7. Produto interno

7.1 Definição e exemplos

Nesta secção apenas se irão considerar espaços vectoriais reais, isto é, espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$.

Definição 7.1. *Seja E um espaço vectorial real. Chama-se* ***produto interno em*** *E a qualquer aplicação $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) linearidade relativamente ao primeiro argumento: *para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, u', v \in E$,*

$$\varphi(\alpha u + \beta u', v) = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u', v);$$

(b) linearidade relativamente ao segundo argumento: *para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, v, v' \in E$,*

$$\varphi(u, \alpha v + \beta v') = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, v');$$

(c) simetria: *para quaisquer $u, v \in E$,*

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u);$$

(d) definida positiva:

(i) *$\varphi(u, u) \geq 0$, para qualquer $u \in E$;*

(ii) *se $\varphi(u, u) = 0$ então $u = 0_E$.*

Resumindo, uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ é um produto interno em E se for bilinear (isto é, linear relativamente ao primeiro e segundo argumentos), simétrica e definida positiva.

Observação 7.2. *Observe-se que as propriedades* **(a)** *e* **(c)** *implicam a propriedade* **(b)**. *Portanto, quando se pretende provar que uma aplicação é um produto interno, basta mostrar as propriedades* **(a)**, **(c)** *e* **(d)**.

Exemplos 7.3. *1. A aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\varphi\left((x, y), (x', y')\right) = xx' + yy', \quad \textit{para todo } (x, y), (x'y') \in \mathbb{R}^2,$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. De facto,

(a) *dados $(x, y), (x', y'), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se*

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\alpha(x, y) + \beta(x', y'), (z, w)\right) &= \varphi\left((\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y'), (z, w)\right) && \textit{pelas propriedades em } \mathbb{R}^2 \\
&= (\alpha x + \beta x')z + (\alpha y + \beta y')w && \textit{por definição de } \varphi \\
&= \alpha(xz + yw) + \beta(x'z + y'w) && \textit{pelas propriedades em } \mathbb{R} \\
&= \alpha\varphi\left((x, y), (z, w)\right) + \beta\varphi\left((x', y'), (z, w)\right) && \textit{por definição de } \varphi;
\end{aligned}$$

(c) *sejam* $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ *quaisquer, então*

$$\begin{aligned} \varphi\left((x,y),(x',y')\right) &= xx' + yy' && \textit{por definição de } \varphi \\ &= x'x + y'y && \textit{pelas propriedades em } \mathbb{R} \\ &= \varphi\left((x',y'),(x,y)\right) && \textit{por definição de } \varphi, \end{aligned}$$

e, portanto, φ *é bilinear e simétrica.*

(d) *seja* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *qualquer, então:*

(i) $\varphi\left((x,y),(x,y)\right) = x^2 + y^2 \geq 0$;

(ii) $\varphi\left((x,y),(x,y)\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

2. *A aplicação* $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\varphi\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right) = x_1y_1, \quad \textit{para todo } (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

não é um produto interno em $\mathbb{R}^2$*, porque* $\varphi\left((0,1),(0,1)\right) = 0$ *e* $(0,1) \neq (0,0)$*. Portanto, não é definida positiva.*

Exercício 7.4. *Seja* E *um espaço vectorial real e sejam* φ *e* ψ *dois produtos internos em* E*. Sejam ainda* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$*. Mostre que* $\alpha\varphi + \beta\psi$ *é um produto interno em* E*.*

Seja E um espaço vectorial real e seja φ um produto interno em E. Sejam ainda $u, v \in E$. O produto interno entre u e v é o número real $\varphi(u,v)$, e representa-se por $u \bullet v$.

Também é usual escrever o produto interno entre u e v por $u \mid v$ ou ainda $\langle u, v \rangle$.

