Notas de Álgebra Linear

Domingos Moreira Cardoso

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

2015/16

Conteúdo

Nota Introdutória

Os espaços vectoriais podem ser introduzidos de três modos distintos:

- geometricamente;
- analiticamente;
- axiomaticamente.

Na apresentação geométrica, os vetores são representados por segmentos orientados e as operações algébricas com vetores, tais como a adição, a subtracção e a multiplicação de um vetor por um escalar (um número real ou complexo) são definidas e estudadas geometricamente.

Na apresentação analítica, os vetores e as operações sobre com vetores são expressos através das componentes dos n-uplos de números reais ou complexos que representam os vetores. As propriedades das operações com vetores deduzem-se a partir das propriedades das operações com as componentes. A expressão analítica de vetores surge naturalmente da representação geométrica, quando se introduz um sistema de coordenadas.

A apresentação axiomática não se preocupa em descrever a natureza dos vetores, nem das equações algébricas com vetores. Em vez disso, os vetores e as operações com vetores aparecem como conceitos não definidos, dos quais nada se sabe a não ser que satisfazem um certo conjunto de **axiomas**. Um tal sistema algébrico, munido dos axiomas adequados, designa-se por **espaço linear** ou **espaço vetorial**.

É precisamente a última via, a via axiomática, que vamos utilizar.

Uma vez que em conjuntos da mais diversa natureza se tem reconhecido a conveniência da definição de operações de adição de elementos desses conjuntos e da multiplicação desses mesmos elementos por um escalar, as quais apresentam um certo número de propriedades, a abordagem axiomática abre a possibilidade de fazermos o estudo simultâneo de todas essas situações, no que toca à identificação e estabelecimento de propriedades mais elaboradas. Segundo este ponto de vista, o chamado ponto de vista axiomático, considera-se um conjunto genérico S onde possam vir a ser introduzidas certas operações que obrigatoriamente apresentem um certo número de *propriedades* pré-estabelecidas (que designamos por *axiomas*).

A teoria axiomática desenvolve-se deduzindo-se as novas propriedades (*teoremas*) que decorrem dos axiomas, com recurso (exclusivo) às leis da lógica. É claro que os axiomas são escolhidos tendo em conta os fins que se pretendem atingir. É também óbvio que uma axiomática (conjunto dos axiomas) não deve incluir axiomas incompatíveis ou que conduzam a uma incompatibilidade (axiomática contraditória). Uma axiomática compatível ou não contraditória pode ter uma única realização ou modelo (axiomática categórica) ou conduzir a várias realizações distintas (sob o ponto de vista matemático). Um exemplo de uma axiomática categórica é a axiomática do **corpo ordenado completo** que tem uma única realização: a do conjunto dos números reais com as operações habituais. Isto significa que duas realizações distintas da referida axiomática não o são sob o ponto de vista matemático, isto é, são isomorfas no sentido da seguinte definição.

Definição 0.1. *Dois conjuntos S e T dotados de igual número de operações, $\langle S; +, *, \ldots \rangle$ e $\langle T; \oplus, \odot, \ldots \rangle$, dizem-se isomorfos se existe uma bijecção $\psi : S \leftarrow T$ que respeita cada uma das operações, ou seja,*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in S \; \psi(x + y) &= \psi(x) \oplus \psi(y) \\ \psi(x * y) &= \psi(x) \odot \psi(y) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Vamos considerar o seguinte exemplo.

Exercício 0.1. *O conjunto dos números reais positivos munido da operação de multiplicação $\langle \mathbb{R}^+, * \rangle$ e o conjunto dos números reais munida da operação de adição $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ são isomorfos. Com efeito, a bijecção*

$$\lg : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

verifica a propriedade $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; \lg(x * y) = \lg(x) + \lg(y)$.

Antes de terminarmos esta introdução, é conveniente esclarecer o que se entende por **estrutura** matemática. Note-se que um conjunto por si só não tem qualquer estrutura. A estrutura é introduzida quando nele se definem **operações** ou **relações** e a sua caracterização é feita a partir das propriedades que estas operações ou relações apresentam.

O que se segue é dedicado à obtenção de uma caracterização axiomática da estrutura de espaço vetorial que, como se verá, é susceptível de inúmeras realizações distintas.

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Estruturas algébricas básicas

Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação definida sobre os elementos de A. O conjunto A munido desta operação $\langle A, *\rangle$, diz-se um **grupoide** se a operação $*$ constitui uma lei de composição interna sobre A, ou seja, $\forall x, y \in A\ x * y \in A$. A partir da estrutura de grupoide podem obter-se outras estruturas, consoante se verifiquem as correspondentes propriedades caracterizadoras, como sejam,

(A_1) a **propriedade associativa** ($\forall x, y, z \in A\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$);

(A_2) a **propriedade comutativa** ($\forall x, y \in A\ \ x * y = y * x$);

(A_3) a **existência de elemento neutro** ($\exists e \in A : \ \forall x \in A\ \ x * e = e * x = x$);

(A_4) todos os elementos de A admitem **inverso** relativamente a $*$ ($\forall x \in A\ \ \exists x' \in A : x * x' = x' * x = e$), onde e é o elemento neutro referido em (A_3).

Um grupoide $\langle A, *\rangle$ é um **semi-grupo** se satisfaz (A_1); **semi-grupo abeliano** (ou comutativo) se satisfaz (A_1) e (A_2); **monoide** se satisfaz (A_1) e (A_3); **grupo** se satisfaz (A_1), (A_3) e (A_4); grupo abeliano (ou comutativo) se satisfaz (A_1), (A_2), (A_3) e (A_4).

Definição 1.1. *Designa-se por* ***anel*** *um tripleto formado por um conjunto não vazio K e duas leis de composição interna sobre K (ou seja, operações relativamente às quais K é fechado), designadas respectivamente por lei de composição aditiva ($\oplus$) e lei de composição multiplicativa ($\odot$) que verificam as seguintes condições:*

1. *$\langle K, \oplus\rangle$ é um grupo comutativo;*

2. *$\langle K, \odot\rangle$ é um semi-grupo;*

3. *$\forall x, y, z \in K\ x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \wedge (y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x)$.*

Assim, podemos dizer que $\langle K, \oplus, \odot\rangle$ é um anel se os pares $\langle K, \oplus\rangle$ e $\langle K, \odot\rangle$ constituem, respectivamente, um grupo comutativo e um semi-grupo e a operação $\odot$ é distributiva relativamente à operação $\oplus$. Se $\langle K, \odot\rangle$ é um semi-grupo comutativo, então $\langle K, \oplus, \odot\rangle$ é uma anel comutativo. São exemplos de aneis comutativos $\langle \mathbb{Z}; +, *\rangle$, $\langle \mathbb{Q}; +, *\rangle$ e $\langle \mathbb{R}; +, *\rangle$, onde as leis de composição interna $+$ e $*$ são as operações usuais de adição e multiplicação.

Definição 1.2. *Um subconjunto S de K ($S \subseteq K$) diz-se um **subanel** de K se o própio S forma um anel com as operações induzidas de K.*

Por abuso de linguagem, para facilitar, muitas vezes identificamos a estrutura pelo seu conjunto de suporte. Por outro lado, designamos o elemento neutro relativamente à adição por elemento 0 e o elemento neutro relativamente à multiplicação por elemento 1.

Definição 1.3. *O anel $\langle K; \oplus, \odot\rangle$, com elemento 1 é um **corpo** se $\langle K \setminus \{0\}, \odot\rangle$ é um grupo comutativo (supõe-se que existe elemento 0 em K tal que $0 \neq 1$).*

Por outras palavras, K é um corpo se $\forall x \in K \setminus \{0\}$ x admite inverso (ou seja, $\exists x' \in K$ tal que $x \odot x' = x' \odot x = 1$) e $\langle K; \oplus, \odot\rangle$ é um anel comutativo com elemento 1.

1.2 Definição axiomática de espaço vetorial

Definição 1.4. *Seja $E = \{\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{u}, \hat{v}, \ldots\}$ um conjunto de elementos cuja natureza não importa e que designamos por vetores e seja $\langle K; +, *\rangle$ um corpo. Vamos assumir que definimos em E uma **lei de composição interna***

$$\begin{aligned} \oplus : E \times E &\quad\to\quad E \\ (\hat{f}, \hat{g}) &\rightsquigarrow \quad \hat{f} \oplus \hat{g}. \end{aligned}$$

*e uma **lei de composição externa***

$$\begin{aligned} \odot : K \times E &\quad\to\quad E \\ (\lambda, \hat{u}) &\rightsquigarrow \quad \lambda \odot \hat{u}. \end{aligned}$$

*Dizemos que E é um **espaço vetorial** (e.v.) ou espaço linear quando se verificam os seguintes axiomas:*

(A_1) $\forall \hat{f}, \hat{g}, \hat{h} \in E \qquad \hat{f} \oplus (\hat{g} \oplus \hat{h}) = (\hat{f} \oplus \hat{g}) \oplus \hat{h}$

(A_2) $\forall \hat{f}, \hat{g} \in E \qquad \hat{f} \oplus \hat{g} = \hat{g} \oplus \hat{f}$

(A_3) $\exists \hat{0} \in E$ *tal que* $\forall \hat{f} \in E \qquad \hat{f} \oplus \hat{0} = \hat{f}$;

(A_4) $\forall \hat{f} \in E \qquad \exists -\hat{f} \in E$ *tal que* $\hat{f} \oplus (-\hat{f}) = \hat{0}$;

(A_5) $\forall \lambda \in K$ *e* $\forall \hat{f}, \hat{h} \in E \qquad \lambda \odot (\hat{f} \oplus \hat{h}) = (\lambda \odot \hat{f}) \oplus (\lambda \odot \hat{h})$;

(A_6) *$\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall \hat{f} \in E$* $\quad (\lambda + \mu) \odot \hat{f} = (\lambda \odot \hat{f}) \oplus (\mu \odot \hat{f})$;

(A_7) *$\forall \lambda, \mu \in K$ e $\forall \hat{f} \in E$* $\quad \lambda \odot (\mu \odot \hat{f}) = (\lambda * \mu) \odot \hat{f}$;

(A_8) *$\forall \hat{f} \in E$, se 1 é o elemento unidade de K, então $1 \odot \hat{f} = \hat{f}$.*

Em resumo, podemos dizer que E é um espaço vetorial se a estrutura $\langle E, \oplus \rangle$ é um grupo comutativo, K é um corpo e são verificados os axiomas (A_5), (A_6), (A_7) e (A_8). Um espaço vetorial sobre o corpo dos número reais diz-se um espaço vetorial real e diz-se um espaço vetorial complexo quando é sobre o corpo dos números complexos.

Definição 1.5. *Seja S uma parte não vazia do e.v. $\mathcal{V}$ sobre o corpo K e seja $\hat{u} \in \mathcal{V}$, dizemos que $\hat{u}$ é **combinação linear** de elementos de S se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ e vetores $\hat{u}_1, \dots \hat{u}_n \in S$ tais que $\hat{u} = \alpha_1 \hat{u}_1 + \cdots + \alpha_n \hat{u}_n$.*

Teorema 1.1. *Num e. v. E o elemento neutro $\hat{0}$ é único.*

Demonstração. Vamos fazer a prova por redução ao absurdo. Suponhamos que existem dois elementos neutros $\hat{0}_1$ e $\hat{0}_2$ distintos.

- Por (A_3) $\forall \hat{x} \in E \quad \hat{x} \oplus \hat{0}_1 = \hat{x}$ (dado que $\hat{0}_1$ é elemento neutro). Em particular tem-se
$$\hat{0}_2 \oplus \hat{0}_1 = \hat{0}_2. \tag{1.1}$$
Da mesma forma $\forall \hat{y} \in E \quad \hat{y} \oplus \hat{0}_2 = \hat{y}$ (dado que $\hat{0}_2$ é elemento neutro). Logo, em particular,
$$\hat{0}_1 \oplus \hat{0}_2 = \hat{0}_1. \tag{1.2}$$
- Por (A_2) $\hat{0}_2 \oplus \hat{0}_1 = \hat{0}_1 \oplus \hat{0}_2$ e esta igualdade, juntamente com (1.1) e (1.2), implica $\hat{0}_1 = \hat{0}_2$, o que contraria a hipótese.

A contradição obtida resultou de termos suposto que E admitia dois elementos neutros distintos, pelo que existe só um. □

Teorema 1.2. *Num e.v. E cada vetor $\hat{x} \in E$ possui um único simétrico.*

Demonstração. Sejam $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$ os simétricos de um vetor $\hat{x} \in E$. Então

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \oplus \hat{x} = \hat{0} \quad \Rightarrow \quad & (\hat{x}_1 \oplus \hat{x}) \oplus \hat{x}_2 = \hat{0} + \hat{x}_2 = \hat{x}_2 \\ & \hat{x}_1 \oplus (\hat{x} \oplus \hat{x}_2) = \hat{x}_1 + \hat{0} = \hat{x}_1. \end{aligned}$$

No entanto, por (A_1), $\hat{x}_1 \oplus (\hat{x} \oplus \hat{x}_2) = (\hat{x}_1 \oplus \hat{x}) \oplus \hat{x}_2$. Logo, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$. □

Notação: O simétrico de qualquer vetor $\hat{x} \in E$ é denotado por $-\hat{x}$. De agora em diante, passamos a denotar a operação $\oplus$ simplesmente por $+$, fazendo-se a distinção da operação no corpo K de acordo com o contexto e os objetos envolvidos. Se escrevermos $\hat{x} - \hat{y}$ isso significa $\hat{x} + (-\hat{y})$. A operação de multiplicação de um escalar por um vetor $\lambda \odot \hat{x}$ também se identifica simplesmente por $\lambda \hat{x}$.

Teorema 1.3. *Num e.v.* $\mathcal{V}$, $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{V}$ *e* $\forall \lambda, \mu \in K$ *(onde* K *denota um corpo arbitrário), verificam-se as seguintes propriedades:*

1. $0\hat{x} = \hat{0}$;
2. $\lambda\hat{0} = \hat{0}$;
3. $-(\lambda\hat{x}) = (-\lambda)\hat{x} = \lambda(-\hat{x})$;
4. $\lambda\hat{x} = \hat{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ou* $\hat{x} = \hat{0}$;
5. $\lambda\hat{x} = \lambda\hat{y}$ *e* $\lambda \neq 0 \;\Rightarrow\; \hat{x} = \hat{y}$;
6. $\lambda\hat{x} = \mu\hat{x}$ *e* $\hat{x} \neq \hat{0} \;\Rightarrow\; \lambda = \mu$;
7. $-(\hat{x} + \hat{y}) = (-\hat{x}) + (-\hat{y})$.

Demonstração. Vamos provar cada um dos itens.

1. $0\hat{x} = (0+0)\hat{x} = 0\hat{x} + 0\hat{x}$ (tendo em conta (A_6)). Por (A_4) $\exists - 0\hat{x}$: $0\hat{x} + (-0\hat{x}) = \hat{0}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\hat{0} &= (0\hat{x}) + (-0\hat{x}) \\
&= (0\hat{x} + 0\hat{x}) + (-0\hat{x})) \\
&= 0\hat{x} + (0\hat{x} + (-0\hat{x})) \\
&= 0\hat{x} + \hat{0} \\
&= 0\hat{x} \text{ (tendo em conta } (A_3)).
\end{aligned}$$

2. $\lambda\hat{0} = \lambda(\hat{0}+\hat{0}) = \lambda\hat{0}+\lambda\hat{0}$ (tendo em conta (A_3) e (A_5)). Adicionando $-(\lambda\hat{0})$ a ambos os lados da igualdade (por aplicação de (A_1) e (A_4)) vem

$$\lambda\hat{0} + (-(\lambda\hat{0})) = (\lambda\hat{0} + \lambda\hat{0}) + (-\lambda\hat{0}) = \lambda\hat{0} + (\lambda\hat{0} - \lambda\hat{0}) = \lambda\hat{0} + \hat{0}.$$

Logo, por (A_3), $\hat{0} = \lambda\hat{0} + \hat{0} = \lambda\hat{0}$ e, consequentemente, $\lambda\hat{0} = \hat{0}$.

3. Vamos primeiramente provar a igualdade (i): $-(\lambda\hat{x}) = (-\lambda)\hat{x}$. Com efeito, de acordo com (A_6),
$\lambda\hat{x} + (-\lambda)\hat{x} = (\lambda - \lambda)\hat{x} = 0\hat{x} = \hat{0}$ (note-se que a última igualdade decorre de 1). Assim, $(-\lambda)\hat{x} = -\lambda\hat{x}$, ou seja, $(-\lambda)\hat{x}$ é o simétrico de $\lambda\hat{x}$ (devendo observar-se que de acordo com o Teorema 1.2 o simétrico é único). Desta forma, fica provada a igualdade (i).

Vamos provar a igualdade (ii): $-(\lambda\hat{x}) = \lambda(-\hat{x})$. Com efeito aplicando (A_5) e (A_4), obtém-se

$$\lambda(-\hat{x}) + \lambda\hat{x} = \lambda(\hat{x} + (-\hat{x})) = \lambda\hat{0} = \hat{0}.$$

A última igualdade obtém-se de 2. Logo, tal como anteriormente, pela unicidade do simétrico, vem que $\lambda(-\hat{x}) = -\lambda\hat{x}$.

4. Pretendemos demonstrar as implicações:

$$\lambda\hat{x} = \hat{0} \text{ e } \lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \hat{0}; \tag{1.3}$$

$$\lambda\hat{x} = \hat{0} \text{ e } \hat{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0. \tag{1.4}$$

   Com efeito, $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in K$, pelo que $\lambda^{-1}(\lambda\hat{x}) = \lambda^{-1}\hat{0}$ e por (A_7) esta igualdade é equivalente a $(\lambda^{-1}\lambda)\hat{x} = \lambda^{-1}\hat{0} \Leftrightarrow 1.\hat{x} = \hat{0}$ e como por (A_8) $1.\hat{x} = \hat{x}$ conclui-se que $\hat{x} = \hat{0}$, completando-se assim a prova de (1.3).
   Vamos provar (1.4), assumindo que a hipótese $\lambda\hat{x} = \hat{0}$ e $\hat{x} \neq 0$ se verifica e que, apesar disso, se tem $\lambda \neq 0$. Porém, por (1.3), conclui-se que $\hat{x} = \hat{0}$, o que contraria a hipótese. Logo, $\lambda = 0$.

5. $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \in K$ pelo que

$$\begin{aligned} \lambda\hat{x} = \lambda\hat{y} \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda^{-1}(\lambda\hat{x}) = \lambda^{-1}(\lambda\hat{y}) \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda^{-1}\lambda)\hat{x} = (\lambda^{-1}\lambda)\hat{y} \text{ por } (A_7) \\ &\Leftrightarrow \quad 1\hat{x} = 1\hat{y} \\ &\Leftrightarrow \quad \hat{x} = \hat{y} \text{ por } (A_8). \end{aligned}$$

6. Tendo em conta (A_4), $\lambda\hat{x} = \mu\hat{x} \Rightarrow \lambda\hat{x} + (-\mu\hat{x})) = \hat{0}$ e, de acordo com (A_6), esta igualdade é equivalente à igualdade $(\lambda - \mu)\hat{x} = \hat{0}$. Dado que $\hat{x} \neq \hat{0}$ (de acordo com (4)) $\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$.

7. $(\hat{x} + \hat{y}) + ((-\hat{x}) + (-\hat{y})) = (\hat{y} + \hat{x}) + ((-\hat{x}) + (-\hat{y}))$ (de acordo com (A_2)). Consequentemente, vem que

$$\begin{aligned} (\hat{y} + \hat{x}) + ((-\hat{x}) + (-\hat{y})) \quad &= \quad \hat{y} + ((\hat{x} + (-\hat{x})) + (-\hat{y})) \text{ de acordo com } (A_1) \\ &= \quad \hat{y} + (\hat{0} + (-\hat{y})) \text{ de acordo com } (A_4) \\ &= \quad \hat{y} + (-\hat{y}) \text{ de acordo com } (A_3) \\ &= \quad \hat{0} \text{ de acordo com } (A_4). \end{aligned}$$

   Logo, pela unicidade do simétrico de $(\hat{x} + \hat{y})$ vem que $-(\hat{x} + \hat{y}) = (-\hat{x}) + (-\hat{y})$.

□

1.3 Espaços vetoriais reais

Definição 1.6. *Designa-se por n-**uplo** toda a sequência de monodimensional de n elementos que designamos por componentes.*

Um n-uplo real é uma sequência monodimensional de números reais $(x_1, \ldots, x_n)$. A designação monodimensional advém do facto das várias componentes poderem ser identificadas com um único índice. Um n-uplo tanto pode representar um ponto do espaço n-dimensional como um vetor de um dado e.v.

Exemplos

1. Para $n=2$, os pontos de $\mathbb{R}^2$ são representados pelos pares ordenados (α,β) em que α e β são as coordenadas do ponto a representar relativamente a um determinado referencial.

2. Para $n=3$, os pontos de $\mathbb{R}^3$ são representados pelos triplos ordenados (α,β,γ), onde as coordenadas α, β e γ identificam o ponto a representar num dado sistema de eixos coordenados.

3. Podemos imaginar um conjunto de pontos com n coordenadas $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ onde cada coordenada se refere a um determinado "eixo" do sistema considerado.

4. Podemos considerar ainda o conjunto de n-uplos reais, i.e, o conjunto de todas as sequências monodimensionais de n números reais e nele definir uma operação aditiva $\oplus$ tal que

$$(x_1,\ldots,x_n)\oplus(y_1,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

e o produto por um escalar $\odot$ tal que

$$\lambda\odot(x_1,\ldots,x_n)=(\lambda\cdot x_1,\ldots,\lambda\cdot x_n),$$

com $\lambda\in\mathbb{R}$ e onde $+$ denota a adição definida nos reais e $\cdot$ o respectivo produto. Verifica-se facilmente que este conjunto munido destas operações é um e.v. real.

