Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Primeiro Teste da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 1 hora e 30 minutos — 20 de Outubro de 2010

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [2.0] Demonstre por indução matemática que:
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\,, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

2. [4.5] Considere a função f real de variável real dada por
$$f(x)=\frac{\pi}{2}-2\arcsin\left(\frac{1}{x+3}\right).$$
   (a) Determine o domínio e o contradomínio de f.
   (b) Caracterize f^{-1}.
   (c) Caso existam, determine quais os zeros da função f.

3. [6.0] Considere a sucessão $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com
$$u_n=\frac{3-2n}{n+1}\,.$$
   (a) Prove que a sucessão é monótona e limitada.
   (b) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   (c) Seja $T=\{u_n\ :\ n\in\mathbb{N}\}$. Determine $\mathrm{int}(T)$, $\mathrm{fr}(T)$, $\overline{T}$ e T'.

4. [2.0] Sendo B um subconjunto da recta real, demonstre que
$$B \text{ é fechado } \underline{\text{se e só se}}\ \mathrm{fr}(B)\subseteq B.$$

5. [3.0] Defina "sucessão de Cauchy" e mostre que a sucessão $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é de Cauchy.

6. [2.5] Demonstre que o limite de uma sucessão convergente é único.

— FIM —