Exemplos 7.5. 1. *A aplicação de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$*, definida por*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i,$$

para todo $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$*, é um produto interno (prove!), ao qual se chama* ***produto interno canónico em*** $\mathbb{R}^n$*.*

2. *A aplicação de* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$(x_1,x_2) \bullet (y_1,y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

para todo $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$*, é um produto interno em* $\mathbb{R}^2$ *(prove!).*

Exercício 7.6. *Mostre que a aplicação de* $P_2[x] \times P_2[x]$ *em* $\mathbb{R}$ *definida por*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) \bullet (a_2x^2 + b_2x + c_2) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$

para todo $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in P_2[x]$*, é um produto interno em* $P_2[x]$*.*

Proposição 7.7. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Então, para qualquer $u \in E$, tem-se $0_E \bullet u = 0$.*

Demonstração. Seja $u \in E$. Então:

$$\begin{aligned} 0_E \bullet u &= (0 \times 0_E) \bullet u && \text{pelas propriedades de espaço vectorial} \\ &= 0(0_E \bullet u) && \text{pela bilineariedade do produto interno} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

7.2 Norma de um vector

Definição 7.8. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e seja $u \in E$. Chama-se* **norma de** *u, e representa-se por $\|u\|$, ao número real não negativo dado por*

$$\|u\| = \sqrt{u \bullet u}.$$

Exemplo 7.9. *Considere em $\mathbb{R}^n$ o produto interno canónico. Então*

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| &= \sqrt{(x_1, x_2, \dots, x_n) \bullet (x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, considere o vector $(1, 2)$. A norma de $(1, 2)$ em relação ao produto interno canónico de $\mathbb{R}^2$ é $\|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Note-se que o conceito de norma depende do produto interno definido no espaço vectorial.

Exemplo 7.10. *Considere em $\mathbb{R}^2$, o produto interno*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

A norma de $(1, 2)$ em relação a este produto interno é

$$\|(1, 2)\| = \sqrt{(1, 2) \bullet (1, 2)} = \sqrt{1 + 2 + 2 + 8} = \sqrt{13}.$$

Teorema 7.11. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Para quaisquer $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:*

(a) *$\|u\| = 0$ se e só se $u = 0_E$;*

(b) *$\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$;*

(c) **Desigualdade de Schwarz:** $|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$;

(d) $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$ *se e só se* u *e* v *são linearmente dependentes;*

(e) **Desigualdade triangular:** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;

(f) $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ *se e só se um dos vectores se obtém do outro através da multiplicação deste por um escalar não negativo.*

Demonstração. Prove-se **(a)**. Seja $u \in E$.

($\Rightarrow$) Suponha-se que $\|u\| = 0$; então $u \bullet u = 0$. Pelas propriedades do produto interno, $u = 0_E$.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que $u = 0_E$; então $u \bullet u = 0$ e, portanto, $\|u\| = 0$.

Prove-se **(b)**. Sejam $u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\| &= \sqrt{(\alpha u) \bullet (\alpha u)} && \text{por definição de norma} \\
&= \sqrt{\alpha^2 (u \bullet u)} && \text{pela bilineariedade do produto interno} \\
&= \sqrt{\alpha^2}\sqrt{u \bullet u} \\
&= |\alpha| \cdot \|u\|.
\end{aligned}$$

Prove-se **(c)**. Note-se primeiro que se $u = 0_E$ ou $v = 0_E$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Suponha-se então que $u \neq 0_E$ e $v \neq 0_E$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Como o produto interno é uma aplicação definida positiva então

$$(\lambda u + v) \bullet (\lambda u + v) \geq 0,$$

ou seja,

$$\lambda^2 (u \bullet u) + \lambda (u \bullet v) + \lambda (v \bullet u) + v \bullet v \geq 0.$$

Como o produto interno é simétrico, obtém-se

$$\lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda (u \bullet v) + \|v\|^2 \geq 0,$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$. Considerando

$$\lambda = -\frac{u \bullet v}{\|u\|^2},$$

obtém-se

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^4} \|u\|^2 - 2 \frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2 \geq 0$$

o que implica $(u \bullet v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$. Portanto,

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Prove-se **(d)**.

($\Rightarrow$) Se $u = 0_E$ então claramente que u e v são linearmente dependentes e também se tem $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$. Suponha-se então que $u \neq 0_E$ e que $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$. Então $(u \bullet v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$, donde

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} = \|v\|^2$$

e, portanto,

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} - \|v\|^2 = 0.$$

Como

$$\frac{(u \bullet v)^2}{\|u\|^2} - \|v\|^2 = -\left\|-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v\right\|^2, \quad \text{(justifique!)}$$

tem-se

$$\left\|-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v\right\| = 0.$$

Pela propriedade **(a)**, tem-se necessariamente que

$$-\frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u + v = 0_E.$$

Portanto,

$$v = \frac{u \bullet v}{\|u\|^2}u,$$

isto é, v é um múltiplo de u, o que implica que u e v são linearmente dependentes.