1.4 Subespaços vetoriais

Definição 1.7. *Dado um e.v. $\mathcal{V}$, uma sua parte não vazia S diz-se um **subespaço** vetorial de $\mathcal{V}$ se, por sua vez, S é um e.v. relativamente às operações induzidas nele como parte de $\mathcal{V}$.*

Teorema 1.4. *Dado um espaço vetorial $\mathcal{V}$, um conjunto não vazio $S\subseteq\mathcal{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se e somente se S é fechado relativamente às operações de adição e multiplicação por um escalar nele definidas como parte de $\mathcal{V}$, ou seja,*

$$\forall \hat{x},\hat{y}\in S \qquad \hat{x}+\hat{y}\in S \tag{1.5}$$

$$\forall \lambda\in\mathbb{R}\ e\ \forall\hat{x}\in S \qquad \lambda\hat{x}\in S \tag{1.6}$$

Demonstração. Se S é um e.v. de $\mathcal{V}$, então é claro que por definição S é fechado para as operações referidas em (1.5) e (1.6).
Suponhamos que as condições (1.5) e (1.6) se verificam. Atendendo a que envolvendo apenas elementos de S, as operações também têm lugar em $\mathcal{V}$, conclui-se que os axiomas $(A_5),(A_6),(A_7)$ e (A_8) se verificam. Assim, resta provar que $\langle S,+\rangle$ é um grupo comutativo.

(A_1) $\forall \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in S$ por (1.5) $\hat{x}+\hat{y} \in S$. Logo $(\hat{x}+\hat{y})+\hat{z} \in S$. Dado que $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathcal{V}$, vem que $(\hat{x}+\hat{y})+\hat{z} = \hat{x}+(\hat{y}+\hat{z})$.

(A_2) $\forall \hat{x}, \hat{y} \in S$ por (1.5) verifica-se que $\hat{x}+\hat{y}, \hat{y}+\hat{x} \in S$. Adicionalmente, $\hat{x}, \hat{y} \in S \Rightarrow \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{V} \Rightarrow \hat{x}+\hat{y} = \hat{y}+\hat{x}$.

(A_3) Por (1.6) e a propriedade 1 do Teorema 1.3, $\forall \hat{x} \in S \;\; 0\hat{x} = \hat{0} \in S$. Logo, $\forall \hat{x} \in S \;\; \hat{x}+\hat{0} = \hat{x}$.

(A_4) $\forall \hat{x} \in S$, por (1.6) $(-1)\hat{x} \in S$ e pela propriedade 3 do Teorema 1.3 (tendo em conta (A_8)) $(-1)\hat{x} = -(1\hat{x}) = -\hat{x}$. Consequentemente, $\forall \hat{x} \in S \;\; \exists -\hat{x} \in S$ tal que $\hat{x}+(-\hat{x}) = \hat{0}$.

Fica assim provado que $\langle S; +\rangle$ é um grupo comutativo o que completa a prova do teorema. $\square$

Sendo S uma parte não vazia de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre um corpo K, vamos denotar por $\mathcal{L}(S)$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de S, ou seja,

$$\mathcal{L}(S) = \{\sum_{\hat{x} \in S} \lambda_{\hat{x}} \hat{x} : \lambda_{\hat{x}} \in K\}. \tag{1.7}$$

Em particular, sendo $S = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subset V$,

$$\mathcal{L}(S) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \in K, i = 1, \ldots, n\}.$$

Também se utiliza $\langle S\rangle$ para denotar $\mathcal{L}(S)$.

Usualmente, estende-se o conceito de $\mathcal{L}(S)$ ao caso em que $S = \emptyset$ definindo-se, por conveniência, $\mathcal{L}(\emptyset) = \{\hat{0}\}$.

Teorema 1.5. *Sendo S uma parte de um e.v. $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(S)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.*

Provar este teorema como exercício.

Os elementos de S designam-se por **elementos geradores** de $\mathcal{L}(S)$. Deve observar-se que em (1.7) uma combinação linear de elementos de S envolve sempre um número finito de escalares não nulos.

Exemplo 1.1. *O subespaço vetorial do espaço vetorial dos polinómios $\mathcal{P}(x)$ com coeficientes reais de grau não superior a n pode considerar-se gerado por:*

1. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$;
2. $\{1, 1+x, (1+x)^2, \ldots, (1+x)^n\}$;
3. $\{2, 3x, 4x^2, \ldots, (n+2)x^n\}$.

1.5 Dependência e independência linear

Definição 1.8. *Uma parte S de um e.v. $\mathcal{V}$ diz-se* ***linearmente dependente*** *se é possível exprimir o vetor nulo $\hat{0}$ (elemento neutro de $\mathcal{V}$) como combinação linear não nula de elementos de S. Por sua vez, dizemos que S é* ***linearmente independente*** *quando não é linearmente dependente.*

De modo equivalente a esta definição, podemos dizer que $S \subset \mathcal{V}$ é um conjunto linearmente dependente se $\exists \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k \in S$ e $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{u}_i = \hat{0}$. Por sua vez, S é linearmente independente se $\forall \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k \in S \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \hat{u}_i = \hat{0} \Rightarrow \lambda_i = 0,$ para $i = 1, \ldots, k$.

Exemplo 1.2. *Sejam $S = \{1, x, \ldots, x^5\}$ e $L = \{1, x, x^2, 1+x, 1+x^2\}$. Enquanto S é um conjunto linearmente independente do e.v. dos polinómios reais de grau $n \geq 5$, L é um conjunto linearmente dependente do e.v. dos polinómios reais de grau $n \geq 2$.*

Relativamente às propriedades de dependência e independência linear num e. v. podemos destacar as seguintes:

1. Um e.v. $\mathcal{V}$ é sempre linearmente dependente.

2. O conjunto vazio $\emptyset$ é linearmente independente.

3. Se S é uma parte de um e.v. $\mathcal{V}$ e S é linearmente dependente, então qualquer parte T do e.v. que contenha S ($T \supseteq S$) é também linearmente dependente.

4. Se uma parte S de um e.v. $\mathcal{V}$ é linearmente independente, o mesmo sucede a qualquer parte de S.

5. Se uma parte S de um e.v. $\mathcal{V}$ contém um elemento $\hat{x}$ e um seu múltiplo escalar $\lambda\hat{x}$, com $\lambda \neq 1$, então S é linearmente dependente.

Com o intuito de demonstrarmos um teorema a apresentar mais adiante, vamos introduzir algumas noções sobre sistemas de equações lineares.

Definição 1.9. *Designa-se por* ***sistema*** *de m* ***equações lineares*** *a n incógnitas com coeficientes reais, o conjunto de de equações:*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & + & \cdots & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \;\; \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

No caso particular dos termos independentes ($b_i, i = 1, \ldots, m$) serem todos nulos, dizemos que se trata de um sistema **homogéneo**.

Os sistemas homogéneos tem a particularidade de admitir sempre uma solução, a solução trivial, ou seja, a solução nula ($x_1 = \cdots = x_n = 0$), embora possam também admitir soluções distintas da trivial.

Teorema 1.6. *Todo o sistema homogéneo de m equações com coeficientes reais a n incógnitas em que $n > m$ admite, pelo menos, uma solução distinta da trivial.*

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre o número de equações m.

- Seja $m = 1$, ou seja, o sistema reduz-se apenas à equação

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,$$

  com $n > 1$.

  - Se $a_{1j} = 0$, então x_1 pode tomar qualquer valor distinto de zero e, assim sendo, o teorema é válido.
  - Se $\exists a_{1j} \neq 0$, então

$$\begin{aligned} a_{ij}x_j &= -a_{11}x_1 - \cdots - a_{1j-1}x_{j-1} - a_{1j+1}x_{j+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ x_j &= -\frac{a_{11}}{a_{1j}}x_1 - \cdots - \frac{a_{1j-1}}{a_{1j}}x_{j-1} - \frac{a_{1j+1}}{a_{1j}}x_{j+1} - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{1j}}x_n \end{aligned}$$

    e, também neste caso, haverá soluções distintas da trivial.

- Suponhamos que o teorema é válido para sistemas com $k > 1$ equações a n incógnitas ($n > k$). Vamos provar que também é válido para sistemas com $k+1$ equações a n incógnitas ($n > k+1$). Considere-se o sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(k+1)1}x_1 & + & \cdots & + & a_{(k+1)n}x_n & = & 0 \end{array}$$

  Sem perda de generalidade, suponhamos que $a_{11} \neq 0$ (as equações podem ser reordenadas de forma que tal aconteça, caso contrário $a_{i1} = 0$, para $i = 1, \ldots, k+1$ e, nestas condições, x_1 pode tomar um valor arbitrário, pelo que o teorema é válido).
  Se na i-ésima equação $a_{i1} \neq 0$, então, adicionando a essa equação a 1^a multiplicada por $\frac{-a_{i1}}{a_{11}}$ o termo relativo a x_1 anula-se. Procedendo deste modo para as restantes equações (com excepção da primeira) o termo associado a x_1 anula-se em todas as equações distintas da primeira. Deste

modo, o sistema obtido é equivalente ao inicial e tem a forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & + & a'_{k+12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{k+1n}x_n & = & 0 \end{array}$$

Dado que $x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$ e como os sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{k+12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{k+1n}x_n & = & 0 \end{array}$$

tem k equações a $n-1$ incógnitas, com $n-1 > k$, por hipótese de indução, admite soluções distintas da trivial e, consequentemente, o sistema inicial também admite uma solução não trivial.

□

Teorema 1.7. *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e suponhamos que $X = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\} \subset \mathcal{V}$ é linearmente independente. Então toda a parte $Y = \{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}\} \subset \mathcal{L}(X)$ que inclui $n+1$ vetores é linearmente dependente.*

Demonstração. Dado que $\hat{y}_j \in \mathcal{L}(X)$, para $j = 1, \ldots, n, n+1$, vem que $\hat{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_i$, para $j = 1, \ldots, n, n+1$. Vamos determinar os escalares α_j que satisfazem a equação

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \hat{y}_j = \hat{0}, \tag{1.8}$$

ou seja, $\alpha_1 (a_{11}\hat{x}_1 + \cdots + a_{n1}\hat{x}_n) + \cdots + \alpha_{n+1}\left(a_{1(n+1)}\hat{x}_1 + \cdots + a_{n(n+1)}\hat{x}_n\right)$, ou ainda,

$$\left(\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_{n+1}a_{1(n+1)}\right)\hat{x}_1 + \cdots + \left(\alpha_1 a_{n1} + \cdots + \alpha_{n+1}a_{n(n+1)}\right)\hat{x}_n = \hat{0}.$$

Uma vez que os vetores $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n$ são linearmente independentes, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{1(n+1)}\alpha_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{n(n+1)}\alpha_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

Temos assim um sistema homogéneo de n equações a $n+1$ incógnitas $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ que admite soluções distintas da trivial, ou seja, $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \neq (0, \ldots, 0)$ que satisfazem o sistema de equações e por conseguinte a combinação linear (1.8), pelo que o conjunto Y é linearmente dependente. □

Teorema 1.8. *Dado um e.v. $\mathcal{V}$, se $X = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\} \subset \mathcal{V}$ é linearmente independente e $Y = \{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ é também linearmente independente, então $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X)$.*

Demonstração. É imediato concluir que

$$Y \subset \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(Y) \subseteq \mathcal{L}(X). \tag{1.9}$$

Seja $\hat{u} \in \mathcal{L}(X)$. Pelo Teorema 1.7 o conjunto $\{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n, \hat{u}\}$ é linearmente dependente, ou seja, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$, não todos nulos, tais que $\alpha_1 \hat{y}_1 + \cdots + \alpha_n \hat{y}_n + \alpha_{n+1} \hat{u} = 0$. Nestas condições, é claro que $\alpha_{n+1} \neq 0$ (caso contrário os vetores $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ seriam linearmente dependentes). Logo,

$$\hat{u} = \frac{1}{\alpha_{n+1}}(-\alpha_1 \hat{y}_1 - \cdots - \alpha_n \hat{y}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\alpha_i}{\alpha_n} \hat{y}_i \Rightarrow \hat{u} \in \mathcal{L}(Y),$$

de onde decorre a inclusão

$$\mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(Y). \tag{1.10}$$

Finalmente, de (1.9) e (1.10), conclui-se a iguladade $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$. □

1.6 Bases e dimensão de espaços vetoriais

Definição 1.10. *Um conjunto finito S de vetores de um e.v. $\mathcal{V}$ diz-se uma **base** de $\mathcal{V}$ se S é linearmente independente e $\mathcal{L}(S) = \mathcal{V}$.*

Definição 1.11. *Um e.v. $\mathcal{V}$ diz-se um espaço de **dimensão finita** se tem uma base finita. Se $\mathcal{V} \neq \{\hat{0}\}$ e não tem uma base finita, diz-se que $\mathcal{V}$ tem **dimensão infinita**.*

Exemplo 1.3. *Seguem-se alguns exemplos de e.v. de dimensão finita e infinita.*

1. *O e.v. dos polinómios reais cujo grau não excede n é um e.v. de dimensão finita.*
2. *O e.v. dos polinómios reais é um e.v. de dimensão infinita.*
3. *O e.v. das funções reais é de dimensão infinita.*

Teorema 1.9. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. de dimensão finita. Então cada base finita de $\mathcal{V}$ tem o mesmo número de vetores.*

Demonstração. Sejam $\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$ e $\{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m\}$ duas bases de $\mathcal{V}$. Logo, $\mathcal{V} = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$. De acordo com o Teorema 1.7, $m \leq n$ e $n \leq m$. Logo, $m = n$. □

Definição 1.12. *Um e.v. $\mathcal{V} \neq \{\hat{0}\}$ de dimensão finita que aceita uma base com $n \in \mathbb{N}$ elementos diz-se de **dimensão** n. Se $\mathcal{V} = \{\hat{0}\}$, convenciona-se que a sua dimensão é 0.*

A dimensão de um e.v. $\mathcal{V}$ denota-se por $\dim(\mathcal{V})$.

Exemplo 1.4. *Alguns espaços vetoriais com diferentes dimensões.*

1. *Os e.v.* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ *e* $\mathcal{V}_k$*, cujos elementos são os* n*-uplos de escalares com* $n = 1, 2, 3, k$*, têm dimensão* $1, 2, 3$ *e* k*.*

2. *O e.v. dos polinómios reais cujo grau não excede* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *tem dimensão* $n + 1$*, dados que o conjunto de monómios* $\{1, x, \ldots, x^n\}$ *é linearmente independente e gera esse espaço vetorial.*

Teorema 1.10. *Seja* $\mathcal{V}$ *um e.v. de dimensão finita, ou seja, dim*$(\mathcal{V}) = n \in \mathbb{N}$*, então*

1. *Cada parte linearmente independente* S *de* $\mathcal{V}$ *é parte de uma sua base.*

2. *Toda a parte linearmente independente de* $\mathcal{V}$ *constituída por* n *vetores é uma sua base.*

Demonstração. Vamos provar cada um dos itens.

1. Seja $S_k = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k\} \subset \mathcal{V}$ tal que S_k é linearmente independente. Se $\mathcal{L}(S_k) = \mathcal{V}$, então $k = n$ e S_k é uma base de $\mathcal{V}$. Se $\mathcal{L}(S_k) \subset \mathcal{V}$, então $\exists \hat{x}_{k+1} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{L}(S_k)$. Considerando o conjunto $S_{k+1} = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}\}$ é claro que S_{k+1} é linearmente independente. Se $\mathcal{L}(S_{k+1}) = \mathcal{V}$, então S_{k+1} é uma base de $\mathcal{V}$, caso contrário o procedimento repete-se, até se completar uma base de $\mathcal{V}$.

2. Seja $X = \{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e seja $Y = \{\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n\}$ um conjunto linearmente independent de n vetores de $\mathcal{V}$. Pelo Teorema 1.8, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(Y)$ e como $\mathcal{L}(X) = \mathcal{V}$, vem que $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{V}$, o que prova que Y é uma base de $\mathcal{Y}$.

□

1.7 Bases ordenadas

Definição 1.13. *Seja* $\mathcal{V}$ *um e.v. de dimensão finita* $n \in \mathbb{N}$ *e para* $1 \leq i_j \leq n$ *seja* $\{\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_n}\}$ *uma sua base. Ordenando os vetores da base, obtém-se uma* ***base ordenada****, por exemplo,* $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$*.*

Seja $\hat{x}$ um vetor de um e.v. $\mathcal{V}$ de dimensão finita onde se adopta a base ordenada $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$. Exprimindo $\hat{x}$ como combinação linear desta base ordenada obtém-se:

$$\hat{x} = \lambda_1 \hat{e}_1 + \cdots + \lambda_n \hat{e}_n. \tag{1.11}$$

Então, os coeficientes de (1.11) constituem o n-uplo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ que é univocamente determinado. Com efeito, admitindo que $\hat{x}$ se pode exprimir pela combinação linear dos vetores da base ordenada $\mathcal{B}$ da forma:

$$\hat{x} = \mu_1 \hat{e}_1 + \cdots + \mu_n \hat{e}_n, \tag{1.12}$$

de (1.11) e (1.12) obtém-se

$$\lambda_1\hat{e}_1 + \cdots + \lambda_n\hat{e}_n = \mu_1\hat{e}_1 + \cdots + \mu_n\hat{e}_n \Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1)\hat{e}_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)\hat{e}_n = \hat{0}.$$

Uma vez que os vetores $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ são linearmente independentes, vem que $\lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \cdots = \lambda_n - \mu_n = 0$, ou seja, $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_n = \mu_n$.

Definição 1.14. *O n-uplo $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ univocamente determinado para cada vetor $\hat{x} \in \mathcal{V}$ pela condição* (1.11) *designa-se por n-uplo das componentes de $\hat{x}$ na base ordenada $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ e cada um dos escalares $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, diz-se a componente de ordem i de $\hat{x}$ na base ordenada $\mathcal{B}$.*

Assim, podemos escrever $\hat{x} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)_{\mathcal{B}}$, o que significa que o vetor $\hat{x}$ do e.v. $\mathcal{V}$ tem $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ como n-uplo das suas componentes na base ordenada $\mathcal{B}$. No caso de não haver dúvidas quanto à base ordenada adotada em $\mathcal{V}$, podemos escrever simplesmente $\hat{x} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Definição 1.15. *Dado um e.v. $\mathcal{V}$ n-dimensional, designa-se por **base canónica** de $\mathcal{V}$ a base ordenada $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ em que*

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0),\\
\hat{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0),\\
&\vdots\\
\hat{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

1.8 Intersecção, união e soma de subespaços vetoriais

Definição 1.16. *Sendo $\mathcal{V}$ um e.v. e sendo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$, define-se a intersecção dos subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, e denota-se por $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, como sendo o subconjunto de $\mathcal{V}$ dado por*

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\hat{u} \in \mathcal{V} : \hat{u} \in \mathcal{F} \wedge \hat{u} \in \mathcal{G}\}.$$

Teorema 1.11. *Dados dois subespaços vetoriais $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre um corpo K, $\mathcal{G} \cap \mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Sendo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$, é claro que o vetor nulo, $\hat{0}$, de $\mathcal{V}$ é também o vetor nulo de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e, consequentemente, $\hat{0} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Por outro lado,

- Sejam $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Então

  $$\begin{aligned}
  \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{F} &\Rightarrow \hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{F}\\
  \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{G} &\Rightarrow \hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{G},
  \end{aligned}$$

  ou seja, $\hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

- Seja $\hat{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ e $\lambda \in K$. Então

$$\begin{aligned} \hat{u} \in \mathcal{F} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\hat{u} \in \mathcal{F} \\ \hat{u} \in \mathcal{G} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\hat{u} \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

  ou seja, $\lambda\hat{u} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Assim, conclui-se que o conjunto não vazio de vetores $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ é fechado relativamente à soma e multiplicação de vetores por escalares definidas em $\mathcal{V}$, pelo que é um subespaço vetorial. □

Definição 1.17. *Sendo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços vetoriais de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre um corpo K, define-se a união dos subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, e denota-se por $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, como sendo o subconjunto de $\mathcal{V}$ dado por*

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\hat{u} \in \mathcal{V} : \hat{u} \in \mathcal{F} \vee \hat{u} \in \mathcal{G}\}.$$

Teorema 1.12. *Dados dois subespaços vetoriais $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre um corpo K, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ se e só se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.*

Demonstração. Vamos fazer a prova em cada um dos sentidos.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$. Vamos provar que (i) $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ e (ii)$\mathcal{G} \nsubseteq \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

(i) Uma vez que $\mathcal{F} \nsubseteq \mathcal{G}$, então $\exists \hat{u} \in \mathcal{F}$ tal que $\hat{u} \notin \mathcal{G}$ (observe-se que $\hat{u} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$).
Seja $\hat{v} \in \mathcal{G}$, então $\hat{v} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Logo, uma vez que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é subespaço vetorial,

$$\hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G},$$

ou seja, $\hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{F}$ ou $\hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{G}$. Porém, $\hat{u} + \hat{v} \notin \mathcal{G}$ (caso contrário, tendo em conta que $\hat{v} \in \mathcal{G} \Rightarrow -\hat{v} \in \mathcal{G}$ ter-se-ia $(\hat{u} + \hat{v}) + (-\hat{v}) = \hat{u} \in \mathcal{G}$, o que é contraditório). Assim, $\hat{u} + \hat{v} \in \mathcal{F}$ e, consequentemente, $(-\hat{u}) + (\hat{u} + \hat{v}) = \hat{v} \in \mathcal{F}$ o que implica que se tenha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, conforme se pretendia provar (note-se que se partiu de um vetor arbitrário $\hat{v} \in \mathcal{G}$ e concluiu-se que $\hat{v} \in \mathcal{F}$).

(ii) De modo idêntico se prova que se $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ e $\mathcal{G} \nsubseteq \mathcal{F}$, então $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$).

($\Leftarrow$) Neste sentido a prova é imediata. Com efeito, se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ($\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$), então $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \mathcal{G}$ ($\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \mathcal{F}$) e como tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{G}$ são subespaços vetoriais, concluimos o que se pretende.

□

Definição 1.18. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços de um e.v. $\mathcal{V}$. Designa-se por soma dos subespaços $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e denota-se por $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ o conjunto de vetores*

$$\mathcal{F}+\mathcal{G}=\{\hat{u}+\hat{v} : \hat{u}\in\mathcal{F}\wedge\hat{v}\in\mathcal{G}\}.$$

Esta soma diz-se uma soma direta e denota-se por $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$, se para todo o vetor $\hat{w}\in\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$ existe um único vetor $\hat{u}\in\mathcal{F}$ e um único vetor $\hat{v}\in\mathcal{G}$ tais que $\hat{w}=\hat{u}+\hat{v}$. Nestas condições dizemos que o vetor $\hat{u}$ é a projecção de $\hat{w}$ sobre $\mathcal{F}$, segundo $\mathcal{G}$, e que o vetor $\hat{v}$ é a projecção de $\hat{w}$ sobre G, segundo $\mathcal{F}$.

