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}}e^{in\omega t} \quad (n\in\mathbb{Z}; t\in\mathbb{R})\\
f\bullet g &= \int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt \quad (f,g\in\mathcal{L}_2(I))\\
\|f\|_2 &= \sqrt{f\bullet f}
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.1

1. *$(\cdot\bullet\cdot)$ é um quase produto interno.*
2. *$\{e_n|\ n\in\mathbb{Z}\}$ é ortonormado em $\mathcal{L}_2(I)$.*
3. *Valem as seguintes* ***fórmulas de transformação logarítmica***

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha)\cos(\beta) \tag{3.3}$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) = -2\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) \tag{3.4}$$
$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta)+\mathrm{sen}(\alpha-\beta) = 2\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) \tag{3.5}$$

4. *$\{\frac{1}{\sqrt{T}}\}\cup\left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega\cdot)|\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\sqrt{\frac{2}{T}}\mathrm{sen}(n\omega\cdot)|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ é ortonormado em $\mathcal{L}_2(I)$.*

Definição 3.3.1 *Considere a função periódica real, de período $T > 0$, $f \in \mathcal{L}_2([0,T])$.*

1. *A* ***série de Fourier (complexa)*** *de f é*

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (f \bullet e_n)\, e_n &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt\, e^{in\omega\cdot} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{in\omega\cdot}\end{aligned}$$

2. *Se $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, a série de Fourier de f toma a forma*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega\cdot) + b_n \mathrm{sen}(n\omega\cdot)]$$

em que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{sen}(n\omega t)dt \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

Teorema 3.3.2 *Suponha que $f \in \mathcal{L}_2([0,T])$ e é periódica de período T.*

1. $\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \in \mathbb{C} \quad (n \in \{0\} \cup \mathbb{N})$
2. *Se f é par todos os coeficientes b_n são nulos*
3. *Se f é ímpar todos os coeficientes a_n são nulos*
4. *Quando $T = 2\pi$*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N}) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{sen}(nt)dt \quad (n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

Teorema 3.3.3 *Suponha que $f \in \mathcal{L}_2([0,T])$ e é periódica de período T.*

1. ***Igualdade de Parseval***

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})\end{aligned}$$

2. ***Desigualdades de Bessel*** *Para cada $N \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &\geq \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \\ \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &\geq \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})\end{aligned}$$

3. *Quando o período é 2π as expressões acima tomam a forma*

   (a) *Igualdade de Parseval*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2 dt &= 2\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \\ &= \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})\end{aligned}$$

   (b) *Desigualdades de Bessel. Para cada $N \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2 dt &\geq 2\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2 dt &\geq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R})\end{aligned}$$

3.4 Convergências

Definição 3.4.1 *Uma função $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ diz-se* ***seccionalmente contínua*** *ou* ***contínua por partes*** *se existir uma partição $\{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ tal que as restrições $f :]x_i, x_{i+1}[\to \mathbb{C}$ têm prolongamentos contínuos $f : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{C}$ $(0 \le i \le n-1)$*

Teorema 3.4.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $T > 0$ seccionalmente contínua em $[0,T]$, e portanto seccionalmente contínua em qualquer intervalo de período $[r, r+T]$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}$*

$$f(x) \ \sim \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n \ge 1} \big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \mathrm{sen}(n\omega x)\big) \ = \ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Teorema 3.4.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $T > 0$ seccionalmente contínua em $[0,T]$*

1. *Suponha-se que f' é seccionalmente contínua em $[0,T]$ no sentido em que, para alguma partição $\mathcal{P} := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$,*

   (a) *A série de Fourier de f converge para f em média quadrática em qualquer intervalo $[r, r+nT]$ $(r \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N})$*

   (b) *$f'(x)$ existe sempre que $x \in [0,T] \setminus \mathcal{P}$*

   (c) *$f'_{\big|]x_i, x_{i+1}[}$ tem prolongamento contínuo a $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \le i \le n-1)$*

   Então a série de Fourier de f converge uniformemente em qualquer intervalo onde f seja contínua.

2. *Nas condições do número anterior, se f é contínua, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$.*

Teorema 3.4.3 ***De Weierstrass***
Qualquer função contínua $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limite uniforme (em $[a,b]$) de uma sucessão de polinómios