3 Séries de Fourier

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $T-$periódica (isto é, periódica, de período $T > 0$.).
   (a) Mostre que, quando f diferenciável, então f' é também $T-$periódica.
   (b) Suponha que f contínua e $F' \equiv f$. Mostre que F é $T-$periódica se e só se $\int_0^T f(t)dt = 0$.

2. Mostre que toda a função $f : [-A, A] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)$, $(A > 0)$, se pode decompor na soma de uma função par com uma função ímpar.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $2\pi-$periódica e dada por $f(t) = |t|$, no intervalo $[\pi, \pi]$. Calcule a série de Fourier associada a f.

4. Determine as séries de Fourier das extensões periódicas das seguintes funções:
   (a) $f(t) = 1 \quad (-1 < t \leq +1)$
   (b) $f(t) = t^2 \quad (-1 < t \leq +1)$
   (c) $f(t) = \cos\frac{t}{2} \quad (-\pi < t \leq \pi)$
   (d) $f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$
   (e) $f(t) = t \quad (-\pi < t \leq \pi)$
   (f) $f(t) = \begin{cases} t + \pi, & -\pi < t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$
   (g) $f(t) = \begin{cases} -1, & 1 < |t| \leq 2 \\ 1, & |t| \leq 1 \end{cases}$

5. Determine a série de Fourier associada à extensão par de $f(t) = \sin(t), t \in [0, \pi]$, ao intervalo $[-\pi, \pi]$.

6. Determine a série de Fourier associada à extensão ímpar ao intervalo $[-\pi, \pi]$ de
   (a) $f(t) = \cos(2t), \quad t \in [0, \pi]$.
   (b) $f(t) = 3 - t, \quad t \in [0, \pi]$.

7. Calcule a série de Fourier associada à função $2\pi-$periódica dada por

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ \pi - t, & 0 < t < \pi \end{cases},$$

   e use o resultado obtido para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

8. Calcule a série de Fourier associada à função $2\pi-$periódica dada por $f(t) = 1$, se $0 \leq t < \pi$ e por $f(t) = 0$, se $-\pi \leq t < 0$, e use o resultado obtido para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.