É imediato concluir que a soma de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial (fazer a prova como exercício). Quando $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}=\mathcal{V}$ dizemos que $\mathcal{V}$ é soma direta dos subespaços vetoriais $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.

Teorema 1.13. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre o corpo K. Então $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ é uma soma direta $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$ se e só se $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\{\hat{0}\}$, onde $\hat{0}$ é o vetor nulo do e.v. $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\{\hat{0}\}$ e sejam $\hat{x},\hat{y}\in\mathcal{F}$ e $\hat{u},\hat{v}\in\mathcal{G}$, tais que $\hat{w}=\hat{x}+\hat{u}=\hat{y}+\hat{v}\neq\hat{0}$. Então $\hat{0}=(\hat{x}-\hat{y})+(\hat{u}-\hat{v})$ e, consequentemente,

- $-(\hat{x}-\hat{y})=(\hat{u}-\hat{v})\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, o que implica $\hat{u}=\hat{v}$;
- $-(\hat{u}-\hat{v})=(\hat{x}-\hat{y})\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$, o que implica $\hat{x}=\hat{y}$.

Assim, concluímos que $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ é soma direta.
Reciprocamente, suponhamos que $\exists\hat{x}\in\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\setminus\{\hat{0}\}$ e considere-se um vetor não nulo $\hat{w}=\hat{u}+\hat{v}$, com $\hat{u}\in\mathcal{F}$ e $\hat{v}\in\mathcal{G}$. Então $\forall\lambda\in K$

$$\hat{w}=(\hat{u}+\lambda\hat{x})+(\hat{v}-\lambda\hat{x}),$$

com $\hat{u}+\lambda\hat{x}\in\mathcal{F}$ e $\hat{v}-\lambda\hat{x}\in\mathcal{G}$. Logo, não existe unicidade na escolha dos vetores de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, pelo que $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ não é soma direta. □

Definição 1.19. *Seja $\mathcal{F}$ um subespaço de um e.v. $\mathcal{V}$ sobre o corpo K. Um subespaço vetorial $\mathcal{F}^*$ de $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}=\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}^*$ designa-se por subespaço complementar de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{V}$.*

Vamos terminar este capítulo com um resultado que se designa por teorema das dimensões que se apresenta sem demonstração, a qual, no entanto, se pode consultar em qualquer das referências bibliográficas.

Teorema 1.14. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ subespaços de um e.v. $\mathcal{V}$ de dimensão finita sobre o corpo K. Então*

$$dim(\mathcal{F}+\mathcal{G})=dim(\mathcal{F})+dim(\mathcal{G})-dim(\mathcal{F}\cap\mathcal{G}). \tag{1.13}$$

Demonstração. Vamos considerar dois casos: (i) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\{\hat{0}\}$ e (ii) $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\{\hat{0}\}$

(i) Se $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\{\hat{0}\}$ é imediato concluir que a igualdade (1.13) se verifica.

(ii) Suponhamos que $\mathcal{F}\cap\mathcal{G} \neq \{\hat{0}\}$ é um subespaço vetorial de dimensão k (com $k \geq 1$) e seja $\mathcal{B}_{\mathcal{F}\cap\mathcal{G}} = \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k\}$ uma sua base. Então esta base pode ser completada para se obter uma base $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p\}$ para $\mathcal{F}$ e também para se obter uma base $\mathcal{B}_{\mathcal{G}} = \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_q\}$ para $\mathcal{G}$. Primeiro vamos provar que

$$\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_q\},$$

é uma base para o e.v. $\mathcal{F} + \mathcal{G}$. Uma vez que é imediato concluir que $\mathcal{B}$ é um conjunto de geradores de $\mathcal{F} + \mathcal{G}$, resta provar que é linearmente independente. Com efeito, considerando a combinação linear

$$\lambda_1\hat{e}_1 + \cdots + \lambda_k\hat{e}_k + \gamma_1\hat{f}_1 + \cdots + \gamma_p\hat{f} + \delta_1\hat{g}_1 + \cdots + \delta_q\hat{g}_q = \hat{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1\hat{e}_1 + \cdots + \lambda_k\hat{e}_k + \gamma_1\hat{f}_1 + \cdots + \gamma_p\hat{f} = -\delta_1\hat{g}_1 + \cdots + \delta_q\hat{g}_q,$$

conclui-se que $-\delta_1\hat{g}_1 + \cdots + \delta_q\hat{g}_q \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{B}_{\mathcal{G}})$. Consequentemente, existem escalares $\beta_1, \dots, \beta_k$ tais que

$$-\delta_1\hat{g}_1 + \cdots + \delta_q\hat{g}_q = \beta_1\hat{e}_1 + \cdots + \beta_k\hat{e}_k.$$

Esta igualdade implica que se tenha $\delta_1 = \cdots = \delta_q = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$, uma vez que $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ é uma base do subespaço vetorial $\mathcal{G}$. De igual modo se conclui que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$. Assim, decorre que $\mathcal{B}$ é um conjunto linearmente independente.
Uma vez que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ a igualdade (1.13) verifica-se.

$\square$

1.9 Exercícios

Exercício 1.1. *Seja $V = \mathbb{R}^+$ e defina-se soma de dois elementos $x, y \in \mathbb{R}^+$, como sendo o seu produto e defina-se o produto por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por um elemento $x \in \mathbb{R}^+$ como sendo x^λ. Prove que $\langle \mathbb{R}^+; +, . \rangle$ é um e.v. sobre $\mathbb{R}$.*

Exercício 1.2. *Seja $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$. Averigue se $\langle V; +, . \rangle$ é um e.v. quando as operações ali indicadas são definidas por:*

1. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ *e* $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$;
2. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$ *e* $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$;
3. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$ *e* $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$;
4. $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|)$ *e* $\lambda(x_1, x_2) = (|\lambda x_1|, |\lambda x_2|)$.

Exercício 1.3. *Prove que o conjunto $\{\hat{0}\}$ é um e.v. sobre o corpo dos reais relativamente às operações de adição e multiplicação habituais.*

Exercício 1.4. *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Mostre que $U \cap W$ é também um subespaço vetorial de V.*

Exercício 1.5. *Seja K um corpo arbitrário, X um subconjunto não vazio de K e seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as funções de X em K.*
A soma de duas quaisquer funções $f, g \in \mathcal{V}$ é a função definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e o produto de um escalar $\lambda \in K$ por uma função $\lambda f \in \mathcal{V}$ definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

1. *Prove que $\mathcal{V}$ com as operações indicadas é um e.v. sobre K.*
2. *Prove que o conjunto $W \subseteq \mathcal{V}$ das funções limitadas é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ (considere $K = \mathbb{R}$). Deve observar-se que uma função é limitada se existe $M \in \mathbb{R}^+ :\ \forall x \in X \ \ |f(x)| \leq M$.*

Exercício 1.6. *Averigue se são e.vs. os seguintes conjuntos dotados com as operações que usualmente se definem neles:*

1. *Conjunto das funções f reais de variável real tais que $f(0) = f(1)$;*
2. *Conjunto das funções f reais de variável real tais que $2f(0) = f(1)$;*
3. *Conjunto das funções f reais de variável real tais que $f(1) = 1 + f(0)$;*
4. *Conjunto das funções f reais de variável real tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;*
5. *Conjunto das funções pares;*
6. *Conjunto das funções impares;*
7. *Conjunto das funções limitadas;*
8. *Conjunto das funções monótonas crescentes;*
9. *Conjunto das funções f reais de variável real tais que $f(x) = f(1-x)$.*
10. *Conjunto dos triplos ordenados (x_1, x_2, x_3) de componentes reais tais que*
    (a) $x_3 = 0$;
    (b) $x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 0$;
    (c) $x_2 = 5x_1$;
    (d) $3x_1 + 4x_2 = 1 \ \vee x_3 = 0$;
    (e) *multiplos escalares de* $(1, 2, 3)$.

Exercício 1.7. *Prove o Teorema 1.5.*

Exercício 1.8. *Verifique se o conjunto $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ contido no e.v. das funções reais é linearmente dependente.*

Exercício 1.9. *Verifique se o conjunto $\{(1,0,1), (0,1,0)\}$ contido no e.v $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente.*

Exercício 1.10. *Seja S o conjuntos dos triplos de números reais (x, y, z). Verifique, para cada uma das condições a indicadas, se S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ e nos casos afirmativos determine a respectiva dimensão.*

1. $x = 0$;
2. $x + y = 0$;
3. $x + y + z = 0$;
4. $x = y$;
5. $x = y = z$;
6. $x = y$ *ou* $x = z$;
7. $x^2 = y^2$;
8. $x + y = 1$;
9. $y = 2x$ *e* $z = 3x$;
10. $x + y + z = 0$ *e* $x - y - z = 0$-

Exercício 1.11. *Sendo n um número natural, vamos denotar por $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinómios de coeficientes reais cujo grau não excede n. Verifique, para cada uma das alíneas, se S é um subespaço do espaço vetorial $\mathcal{P}_n$ e, nos casos afirmativos, determine a respectiva dimensão.*

1. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = 0\}$;
2. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p'(0) = 0\}$;
3. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p''(0) = 0\}$;
4. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) + p'(0) = 0\}$;
5. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = p(2)\}$;
6. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p \text{ é par }\}$;
7. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p \text{ é impar }\}$;
8. $S = \{p \in \mathcal{P}_n : p \text{ o grau não excede } k < n\}$;

Exercício 1.12. *No e.v. dos polinómios $p(t)$, identifique os subespaços vetoriais gerados pelos conjuntos a seguir indicados e as respectivas dimensões.*

1. $\{1, t, t^2, t^4\}$;
2. $\{c, t^3, t^5\}$, *onde c é uma constante;*
3. $\{t, t^2\}$;

4. $\{1+t, (1+t)^2\}$;

Exercício 1.13. *Sendo S uma parte não vazia de um e.v. $\mathcal{V}$, prove cada uma das seguintes afirmações:*

1. $S \subseteq \mathcal{L}(S)$;
2. *Se* $S \subseteq T \subseteq \mathcal{V}$ *e* T *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{V}$, *então* $\mathcal{L}(S) \subseteq T$;
3. *O conjunto* S *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{V}$ *se e só se* $S = \mathcal{L}(S)$;
4. $S \subseteq T \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;
5. $(S \subseteq \mathcal{V} \wedge T \subseteq \mathcal{V}) \Rightarrow (\mathcal{L}(S \cap T) \subseteq \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(T))$. *Adicionalmente, dê um exemplo em que* $\mathcal{L}(S \cap T) \neq \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(T)$.

Exercício 1.14. *Indique, justificando, qual ou quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais do e.v. real indicado na respectiva alínea.*

1. *em* $\mathbb{R}^2$:
   (a) $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a+b=0\}$;
   (b) $S = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a,b) \neq (1,1)\}$;
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=1\}$;
   (d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$.
2. *em* $\mathbb{R}^3$:
   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y=0\}$;
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-y=1 \ \wedge \ z=0\}$;
   (c) $V = \{(x,y,1) : x,y \in \mathbb{R}\}$;
   (d) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-4z=0\}$;
   (e) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$;
   (f) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2=y^2\}$;
   (g) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xz=0\}$

Exercício 1.15. *A verigue quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais dos espaços vetoriais indicados:*

1. *no espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$, *o conjunto*
$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \ \wedge \ 2z-w=0\};$$
2. *Sendo* $\mathcal{P}_2[x]$ *o e.v. dos polinómios de coeficientes reais na variável* x *de grau não superior a* 2, *considere os conjuntos de polinómios* $ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2[x]$ *definidos pelas seguintes condições:*

$$(i)\ c = 0; \quad (ii)\ b = 1; \quad (iii)\ c = -a; \quad (iv)\ bc = 0.$$

Exercício 1.16. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*, considere os vetores* $\hat{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ *e* $\hat{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. *Escreva o vetor* $\hat{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}$ *como combinação linear de* $\hat{u}$ *e* $\hat{v}$.

2. *Verifique que o vetor* $\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *não é combinação linear dos vetores* $\hat{u}$ *e* $\hat{v}$.

3. *Para que valor do parâmetro real* k*, o vetor* $\hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ *é combinação linear de* $\hat{u}$ *e* $\hat{v}$.

Exercício 1.17. *No espaço vetorial real indicado escreva, sempre que possível, o vetor:*

1. $u = (1, 1, 0)$ *como combinação linear dos vetores definidos pelos ternos* $v = (2, 1, -2)$, $w = (1, 0, 0)$ *e* $t = (1, 1, 1)$, *em* $\mathbb{R}^3$.

2. $a = (2, -3, -4, 3)$ *como combinação linear dos vetores definidos pelos ternos* $b = (4, 1, -2, 3)$ *e* $c = (1, 2, 1, 0)$, *em* $\mathbb{R}^4$.

3. $p(x) = 5x^2+9x+5$ *como combinação linear dos vetores* $p_1(x) = 4x^2+x+2$, $p_2(x) = 3x^2 - x + 1$ *e* $p_3(x) = 5x^2 + 2x + 3$ *do e.v. dos polinómios reais de grau não superior a 2,* $\mathcal{P}_2[x]$.

4. $p(x) = -x^3+x+4$ *como combinação linear dos vetores* $p_1(x) = x^3+2x+1$, $p_2(x) = x^3 + 3$ *e* $p_3(x) = x - 1$ *do e.v. dos polinómios reais de grau não superior a 3* $\mathcal{P}_3[x]$.

5. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ *como combinação linear dos vectores* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ *do e.v. das matrizes* 2×2 *com entradas reais,* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 1.18. *Considere as matrizes do e.v. das matrizes* 2×2 *com entradas reais,* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Verifique qual ou quais das matrizes

$$(i) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (ii) \quad \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (iii) \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

são combinação linear das matrizes A, B e C.

Exercício 1.19. *Indique quais dos seguintes vetores constituem conjuntos linearmente independentes nos respectivos espaços vetoriais.*

1. $u = (3,1)$ *e* $v = (4,-2)$ *em* $\mathbb{R}^2$;
2. $u = (1,1,0)$, $v = (0,2,3)$, $w = (1,2,3)$ *e* $r = (1,-1,1)$ *em* $\mathbb{R}^3$;
3. $u = (6,0,-1)$ *e* $v = (1,1,4)$ *em* $\mathbb{R}^3$;
4. $u = (1,2,3)$, $v = (1,1,1)$ *e* $w = (1,0,1)$ *em* $\mathbb{R}^3$;
5. $u = (4,4,0,0)$, $v = (0,0,6,6)$ *e* $w = (-5,0,5,5)$ *em* $\mathbb{R}^4$;
6. $u = (3,0,4,1)$, $v = (6,2,-1,2)$, $w = (-1,3,5,1)$ *e* $r = (-3,7,8,3)$ *em* $\mathbb{R}^4$;
7. $u = (-1,2,0,2)$, $v = (5,0,1,1)$ *e* $w = (8,-6,1,-5)$ *em* $\mathbb{R}^4$;
8. $p(x) = 1 + 2x - x^2$, $q(x) = 2 - x + 3x^2$ *e* $r(x) = 3 - 4x + 7x^2$ *em* $P_2[x]$;
9. $p(x) = 1+3x+3x^2$, $q(x) = x+4x^2$, $r(x) = 5+6x+3x^2$ *e* $t(x) = 7+2x-x^2$ *em* $\mathcal{P}_2[x]$;
10. $p(x) = 2 - x + 4x^2$, $q(x) = 3 + 6x + 2x^2$ *e* $r(x) = 2 + 10x - 4x^2$ *em* $P_2[x]$;
11. $p(x) = 3 + x + x^3$, $q(x) = 2 - x + 5x^2$ *e* $r(x) = 4 - 3x^3$ *em* $P_3[x]$;
12. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *em* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
13. $f(x) = x$ *e* $g(x) = \cos x$, *no e.v. das funções reais* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Exercício 1.20. *No espaço vetorial real indicado, determine os valores do parâmetro real α para os quais:*

1. $u = (1,-2,\alpha)$ *é combinação linear de* $v = (3,0,-2)$ *e* $w = (2,-1,-5)$ *em* $\mathbb{R}^3$.
2. $p(x) = \alpha x^2 + x + 2$ *é combinação linear de* $q(x) = x^2 + 2x + 1$ *e* $r(x) = x + 1$ *em* $\mathcal{P}_2[x]$.
3. $p(x) = (\alpha - 1)x^3 + x$ *é combinação linear de* $q(x) = x^3 + 1$ *e* $r(x) = 3x - 1$ *em* $\mathcal{P}_3[x]$.

Exercício 1.21. *Nos espaços vetoriais reais indicados, discuta, em função dos parâmetros, a independência linear dos seguintes vetores:*

1. $u = (1, -2)$ *e* $v = (a, -1)$ *em* $\mathbb{R}^2$*;*
2. $u = \left(a, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$*,* $v = \left(-\frac{1}{2}, a, -\frac{1}{2}\right)$ *e* $w = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, a\right)$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
3. $u = (a, 1, 1)$*,* $v = (1, a, 1)$ *e* $w = (1, 1, a)$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
4. $u = (0, a, -b)$*,* $v = (-a, 0, c)$ *e* $w = (b, -c, 0)$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
5. $p(x) = 6 - ax^2$ *e* $q(x) = b + x + x^2$ *em* $\mathcal{P}_2[x]$*.*

Exercício 1.22. *Em cada uma das alíneas determine qual o subespaço gerado pelos vetores do e.v. indicado.*

1. $(0, 1)$ *e* $(0, 2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*;*
2. $(0, 1)$*,* $(2, 1)$ *e* $(2, 2)$ *em* $\mathbb{R}^2$*;*
3. $(2, 2, 3)$*,* $(-1, -2, 1)$ *e* $(0, 1, 0)$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
4. $(1, 1, 1)$*,* $(1, 0, 0)$ *e* $(2, 2, 2)$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
5. $x^2 + 1$*,* $x^2 + x$ *e* $x - 1$ *em* $\mathcal{P}_2[x]$*;*
6. $3 + x^2$*,* $5 + 4x - x^2$ *e* $-2 + 2x - 2x^2$ *em* $\mathcal{P}_2[x]$*.*

Exercício 1.23. *Encontre um sistema de geradores para cada um dos subespaços vetoriais que a seguir se apresentam.*

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \ \wedge \ y = -z\}$*;*
2. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y = 0 \ \wedge \ x - z = 0\}$*;*
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$*;*
4. $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \wedge \ y = -z\}$*;*
5. $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \ \wedge \ x + y + 2w = 0 \ \wedge \ y - z + w = 0\}$*;*
6. $\{ax^2 + bx + c \in P_2[x] : a - 4b + 3c = 0\}$*;*
7. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3[x] : c - a = 0 \ \wedge \ 4d - a + 24b = 0\}$*;*
8. $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = d = 0 \ \wedge \ e - 2a = 0 \ \wedge \ c + f - 4a = 0 \right\}$*.*

Exercício 1.24. *Determine em cada uma das alíneas as coordenadas do vetor* $\hat{u}$ *na base ordenada* $\mathcal{B}$ *do e.v. indicado.*

1. $\hat{u} = (3, -7)$ *e* $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ *em* $\mathbb{R}^2$*;*
2. $\hat{u} = (1, 1)$ *e* $\mathcal{B} = ((2, -4), (3, 3))$ *em* $\mathbb{R}^2$*;*
3. $\hat{u} = (2, -1, 3)$ *e* $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3))$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
4. $\hat{u} = 2 - x + x^2$ *e* $\mathcal{B} = (1 + x, 1 + x^2, x + x^2)$ *em* $P_2[x]$*;*

5. $\hat{u} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ *em* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 1.25. *Verifique qual ou quais dos conjuntos a seguir apresentados constituem uma base do e.v. real indicado.*

1. $\{(3,9),(-4,-12)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*;*
2. $\{(1,1,3),(3,-8,-2),(-2,8,4)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*;*
3. $\{(1,0,0,0),(0,0,2,0),(1,0,2,1),(0,0,1,2)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$*;*
4. $\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$ *de* $\mathcal{P}_2[x]$*;*
5. $\{2, x, x^2+x^3, x+x^2+x^3\}$ *de* $\mathcal{P}_3[x]$*;*
6. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ *de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$*;*
7. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ *de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 1.26. *Considere os vetores* $\hat{u} = (1,2,1)$*,* $\hat{v} = (1,2,2)$ *e* $\hat{w} = (3,6,4)$ *do e.v. real* $\mathbb{R}^3$ *e seja* $S = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$*.*

1. *Verifique se* S *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Determine o subespaço gerado pelos vetores* $\hat{u}$ *e* $\hat{v}$*.*
3. *Dê um exemplo de um vetor* $\hat{x}$ *de modo que* $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{x}\}$ *seja uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercício 1.27. *Para cada um dos seguintes subespaços vetoriais do e.v. real indicado, determine uma base* $\mathcal{B}$ *e a respectiva dimensão:*

1. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \ \wedge \ z = x\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
2. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
3. $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + b\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
4. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y + 5z = 0\}$ *em* $\mathbb{R}^3$*;*
5. $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y + z + w = 0\}$ *em* $\mathbb{R}^4$*;*
6. $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a - 2b = 0 \ \wedge \ c = 3d\}$ *em* $\mathbb{R}^4$*;*
7. $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + b - 2c + d = 0\}$ *em* $\mathbb{R}^4$*;*
8. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0 \ \wedge \ x_3 = x_4\}$ *em* $\mathbb{R}^5$*.*

Exercício 1.28. *Sendo* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *subespaços vetoriais do e.v. indicado em cada alínea, determine a intersecção destes subespaços vetoriais.*

1. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\}$ *e* $G = \langle(1,0,1),(-1,1,2)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^3$*;*
2. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0 \,\wedge\, x+y=0\}$ *e* $G = \langle(1,1,1)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^3$*;*
3. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y=z \,\wedge\, x+y=0\}$ *e* $G = \langle(1,1,0),(3,-1,4)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^3$*;*
4. $\mathcal{F} = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$ *e* $G = \langle(0,1,1),(1,0,1)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^3$*;*
5. $\mathcal{F} = \langle(1,-1,1),(0,1,1)\rangle$ *e* $G = \langle(1,1,2),(-1,1,1)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^3$*;*
6. $\mathcal{F} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+w=0 \,\wedge\, x+2y-z+2w=0\}$ *e* $G = \langle(1,1,-1,1),(1,0,1,0),(-1,0,1,1)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^4$*;*
7. $\mathcal{F} = \langle(1,2,1,1),(1,1,1,1)\rangle$ *e* $G = \langle(1,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,0)\rangle$, *em* $\mathbb{R}^4$*;*
8. $\mathcal{F} = \left\{ax^3+bx^2+cx+d \in P_3[x] : a+b+c=0 \,\wedge\, a-d-2c=0\right\}$ *e* $\mathcal{G} = \langle 1+x+x^2+x^3, x+x^2+x^3, 1+x^3\rangle$, *em* $\mathcal{P}_3[x]$*;*
9. $\mathcal{F} = \langle 1+x+x^4, 1-x\rangle$ *e* $G = \langle 1+x, 1+x+x^2, 1-x^2+x^4\rangle$, *em* $\mathcal{P}_4[x]$*;*

Exercício 1.29. *Sejam* $\mathcal{F}$ *e* $\mathcal{G}$ *subespaços vetoriais do e.v.* $\mathbb{R}^3$*. Para cada caso, determine os valores do parâmetro real* k *para os quais a união* $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$*.*

1. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x+y=0 \,\wedge\, x-z=0\}$ *e* $\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : kx+2y-z=0\}$*;*
2. $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y=0 \,\wedge\, z-y=0\}$ *e* $\mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+ky-2z=0\}$*.*

Exercício 1.30. *Considere no e.v.* $\mathbb{R}^4$ *o subespaço vetorial*

$$\mathcal{F} = \langle(1,1,1,0),(-1,0,1,1),(-5,-2,1,3)\rangle$$

e o conjunto $\mathcal{G} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0 \,\wedge\, 2x+z+w=0\}$*.*

1. *Verifique que* $\mathcal{G}$ *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$*.*
2. *Determine as dimensões dos subespaços vetoriais* $\mathcal{F}$*,* $\mathcal{G}$*,* $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}$*.*
3. *Verifique se* $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$*.*

Exercício 1.31. *Considere no e.v.* $\mathbb{R}^3$ *os subespaços vetoriais*

$$\mathcal{F} = \langle(1,0,1),(2,-3,1)\rangle \quad e \quad \mathcal{G} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=z\}$$

1. *Determine uma base e a dimensão de cada subespaço vetorial.*
2. *Determine a intersecção dos dois subespaços vetoriais.*
3. *Determine a dimensão de* $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ *e, sem efetuar cálculos, indique* $\mathcal{F}+\mathcal{G}$*.*

4. *Verifique se* $\mathcal{G}$ *é um subespaço complementar de* $\mathcal{F}$ *em* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 1.32. *Considere no e.v.* $\mathbb{R}^4$ *os subespaços vetoriais*

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+w = 0\} \;\; e \;\; T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z = 0\}.$$

1. *Verifique se* $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

2. *Indique dois subespaços* U *e* V *distintos de* S *e* T *tais que* $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Capítulo 2

Aplicações Lineares

2.1 Caracterização de aplicações lineares

Definição 2.1. *Sejam $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ dois espaços vetoriais reais e ψ uma aplicação de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$ ($\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$). Diz-se que ψ é uma aplicação linear (ou homomorfismo) se verifica cada uma das seguintes condições:*

$$\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{E} \;\; \psi(\hat{x} + \hat{y}) = \psi(\hat{x}) + \psi(\hat{y}); \tag{2.1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall \hat{x} \in \mathcal{E} \;\; \psi(\lambda \hat{x}) = \lambda \psi(\hat{x}), \tag{2.2}$$

ou seja, $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ é uma aplicação linear do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$, se

$$\forall \hat{x}, \hat{y} \in V \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \psi(\lambda \hat{x} + \mu \hat{y}) = \lambda \psi(\hat{x}) + \mu \psi(\hat{y}).$$

A última condição desta definição facilmente se generaliza (por indução) à combinação linear arbitrária de p vetores, ou seja,

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \; \forall \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_p \in \mathcal{E} \qquad \psi\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \hat{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \psi\left(\hat{x}_i\right).$$

Exemplo 2.1. *Seguem-se alguns exemplos de aplicações lineares.*

1. *A aplicação identidade de um e.v. $\mathcal{E}$ em si próprio ($\psi(\hat{x}) = \hat{x} \;\; \forall \hat{x} \in \mathcal{E}$);*

2. *A aplicação nula de um e.v. $\mathcal{E}$ num espaço vetorial $\mathcal{F}$ ($\psi(\hat{x}) = \hat{0} \;\; \forall \hat{x} \in \mathcal{E}$);*

3. *A aplicação $\psi_\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tal que $\psi_\lambda(\hat{x}) = \lambda \hat{x}$, onde λ é um número real.*

4. *Sendo $\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ e sendo $\mathcal{F} = \{(y_1, \ldots, y_m) : y_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m\}$, a aplicação:*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{E} & \to & \mathcal{F} \\ \hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \rightsquigarrow & \psi(\hat{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \hat{y}_i, \end{array}$$

   com $\hat{y}_i \in \mathcal{F}$, para $1 \leq i \leq m$.

5. *Sendo $\mathcal{E}$ o e.v. das funções reais diferenciáveis f e $\mathcal{F}$ o e.v. das funções reais, a aplicação $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tal que $\psi(f) = f'$.*

2.2 Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Conforme já se referiu, as aplicações lineares entre espaços vetoriais também se designam por homomorfismos.

Definição 2.2. *Seja f um homomorfismo do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$ ($\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$).*

- *Se $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{E} \quad \hat{x} \neq \hat{y} \Rightarrow f(\hat{x}) \neq f(\hat{y})$, ou seja, se f é injetiva, então designa-se por* ***monomorfismo****;*
- *Se $\forall \hat{y} \in \mathcal{F} \quad \exists \hat{x} \in \mathcal{E} : \quad f(\hat{x}) = \hat{y}$, ou seja, se f é sobrejetiva, então designa-se por* ***epimorfismo****;*
- *Se f é um monomorfismo e um epimorfismo, então designa-se por* ***isomorfismo****.*

Quando $\mathcal{F} = \mathcal{E}$, um homomorfismo também se designa por ***endomorfismo*** *e um isomorfismo por* ***automorfismo****.*

Considere-se o homomorfismo $\psi : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_m$, onde $\mathcal{V}_n$ e $\mathcal{V}_m$ denotam espaços vetoriais reais de dimensão n e m respectivamente, e seja $\mathcal{B}_n = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ uma base ordenada do e.v. $\mathcal{V}_n$. Então

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{V}_n \ \ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \qquad \hat{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{e}_i$$

e, consequentemente,

$$\psi(\hat{x}) = \psi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(\hat{e}_i).$$

Desta forma, podemos concluir que as imagens dos vetores de $\mathcal{B}$ por ψ caracterizam completamente o homomorfismo. Por outro lado, representando um vetor arbitrário $\hat{x}$ pelo seu n-uplo de componentes $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ na base ordenada $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$, vem que

$$\psi(\hat{x}) = \psi((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \psi(\hat{e}_i).$$

Deve observar-se que $\psi(\hat{e}_i)$, para $i = 1, \ldots, n$, são vetores do e.v. $\mathcal{V}_m$ os quais, por sua vez, se podem representar como m-uplos relativamente a uma base ordenada de $\mathcal{V}_m$.

Um n-uplo diz-se **disposto em linha** se a sua representação se faz na horizontal (ou seja, $(\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_n)$, onde as vírgulas são substuidas por espaços) e diz-se **disposto em coluna** se a sua representação se faz na vertical (ou seja, $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$).

Definição 2.3. *Designamos por **vetor coluna** (respectivamente **vetor linha**) o n-uplo disposto em coluna (respectivamente em linha) que representa esse vetor relativamente a uma base ordenada.*

De agora em diante, por defeito, os vetores $\hat{x}$ serão vetores coluna e quando os pretendermos representar em linha utilizaremos a notação de **transposto** $\hat{x}^T$, ou seja, se $\hat{x} \in \mathcal{V}_n$ e $\hat{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, então $\hat{x}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Voltando ao homomorfismo ψ anteriormente introduzido, suponhamos que $\psi(\hat{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, para $j = 1, \dots, n$, ou seja,

$$\psi(\hat{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \psi(\hat{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ \psi(\hat{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Então, para $\hat{x} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \hat{e}_j$, obtém-se $\psi(\hat{x}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi(\hat{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Identificando ψ pela sequência de vetores coluna $\begin{pmatrix} \psi(\hat{e}_1) & \psi(\hat{e}_2) & \cdots & \psi(\hat{e}_n) \end{pmatrix}$, $\psi(\hat{x})$ vem dado pelo produto

$$\begin{pmatrix} \psi(\hat{e}_1) & \psi(\hat{e}_2) & \cdots & \psi(\hat{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \psi(\hat{e}_1) + \lambda_2 \psi(\hat{e}_2) + \cdots + \lambda_n \psi(\hat{e}_n),$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\psi(\hat{x}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Definição 2.4. *Uma* ***matriz*** *m por n (ou $m \times n$) é uma sequencia bidimensional de escalares organizados em m linhas e n colunas.*

Podemos assim representar um homomorfismo ψ do e.v. $\mathcal{V}_n$ no e.v. $\mathcal{V}_m$ por intermédio de uma matriz cujas colunas são as imagens por ψ dos vetores de uma base ordenada de $\mathcal{V}_n$. Note-se que $\psi(\hat{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ é a j-ésima coluna da matriz. Assim, fazendo $\hat{x} = \hat{e}_j$ obtém-se

$$
\psi(\hat{e}_j) = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},
$$

com $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ e $\lambda_j = 1$, uma vez que $\hat{e}_j$ é o j-ésimo vetor da base canónica de $\mathcal{V}_n$.

Uma matriz A $(m \times n)$ pode denotar-se por

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}.
$$

2.3 Núcleo e imagem de homomorfismos

Definição 2.5. *Seja ψ um homomorfismo do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$. Designa-se por* ***imagem*** *de ψ e denota-se por Im(ψ) ou $\psi(\mathcal{E})$ o conjunto $\{\hat{y} \in \mathcal{F} : \exists \hat{x} \in \mathcal{E}, \psi(\hat{x}) = \hat{y}\}$, ou seja, Im($\psi$) $= \psi(\mathcal{E}) = \{\hat{y} \in \mathcal{F} : \exists \hat{x} \in \mathcal{E}, \psi(\hat{x}) = \hat{y}\}$.*

Atenção 2.1. *Deve observar-se que sendo ψ um homomorfismo do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$ e sendo $\hat{0}_{\mathcal{E}}$ e $\hat{0}_{\mathcal{F}}$ o vetor nulo do e.v. $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, respectivamente, pode concluir-se que $\psi(\hat{0}_{\mathcal{E}}) = \hat{0}_{\mathcal{F}}$ (prove esta afirmação) e, consequentemente, $\hat{0}_{\mathcal{F}} \in \psi(\mathcal{E})$.*

Teorema 2.1. *Seja ψ um homomorfismo do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$. Então $\psi(\mathcal{E})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Dado que $\hat{0}_{\mathcal{F}} \in \psi(\mathcal{E})$ e, por conseguinte, $\psi(\mathcal{E}) \neq \emptyset$, basta mostrar que $\psi(\mathcal{E})$ (note-se que $\psi(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$) é fechado para as operações em $\mathcal{F}$ de adição e multiplicação por um escalar dos respectivos elementos.

1. Se $\hat{u}, \hat{v} \in \psi(\mathcal{E})$, então $\exists \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{E}$ tais que $\psi(\hat{x}) = \hat{u}$ e $\psi(\hat{y}) = \hat{v}$. Logo, $\hat{u} + \hat{v} = \psi(\hat{x}) + \psi(\hat{y}) = \psi(\hat{x} + \hat{y})$, pelo que $\hat{u} + \hat{v} \in \psi(\mathcal{E})$.

2. De modo análogo, se $\hat{u} \in \psi(\mathcal{E})$, então $\exists \hat{x} \in \mathcal{E}$ tal que $\psi(\hat{x}) = \hat{u}$. Consequentemente, $\lambda\hat{u} = \lambda\psi(\hat{x}) = \psi(\lambda\hat{x})$, pelo que $\lambda\hat{u} \in \psi(\mathcal{E})$ qualquer que seja o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Dado um homomorfismo $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, a dimensão do subespaço vetorial $\psi(\mathcal{E})$ designa-se por **caraterística** de ψ.

Definição 2.6. *Designa-se por* ***núcleo*** *de um homomorfismo ψ do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$ e denota-se por $N(\psi)$ (ou $Ker(\psi)$) a imagem recíproca por ψ do vetor nulo de $\mathcal{F}$, ou seja, $\psi^{-1}(\hat{0})$ (notes que $\psi^{-1}(\hat{0}) \subseteq \mathcal{E}$).*

Atenção 2.2. *Não confundir a imagem recíproca de uma função com a sua inversa.*

Teorema 2.2. *Seja ψ um homomorfismo do e.v. $\mathcal{E}$ no e.v. $\mathcal{F}$. Então $N(\psi)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}$.*

Demonstração. De modo análogo ao anterior, uma vez que $\hat{0}_{\mathcal{E}} \in N(\psi)$ e, por conseguinte, $N(\psi) \neq \emptyset$, basta mostrar que $N(\psi)$ é fechado para as operações em $\mathcal{E}$ de adição e multiplicação por um escalar dos respectivos elementos.

1. Se $\hat{x}, \hat{y} \in N(\psi)$, então $\psi(\hat{x}) = \psi(\hat{y}) = \hat{0}$. Logo, $\psi(\hat{x}) + \psi(\hat{y}) = \psi(\hat{x} + \hat{y}) = \hat{0}$, pelo que $\hat{x} + \hat{y} \in N(\psi)$.

2. Se $\hat{x} \in N(\psi)$, então $\psi(\hat{x}) = \hat{0}$. Consequentemente, $\psi(\lambda\hat{x}) = \lambda\psi(\hat{x}) = \lambda\hat{0} = \hat{0}$, pelo que $\lambda\hat{x} \in N(\psi)$.

$\square$

Dado um homomorfismo $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, a dimensão do subespaço vetorial $N(\psi)$ designa-se por **nulidade** de ψ.

Teorema 2.3. *Seja $\mathcal{E}$ um e.v. de dimensão finita $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$ um e.v. de dimensão arbitrária e $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ uma aplicação linear. Então $\psi(\mathcal{E})$ tem dimensão finita e é tal que $dim(\psi(\mathcal{E})) + dim(N(\psi)) = n$.*

Demonstração. Vamos dividir esta prova em duas partes.

1. Suponhamos que $N(\psi) = \{\hat{0}\}$. Então $\forall \hat{x} \neq \hat{0}$, $\psi(\hat{x}) \neq \hat{0}$. Sendo $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ uma base ordenada de $\mathcal{E}$, vem então que $\forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ $\psi(\lambda_1\hat{e}_1 + \cdots + \hat{e}_n) \neq \hat{0}$, ou seja, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(\hat{e}_i) \neq \hat{0}$, o que prova que o conjunto de vetores $\{\psi(\hat{e}_1), \ldots, \psi(\hat{e}_n)\}$ é linearmente independente e gera $\psi(\mathcal{E})$ (ou seja, é uma base de $\psi(\mathcal{E})$).

2. Suponhamos que $N(\psi) \neq \{\hat{0}\}$ e seja $\mathcal{B}_{N(\psi)} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k)$ uma base ordenada de $N(\psi)$. Logo, $\dim(N(\psi)) = k$ (observe-se que $\psi(\hat{e}_1) = \psi(\hat{e}_2) = \cdots = \psi(\hat{e}_k) = \hat{0}$). Podemos completar a base $\mathcal{B}_{N(\psi)}$ para obter uma base de $\mathcal{E}$ (ver a prova do ponto 1 do Teorema 1.10), acrescentando os vetores

$$\hat{e}_{k+1}, \ldots, \hat{e}_n.$$

Desta forma, obtém-se a base de $\mathcal{E}$, $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k, \hat{e}_{k+1}, \ldots, \hat{e}_n)$.
Assim, sendo $\hat{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{e}_i$, vem que

$$\psi(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \psi(\hat{e}_i) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \psi(\hat{e}_i) = \hat{0} + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \psi(\hat{e}_i).$$

Fica então provado que $\psi(\mathcal{E})$ é gerado pelo conjunto de vetores

$$\{\psi(\hat{e}_{k+1}), \ldots, \psi(\hat{e}_n)\}$$

e é claro que este conjunto não pode ser linearmente dependente. Com efeito, se este conjunto fosse linearmente dependente, existiriam $n-k$ escalares, $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_n$, não todos nulos, tais que

$$\mu_{k+1}\psi(\hat{e}_{k+1}) + \cdots + \mu_n \psi(\hat{e}_n) = \hat{0} \Leftrightarrow \psi(\mu_{k+1}\hat{e}_{k+1} + \cdots + \mu_n \hat{e}_n) = \hat{0}.$$

Da última igualdade decorre que $\mu_{k+1}\hat{e}_{k+1} + \cdots + \mu_n \hat{e}_n \in N(\psi)$, o que é contraditório uma vez que nenhum dos vetores $\hat{e}_j$, com $k+1 \leq j \leq n$, pertence ao subespaço gerado pela base $\mathcal{B}_{N(\psi)}$ (que é precisamente o subespaço $\mathcal{L}(\mathcal{B}_{N(\psi)}) = N(\psi)$). Como consequência, podemos concluir que $(\psi(\hat{e}_{k+1}), \ldots, \psi(\hat{e}_n))$ é uma base ordenada de $\psi(\mathcal{E})$. Logo,

$$\dim(\psi(\mathcal{E})) + \dim(N(\psi)) = n.$$

□

2.4 Mudança de base

Definição 2.7. *Seja $\mathcal{E}$ um e.v. real de dimensão n e sejam $\mathcal{B} = (\hat{u}_1, \cdots, \hat{u}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{E}$. Designa-se por matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$ a matriz quadrada $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ de ordem n cuja j-ésima coluna tem como componentes as coordenadas do vetor $\hat{u}_j$ da base $\mathcal{B}$ na base $\mathcal{B}'$,* *para $j = 1, \dots, n$, ou seja, sendo*

$$\begin{array}{rcl} \hat{u}_1 & = & a_{11}\hat{v}_1 + a_{21}\hat{v}_2 + \cdots + a_{n1}\hat{v}_n \\ \hat{u}_2 & = & a_{12}\hat{v}_1 + a_{22}\hat{v}_2 + \cdots + a_{n2}\hat{v}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \hat{u}_n & = & a_{1n}\hat{v}_1 + a_{2n}\hat{v}_2 + \cdots + a_{nn}\hat{v}_n \end{array}$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$, é a matriz

$$M(\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.4. *Seja $\mathcal{E}$ um e.v. real e sejam $\mathcal{B} = (\hat{u}_1, \cdots, \hat{u})$ e $\mathcal{B}' = (\hat{v}_1, \cdots, \hat{v}_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{E}$. Se $\hat{x}$ é o n-uplo das coordenadas do vetor $\hat{v} \in \mathcal{E}$ na base $\mathcal{B}'$ e $\hat{y}$ é o n-uplo das coordenadas deste vetor na base $\mathcal{B}$, então*

$$\hat{x} = M(\mathcal{B},\mathcal{B}')\hat{y}.$$

Demonstração. Por definição da matriz $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ vem que

$$\hat{u}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{v}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Por hipótese, $\hat{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_j \hat{u}_j$. Então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \hat{v}_i &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{v}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j \right) \hat{v}_i \end{aligned}$$

Uma vez que as coordenadas de $\hat{v}$ na base $\mathcal{B}'$ são únicas, segue-se que

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

ou seja, $\hat{x} = M(\mathcal{B},\mathcal{B}')\hat{y}$. □

Exemplo 2.2. *Considerem-se as seguintes bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$,*

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \;\; e \;\; \mathcal{B}' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Dado que

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & = & 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & = & 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \end{array}$$

$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Se as coordenadas do vetor* $\hat{v}$ *na base* $\mathcal{B}$ *são* $\hat{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, *então as coordenadas de* $\hat{v}$ *na base* $\mathcal{B}'$ *vêm dadas por*

$$M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Muitas vezes estamos interessados em determinar a matriz de uma dada aplicação linear $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, entre os espaços vetoriais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, em função de uma nova base $\mathcal{B} = (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n)$ de $\mathcal{E}$ e uma nova base $\mathcal{B}' = (\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_m)$ de $\mathcal{F}$. Vamos denotar esta matriz por $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Com este objectivo, começamos por determinar as imagens dos vetores da base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$, $\varphi(\hat{u}_1), \ldots, \varphi(\hat{u}_n)$ e, posteriormente, exprimimos estas imagens nas coordenadas da base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{F}$, obtendo-se $\varphi(\hat{u}_1)_{\mathcal{B}'}, \ldots, \varphi(\hat{u}_n)_{\mathcal{B}'}$. Nesta condições, a matriz pretendida toma a forma:

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (\varphi(\hat{u}_1)_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ \varphi(\hat{u}_n)_{\mathcal{B}'}).$$

Exemplo 2.3. *Dada a aplicação linear* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x, y) = (2x - 3y, x + 4y, 5x)$, *vamos determinar a matriz* $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *desta aplicação linear, relativamente à base* $\mathcal{B} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$, *com* $\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e* $\hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ *e à base* $\mathcal{B}' = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$, *com* $\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\hat{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dado que $\varphi(\hat{u}_1) = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ *e* $\varphi(\hat{u}_2) = \begin{pmatrix} -15 \\ 31 \\ 15 \end{pmatrix}$ *e tendo em conta que*

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 8 \\ -\alpha & + & 2\beta & + & 5\gamma & = & -7 \\ & & \beta & & & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \alpha = -69/8, \beta = 5, \gamma = -41/8 \Rightarrow \varphi(\hat{u}_1) = \begin{pmatrix} \frac{-69}{8} \\ 5 \\ \frac{-41}{8} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 31 \\ 15 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & -15 \\ -\alpha & + & 2\beta & + & 5\gamma & = & 31 \\ & & \beta & & & = & 15 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-149}{4}, \beta = 15, \gamma = \frac{-29}{4} \Rightarrow \varphi(\hat{u}_2) = \begin{pmatrix} \frac{-149}{4} \\ 15 \\ \frac{-29}{4} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}.$$

Logo,

$$M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{-69}{8} & \frac{-149}{4} \\ 5 & 15 \\ \frac{-41}{8} & \frac{-29}{4} \end{pmatrix}.$$

2.5 Exercícios

Exercício 2.1. *Identifique as imagens e os núcleos das seguintes aplicações lineares:*

1. $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *tal que* $\psi(\hat{x}) = \hat{x}$;
2. $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *tal que* $\psi(\hat{x}) = \hat{0}$;
3. $\psi_\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *tal que* $\psi(\hat{x}) = \lambda\hat{x}$;
4. $\psi : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}^0$ *tal que* $\psi(f) = f'$.

