Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Terceiro Exame da Avaliação Contínua / Análise Matemática I

Duração: 2 horas 19 de Dezembro de 2007

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redacção são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
4. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
5. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis rectos.

---

1. [3.5] Determine as eventuais assimptotas, extremos locais, pontos de inflexão, sentido da concavidade e regiões de crescimento e decrescimento para o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}\,.$$

2. [3.0] Calcule as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$

3. [4.0] Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ (b) $\displaystyle\int_5^4 \frac{1+x}{1-x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x\,dx$

4. [2.0] Calcule a área da região plana delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x^2$.

5. [2.0] Diga, justificando, se é convergente ou divergente o integral

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ \ln(x)}\,dx$$

6. [2.5] Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, considere-se

$$G(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt\,.$$

Mostre (justificando detalhadamente) que $G''(x) = f(x)$.

7. [3.0] Demonstre que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ tem derivada contínua em $[a,b]$ e

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t)\ dt\right)}{dx} = F'(x) = f(x)\ .$$

— FIM —