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que u e v são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, pode supor-se que $v = \alpha u$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$|u \bullet v| = |u \bullet (\alpha u)| = |\alpha| \cdot \|u\|^2.$$

Por outro lado,

$$\|u\| \cdot \|v\| = \|u\| \cdot \|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|^2.$$

Logo, $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$.

Prove-se **(e)**. Sejam $u, v \in E$. Vai-se provar que

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 .$$

Usando a definição de norma e a desigualdade de Schwarz, tem-se

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= (u + v) \bullet (u + v) \\ &= u \bullet u + u \bullet v + v \bullet u + v \bullet v \\ &= \|u\|^2 + 2(u \bullet v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 .\end{aligned}$$

Portanto, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Prove-se **(f)**. Pela demonstração da propriedade anterior, tem-se a igualdade $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ se e só se $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$. Assim $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$. Como $u \bullet v \leq |u \bullet v|$ e $|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, pela desigualdade de Schwarz, então

$$u \bullet v = |u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Pela propriedade **(d)**, sabe-se que $|u \bullet v| = \|u\| \cdot \|v\|$ se e só se os vectores u e v são linearmente dependentes. Sem perda de generalidade, suponha-se que $v = \alpha u$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $u \bullet v = \alpha \|u\|^2$ e $|u \bullet v| = |\alpha| \cdot \|u\|^2$, então $\alpha > 0$. Reciprocamente, se $v = \alpha u$, com $\alpha > 0$, então claramente $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\|$. Portanto, $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$. □

Definição 7.12. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e seja u um vector não nulo de E. Chama-se **versor de** u, e representa-se por* vers(u), *ao vector*

$$\operatorname{vers}(u) = \frac{1}{\|u\|} u$$

Observação 7.13. *O versor de um vector não nulo u é sempre um vector de norma* 1.

A um vector de norma 1 *chama-se **vector unitário**.*

7.3 Ângulo entre vectores

Sejam $u, v \in E$ tais que $u \neq 0_E$ e $v \neq 0_E$. Então, tendo em conta a desigualdade de Schwarz,

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

e, portanto,

$$-\|u\| \cdot \|v\| \leq u \bullet v \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

isto é,

$$-1 \leq \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Assim, existe um valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Definição 7.14. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Dados dois vectores não nulos u e v de E, chama-se **ângulo de** u **com** v, e representa-se por $\angle(u, v)$, ao valor $\theta \in [0, \pi]$ tal que*

$$\cos\theta = \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|},$$

isto é,

$$\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Exemplos 7.15. *1. Em $\mathbb{R}^2$, considere o produto interno canónico e os vectores $(1,3)$ e $(2,1)$. Determine-se $\angle((1,3),(2,1))$. Ora*

$$\begin{aligned}\angle((1,3),(2,1)) &= \arccos\left(\frac{(1,3)\bullet(2,1)}{\|(1,3)\|\cdot\|(2,1)\|}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{2+3}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+1^2}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2. Considere, em $\mathbb{R}^2$, o produto interno definido por

$$(x_1,x_2)\bullet(y_1,y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

Determine-se $\angle((1,3),(2,1))$. Ora

$$\begin{aligned}\angle((1,3),(2,1)) &= \arccos\left(\frac{(1,3)\bullet(2,1)}{\|(1,3)\|\cdot\|(2,1)\|}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{15}{5\sqrt{10}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right).\end{aligned}$$

Exercício 7.16. *Considere, em $\mathbb{R}^3$, o produto interno definido por*

$$(x_1,x_2,x_3)\bullet(y_1,y_2,y_3) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Determine $\angle((1,2,1),(-1,1,1))$.