Exercício 2.2. *Indique as matrizes que representam as aplicações lineares:*

1. $\psi : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_2$ *tal que* $\psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ *e* $\psi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $\psi : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_2$ *tal que* $\psi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \psi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 2.3. *Em cada uma das alíneas que se seguem, verifique se a aplicação considerada é uma aplicação linear:*

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x,y,z) = (2x-y-z, x+y, x)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x,y,z) = (y,x,0)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(x,y,z) = xyz$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
4. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x,y) = (x^2+y, x-2y, x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
5. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(x,y) = |x-y|$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;
6. $\varphi : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_1[x]$ *tal que* $\varphi(ax^2+bx+c) = b+2cx$, $\forall ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2[x]$;
7. $\varphi : \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(ax^2+bx+c) = c-2b-a$, $\forall ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2[x]$;
8. $\varphi : \mathcal{P}_2[x] \to P_2[x]$ *tal que* $\varphi(ax^2+bx+c) = a(x+1)^2+b(x+1)+c$, $\forall ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2[x]$;
9. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ *tal que* $\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} 2x-5y \\ 2x \end{bmatrix}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

10. *$\varphi : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = AB + BA$, com $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$;*

11. *$\varphi : M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(A) = A^T$, $\forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.*

Exercício 2.4. *Considere as aplicações lineares indicadas em cada uma das alíneas e responda.*

1. *Seja E um espaço vectorial real e seja $\varphi : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear e sejam $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in E$ tais que*

$$\varphi(\hat{v}_1) = 1 \quad e \quad \varphi(\hat{v}_2) = -1.$$

Determine $\varphi(3\hat{v}_1 - 5\hat{v}_2)$.

2. *Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear tal que*

$$\psi(1,3) = (1,1) \quad e \quad \psi(1,1) = (0,1).$$

Determine $\psi(-1,3)$.

3. *Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear tal que*

$$\phi(3,-1,2) = 5, \quad \phi(1,0,1) = 2 \quad e \quad \phi(0,0,1) = -1.$$

Determine $\phi(-1,1,0)$.

4. *Seja $\theta : \mathcal{P}_2[x] \to \mathcal{P}_1[x]$ uma aplicação linear tal que*

$$\theta(x+1) = x, \quad \theta(x-1) = 1 \quad e \quad \theta(x^2) = 0.$$

Determine $\theta(2 - x + 3x^2)$.

Exercício 2.5. *Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $\varphi(x,y) = (2x - y, -8x + 4y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

1. *Dados os vetores $u = (5,10)$, $v = (3,2)$ e $w = (1,1)$, indique os que pertencem ao núcleo de φ.*

2. *Dados os vetores $a = (1,-4)$, $b = (5,0)$ e $c = (-3,12)$, indique os que pertencem à imagem de φ.*

Exercício 2.6. *Seja $\psi : \mathcal{P}_2[x] \longrightarrow P_3[x]$ uma aplicação linear definida por*

$$\psi(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx, \quad \text{para todo } ax^2 + bx + c \in P_2[x].$$

1. *Dados os polinómios $p_1(x) = x^2$, $p_2(x) = 0$ e $p_3(x) = 1 + x$, indique os que pertencem ao núcleo de ψ.*

2. *Dados os polinómios $q_1(x) = x^2 + 3x$, $q_2(x) = x + 2$ e $q_3(x) = 4x^2 - x^3 + 7x$, indique os que pertencem à imagem de ψ.*

Exercício 2.7. *Seja* $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *uma aplicação linear tal que, para todo* $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$,

$$\psi(x, y, z, w) = (4x + y - 2z - 3w, 2x + y + z - w, 6x - 9z + 9w)$$

Indique um vetor pertencente a $N(\psi)$ *e um vetor pertencente a* $Im(\psi)$.

Exercício 2.8. *Para cada uma das seguintes aplicações lineares, determine uma base do núcleo,* $\mathcal{B}_{N(\varphi)}$ *e uma base da imagem,* $\mathcal{B}_{Im(\varphi)}$, *bem como a respectiva nulidade e característica:*

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $\varphi(x, y) = (3x - y, -3x + y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x, y) = (x + y, x, 2y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x, y, z) = (0, 0, 2y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
4. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x, y, z) = (x + y, 0, y - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
5. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
6. $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que* $\varphi(x, y, z, w) = (4x + y + 5z + 2w, x + 2y + 3z)$, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;
7. $\varphi : P_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\varphi(ax^2 + bx + c) = c + b - a$, $\forall ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;
8. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(-1, 1) = (3, 2, 1)$, $\varphi(0, 1) = (1, 1, 0)$;
9. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*
$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 0) \quad e \quad \varphi(0, 0, 1) = (0, 0);$$
10. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*
$$\varphi(1, 0, 0) = (2, 3), \quad \varphi(0, 1, 0) = (-1, 4) \quad e \quad \varphi(0, 0, 1) = (-5, 2).$$

Exercício 2.9. *Considere a aplicação* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definida por*

$$\varphi(1, 0, 0) = (1, 0, 2, 0), \quad \varphi(0, 1, 1) = (0, 1, -2, 0), \quad e \quad \varphi(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0)$$

e determine:

1. $\varphi(a, b, c)$, *para todo* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$;
2. $N(\varphi)$ *e a nulidade de* φ;
3. $Im(\varphi)$ *e a característica de* φ;
4. $\varphi^{-1}(\{(2, 2, 0, 0)\})$;
5. *um subespaço complementar de* $N(\varphi)$.

Exercício 2.10. *Mostre que a aplicação linear* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\varphi(x,y) = (2x+y, x-y, x)$*, para todo* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, é um monomorfismo.*

Exercício 2.11. *Considere a aplicação linear* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tal que:*

$$\varphi(1,1,0) = (0,1,1) \quad \varphi(1,0,1) = (1,1,1) \quad e \quad \varphi(0,1,1) = (2,1,-1).$$

Mostre que φ *é um automorfismo.*

Exercício 2.12. *Considere a aplicação linear* $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *definida por:*

$$\psi(1,1,1) = (1,0,0,0) \quad \psi(1,1,0) = (0,1,1,0) \quad e \quad \psi(1,0,0) = (k,1,k,k-1),$$

onde k *é um parâmetro real. Diga para que valores de* k *a aplicação* ψ *é:*

1. *monomorfismo;*
2. *epimorfismo.*

Exercício 2.13. *Seja* $\mathcal{B} = ((1,2),(-1,3))$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e seja* φ *o endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *definido por* $\varphi(x,y) = (x, 2x)$*, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*.*

1. *Mostre que* $\mathcal{B}' = (\varphi(1,2), \varphi(-1,3))$ *não é uma base de* $\mathbb{R}^2$*.*
2. *Classifique* φ *quanto à injetividade e à sobrejetividade, usando a alínea anterior.*

Exercício 2.14. *Sejam* E *e* E' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e seja* φ *uma aplicação linear de* E *em* E'*. Sejam ainda* $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k \in E$*. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando:*

1. *Se* $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k$ *são vetores linearmente independentes então* $\varphi(\hat{v}_1), \ldots, \varphi(\hat{v}_k)$ *são vetores linearmente independentes.*
2. *Se* $\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_k$ *são vetores linearmente dependentes então* $\varphi(\hat{v}_1), \ldots, \varphi(\hat{v}_k)$ *são vetores linearmente dependentes.*
3. *Se* $\dim E = \dim E'$ *então* φ *é um isomorfismo.*
4. *Se* φ *é um monomorfismo então* $\dim E \leq \dim E'$*.*
5. *Se* φ *é um epimorfismo então* $\dim E \geq \dim E'$*.*

Exercício 2.15. *Para cada uma das alíneas, determine a matriz da aplicação linear* φ *em relação às bases indicadas.*

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tal que* $\varphi(x,y) = (x, y, x+y)$*, para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, em relação às bases canónicas de* $\mathbb{R}^2$ *e de* $\mathbb{R}^3$*;*
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *tal que* $\varphi(x,y,z) = (x+y, x+z, 2x, 0)$*, para todo* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, em relação à base* $\mathcal{B} = ((1,0,0),(2,1,-1),(1,2,1))$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e à base canónica de* $\mathbb{R}^4$*;*

3. *$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x,y,z,w) = (0, x-y, z-w)$, para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,1),(-1,1,2))$ de $\mathbb{R}^3$;*

4. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x,y,z) = (x+2y, y+2z, 3z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;*

5. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y-3z, x-3y-4z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$;*

6. *$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x,y,z,w) = x+y-w$, para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, em relação à base $\mathcal{B} = ((1,2,0,0),(0,1,2,0),(0,0,2,1),(2,1,1,2))$ de $\mathbb{R}^4$ e à base $\mathcal{B}' = (2)$ de $\mathbb{R}$;*

7. *$\varphi : P_3[x] \longrightarrow P_2[x]$ tal que $\varphi(ax^3+bx^2+cx+d) = 3ax^2+2bx+c$, para todo $ax^3+bx^2+cx+d \in P_3[x]$, em relação às bases canónicas de $\mathcal{P}_3[x]$ e de $\mathcal{P}_2[x]$, $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_3[x]} = (1,x,x^2,x^3)$ e $\mathcal{B}_{P_2[x]} = (1,x,x^2)$, respectivamente.*

8. *$\varphi : \mathcal{P}_2[x] \longrightarrow \mathcal{P}_2[x]$ tal que $\varphi(ax^2+bx+c) = -2ax^2+(2a-b)x+b$, para todo $ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2[x]$, em relação à base $\mathcal{B} = (1+x, x^2, x-x^2)$ de $\mathcal{P}_2[x]$.*

9. *$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(1,0) = (3,2)$ e $\varphi(1,1) = (0,3)$, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$.*

Exercício 2.16. *Para cada uma das alíneas, determine a aplicação linear φ tal que:*

1. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;*

2. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$;*

3. *$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1,-1),(2,-3))$ é base de $\mathbb{R}^2$;*

4. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,1,1),(0,1,0))$ é base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = ((1,1),(-1,1))$ é base de $\mathbb{R}^2$;*

5. *$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((-1,-1,-1),(0,-1,-2),(0,0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(0,1,0))$ são bases de $\mathbb{R}^3$.*

6. *$\varphi : P_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = (x, 1-x)$ é base de $P_1[x]$ e $\mathcal{B}' = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ é base de $\mathbb{R}^3$.*

7. *$\varphi : P_1[x] \longrightarrow P_2[x]$ e $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathcal{P}_1[x]}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{P_1[x]} = (1, x)$ é a base canónica de $\mathcal{P}_1[x]$ e $\mathcal{B}' = (x, 1-x^2, 1-x+x^2)$ é base de $\mathcal{P}_2[x]$.*

Exercício 2.17. *Determine as matrizes de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, para cada um dos seguintes pares de bases dos espaços vetoriais indicados.*

1. *$\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,1),(-2,3))$ de $\mathbb{R}^2$;*

2. *$\mathcal{B} = ((1,0),(1,-1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,3),(2,5))$ de $\mathbb{R}^2$;*

3. *$\mathcal{B} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ e $\mathcal{B}' = ((-1,-1,1),(1,1,1),(0,1,2))$ de $\mathbb{R}^3$;*

4. *$\mathcal{B} = ((1,0,0),(2,-1,1),(1,2,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(0,1,1),(-1,1,2))$ de $\mathbb{R}^3$;*

5. *$\mathcal{B} = ((1,2,0,0),(0,1,2,0),(0,0,2,1),(2,1,1,1))$ e
$\mathcal{B}' = ((1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1))$ de $\mathbb{R}^4$;*

6. *$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ e $\mathcal{B}' = (1+x, x^2, x-x^2)$ de $\mathcal{P}_2[x]$;*

Exercício 2.18. *Sejam $\mathcal{B} = ((1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ e $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(-1,0,1),(0,1,0))$ bases de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Determine a matriz de mudança de base $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

2. *Seja $\hat{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\hat{u} = (1,2,-1)_{\mathcal{B}}$. Determine as coordenadas de $\hat{u}$ em relação à base $\mathcal{B}'$, usando a matriz de mudança de base da alínea anterior.*

Exercício 2.19. *Seja φ uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ para $P_3[x]$ tal que, para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,*

$$\varphi(a,b,c) = ax^3 + (a-2b-c)x^2 - 2cx + (a+b).$$

1. *Determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_{\mathcal{P}_3[x]} = (1, x, x^2, x^3)$ de $\mathcal{P}_3[x]$.*

2. *Utilizando matrizes de mudança de base, determine a matriz de φ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B} = (1+x^3, x^2, x-x^2, 1+x-x^3)$ de $\mathcal{P}_3[x]$.*

Capítulo 3

Álgebra das matrizes

3.1 Definições

Conforme já vimos anteriormente, dado um homomorfismo entre o e.v. $\mathcal{F}$ e o e.v. $\mathcal{G}$ ($\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$) com dimensões m e n, respectivamente, esse homomorfismo pode ser caracterizado por intermédio de uma matriz $m \times n$. Com efeito, seja $\mathcal{B} = (\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ uma base ordenada de $\mathcal{F}$. Então

$$\begin{aligned}
\forall \hat{x} \in \mathcal{E} \qquad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \hat{x} &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{e}_i \\
\varphi(\hat{x}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\hat{e}_i), \text{ ou seja,} \\
\varphi(\hat{x}) &= A\hat{x}, \text{ com } A = [\varphi(\hat{e}_1) \cdots \varphi(\hat{e}_n)] \text{ e } \hat{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Note-se que sendo $\varphi(\hat{e}_j) = a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, para $j = 1, \ldots, n$, vem que

$$A\hat{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j.$$

Assim, $A\hat{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{mj} \end{pmatrix}$ e, desta forma, fica definido o "produto" de uma matriz por um vetor $\hat{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Considerando a matriz A como uma sequencia de colunas, ou seja,

$$A = (\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_k \cdots \hat{a}_n)\,,$$

segue-se que

$$A\hat{x} = (\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_k \ldots \hat{a}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \hat{a}_1 + \cdots + \lambda_k \hat{a}_k + \cdots + \lambda_n \hat{a}_n.$$

Por outro lado, considerando a matriz A como uma sequencia de linhas, ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \vdots \\ \hat{a}^i \\ \vdots \\ \hat{a}^m \end{pmatrix},$$

e sendo $\hat{y}^T = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m)$, segue-se que

$$\hat{y}^T A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) \begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \vdots \\ \hat{a}^i \\ \vdots \\ \hat{a}^m \end{pmatrix} = \alpha_1 \hat{a}^1 + \ldots + \alpha_i a \hat{a}^i + \ldots + \alpha_m \hat{a}^m.$$

Se considerarmos $\hat{y}^T = \hat{e}_i^T$, o i-ésimo vetor da base canónica e $\hat{x} = \hat{e}_j$, o j-ésimo vetor da base canónica, obtém-se:

$$\hat{e}_i^T A = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \vdots \\ \hat{a}^{i-1} \\ \hat{a}^i \\ \hat{a}^{i+1} \\ \vdots \\ \hat{a}^m \end{pmatrix} = a^i,$$

$$A\hat{e}_j = (\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_{j-1}\ \hat{a}_j\ \hat{a}_{j+1} \ldots \hat{a}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{a}_j.$$

Logo, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ e $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^T A \hat{e}_j &= \hat{e}_i^T (A\hat{e}_j) = \hat{e}_i^T \hat{a}_j \\ &= (\hat{e}_i^T A)\hat{e}_j = \hat{a}^i \hat{e}_j \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Alguns conceitos básico associados a matrizes são os seguintes. Uma matriz A $m \times n$ onde $m = n$ diz-se uma **matriz quadrada**. Quando uma matriz quadrada tem n linhas e n colunas diz-se que tem **ordem** n. Uma matriz diz-se **real** (**complexa**) se todos os seus elementos são reais (complexos). Quando todo os elementos de uma matriz são nulos a matriz diz-se uma **matriz nula**. Duas matrizes A e B com o mesmo número de linhas e colunas dizem-se do mesmo **tipo** e os elementos com os mesmos índices dizem-se **homólogos**. Duas matrizes do mesmo tipo dizem-se **iguais** quando todos os elementos homólogos são iguais. Designam-se por **elementos principais** de uma matriz quadrada, os elementos cujo índice linha é igual ao índice coluna ($a_{ii}, i = 1, \ldots, n$). Os elementos principais de uma matriz quadrada formam a **diagonal principal** ou **primeira diagonal** que é a que vai do canto superior esquerdo ao canto inferior direito da matriz. Os elementos de uma matriz quadrada

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$$

em que $i + j = n + 1$ formam a **segunda diagonal** que vai do canto superior direito ao canto inferior esquerdo da matriz. Os elementos a_{ij} e a_{ji} que se dispõem simetricamente em relação à diagonal principal designam-se por elementos **opostos**.

Uma matriz quadrada diz-se uma matriz **triangular superior** (**inferior**) se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ (quando $i < j$).

Exemplo 3.1. *As matrizes quadradas A e B a seguir representadas exemplificam uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior, respectivamente.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Por sua vez, uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ diz-se uma **matriz diagonal** (note-se que uma matrix diagonal é uma matriz triangular superior e triangular inferior). Uma matriz diagonal cujos elementos principais são todos iguais 1 designa-se por **matriz identidade** e denota-se por I ou I_n, caso se pretenda referir que tem ordem n. Sendo assim, dada uma matriz identidade I_n, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\hat{e}_i I_n \hat{e}_j = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} denota os símbolo de Kronecker ($\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$). Observe-se que a matriz identidade representa o endomorfismo identidade.

Definição 3.1. *Dada uma matriz A $m \times n$, a matriz transposta de A que se denota por A^T é a matriz que se obtém de A, trocando ordenadamente as linhas por colunas, ou seja, sendo $A = (\hat{a}_1\ \hat{a}_2\ \ldots\ \hat{a}_n) = \begin{pmatrix} \hat{a}^1 \\ \hat{a}^2 \\ \vdots \\ \hat{a}^m \end{pmatrix}$, vem que*

$$A^T = ((\hat{a}^1)^T\ (\hat{a}^2)^T\ \ldots\ (\hat{a}^n)^T) = \begin{pmatrix} (\hat{a}_1)^T \\ (\hat{a}_2)^T \\ \vdots \\ (\hat{a}_m)^T \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.2. *Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, vem que $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.*

Dada uma matriz arbitrária A é claro que $(A^T)^T = A$.

Definição 3.2. *Dada uma matriz complexa A, a conjugada de A, que se denota por $\bar{A}$, é a matriz que se obtém de A substituindo cada um dos seus elementos pelo respectivo conjugado.*

Desta definição decorre que a conjugada da conjugada de uma matriz A é a própria matriz A.

Definição 3.3. *Dada uma matriz complexa A, designa-se por transposta hermítica de A e denota-se por A^H a matriz que se obtém de A transpondo a sua conjugada, ou seja, $A^H = (\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$.*

Definição 3.4. *Designa-se por matriz simétrica (hermítica) uma matriz A que é igual à sua transposta A^T (transposta hermítica A^H).*

De acordo com esta definição, se A é uma matriz simétrica, então os elementos opostos são iguais. Por outro lado, se A é uma matriz hermítica então os elementos principais são reais e os elementos opostos são conjugados.

Definição 3.5. *Uma matriz A diz-se anti-simétrica (hemi-hermítica) ou hemi-simétrica se $A = -A^T$ $(A = -A^H)$.*

Nas matrizes hemi-simétricas os elementos opostos são simétricos e os elementos principais são nulos e nas matrizes hemi-hermíticas os elementos opostos são simétricos dos respectivos conjugados e os elementos principais são conjugados puros.

Exemplo 3.3. *Considerando as matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & 2-i \\ -2-i & -i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{e} \ F = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & 4 \end{pmatrix},$$

podemos concluir que

1. *A é uma matriz simétrica ($A = A^T$);*
2. *B é uma matriz hermítica ($B = B^H$);*
3. *C é uma matriz hemi-hermítica ($C = -C^H$);*
4. *D é uma matriz hemi-simétrica ($D = -D^T$);*
5. *F não é nenhum dos tipos de matrizes considerados.*

Observe-se que

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad C^H = \begin{pmatrix} -i & -2+i \\ 2+i & i \end{pmatrix},$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{e} \ F^H = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.2 Operações com matrizes reais

Teorema 3.1. *Dados os espaços vetoriais reais $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ de dimensão n e m, respectivamente, e escolhidas as bases ordenadas $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$ em $\mathcal{E}$ e $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_m)$ em $\mathcal{F}$, existe uma bijecção entre o conjunto das aplicações lineares de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{F}$ que denotamos por $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F})$ e o conjunto das matrizes reais $m \times n$ que denotamos por $\mathcal{M}_{m\times n}$,*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F}) &\to \mathcal{M}_{m\times n} \\ \varphi &\to \phi(\varphi)) = M_\phi = (\varphi(\hat{e}_1) \ \ldots \ \varphi(\hat{e}_n)) \end{aligned}$$

Demonstração. A prova deste teorema decorre diretamente da análise que anteriormente fizemos. □

3.2.1 Adição e multiplicação por um escalar de matrizes

Uma vez que existe uma bijecção entre $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}$, ocorre averiguar se é possível introduzir em $\mathcal{M}_{m\times n}$ a operação de adição e de multiplicação por um escalar, de modo que $\langle\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F});+,\cdot\rangle$ e $\langle\mathcal{M}_{m\times n};+,\cdot\rangle$ sejam isomorfos, sendo ϕ o correspondente isomorfismo. Para isso, impondo

$$\begin{aligned} \phi(\varphi+\psi) &= \phi(\varphi)+\phi(\psi) \\ &\text{ou} \\ M_{\varphi+\psi} &= M_\varphi + M_\psi, \end{aligned}$$

sendo $M_\varphi = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ e $M_\psi = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$, e considerando $M_{\varphi+\psi} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$, podemos introduzir a seguinte definição formal de soma de matrizes.

