Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame Final / Análise Matemática I

Duração: 3 horas — 14 de Janeiro de 2010

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [2.5] Justifique se são ou não verdadeiras as seguintes afirmações:

   (a) Se p é um ponto isolado de um conjunto A, então p é um ponto fronteiro de A.

   (b) O conjunto $B = \left\{\frac{n^2+1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ é fechado.

   (c) Se p é ponto exterior de C, então p não é ponto de acumulação de C.

   (d) Seja f uma função de domínio D. Se p é ponto interior de D, então $f(p)$ é ponto interior de $f(D)$.

   (e) O conjunto $E = \left\{\frac{\sin(3x)-1}{\ln(x+2)} \;:\; x \in [0,\, \pi]\right\}$ é limitado e fechado.

2. [1.0] Demonstre que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por

$$a_n = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & , \quad \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

   não é de Cauchy.

3. [2.0] Demonstre que o limite de uma sucessão convergente é único.

4. [2.0] Seja $p \in \mathbb{N}$. Demonstre que se $c \in \mathbb{R}$ e $|c| < 1$, então $\displaystyle\sum_{n=p}^{\infty} c^n = \frac{c^p}{1-c}$.

5. [2.0] Considere a função $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.
   Mostre que f é contínua em $x = 0$ mas não é diferenciável neste mesmo ponto.

6. [1.0] Justifique que o polinómio $x^{80} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais.

7. [3.5] Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{7}{2}} + n}$

8. [3.0] Calcule as seguintes primitivas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}\, dx$

9. [3.0] Calcule o valor dos seguintes integrais definidos:

   (a) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x\, dx$

— **FIM** —

Informação: Previsivelmente, as classificações deste exame vão ser colocadas no *site* http://elearning.ua.pt/ no dia 22 de Janeiro e quem desejar poderá consultar o seu exame no dia 25 de Janeiro, das 9h00m às 9h30m, na sala 11.1.32.