Teorema 7.17. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $u,v\in E\setminus\{0_E\}$. Então:*

(a) $\angle(u,u)=0$;

(b) $\angle(u,v)=\angle(v,u)$;

(c) $\angle(u,v)=\angle(\alpha u,\beta v)$ *se e só se* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e têm o mesmo sinal, isto é,* $\alpha\beta>0$.

(d) $\angle(u,v)=\pi-\angle(\alpha u,\beta v)$ *se e só se* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *e têm sinais contrários, isto é,* $\alpha\beta<0$.

Demonstração. Prove-se **(a)**. Ora

$$\angle(u,u) = \arccos\left(\frac{u\bullet u}{\|u\|\cdot\|u\|}\right) = \arccos\left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2}\right) = \arccos 1 = 0.$$

Prove-se **(b)**. Ora

$$\angle(u,v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{v \bullet u}{\|v\| \cdot \|u\|}\right) = \angle(v,u).$$

Provem-se **(c)** e **(d)**. Por definição, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$\angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(\frac{(\alpha u) \bullet (\beta v)}{\|\alpha u\| \cdot \|\beta v\|}\right) = \arccos\left(\frac{(\alpha\beta)(u \bullet v)}{|\alpha\beta| \cdot \|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Se $\alpha\beta > 0$ então $|\alpha\beta| = \alpha\beta$ e tem-se

$$\angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \angle(u,v).$$

Se $\alpha\beta < 0$ então $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$ e tem-se

$$\angle(\alpha u, \beta v) = \arccos\left(-\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \pi - \angle(u,v).$$

□

Exercício Resolvido 7.18. *Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base ordenada de um espaço vectorial real E munido de um produto interno, tal que*

$$e_i \bullet e_i = 1 \quad \text{e} \quad e_i \bullet e_j = 0, \quad \text{para todo } i,j \in \{1,2,3\} \text{ e } i \neq j.$$

Sejam $u = e_1 + e_2$ e $v = e_2 - 2e_3$ dois vectores de E. Determine:

(a) $\|u\|$; *(b)* $\|v\|$; *(c)* $\angle(u,v)$.

Resolução:

(a) Por definição de norma e pela bilinearidade do produto interno, tem-se:

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sqrt{u \bullet u} \\
&= \sqrt{(e_1 + e_2) \bullet (e_1 + e_2)} \\
&= \sqrt{e_1 \bullet (e_1 + e_2) + e_2 \bullet (e_1 + e_2)} \\
&= \sqrt{e_1 \bullet e_1 + e_1 \bullet e_2 + e_2 \bullet e_1 + e_2 \bullet e_2} \\
&= \sqrt{1 + 0 + 0 + 1} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(b) Analogamente,

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sqrt{v \bullet v} \\
&= \sqrt{(e_2 - 2e_3) \bullet (e_2 - 2e_3)} \\
&= \sqrt{e_2 \bullet (e_2 - 2e_3) - 2e_3 \bullet (e_2 - 2e_3)} \\
&= \sqrt{e_2 \bullet e_2 - 2e_2 \bullet e_3 - 2e_3 \bullet e_2 + 4e_3 \bullet e_3} \\
&= \sqrt{1 - 0 - 0 + 4} = \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

(c) Como

$$\begin{aligned} u \bullet v &= (e_1 + e_2) \bullet (e_2 - 2e_3) \\ &= e_1 \bullet (e_2 - 2e_3) + e_2 \bullet (e_2 - 2e_3) \\ &= e_1 \bullet e_2 - 2e_1 \bullet e_3 + e_2 \bullet e_2 - 2e_2 \bullet e_3 \\ &= 0 - 0 + 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

e, usando as alíneas anteriores,

$$\angle(u, v) = \arccos\left(\frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

Exercício 7.19. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $e_1, e_2, e_3 \in E$ tais que*

$$\|e_1\| = 2, \quad \|e_2\| = \|e_3\| = 1, \quad e_2 \bullet e_1 = 0, \quad \angle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{4} \quad e \quad \angle(e_2, e_3) = \frac{\pi}{2}.$$

Para $u = e_1 - 3e_2$ e $v = e_1 + e_3$, determine:

(a) $\|u\|$; (b) $\|v\|$; (c) $\angle(u, v)$.