Definição 3.6. *Dadas duas matrizes M_φ e M_ψ de $\mathcal{M}_{m\times n}$, a soma destas duas matrizes é a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}$ onde cada elemento é igual à soma de elementos homólogos das matrizes M_φ e M_ψ.*

Por sua vez, impondo agora

$$\begin{aligned} \phi(\lambda\varphi) &= \lambda\phi(\varphi) \\ &\text{ou} \\ M_{\lambda\varphi} &= \lambda M_\varphi \end{aligned}$$

e sendo $M_\varphi = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ e $M_{\lambda\varphi} = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$, podemos introduzir a seguinte definição formal.

Definição 3.7. *Dado um escalar λ e uma matriz M_φ de $\mathcal{M}_{m\times n}$, o produto do escalar λ por M_φ é a matriz $M_{\lambda\varphi}$ de $\mathcal{M}_{m\times n}$ que se obtém de M_φ multiplicando todos os seus elementos por λ.*

Exemplo 3.4. *Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ duas matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, de acordo com as definições obtém-se*

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 1+5 & 3+7 \\ 2+6 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \\ 5A &= \begin{pmatrix} 5\times 1 & 5\times 3 \\ 5\times 2 & 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Com estas operações é imediato que ϕ é um isomorfismo entre $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}$.

3.2.2 Multiplicação de matrizes

Sejam $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ três espaços vetoriais de dimensão n, m e p, onde foram adotadas as bases ordenadas $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$, $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_m)$ e $(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_p)$, respectivamente. Por outro lado, consideremos os espaços vetoriais

$$\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F}), \quad \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{G}) \ \text{ e } \ \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{G}). \tag{3.1}$$

Note-se que estes conjuntos de aplicações lineares munidos das operações de adição de funções e multiplicação por um escalar comportam-se como espaços vetoriais.

A operação de composição de homomorfismos

$$\begin{array}{rcl} \circ : \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F}) \times \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{G}) & \to & \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{G}) \\ (\varphi, \psi) & \to & \psi \circ \varphi \end{array}$$

corresponde nos respectivo espaço das matrizes (ver Teorema 3.1), ao produto de matrizes

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{p\times m} & \to & \mathcal{M}_{p\times n} \\ (A, B) & \to & B \cdot A \end{array}$$

que evolve os espaços vetoriais $\mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathcal{M}_{p\times m}$ e $\mathcal{M}_{p\times n}$ que são isomorfos aos espaços vetoriais referidos em (3.1). Com este produto, obtém-se

$$M_{\psi\circ\varphi} = M_\psi \cdot M_\varphi.$$

Definição 3.8. *Fixadas as bases ordenadas $(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n)$, $(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_m)$ e $(\hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_p)$ nos espaços vetoriais $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, respectivamente, e sendo $M_\varphi \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $M_\psi \in \mathcal{M}_{p\times m}$ e $M_{\psi\circ\varphi} \in \mathcal{M}_{p\times n}$ as matrizes das aplicações $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{F})$, $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{G})$ e $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{G})$, vem que*

$$M_\psi \cdot M_\varphi = M_{\psi\circ\varphi},$$

ou seja, $M_{\psi\circ\varphi}$ é a matriz que se obtém do produto das matrizes M_ψ por M_φ.

Deve observar-se que no produto $M_\psi M_\varphi$ se verifica o seguinte:

1. O número de colunas de M_ψ é igual ao número de linhas de M_φ.

2. A matriz produto $M_{\psi\circ\varphi}$ tem o mesmo número de linhas da matriz M_ψ e o mesmo número de colunas da matriz M_φ.

Sendo $M_\varphi = (\varphi(\hat{e}_1)\ \varphi(\hat{e}_2)\ \ldots\ \varphi(\hat{e}_n)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e $\hat{x} \in \mathcal{E}$

tal que $\hat{x} = \alpha_1\hat{e}_1 + \cdots + \alpha_n\hat{e}_n$, vem que

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(\hat{x}) &= \psi(\varphi(\hat{x})) \\
&= \psi(\varphi(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{e}_j)) \\
&= \psi(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(\hat{e}_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \psi(\varphi(\hat{e}_j)) \\
&= \alpha_1 \psi(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\hat{f}_i) + \alpha_2 \psi(\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\hat{f}_i) + \cdots + \alpha_n \psi(\sum_{i=1}^{m} a_{in}\hat{f}_i) \\
&= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j)\psi(\hat{f}_1) + (\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\alpha_j)\psi(\hat{f}_2) + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j)\psi(\hat{f}_m) \\
&= (\psi(\hat{f}_1)\ \psi(\hat{f}_2) \cdots \psi(\hat{f}_m)) \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\alpha_j \end{pmatrix} \\
&= M_\psi \cdot M_\varphi \hat{x} = M_{\psi\circ\varphi}\hat{x}.
\end{aligned}$$

Do produto de matrizes introduzido concluímos que dadas as matrizes

$$A = (\hat{a}_1\ \hat{a}_2 \cdots \hat{a}_n) \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \hat{b}^1 \\ \hat{b}^2 \\ \vdots \\ \hat{b}^m \end{pmatrix},$$

vem que $BA = (B\hat{a}_1\ B\hat{a}_2 \cdots B\hat{a}_n) = \begin{pmatrix} \hat{b}^1 A \\ \hat{b}^2 A \\ \vdots \\ \hat{b}^m A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}^1\hat{a}_1 & \hat{b}^1\hat{a}_2 & \cdots & \hat{b}^1\hat{a}_n \\ \hat{b}^2\hat{a}_1 & \hat{a}^2\hat{a}_2 & \cdots & \hat{b}^2\hat{a}_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hat{b}^m\hat{a}_1 & \hat{b}^m\hat{a}_2 & \cdots & \hat{b}^m\hat{a}_n \end{pmatrix}.$

Teorema 3.2. *Sendo P, Q e R matrizes quadradas de ordem n, vem que*

- $P(QR) = (PQ)R$;
- $(P+Q)R = PR + QR$;
- $P(Q+R) = PQ + PR$.

Demonstração. A prova fica como exercício. □

Das definições dadas decorrem as seguintes propriedades (cuja prova fica como exercício): $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}$

- $1 \cdot A = A$;
- $0 \cdot A = \mathbf{0}$ (onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula);
- $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $\alpha(\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$;
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$;
- $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;
- $A(BC) = (AB)C$

A partir destas propriedades decorre que $A + A = 2A$, $A + A + A = 3A$, $\cdots$. Introduzindo-se a notação $(-1)A = -A$, temos que $A + (-1)A = A - A = \mathbf{0}$, $(-\alpha)A = -\alpha A$, $-(A + B) = -A - B$, $-(-A) = A$. Seguem-se alguns exemplos das operações estudadas.

- $\alpha \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \xi & \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \alpha\mu \\ \alpha\xi & \alpha\eta \end{pmatrix}$;
- $2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 29 \\ 10 & 5 & 15 \\ -3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Mesmo no caso das matrizes quadradas, com facilidade se verifica que o produto matricial no conjunto das matrizes quadradas de ordem n não é comutativo. Pode-se ainda concluir que o conjunto das matrizes quadradas reais $\mathcal{M}_{n\times n}$ munido da operação produto de matrizes estudado não vai além da estrutura algébrica de monoide, ou seja, este produto é fechado em $\mathcal{M}_{n\times n}$, goza da propriedade associativa e da existência de elemento neutro.

Relativamente à transposição de matrizes e à passagem à transposta hermítica, verificam-se as propriedades:

1. $(AB)^T = B^T A^T$,
2. $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$,
3. $(AB)^H = B^H A^H$,

cuja prova fica como exercício.

3.3 Exercícios

Exercício 3.1. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ *e* $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, *determine*

1. $B + C$;
2. BA;
3. AB;
4. CA;
5. $A(2B - 3C)$;

Exercício 3.2. *Sendo* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\boldsymbol{0}_{2\times 2}$ *a matriz nula de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$, *determine todas as matrizes* $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ *tais que*

1. $MX = \boldsymbol{0}_{2\times 2}$;
2. $XM = \boldsymbol{0}_{2\times 2}$;

Exercício 3.3. *Determine os escalares* a, b, c *e* d *que satisfazem as seguintes equações:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercício 3.4. *Determine* $AB - BA$, *nos casos em que*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{pmatrix}$;

Exercício 3.5. *Se* A *é uma matriz quadrada, mostre que* $A^n A^m = A^{n+m}$, *para* $n \geq 0, m \geq 0$ *e considerando* $A^0 = I$.

Exercício 3.6. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *verifique que* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e determine* A^n, *onde* n *é um número natural arbitrário.*

Exercício 3.7. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, *verifique que* $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ *e determine* A^n, *onde* n *é um número natural arbitrário.*

Exercício 3.8. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *verifique que* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e determine* A^3 *e* A^4.

Exercício 3.9. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *mostre que* $A^2 = 2A - I$ *e calcule* A^{100}

Exercício 3.10. *Indique todas as matrizes* $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ *tais que* $X^2 = \boldsymbol{0}_{2\times 2}$.

Exercício 3.11. *Sabendo que, por definição, duas matrizes* A *e* B *comutam se* $AB = BA$, *mostre que uma matrix* $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ *comuta com qualquer matriz de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$ *se e só se comuta com cada uma das quatro matrizes* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Determine estas matrizes.*

Exercício 3.12. *Sendo* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, *determine todas as matrizes* $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ *tais que* $AX = XA = B$.

Exercício 3.13. *Considere as igualdades matriciais*

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \tag{3.2}$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2. \tag{3.3}$$

1. *Verifique que as igualdades* (3.2) *e* (3.3) *não são verificadas para as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Corrija os segundos membros das igualdades* (3.2) *e* (3.3) *para que sejam válidas para qualquer matriz de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

3. *Quais as matrizes para as quais são válidas as igualdades* (3.2) *e* (3.3).

Capítulo 4

Determinantes

4.1 Formas multilineares

Antes de estudarmos os determinantes, vamos introduzir o conceito de forma multilinear.

Definição 4.1. *Uma forma linear é um homomorfismo de um e.v. no corpo subjacente a esse espaço.*

Assim, sendo $\mathcal{V}$ um e.v. sobre o corpo K, a aplicação $f : \mathcal{V} \to K$ tal que $\forall \alpha, \beta \in K \ \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{V} \ f(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \alpha f(\hat{x}) + \beta f(\hat{y})$ é uma forma linear.

Suponhamos que $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ and $\mathcal{W}$ são espaços vetoriais sobre o corpo K e considere-se a aplicação $f : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Diz-se que f é uma aplicação bilinear, se satisfaz as seguintes condições:

1. $f(\hat{u}_1 + \hat{u}_2, \hat{v}) = f(\hat{u}_1, \hat{v}) + f(\hat{u}_2, \hat{v})$,
2. $f(\alpha\hat{u}, \hat{v}) = \alpha f(\hat{u}, \hat{v})$,
3. $f(\hat{u}, \hat{v}_1 + \hat{v}_2) = f(\hat{u}, \hat{v}_1) + f(\hat{u}, \hat{v}_2)$,
4. $f(\hat{u}, \beta\hat{v}) = \beta f(\hat{u}, \hat{v})$,

ou seja, se é linear nos dois argumentos.

No caso particular de $\mathcal{W} = K$, dizemos que f é uma forma bilinear.

Vamos considerar agora os espaços vetoriais $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ e Γ sobre o corpo K, diz-se que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} & \to & \Gamma \\ (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) & \to & f(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \end{array}$$

é trilinear se é linear em cada um dos seus três argumentos. Ou seja, considerando os vetores $\hat{a} \in \mathcal{U}$, $\hat{b} \in \mathcal{V}$ e $\hat{c} \in \mathcal{W}$,

- $f(\hat{a}, \hat{b}, \hat{z})$ é linear em $\hat{z}$, com $\hat{a}, \hat{b}$ fixos,
- $f(\hat{a}, \hat{y}, \hat{c})$ é linear em $\hat{y}$, com $\hat{a}, \hat{c}$ fixos,
- $f(\hat{x}, \hat{b}, \hat{c})$ é linear em $\hat{x}$, com $\hat{b}, \hat{c}$ fixos.

No caso particular de $\Gamma = K$, diz-se que f é uma forma trilinear.

Mais geralmente:

Definição 4.2. *Sendo $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_p$ e $\mathcal{U}$ espaços vetorias sobre o corpo K, a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_p & \to & \mathcal{U} \\ (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_p) & \to & (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_p) \end{array}$$

diz-se p-linear se é linear em cada um dos argumentos.

Da definição dada decorre que se fixarmos $p-1$ quaisquer dos argumentos de $f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_p)$, a aplicação obtida é linear no argumento que resta. Em particular, se o e.v. de chegada $\mathcal{U}$ é o corpo K subjacent, a aplicação p-linear diz-se uma forma p-linear.

Exemplo 4.1. *Seguem-se alguns exemplos de formas p-lineares.*

1. *Sejam $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \cdots = \mathcal{U}_p = \mathcal{U} = K$. Então*

$$\begin{array}{rcl} f : K^p & \to & K \\ (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_p) & \to & f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p) = \hat{u}_1 \hat{u}_2 \cdots \hat{u}_p \end{array}$$

   é uma forma p-linear.

2. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ espaços vetoriais sobre o corpo K e considerem-se as formas lineares $g : \mathcal{U} \to K$ e $h : \mathcal{V} \to K$. Então*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{U} \times \mathcal{V} & \to & K \\ (\hat{u}, \hat{v}) & \to & f(\hat{u}, \hat{v}) = g(\hat{u}) h(\hat{v}) \end{array}$$

   é uma forma bilinear.

3. *Sejam $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_p$, espaços vetoriais sobre o corpo K, $g_i : \mathcal{U}_i \to K$ formas lineares, para $i = 1, \ldots, p$. Então*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_p & \to & K \\ (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_p) & \to & f(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_p) = g_1(\hat{u}_1) g_2(\hat{u}_2) \cdots g_p(\hat{u}_p), \end{array}$$

   é uma forma p-linear.

4.2 Aplicações multilineares alternadas

Definição 4.3. *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ espaços vetoriais sobre o corpo K. A aplicação $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ diz-se bilinear alternada se verifica as seguinte condição:*

$$\forall \hat{x} \in \mathcal{U} \qquad f(\hat{x}, \hat{x}) = \hat{0}.$$

Teorema 4.1. *Dada uma aplicação bilinear $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são espaços vetoriais sobre um corpo K, f é alternada se e só se $f(\hat{x}, \hat{y}) = -f(\hat{y}, \hat{x})$.*

Demonstração.

$\Rightarrow$ Se f é alternada, então $f(\hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}) = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}) &= f(\hat{x}, \hat{x} + \hat{y}) + f(\hat{y}, \hat{x} + \hat{y}) \\ &= f(\hat{x}, \hat{x}) + f(\hat{x}, \hat{y}) + f(\hat{y}, \hat{x}) + f(\hat{y}, \hat{y}) \\ &= f(\hat{x}, \hat{y}) + f(\hat{y}, \hat{x}) \end{aligned}$$

Logo, vem que $f(\hat{x}, \hat{y}) = -f(\hat{x}, \hat{y})$.

$\Leftarrow$ Se $f(\hat{x}, \hat{y}) = -f(\hat{x}, \hat{y})$ $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathcal{U}$, então em particular $f(\hat{x}, \hat{x}) = -f(\hat{x}, \hat{x})$ $\forall \hat{x} \in \mathcal{U}$. Logo, $2f(\hat{x}, \hat{x}) = 0 \Rightarrow f(\hat{x}, \hat{x}) = 0$.

$\square$

Exemplo 4.2. *Sendo $g : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ uma aplicação bilinear arbitrária e $f : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ tal que $f(\hat{x}, \hat{y}) = g(\hat{x}, \hat{y}) - g(\hat{y}, \hat{x})$, conclui-se imediatamente que f é bilinear alternada.*

Definição 4.4. *Sejam $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_p$ e $\mathcal{U}$ espaços vetorias sobre o corpo K e $f : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_p \to \mathcal{U}$ uma aplicação p-linear. Diz-se que f é alternada se se anula quando dois dos seus argumentos são iguais.*

Teorema 4.2. *Uma aplicação p-linear é alternada se e só se mudar de sinal sempre que dois dos seus argumentos permutam entre si.*

Demonstração. Considere-se a aplicação p-linear $f : \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \cdots \times \mathcal{U}_p \to \mathcal{U}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que a aplicação p-linear f é alternada. Então

$$\begin{aligned} 0 &= f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k + \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k + \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) \\ &= f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_k + \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) + f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k + \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) \\ &= f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_p) + f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) \\ &\quad + f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_p) + f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) \\ &= f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) + f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_p). \end{aligned}$$

Logo, $f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) = -f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_p)$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que se verifica a igualdade

$$f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_p) = -f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_l, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_p),$$

para qualquer dos argumentos e quaisquer que sejam os vetores. Em particular, vem que $f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}_p) = -f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}_p)$ e, consequentemente, $2f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}_p) = \hat{0}$, pelo que

$$f(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}, \ldots, \hat{u}_p) = \hat{0}.$$

□

4.3 Definição de determinante

Seja $\mathcal{M}_n$ o e.v. sobre o corpo K das matrizes quadradas de ordem n com entradas em K. Então, encarando estas matrizes como sequências de vetores coluna $A = (\hat{a}_1 \ \ldots \ \hat{a}_n)$, temos a seguinte definição.

Definição 4.5. *Designa-se por determinante de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ uma forma*

$$\begin{array}{rcl} \det : \mathcal{M}_n & \to & K \\ A = (\hat{a}_1 \ \ldots \ \hat{a}_n) & \rightsquigarrow & \det(A) = \det(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n). \end{array}$$

que é multilinear, alternada e normalizada.

De acordo com a definição, o determinante de ordem n é uma forma do e.v. sobre um corp K das matrizes $n \times n$ com entradas em K que satisfaz as condições de ser

1. multilinear, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k + \hat{v}, \ldots, \hat{u}_n) & = & \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_n) + \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{v}, \ldots, \hat{u}_n) \\ \det(\hat{u}_1, \ldots, \lambda\hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_n) & = & \lambda \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k, \ldots, \hat{u}_n); \end{array}$$

2. alternada, ou seja,

$$\det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_n) \quad = \quad 0;$$

3. normalizada, ou seja,

$$\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n) \quad = \quad 1.$$

Vamos analisar algumas consequências desta definição. Seja $A \in \mathbb{M}_n$

1. Se algum dos vetores coluna da matriz A é o vetor nulo, então o determinante de A é zero.
Prova. Com efeito,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{0}, \ldots, \hat{u}_n)\\ &= 0 \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{v}, \ldots, \hat{u}_n),\end{aligned}$$

onde $\hat{v}$ é um vetor coluna arbitrário.

2. Se permutamos duas colunas de A entre si , então o determinante muda de sinal.

3. Se uma coluna é combinação linear de outras colunas, então o determinante é nulo.
Prova. Com efeito, para simplificar, considerando o caso particular da combinação linear de duas colunas, obtém-se

$$\begin{aligned}\det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, \lambda\hat{u}_i + \mu\hat{u}_j, \ldots, \hat{u}_n) &=\\ \lambda \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_n) + \mu \det(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, \hat{u}_n) &= 0.\end{aligned}$$

4. Se uma matriz B se obtém de uma matriz A, multiplicando A por um número real α, ou seja, $B = \alpha A$, então

$$\det(B) = \alpha^n \det(A).$$

Prova. Com efeito,

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(\alpha\hat{a}_1, \alpha\hat{a}_2, \ldots, \alpha\hat{a}_k, \alpha\hat{a}_{k+1}, \ldots, \alpha\hat{a}_n)\\ &= \alpha \det(\hat{a}_1, \alpha\hat{a}_2, \ldots, \alpha\hat{a}_k, \alpha\hat{a}_{k+1}, \ldots, \alpha\hat{a}_n)\\ &\vdots\\ &= \alpha^k \det(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k, \alpha\hat{a}_{k+1}, \ldots, \alpha\hat{a}_n)\\ &\vdots\\ &= \alpha^n \det(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_k, \hat{a}_{k+1}, \ldots, \hat{a}_n).\end{aligned}$$

Para denotar o determinante de uma matriz A, além de $\det(A)$, também se utiliza $|A|$.

Vamos obter uma expressão genérica do terminante de uma matriz $A = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n)$ em função dos determinantes das matrizes que se obtêm das possíveis permutações das colunas da matriz identidade (que são vetores da base canónica). Para isso, vamos começar por exprimir cada um dos vetores coluna $\hat{a}_j$ da matriz A em função da base canónica, ou seja,

$$\hat{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{e}_i, \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Então vem que

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\hat{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k}\hat{e}_{i_k}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\hat{e}_{i_n}\Big) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \det\Big(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k}\hat{e}_{i_k}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\hat{e}_{i_n}\Big) \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \left(\cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} \det\Big(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{in}\hat{e}_i\Big)\right) \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \left(\cdots \sum_{i_k=1}^{n} a_{i_k k} \left(\cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} \det(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_k}, \ldots, \hat{e}_{i_n}) \cdots \right) \cdots \right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n)} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \cdots a_{i_n n} \det(\hat{e}_{i_1}, \ldots, \hat{e}_{i_k}, \ldots, \hat{e}_{i_n}), \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

onde, na última expressão, o somatório é estendido a todas as permutações $(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$ possíveis dos índices $1, \ldots, n$, ficando de fora do desenvolvimento os termos em que pelo menos dois argumentos do determinante aparecem com os mesmos vetores da base canónica (dado que, nesses casos, o determinante é nulo).

Exemplo 4.3. *Vamos determinar o determinante* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. *Então,*

$$
\begin{aligned}
\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) &= \det(a_{11}\hat{e}_1 + a_{21}\hat{e}_2, a_{12}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2) \\
&= a_{11}\det(\hat{e}_1, a_{12}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2) + a_{21}\det(\hat{e}_2, a_{12}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2) \\
&= a_{11}a_{12}\det(\hat{e}_1, \hat{e}_1) + a_{11}a_{22}\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \\
&\quad + \quad a_{21}a_{12}\det(\hat{e}_2, \hat{e}_1) + a_{21}a_{22}\det(\hat{e}_2, \hat{e}_2) \\
&= a_{11}a_{22}\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2) - a_{21}a_{12}\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2) \\
&= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.
\end{aligned}
$$

Observe-se que $\det(\hat{e}_2, \hat{e}_1) = -\det(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$.