7.4 Vectores Ortogonais

Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno. Note-se que se u, v são vectores de E não nulos, então

$$u \bullet v = 0 \Leftrightarrow \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = 0 \Leftrightarrow \cos(\angle(u, v)) = 0 \Leftrightarrow \angle(u, v) = \frac{\pi}{2}.$$

Apresenta-se então a seguinte definição:

Definição 7.20. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno e sejam $u, v \in E$. Diz-se que u* ***é ortogonal a*** *v, e representa-se por $u \perp v$, se $u \bullet v = 0$.*

Exemplo 7.21. *Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$, os vectores $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Verifique-se se são ortogonais em relação aos seguintes produtos internos:*

(a) o produto interno canónico: $(1, 0) \bullet (0, 1) = 0$, ou seja, são ortogonais para este produto interno.

(b) o produto interno definido por

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2;$$

tem-se $(1, 0) \bullet (0, 1) = 1$, ou seja, não são ortogonais para este produto interno.

Note-se que, de acordo com o exemplo anterior, pode afirmar-se que dois vectores podem ser ortogonais em relação a um produto interno e não serem ortogonais em relação a outro.

Exercício 7.22. *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *o seguinte produto interno:*

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Estude a ortogonalidade dos vectores $u = (1, 1, 1)$, $v = (-1, 1, 1)$ *e* $w = (2, 1, 1)$.

Teorema 7.23. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Então, para todo* $u, v \in E$,

(a) *se* $u \perp v$ *então* $v \perp u$;

(b) $0_E \perp u$;

(c) $u \perp u$ *se e só se* $u = 0_E$;

(d) *se* $u \perp v$ *então* $u \perp \lambda v$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Prove-se **(a)**. Resulta do facto de que $u \bullet v = v \bullet u$, para todo $u, v \in E$.

Prove-se **(b)**. Como $0_E \bullet u = 0$, para todo $u \in E$, então $0_E \perp u$, para todo $u \in E$.

Prove-se **(c)**. Repare-se que $u \perp u$ se e só se $u \bullet u = 0$ se e só se $u = 0_E$.

Prove-se **(d)**. Se $u \perp v$ então $u \bullet v = 0$. Logo $\lambda(u \bullet v) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, usando a bilinearidade do produto interno, tem-se $u \bullet (\lambda v) = 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Exercício 7.24. *Considere, num espaço vectorial real* E *munido de um produto interno, dois vectores* $u, v \in E$ *tais que* $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$ *e* $\angle(u, v) = \frac{\pi}{3}$. *Determine para que valores do parâmetro* α, *o vector* $\alpha u + v$ *é ortogonal ao vector* $2u + 3v$.

7.5 Sistema ortogonal e sistema ortonormado

Definição 7.25. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Sejam ainda* $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. *Diz-se que os vectores* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *formam um* ***sistema ortogonal*** *se cada um dos vectores é ortogonal a cada um dos outros, ou seja,*

$$v_i \bullet v_j = 0, \quad \text{para todo } i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ e } i \neq j.$$

Se, além disso, os vectores $v_1, v_2, \dots, v_k$ *forem unitários (ou normados), isto é,* $\|v_i\| = 1$*, para todo* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$*, diz-se que esses vectores formam um sistema ortonormado, ou seja,* $v_1, v_2, \dots, v_k$ *formam um* ***sistema ortonormado*** *se, para todo* $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$*,*

$$v_i \bullet v_j = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$$

Exemplos 7.26. *(a) Em* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno canónico, os vectores* $u = (1, 0, -1)$*,* $v = (2, 0, 2)$ *e* $w = (0, 5, 0)$ *formam um sistema ortogonal. De facto, verifique que*

$$u \bullet v = u \bullet w = v \bullet w = 0.$$

Mas não formam um sistema ortonormado; por exemplo, $\|u\| = \sqrt{2} \neq 1$*.*

(b) Em $\mathbb{R}^n$ *munido do produto interno canónico, a base canónica de* $\mathbb{R}^n$ *constitui um sistema ortonormado.*

Exercício 7.27. *No espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$*, considere o seguinte produto interno:*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Mostre que os vectores $u = (2, -1)$ *e* $v = (-1, 0)$ *formam um sistema ortonormado.*

Teorema 7.28. *Seja* E *um espaço vectorial real munido de um produto interno. Sejam ainda* $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$ *não nulos. Se* $v_1, v_2, \dots, v_k$ *formam um sistema ortogonal, então* $v_1, v_2, \dots, v_k$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k = 0_E.$$

Então, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ tem-se

$$(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_kv_k) \bullet v_i = 0_E \bullet v_i,$$

ou seja,

$$\alpha_1(v_1 \bullet v_i) + \alpha_2(v_2 \bullet v_i) + \cdots + \alpha_{i-1}(v_{i-1} \bullet v_i) + \alpha_i(v_i \bullet v_i) + \alpha_{i+1}(v_{i+1} \bullet v_i) + \cdots + \alpha_k(v_k \bullet v_i) = 0$$

Como $v_1, v_2, \dots, v_k$ formam um sistema ortogonal, $v_j \bullet v_i = 0$ para $i \neq j$. Logo, obtém-se $\alpha_i(v_i \bullet v_i) = 0$. Por outro lado, $v_i \bullet v_i \neq 0$, pois $v_i \neq 0_E$. Donde $\alpha_i = 0$. Conclui-se então que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, ou seja, que $v_1, v_2, \dots, v_k$ são linearmente independentes. □

7.6 Base ortogonal e base ortonormada

Definição 7.29. *Seja E um espaço vectorial real de dimensão n munido de um produto interno e seja $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ uma base ordenada de E. Se os vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ formam um sistema ortogonal diz se que $\mathcal{B}$ é uma* ***base ortogonal de*** *E.*

Se $u_1, u_2, \ldots, u_n$ formam um sistema ortonormado diz-se que $\mathcal{B}$ é uma ***base ortonormada de*** *E.*

Exemplo 7.30. *Considere a base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$.*

(a) se $\mathbb{R}^2$ está munido do produto interno canónico, então $(1,0) \bullet (0,1) = 0$, $\|(1,0)\| = 1$ e $\|(0,1)\| = 1$, logo $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ é uma base ortonormada.

(b) se $\mathbb{R}^2$ está munido do produto interno definido por

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

então $(1,0) \bullet (0,1) = 1 \neq 0$ e, portanto, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ não é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, também não é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7.31. *Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno tal que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ é uma sua base ortogonal. Seja ainda $u = e_1 + e_2$. Mostre que*

$$\|u\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2.$$

7.6.1 Método de ortonormalização de Gram-Schmidt

Definição 7.32. *A um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno chama-se* ***espaço euclidiano****.*

Teorema 7.33. *Seja E um espaço euclidiano não trivial. Então E admite pelo menos uma base ortonormada.*

De facto, é sempre possível obter uma base ortonormada de E por aplicação de um algoritmo, denominado **método de ortonormalização de Gram-Schmidt**, a uma base de E qualquer.

Definição 7.34. *Seja E um espaço euclidiano e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ uma base ordenada de E.*

O ***método de ortonormalização de Gram-Schmidt*** *constrói uma base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ortonormada de E a partir da base $\mathcal{B}$.*

Passo 1: $w_1 = \operatorname{vers}(e_1) = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$.

Facilmente se verifica que $\|w_1\| = 1$ e $(w_1, e_2, \ldots, e_n)$ é uma base de E.

Passo 2:

(i) $z_2 = e_2 - (e_2 \bullet w_1)w_1$.

Como e_2 *e* w_1 *são linearmente independentes,* $z_2 \neq 0_E$*; além disso,* $z_2 \perp w_1$*; de facto,*

$$\begin{aligned} z_2 \bullet w_1 &= (e_2 - (e_2 \bullet w_1)w_1) \bullet w_1 \\ &= e_2 \bullet w_1 - (e_2 \bullet w_1)(w_1 \bullet w_1) && \textit{pela bilinearidade do produto interno} \\ &= e_2 \bullet w_1 - (e_2 \bullet w_1)\|w_1\|^2 && \textit{pois } w_1 \bullet w_1 = \|w_1\|^2 \\ &= 0 && \textit{pois } \|w_1\| = 1. \end{aligned}$$

(ii) $w_2 = \operatorname{vers}(z_2) = \dfrac{z_2}{\|z_2\|}$.