4.4 Alguns resultados sobre permutações

Definição 4.6. *Designa-se por permutação dos elementos de um conjunto M, uma aplicação injectiva de M em si mesmo.*

Seja $[n]$ o conjunto finito $[n] = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ e seja σ uma permutação dos elementos de $[n]$, tal que $\sigma(1) = j_1, \sigma(2) = j_2, \ldots, \sigma(n) = j_n$. Podemos representar esta permutação escrevendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \qquad \text{ou simplesmente} \qquad \sigma = (j_1\ j_2\ \ldots\ j_n).$$

Exemplo 4.4. *São exemplos de permutações dos elementos do conjunto* $[4]$*:*

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

2. $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Definição 4.7. *Considere-se a permutação dos elementos do conjunto* $[n]$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \ldots\ \sigma(n))$. *Diz-se que ocorre uma inversão em* σ *ou que o par* $(\sigma(i), \sigma(j))$ *constitui uma inversão, se* $i < j$ *e* $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Exemplo 4.5. *A permutação* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3\ 1\ 4\ 2)$ *tem as inversões:* $(3, 1)$, $(3, 2)$ *e* $(4, 2)$.

Um modo sistemático de determinação do número de inversões de uma dada permutação σ de elementos de $[n]$ é o seguinte:

> Seja l_s o número de elementos que precedem s na permutação e são maiores de que s e determine-se l_s, para $s = 1, \ldots, n$. Então o número de inversões vem dado por $l = \sum_{s=1}^{n} l_s$.
> No caso particular da permutação anterior $\sigma = (3\ 1\ 4\ 2)$, obtém-se
>
> 1. Para $s = 1$ obtém-se a inversão $(3, 1)$, pelo que $l_1 = 1$.
> 2. Para $s = 2$ obtêm-se as inversões $(3, 2)$ e $(4, 2)$, pelo que $l_2 = 2$.
> 3. Para $s = 3$ não existem inversões, pelo que $l_3 = 0$.
> 4. Para $s = 4$ é claro que não existem inversões, pelo $l_4 = 0$.
>
> Assim, o número de inversões é $l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 1 + 2 + 0 + 0 = 3$.

Definição 4.8. *Designa-se por sinal de uma permutação* σ *e denota-se por* $\varepsilon(\sigma)$ *o número* $(-1)^l$, *onde* l *denota o número de inversões de* σ.

4.5 Expressão geral do determinante

Considerando agora a expressão geral (4.1) do determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, podemos concluir que em cada termo

$$a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \cdots a_{i_n n} \det(\hat{e}_{i_1}, \dots, \hat{e}_{i_k}, \dots, \hat{e}_{i_n}),$$

considerando a permutação $\sigma = (i_1 \ \dots \ i_k \ \dots \ i_n)$, após um número l de permutações de pares de argumentos igual ao número de inversões obtém-se

$$a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \cdots a_{i_n n} (-1)^l \det(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_k, \dots, \hat{e}_n) = (-1)^l a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \cdots a_{i_n n}.$$

Assim, sendo S_n o conjunto de todas as permutações dos elementos de $[n]$, podemos escrever a expressão geral (4.1) do determinante de uma matriz quadrada A de ordem n da seguinte forma:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(k)k} \cdots a_{\sigma(n)n} \varepsilon(\sigma). \tag{4.2}$$

É claro que se obtém o mesmo resultado no caso de serem os índices linha a permanecerem pela ordem natural considerando-se em cada termo uma permutação dos índices coluna, ou seja,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} \varepsilon(\sigma). \tag{4.3}$$

De qualquer das expressões (4.2) e (4.3) obtidas se conclui que uma forma definida no conjunto das matrizes quadradas de ordem n, $\mathcal{M}_n$, que seja multilinear, alternada e normalizada é única. Logo, o determinate das matrizes quadradas de ordem n com entradas em K é a única forma com estas propriedades.

4.6 Algumas propriedades dos determinantes

Como consequência imediata da equivalência entre as expressões (4.2) e (4.3), podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 4.3. *Dada uma matriz quadrada arbitrária A,*

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Teorema 4.4. *O determinante de uma matriz triangular superior (ou seja, uma matriz $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ tal que $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$), é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.*

Demonstração. Sendo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, vem que

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

1. Se $\sigma(n) \neq n$, então $\sigma(n) < n \Rightarrow a_{n\sigma(n)} = 0$. Logo, em todos os termos não nulos $\sigma(n) = n$ e consequentemente, $|A| = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{nn}$.

2. Se $\sigma(j) \neq j$, com $j < n$, então $\sigma(j) < j \Rightarrow a_{j\sigma(j)} = 0$. Logo, em todos os termos não nulos $\sigma(j) = j$, pelo que

$$|A| = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{jj} \cdots a_{nn}$$

   e prosseguindo de modo idêntico para $j-1, \ldots, 2, 1$ concluímos o que se pretende, ou seja,

$$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1n-1} a_{nn}.$$

   Note-se que não existem inversões na permutação $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ (n-1)\ n)$.

□

Teorema 4.5. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, se uma matriz B se obtém de A por adição de um múltiplo escalar de uma dada fila (linha ou coluna) a outra fila, então* $\det(A) = \det(B)$.

Demonstração. Seja $A = (\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_p \cdots \hat{a}_q \cdots \hat{a}_n)$ e $B = (\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_p \cdots \hat{a}_q + \alpha \hat{a}_p \cdots \hat{a}_n)$, então

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_q + \alpha\hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_n) \\
&= \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_q, \cdots, \hat{a}_n) + \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \alpha\hat{a}_p, \cdots \hat{a}_n) \\
&= \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_q, \cdots, \hat{a}_n) + \alpha \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_n) \\
&= \det(\hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_p, \cdots, \hat{a}_q, \cdots, \hat{a}_n) \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$

A prova relativa à transformação de matrizes por adição de um múltiplo escalar de uma linha a outra linha, é idêntica, tendo em conta que o determinante de uma matriz é igual ao determinate de sua transposta. □

Teorema 4.6. *Dada uma matriz quadrada $A = (\hat{a}_1\ \hat{a}_2\ \cdots\ \hat{a}_n)$,* $\det(A) \neq 0$ *se e só se os vetores coluna $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Provar este teorema é equivalente a provar que $\det(A) = 0$ se e só se $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ são linearmente dependentes.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\det(A) = 0$ e que os vetores coluna $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ são linearmente independentes. Então o conjunto destes vetores forma uma base de para K^n (onde K é o corpo das entradas de A), pelo que os vetores da base canónica podem exprimir-se nesta base, ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1}\hat{a}_i \\
\hat{e}_2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2}\hat{a}_i \\
&\vdots \\
\hat{e}_n &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\hat{a}_i
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
1 &= \det(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1}\hat{a}_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2}\hat{a}_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\hat{a}_i) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \alpha_{i_1 1}\alpha_{i_2 2}\cdots\alpha_{i_n n} \det(\hat{a}_{i_1}, \hat{a}_{i_2}, \ldots, \hat{a}_{i_n}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

o que é contraditório. A contradição decorre de havermos suposto que apesar do determinante ser nulo as colunas de A seriam linearmente independentes. Logo, $\det(A) = 0 \Rightarrow \hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ linearmente dependentes.

($\Leftarrow$) Suponhamos que os vetores coluna $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ são linearmente dependentes, ou seja, existem escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, não todos nulos, tais que $\hat{0} = \beta_1\hat{a}_1 + \beta_2\hat{a}_2 + \cdots + \beta_n\hat{a}_n$. Supondo que $\beta_k \neq 0$, vem que

$$\hat{a}_k = \sum_{j\neq k} \frac{-\beta_j}{\beta_k}\hat{a}_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|A| &= \det(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{k-1}, \sum_{j\neq k} \frac{-\beta_j}{\beta_k}\hat{a}_j, \hat{a}_{k+1}, \ldots, \hat{a}_n) \\
&= \sum_{j\neq k} \frac{-\beta_j}{\beta_k} \det(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_j, \hat{a}_{k+1}, \ldots, \hat{a}_n).
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $\det(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{k-1}, \hat{a}_j, \hat{a}_{k+1}, \ldots, \hat{a}_n) = 0$, para $j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$, vem que $|A| = 0$.

□

O teorema a seguir estabelece uma propriedade muito importante do determinante.

Teorema 4.7. *O determinante do produto de duas matrizes quadradas de ordem n é igual ao produto dos determinantes de cada uma das matrizes.*

Demonstração. Dadas duas matrizes arbitrárias $A, B \in \mathcal{M}_n$, vamos considerar $B = (b_1\, b_2\, \cdots\, b_n)$.

1. Suponhamos que $\det(A) = 0$. Então, tendo em conta o Teorema 4.6, podemos concluir que os vetores coluna da matriz A são linearmente dependentes e, consequentemente, os vetores coluna da matriz $AB = (Ab_1\, \cdots\, Ab_n)$ são também linearmente dependentes. Com efeito, os vetores coluna da matriz AB são combinações lineares dos vetores coluna da matriz A, ou seja, sendo $A = (\hat{a}_1\, \cdots \hat{a}_n)$, vem que $Ab_1, \ldots, Ab_n \in \mathcal{L}(\{\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n\})$ e neste espaço não existem n vetores linearmente independentes. Logo, $\det(AB) = 0$, pelo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

2. Suponhamos que $\det(A) \neq 0$. Neste caso, vamos começar por definir a forma

$$\begin{array}{rcl} \phi_A : \mathcal{M}_n & \to & K \\ B & \rightsquigarrow & \phi_A(B) = \dfrac{\det(AB)}{\det(A)}. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que esta forma é (i) multilinear, (ii) alternada e (iii) normalizada. Com efeito,

(i) Se $C = (\hat{c}_1\, \cdots\, \hat{c}_k + \hat{c}'_k\, \cdots\, \hat{c}_n)$, com $k \in \{1, \ldots, k, \ldots, n\}$, então

$$\begin{aligned} \phi_A(C) &= \phi_A(\hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_k + \hat{c}'_k, \cdots, \hat{c}_n) = \frac{\det(AC)}{\det(A)} \\ &= \frac{\det(A\hat{c}_1, \ldots, A\hat{c}_k + A\hat{c}'_k, \ldots, A\hat{c}_n)}{\det(A)} \\ &= \frac{\det(A\hat{c}_1, \ldots, A\hat{c}_k, \ldots, A\hat{c}_n) + \det(A\hat{c}_1, \ldots, A\hat{c}'_k, \ldots, A\hat{c}_n)}{\det(A)} \\ &= \phi_A(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, \hat{c}_n) + \phi_A(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}'_k, \ldots, \hat{c}_n). \end{aligned}$$

Se $\lambda \in K$ e $C = (\hat{c}_1\, \cdots\, \lambda\hat{c}_k\, \cdots \hat{c}_n)$, com $k \in \{1, \ldots, k, \ldots, n\}$, então

$$\begin{aligned} \phi_A(C) &= \phi_A(\hat{c}_1, \ldots, \lambda\hat{c}_k, \ldots, \hat{c}_n) = \frac{\det(AC)}{\det(A)} \\ &= \frac{\det(A\hat{c}_1, \ldots, \lambda A\hat{c}_k, \ldots, A\hat{c}_n)}{\det(A)} \\ &= \frac{\lambda\det(A\hat{c}_1, \ldots, A\hat{c}_k, \ldots, A\hat{c}_n)}{\det(A)} \\ &= \lambda\phi_A(\hat{c}_1, \cdots, \hat{c}_k, \cdots, \hat{c}_n). \end{aligned}$$

(ii) Sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, e considere-se a matriz $C = (\hat{c}_1\, \cdots\, \hat{c}\, \cdots\, \hat{c}\, \cdots\, \hat{c}_n)$, onde a i-ésima e a j-sima colunas são iguais a $\hat{c}$. Então vem

$$\begin{aligned}\phi_A(C) &= \phi_A(\hat{c}_1, \cdots, \hat{c}, \cdots, \hat{c}, \cdots, \hat{c}_n) = \frac{\det(AC)}{\det(A)} \\ &= \frac{\det(A\hat{c}_1, \cdots, A\hat{c}, \cdots, A\hat{c}, \cdots, A\hat{c}_n)}{\det(A)} = 0.\end{aligned}$$

(iii) Definindo-se a matriz identidade I de ordem n pela sequência de vetores coluna $(\hat{e}_1 \ \ldots \ \hat{e}_n)$ da base canónica de K^n, vem

$$\phi_A(I) = \phi_A(\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n) = \frac{\det(AI)}{\det(A)} = \frac{\det(A)}{\det(A)} = 1.$$

Como o determinante é a única forma multilinear, alternada e normalizada definida em $\mathcal{M}_n$, podemos concluir que $\det(B) = \phi_A(B) = \frac{\det(AB)}{\det(A)}$. Logo, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

Como consequência imediata deste teorema, decorrem as seguintes propriedades:

(1) $\det(ABC \cdots) = \det(A)\det(B)\det(C)\cdots$;

(2) $\det(A^n) = (\det(A))^n$;

(3) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(A^T B) = \det(AB^T) = \det(A^T B^T)$.

Como exemplo de aplicação da propriedade (3), vamos deduzir a identidade de Lagrange.

Exemplo 4.6. *Vamos deduzir a identidade* (4.4)*, a seguir indicada, conhecida por identidade de Lagrange.*

$$\forall x, y, u, v \in \mathbb{R} \qquad (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - uy)^2. \tag{4.4}$$

Solução. Seja $A = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Então

$$\det(A) = xv - uy \Rightarrow (\det(A))^2 = (xv - uy)^2.$$

Uma vez que

$$(\det(A))^2 = \det(AA^T) = \det(\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} x^2+y^2 & xu+yv \\ xu+yv & u^2+v^2 \end{pmatrix}),$$

vem que

$$(\det(A))^2 = (x^2+y^2)(u^2+v^2)-(xu+yv)^2 \Leftrightarrow (x^2+y^2)(u^2+v^2) = (xu+yv)^2+(\det(A))^2.$$

■

Definição 4.9. *Designa-se por característica de uma matriz não nula A e denota-se por caract(A), a ordem do determinante não nulo de maior ordem que se possa extrair da matriz A por eliminação de linhas e/ou colunas.*

4.7 Regras práticas para o cálculo de determinantes

Vamos iniciar esta secção com a apresentação de alguma regras práticas para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 3.

4.7.1 Cálculo de determinantes de ordem 3

1. **Regra de Sarrus (1^a versão).** Se $A \in \mathcal{M}_3$, então podemos aplicar a regra de Sarrus que passamos a descrever.
   Sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, o determinante de A vem dado pela soma de 6 termos $t_1 + t_2 + t_3 - t_4 - t_5 - t_6$, cada um dos quais é produto de três entradas de A escolhidas da seguinte forma.

   (a) Os elementos da diagonal principal $\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$, $t_1 = a_{11}a_{22}a_{33}$.

   (b) Os elementos que aparecem a negrito $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$ e que são os vértices de um triângulo com um dos lados abaixo da diagonal principal e paralelo a ela, ou seja, $t_2 = a_{21}a_{32}a_{13}$.

   (c) Os elementos que aparecem a negrito $\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ e que são os vértices de um triângulo com um dos lados acima da diagonal principal e paralelo a ela, ou seja, $t_3 = a_{12}a_{23}a_{31}$.

   (d) Os elementos da segunda diagonal $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $t_4 = a_{13}a_{22}a_{31}$.

   (e) Os elementos que aparecem a negrito $\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{a_{12}} & a_{13} \\ \mathbf{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}$ e que são os vértices de um triângulo com um dos lados acima da segunda diagonal e paralelo a ela, ou seja, $t_5 = a_{12}a_{21}a_{33}$.

   (f) Os elementos que aparecem a negrito $\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \\ a_{31} & \mathbf{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix}$ e que são os vértices de um triângulo com um dos lados abaixo da segunda diagonal e paralelo a ela, ou seja, $t_6 = a_{11}a_{23}a_{32}$.

   Assim, vem que

   $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

2. **Regra de Sarrus (2^a versão)**. Após a ultima linha, repetem-se as duas primeiras e os termos con sinal positivo são o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elements das diagonais que lhe são paralelas e os termos com sinal negativo são o produtos dos elementos da segunda diagonal e os produtos dos elementos das diagonais que lhe são paralelas. Ou seja, considerando a matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & \underline{a_{13}} \\ \mathbf{a_{21}} & \underline{\mathbf{a_{22}}} & \underline{a_{23}} \\ \underline{\mathbf{a_{31}}} & \underline{\mathbf{a_{32}}} & \underline{\mathbf{a_{33}}} \\ \underline{a_{11}} & \underline{\mathbf{a_{12}}} & \mathbf{a_{13}} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} & \mathbf{a_{23}} \end{pmatrix}$, $|A| =$ $\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} + \mathbf{a_{21}a_{32}a_{13}} + \mathbf{a_{31}a_{12}a_{23}}$ - $\underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{23}a_{32}a_{11}} - \underline{a_{33}a_{12}a_{21}}$.

3. **Regra de Sarrus (3^a versão)**. Após a ultima coluna, repetem-se as duas primeiras e os termos con sinal positivo são o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elements das diagonais que lhe são paralelas e os termos com sinal negativo são o produtos dos elementos da segunda diagonal e os produtos dos elementos das diagonais que lhe são paralelas. Ou seja, considerando a matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \underline{\mathbf{a_{13}}} & \underline{a_{11}} & \underline{a_{12}} \\ a_{21} & \underline{\mathbf{a_{22}}} & \underline{\mathbf{a_{23}}} & \underline{\mathbf{a_{21}}} & a_{22} \\ \underline{a_{31}} & \underline{a_{32}} & \underline{\mathbf{a_{33}}} & \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{pmatrix}$, $|A| =$ $\mathbf{a_{11}a_{22}a_{33}} + \mathbf{a_{12}a_{23}a_{31}} + \mathbf{a_{13}a_{21}a_{32}}$ - $\underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}}$.

4.7.2 Teorema de Laplace e sua generalização

Definição 4.10. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Designa-se por menor de ordem p o determinante da submatriz de A constituída pelas entradas comuns a p linhas e p colunas ($p < n$). No caso de se tratar da submatriz determinada pelo cruzamento das linhas $i_1, \ldots, i_p$ e das colunas $j_1, \ldots, j_p$ este menor de ordem p denota-se por*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_p \end{pmatrix}.$$

Definição 4.11. *Um menor diz-se par (respectivamente impar) conforme a soma dos números de ordem das linhas mais a soma dos números de ordem das colunas da matriz A que lhe deram origem seja par (respectivamente impar).*

Por exemplo, considerando a matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & | & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & | & 0 & 3 & 4 \\ - & - & | & - & - & - \\ 4 & 3 & | & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & | & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & | & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) \tag{4.5}$$

vem que $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$ é um menor par (uma vez que $1+2+1+2=6$).

Definição 4.12. *Um menor diz-se principal se a sua diagonal principal é formada por elementos da diagonal principal da matriz que lhe deu origem.*

Por exemplo, o menor $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é um menor principal.

Definição 4.13. *Designa-se por menor complementar do menor*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix}$$

o menor constituído pelas entradas de A definidas pelos cruzamentos de todas as linhas cujos índices não pertencem a $\{i_1, \dots, i_p\}$ e todas as colunas cujos índices não pertencem a $\{j_1, \dots, j_p\}$

Por exemplo, o menor complementar de $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, onde A denota a matriz (4.5), é o menor $A\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Definição 4.14. *Designa-se por complemento algébrico do menor*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

o produto do seu menor complementar por $+1$ ou por -1 consoante o menor (4.6) seja par ou impar. No acaso particular de menor ser um elemento a_{ij}, o seu complemento algébrico vem dado por $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, onde A_{ij} denota a submatriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j.

O complemento algébrico de $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, onde A denota a matriz (4.5), vem dado por

$$(-1)^{1+2+1+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.8 (Teorema de Laplace)**.** *O determinante de uma matriz quadrada A é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos respectivos complementos algébricos, ou seja, sendo*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pk} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

vem que $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{pj}(-1)^{p+j}\det(A_{pj}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\det(A_{ik}) \;\; \forall p, k \in \{1, \dots, n\}$.

O teorema de Laplace pode generalizar-se do seguinte modo.

Teorema 4.9 (Teorema de Laplace generalizado)**.** *O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é igual à soma dos produtos dos menores contidos em p $(p < n)$ filas paralelas pelos respectivos complementos algébricos.*

A prova de ambos os teoremas decorre diretamente da expressão geral do determinante. Segue-se um exemplo que ilustra a aplicação do teorema de Laplace generalizado.

Exemplo 4.7. *Considere a matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e todos os menores contidos nas duas primeiras linhas, i. e,*

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}),\ \det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})\ \det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})\ \det(\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})$$

$$\det(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})\ \ e\ \ \det(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}).$$

Por aplicação do teorema de Laplace generalizado, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+1+2}\det(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) \\
&\quad + \det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+1+3}\det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}) \\
&\quad + \det(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+1+4}\det(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}) \\
&\quad + \det(\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+2+3}\det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \\
&\quad + \det(\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+2+4}\det(\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) \\
&\quad + \det(\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix})(-1)^{1+2+3+4}\det(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}).
\end{aligned}$$

4.8 Matriz adjunta e matriz inversa

Definição 4.15. *Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, designa-se por **matriz dos complementos algébricos** de A a matriz quadrada de ordem n cujo elemento (i, j) é o complemento algébrico de a_{ij}, ou seja, $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. A transposta desta matriz designa-se por **adjunta** da matriz A e denota-se por adj A.*

De acordo com esta definição, sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, adj $A =$
$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & (-1)^{2+1}\det(A_{21}) & \cdots & (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) \\ (-1)^{1+2}\det(A_{12}) & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & \cdots & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) & \cdots & (-1)^{n+n}\det(A_{nn}) \end{pmatrix}$. Calculando o produto destas duas matrizes, $A(\text{adj } A)$, obtém-se

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{2+j}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{n+j}\det(A_{nj}) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n a_{2j}(-1)^{2+j}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{2j}(-1)^{n+j}\det(A_{nj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n a_{nj}(-1)^{2+j}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{nj}(-1)^{1n+j}\det(A_{nj}) \end{pmatrix}.$$

que corresponde à matriz

$$\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|I. \tag{4.8}$$

Note-se que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj}(-1)^{q+j}\det(A_{qj}) = \begin{cases} |A|, & \text{se } p = q; \\ 0, & \text{se } p \neq q. \end{cases}$$

Com efeito, se $p = q$, então $\sum_{j=1}^n a_{pj}(-1)^{q+j}\det(A_{qj})$ é a expressão obtida para o cálculo do determinante de A, quando se aplica o teorema de Laplace ao longo da p-ésima linha de A. Quando $p \neq q$, a expressão obtida corresponde ao cálculo do determinante aplicando o teorema de Laplace ao longo da q-ésima linha da matriz que é obtida de A modificando-a de modo que as linhas p e q sejam iguais. Da mesma forma se conclui que $(\text{adj } A)A = |A|I$.