Facilmente se verifica que $w_1 \perp w_2$, $\|w_2\| = 1$ *(consequentemente,* w_1, w_2 *formam um sistema ortonormado) e* $(w_1, w_2, e_3, \ldots, e_n)$ *é uma base de* E.

Passo 3:

(i) $z_3 = e_3 - (e_3 \bullet w_1)w_1 - (e_3 \bullet w_2)w_2$.

Como e_3*,* w_1 *e* w_2 *são linearmente independentes,* $z_3 \neq 0_E$*; além disso,* $z_3 \perp w_1$ *e* $z_3 \perp w_2$*; de facto,*

$$\begin{aligned} z_3 \bullet w_1 &= (e_3 - (e_3 \bullet w_1)w_1 - (e_3 \bullet w_2)w_2) \bullet w_1 \\ &= e_3 \bullet w_1 - (e_3 \bullet w_1)(w_1 \bullet w_1) - (e_3 \bullet w_2)(w_2 \bullet w_1) && \textit{pela lineariedade do produto interno} \\ &= e_3 \bullet w_1 - (e_3 \bullet w_1)\|w_1\|^2 && \textit{pois } w_1 \bullet w_1 = \|w_1\|^2 \textit{ e } w_2 \bullet w_1 = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo análogo, se mostra que $z_3 \bullet w_2 = 0$.

(ii) $w_3 = \dfrac{z_3}{\|z_3\|}$.

Facilmente se verifica que $\|w_3\| = 1$, $w_1 \perp w_3$ *e* $w_2 \perp w_3$ *(ou seja,* w_1, w_2, w_3 *formam um sistema ortonormado); além disso,* $(w_1, w_2, w_3, e_4, \ldots, e_n)$ *é uma base de* E.

E assim sucessivamente. A certa altura tem-se $(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, e_i, \ldots, e_n)$ *uma base de* E*, onde* $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}$ *formam um sistema ortonormado e constrói-se:*

(i) $z_i = e_i - (e_i \bullet w_1) - (e_i \bullet w_2)w_2 - \cdots - (e_i \bullet w_{i-1})w_{i-1}$;

(ii) $w_i = \operatorname{vers}(z_i) = \frac{z_i}{\|z_i\|}$,

e obtém-se $(w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ *uma base de* E*, onde* $w_1, w_2, \ldots, w_{i-1}, w_i$ *formam um sistema ortonormado.*

No final do método obtém-se $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *que se prova ser uma base ortonormada de* E.

Exercício Resolvido 7.35. *Considere o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno canónico. Obtenha uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^3$*, aplicando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt à base* $\mathcal{B} = ((0,1,0),(1,2,1),(0,1,2))$.

Resolução: *Considere-se* $e_1 = (0,1,0)$, $e_2 = (1,2,1)$ *e* $e_3 = (0,1,2)$.

Como $\|e_1\| = 1$, *então*

$$w_1 = \mathrm{vers}(e_1) = \frac{e_1}{\|e_1\|} = e_1 = (0,1,0).$$

Assim

$$z_2 = e_2 - (e_2 \bullet w_1)\, w_1 = (1,2,1) - 2\,(0,1,0) = (1,0,1)\,.$$

e, portanto, como

$$\|z_2\| = \|(1,0,1)\| = \sqrt{2},$$

então $w_2 = \mathrm{vers}(z_2) = \dfrac{z_2}{\|z_2\|} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *Por fim,*

$$z_3 = e_3 - (e_3 \bullet w_1)\, w_1 - (e_3 \bullet w_2)\, w_2 = (0,1,2) - (0,1,0) - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-1,0,1).$$

Como $\|z_3\| = \sqrt{2}$, *então*

$$w_3 = \mathrm{vers}(z_3) = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ *é*

$$\mathcal{B}' = \left((0,1,0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

Exercício 7.36. *Para o espaço vectorial real* $\mathbb{R}^2$ *munido do produto interno definido por*

$$(x_1, x_2) \bullet (y_1, y_2) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

obtenha uma base ortonormada, aplicando o método de ortonormalização de Gram-Schmidt à base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = ((1,0),(0,1))$.