Definição 4.16. *Designa-se por inversa de uma matriz quadrada A a matriz B tal que $BA = AB = I$. A inversa de A denota-se, usualmente, por A^{-1}.*

Como consequencia da igualdade (4.8), quando $|A| \neq 0$ vem que

$$A(\frac{1}{|A|}\text{adj } A) = (\frac{1}{|A|}\text{adj } A)A = I,$$

ou seja, $\frac{1}{|A|}\text{adj } A$ é a inversa da matriz A.

Definição 4.17. *Uma matriz quadrada A diz-se não singular se o seu determinante é não nulo (ou sejan $|A| \neq 0$).*

Teorema 4.10. *Uma matriz quadrada A admite inversa se e só se é não singular.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\exists A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Logo,

$$1 = \det(I) = \det(A^{-1}A) = \det(A^{-1})\det(A),$$

pelo que $\det(A) \neq 0$, ou seja, é não singular.

($\Leftarrow$) Dado que $A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A\, A = |A|I$ e uma vez que $|A| \neq 0$, vem que

$$A\frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A A = I.$$

Logo, $\exists A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$.

□

Definição 4.18. *Uma matriz quadrada A, com entradas num corpo K, diz-se unitária (ortogonal) quando o seu produto pela pela transposta hermítica (transposta) é igual à matriz identidade.*

De acordo com esta definição, uma matriz A é unitária (ortogonal) se $A^H A = I$ ($A^T A = I$).

Tendo em conta o estudo que já fizemos, uma conclusão imediata que se pode tirar é que uma matriz quadrada A é invertível se e só se as suas filas são linearmente independentes.

4.9 Determinação da inversa de uma matriz pelo método de Gauss-Jordan

O método de Gauss-Jordan para a determinação da inversa de uma matriz quadrada A de ordem n, consiste em construir uma tabela com a matriz A e a matriz identidade, $[A|I]$, e aplicar operações de pivotação às linhas da tabela (encarando-a como uma matriz com n linhas e $2n$ colunas), até se obter (caso seja possivel) a matriz identidade no lugar da matriz A. Nessa altura, a matriz que aparece no lugar da identidade é a inversa da matriz A. Caso não se consiga completar este procedimento, tal significa que a matriz A não é invertível.

Assim, sendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{(n(n-1)} & a_{n(n-1)} \end{pmatrix}$, construimos a matriz

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} & | & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-2)} & a_{2n} & | & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} & | & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{(n(n-1)} & a_{n(n-1)} & | & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vamos denotar a i-ésima linha desta matriz por L_i, para $i = 1, \ldots, n$.

1. Vamos supor que $a_{11} \neq 0$, caso contrário se A é invertível, então existe uma entrada $a_{i1} \neq 0$, pelo que podemos somar a linha L_i à linha L_1 e a primeira linha fica nas condições pretendidas.

2. Para $i = 2, \ldots, n$ fazer $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$. Adicionalmente, $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$.
Desta forma, anulamos todas as entradas da primeira coluna da matriz L abaixo de a_{11} e adicionalmente a_{11} passou a ser igual a 1, obtendo-se a matriz L':

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1(n-1)} & a'_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2(n-2)} & a'_{2n} & b'_{21} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{(n-1)2} & \cdots & a'_{(n-1)(n-1)} & a'_{(n-1)n} & b'_{(n-1)1} & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{(n(n-1)} & a'_{n(n-1)} & b'_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Se $a'_{22} = 0$, então escolher uma linha i, tal que $a'_{i2} \neq 0$ e adicionar esta linha à segunda. Se não existir, significa que a matriz A não é invertivel. Supondo que $a'_{22} \neq 0$, fazer $L_i \leftarrow L_i - \frac{a'_{i2}}{a'_{22}} L_2$ para todo o $i \neq 2$. Adicionalmente, $L_2 \leftarrow \frac{1}{a'_{22}} L_2$.
Desta forma, anulamos todas as entradas da primeira coluna da matriz L abaixo e acima de a'_{22} e, adicionalmente, a'_{22} passa a ser igual a 1, obtendo-se a matriz L'':

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & a''_{1(n-1)} & a''_{1n} & b''_{11} & b''_{12} & \cdots & b''_{1(n-1)} & b''_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a''_{2(n-1)} & a''_{2n} & b''_{21} & b''_{22} & \cdots & {}''_{2(n-1)} & b''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a''_{(n-1)(n-1)} & a''_{(n-1)n} & b''_{(n-1)1} & b''_{(n-1)2} & \cdots & b''_{(n-1)(n-1)} & b''_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & a''_{n(n-1)} & a''_{nn} & b''_{n1} & b''_{n2} & \cdots & b''_{n(n-1)} & b''_{nn} \end{array}\right).$$

4. Procedendo como anteriormente para as entradas das colunas subsequentes na posição (i, i), com $i = 3, \ldots$, supondo que A é invertivel, obtém-se a matriz identidade na posição da matriz A e a inversa de A na posiçao em que inicialmente estava a matriz identidade.

Exemplo 4.8. *Vamos determinar a inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$*, com recurso ao método de Gauss-Jordan.*

1. Considerando a matriz $[A|I]$*:* $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, *2. Fazendo* $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1$ *e* $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$, *obtém-se:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3/2 & -3/2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, *obtém-se:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

4. Fazendo $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ *e* $L_3 \leftarrow 2L_3$ *obtém-se:*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right).$$

4.10 Exercícios

Exercício 4.1. *Sendo* $F(\lambda) = \det(\begin{pmatrix} a^2+\lambda & ab & ac \\ ab & b^2+\lambda & bc \\ ac & bc & c^2+\lambda \end{pmatrix})$, *mostre que* $F(0) = 0$.

Exercício 4.2. *Verifique a identidade* $\Delta_n(x) = (x + na - a)(x-a)^{n-1}$, *com*

$$\Delta_n(x) = \det(\begin{pmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{pmatrix}).$$

Sugestão: adicionar à primeira coluna as restantes.

Exercício 4.3. *Calcule o determinate da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.4. *Calcule o determinate da matriz* $M = \begin{pmatrix} 0 & a^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & b^2 & 1 \\ c^2 & b^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.5. *Prove a identidade*

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Sugestão: faça a prova por indução sobre a ordem do determinante (adicionando à $(i+1)$-ésima linha a i-ésima multiplicada por $-x_1$, para $i = 1, 2, \ldots$).
Nota: *este determinante é conhecido por* ***determinante de Vandermonde****.*

Exercício 4.6. *Verifique a identidade:*

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_{n-1} \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Exercício 4.7. *Verifique se as linhas ou colunas das matrizes a seguir indicadas são linearmente independentes.*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.8. *Calcule a adjunta da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.9. *Mostre que se A é uma matriz quadrada de ordem 2, então adj adj $A = A$.*

Exercício 4.10. *Calcule a inversa da matriz do Exercício 4.8.*

Exercício 4.11. *Demosntre que se a matriz qudrada A é não singular, então $AB = AC \Rightarrow B = C$.*

Exercício 4.12. *Sendo A uma matriz quadrada tal que $(I - A)$ é não singular, prove que $\sum_{k=0}^{n} A^k = (I-A)^{-1}(I - A^{n+1})$. Note-se que $A^0 = I$.*

Exercício 4.13. *Com recurso ao método de Gauss-Jordan, verifique se cada uma das seguintes matrizes tem inversa e, no caso afirmativo, determine-a:*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$.

Capítulo 5

Sistemas de equações lineares

Neste capítulo vamos estudar os sistemas de equações lineares. Nomeadamente, vamos analisar os casos em que estes sistemas têm solução e consequentemente, são determinados ou indeterminados e os casos em que não têm solução.

Definição 5.1. *Designa-se por sistemas de m equação lineares a n incógnitas o conjunto de equações*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{5.1}$$

No caso dos coeficientes e termos independentes serem reais o sistema diz-se de coeficientes e termos independentes reais.

Uma **solução** deste sistema é um n-uplo de escalares $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ cujas componentes, substituindo ordenadamente as incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, fazem com que cada um dos primeiros membros de (5.1) assuma um valor numérico igual ao respectivo segundo membro.

O sistema (5.1) diz-se **compatível** ou **possível** quando admite pelo menos uma solução. O sistema (5.1) diz-se **incompatível** ou **impossível** quando não admite qualquer solução.
Quando os sistema (5.1) admite uma única solução diz-se **determinado**. Se admite mais do que uma solução diz-se **indeterminado**.

Designa-se por matriz dos coeficientes do sistema (5.1) a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

e designa-se por matriz completa do sistema a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Se a matriz dos coeficientes do sistema (5.2) é nula, então temos dois casos possíveis.

1. A matriz completa do sistema (5.3) também é nula e neste caso o sistema reduz-se a um conjunto de m identidades pelo que se diz **completamente indeterminado**;
2. A matriz completa do sistema (5.3) não é nula e neste caso o sistema é incompatível ou impossível.

Se a matriz dos coeficientes do sistema (5.2) não é nula, interessa identificar os seus **determinantes principais** que são os determinantes de maior ordem, não nulos, que é possível extrair da matriz dos coeficientes, por supressão de linhas e colunas (ou seja, são os menores de maior ordem, não nulos, da matriz dos coeficientes).
Designa-se por **característica** da matriz dos coeficientes do sistema a ordem dos determinantes principais. De entre os determinantes principais, escolhemos um que designamos por **determinante principal do sistema** e com esta escolha podemos identificar:

1. As **equações principais** que são as equações que contribuem com coeficientes para o determinante principal do sistema.
2. As **equações não principais** que são todas as equações que não são principais.
3. As **incógnitas principais** que são as incógnitas relativamente às quais pelos menos alguns dos coeficientes figuram no determinante principal.
4. As **incógnitas não principais** que são todas as incógnitas que não são principais.

O conjunto das equações principais formam um sistema que se designa por **subsistema principal**.
Um sistema de equações lineares diz-se de **Cramer** se todas as suas equações e todas as suas incógnitas são principais.

5.1 Subsistema principal

Voltando ao sistema de equações lineares (5.1), vamos supor que as primeiras p equações e as p primeiras incógnitas são principais (caso tal não aconteça, basta reordenar equações e incógnitas para se obter o que se pretende). Temos assim para subsistema principal do sistema (5.1), o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & - & a_{1(p+1)}x_{p+1} & - & \cdots & - & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & - & a_{2(p+1)}x_{p+1} & - & \cdots & - & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & \cdots & + & a_{pp}x_p & = & b_p & - & a_{p(p+1)}x_{p+1} & - & \cdots & - & a_{pn}x_n \end{array}\right.$$

Note-se que nos segundos membros constam os termos onde onde figuram as incógnitas não principais. Se atribuirmos a estas incógnitas não principais o papel de meros parâmetros, o subsistema principal passa a ser um sistema de Cramer (relativamente às incógnitas principais $x_1, \ldots, x_p$). Assim, atribuindo às incógnitas não principais os valores arbitrariamente escolhidos, $\bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_n$, as fórmulas de Cramer permitem em seguida determinar a correspondente solução do subsistema principal $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$. Assim, obtém-se a solução do subsistema principal

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}, \ldots, \bar{x}_n).$$

Deve observar-se que se todas as incógnitas são principais, então o subsistema principal é determinado. Caso exista uma incógnita não principal o sistemas diz-se simplesmente indeterminado, caso existam duas incógnitas não principais o sistema diz-se duplamente indeterminado e assim sucessivamente.

O problema que se coloca agora é o de saber se a solução encontrada para o subsistema principal satisfaz também as equações não principais. O Teorema de Rouché (a introduzir mais adiante) dá uma condição necessária e suficiente para que tal se verifique.

5.2 Teorema fundamental de Rouché

Definição 5.2. *Uma equação não principal diz-se compatível com o subsistemas principal se toda a solução do subsistema principal é solução dessa equação não principal.*

Suponhamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução do subsistema principal. Pretendemos deduzir uma condição necessária e suficiente para que esta solução seja compatível com a equação não principal

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \text{ com } i > p. \tag{5.4}$$

Considere-se o determinante

$$\Delta = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & | & a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n - b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & | & a_{p1}\alpha_1 + \cdots + a_{pn}\alpha_n - b_p \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & | & a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n - b_i \end{pmatrix}).$$

Uma vez que $a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\alpha_2 + \cdots + a_{kn}\alpha_n - b_k = 0$, para $k = 1, \ldots, p$, vem que

$$\Delta = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & | & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & | & 0 \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & | & a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n - b_i \end{pmatrix}).$$

Aplicando o Teorema de Laplace ao cálculo de Δ, ao longo da última coluna, obtém-se

$$\Delta = (a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n - b_i) \det(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix}).$$

Dado que (por definição) o determinate principal é diferente de zero, $\Delta = 0$ se e só se $a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n - b_i = 0$. Por outro lado, o cálculo de Δ pode fazer-se da seguinte forma:

$$\Delta = \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1p}\alpha_p \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{21}\alpha_1 + \cdots + a_{2p}\alpha_p \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{p1}\alpha_1 + \cdots + a_{pp}\alpha_p \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} & a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{ip}\alpha_p \end{pmatrix}) \tag{5.5}$$

$$+ \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} & a_{ij} \end{pmatrix}) \tag{5.6}$$

$$+ \det(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & -b_m \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} & -b_i \end{pmatrix}). \tag{5.7}$$

Com base nesta expressão, podemos concluir o seguinte.

1. O determinante em (5.5) é nulo, uma vez que a última coluna é combinação linear das restantes.

2. Os determinantes que aparecem no somatório (5.6) também são todos nulos, uma vez que o determinate principal te ordem p e estes determinantes são determinantes de submatrizes quadradas de ordem $p+1$ extraídas da matriz dos coeficientes.

3. Como consequencia dos itens anteriores, vem que

$$\Delta = \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} & -b_m \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} & -b_i \end{pmatrix}\right)$$

   e podemos afirmar que $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n)$ é uma solução compatível com a equação não principal (5.4) se e só se o determinante (5.7) é nulo.

O determinante (5.7) designa-se por **determinante característico da equação não principal** (5.4).

Com base nesta análise, decorre o seguinte teorema conhecido por teorema fundamental de Rouché.

Teorema 5.1. *Um sistema de equações lineares com coeficientes num corpo é compatível (ou seja, tem solução) se e só se todos os determinantes característicos são nulos.*

Exemplo 5.1. *Vamos estudar a compatibilidade do sistema*

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & + & 4z & - & 5t & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & z & - & 2t & = & 3 \\ 5x & - & 2y & + & 5z & - & 7t & = & a \\ 7x & + & y & + & 9z & - & 12t & = & b \end{array}$$

Uma vez que os determinantes principais da matriz dos coeficientes têm ordem 2, vamos escolher para determinante principal do sistema o determinante da submatriz determinada pelas primeira e segunda equações e pelas incógnitas z e t, ou seja,

$$\Delta_p = \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = -3 \neq 0.$$

Como consequência, a primeira e segunda equações são as equações principais e as variáveis z e t são as incógnitas principais.

1. *O determinante característico da terceira equação é o determinante*

$$\Delta_{c_3} = \det\left(\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & a \end{pmatrix}\right) = 12 - 3a.$$

   Logo, $\Delta_{c_3} = 0 \Leftrightarrow a = 4.$

2. O determinante característico da quarta equação é o determinante

$$\Delta_{c_4} = \det(\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & -12 & b \end{pmatrix}) = 15 - 3b.$$

Logo, $\Delta_{c_4} = 0 \Leftrightarrow b = 5$.

Assim, o sistema é compatível se e só se $a = 4$ *e* $b = 5$.

Definição 5.3. *Um sistema de* m *equações lineares a* n *incógnitas diz-se homogéneo se os termos independentes são todos nulos.*

Os sistemas homogéneos têm a particularidade de admitir como solução a solução trivial, ou seja, a solução nula. Como consequência, estes sistemas são sempre compatíveis. A única questão que se coloca em relação aos sistemas homogéneos é a de saber se são ou não determinados, ou seja, se admitem uma solução distinta da trivial.

5.3 Resolução de sistemas por aplicação da regra de Cramer

Teorema 5.2 (Regra de Cramer)**.** *Seja* $A = (a_1 \ \cdots \ a_{i-1} \ a_i \ a_{i+1} \ \cdots \ a_n)$ *uma matriz quadrada de ordem* n *invertível. Então o sistema* $A\hat{x} = \hat{b}$*, tem solução única determinada pelo vector coluna*

$$\hat{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(\hat{b}, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ \vdots \\ \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \hat{b}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ \vdots \\ \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, \hat{b}) \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Multiplicando à esquerda o sistema $A\hat{x} = \hat{b}$ pela inversa de A, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj } A$, obtém-se $x = \frac{1}{\det(A)}\text{adj } Ab =$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & \cdots & (-1)^{j+1}\det(A_{j1}) & \cdots & (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+i}\det(A_{1i}) & \cdots & (-1)^{j+i}\det(A_{ji}) & \cdots & (-1)^{n+i}\det(A_{ni}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) & \cdots & (-1)^{j+n}\det(A_{jn}) & \cdots & (-1)^{n+n}\det(A_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j+1}\det(A_{j1}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j+i}\det(A_{ji}) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_j(-1)^{j+n}\det(A_{jn}) \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Note-se que pelo teorema de Laplace, a i-ésima componente (com $i \in \{1, \ldots, n\}$) do vector coluna em (5.8) é precisamente $\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \hat{b}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. $\square$

Exemplo 5.2. *Vamos resolver os sistema de equações lineraes*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

com recurso à regra de Cramer.

Solução. *É facil concluir (utilizando uma das versões da regra da Sarrus) que o determinante da matriz dos coeficientes deste sistema,* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, *é igual a* 4*. Logo, vem que*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}) = \frac{2+2+6-1}{4} = \frac{9}{4}, \\ x_2 &= \frac{1}{4}\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}) = \frac{-2+1+3-2-3+1}{4} = \frac{-1}{2}, \\ x_3 &= \frac{1}{4}\det(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}) = \frac{-6+1+2-2}{4} = \frac{-5}{4}. \end{aligned}$$

5.4 Exercícios

Exercício 5.1. *Averigue se o sistema* $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$ *tem soluções distintas da trivial*

Exercício 5.2. *Condicione os parâmetros a, b e c por forma que o sistema* $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & by & + & cz & = & 0 \\ ax & - & y & + & cz & = & 0 \\ ax & + & by & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ *seja simplesmente indeterminado e resolva-o.*

Exercício 5.3. *Resolva os sistemas de equações:*

$$a) \left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + & \cdots & + & \alpha_n x_n & = & t \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} x_1 & + & \alpha_2^{n-1} x_2 & + & \cdots & + & \alpha_n^{n-1} x_n & = & t^{n-1} \end{array}\right.,$$
onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *são todos distintos.*

Exercício 5.4. *Calcule* λ *de tal forma que o sistema de equações lineares*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & - & 2x_3 & + & 11x_4 & = & \lambda \end{array}\right.$$

seja compatível.

Exercício 5.5. *Resolva o sistema a seguir indicado com recurso ao método de eliminação de Gauss-Jordan.*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 6 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 7x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_4 & + & 3x_4 & + & 7x_5 & + & x_6 & = & 4 \\ & & 3x_2 & - & 6x_4 & + & x_4 & + & 6x_5 & + & 4x_6 & = & 10 \end{array}\right.$$

Exercício 5.6. *Considere cada um dos sistemas de equações lineares que a seguir se apresentam e responda.*

i) *Indique a matriz dos coeficientes do sistema e determine a sua característica.*

ii) *Indique a matriz completa do sistema.*

iii) *Nos casos em que o sistema não é determinado verifique se é compatível com recurso ao teorema de Rouché.*

iv) *Nos casos da alínea anterior, escolha um determinante principal do sistema, indique o correspondente subsistema principal e determine uma solução.*

iv) *Resolva os sistemas que são determinados com recurso à regra de Cramer.*

(a) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 0 \\ x - 3y + 3z = -2 \end{cases}$ *(d)* $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 1 \\ x + z = 5 \\ 3x + 4y - 7z = -3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -2x + y + z = 1 \\ x - 5y + 7z = -1 \end{cases}$ *(f)* $\begin{cases} 4x + y - 8z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = 5 \\ -x + 8y - 25z = -3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x - 3y + z + w - t = 8 \\ -2x + 6y + z - 2w - 4t = -1 \\ 3x - 9y + 8z + 4w - 13t = 49 \end{cases}$ *(h)* $\begin{cases} x - 2y + z + 3w - t = 1 \\ -3x + 6y - 4z - 9w + 3t = -1 \\ -x + 2y - 2z - 4w - 3t = 3 \\ x - 2y + 2z + 2w - 5t = 1 \end{cases}$

Exercício 5.7. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha + 1 \\ \alpha & 2\alpha & 0 \\ \alpha - 1 & 4\alpha & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta + 1 & 0 \\ 1 & 0 & \beta - 1 & \beta \\ \beta & \beta - 1 & 0 & \beta - 1 \\ \beta & \beta - 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

onde α e β são parâmetros reais, e determine as características de A e de B, em função destes parâmetros.

Exercício 5.8. *Faça a discussão de cada um dos sistemas de equações lineares* *que a seguir se apresentam, em função dos respectivos parâmetros.*

(a) $\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ \beta x + y = 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \alpha x + y = -1 \\ 2x + y = \beta \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = \alpha \\ -x + y + 2z = \beta \\ x - 3y = \gamma \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x - 2y + 2z = \alpha \\ -2x + y + z = \beta \\ x - 5y + 7z = \gamma \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x - 2y - z = -4 \\ 5x + 2y + 5z = 4 \\ 2x - 3y - 2z = \alpha \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + y = 3 \\ \alpha x + 8y - 5z = \beta \end{cases}$

(g) $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (\alpha^2 + 1)z = \alpha \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x + y + z = 1 + \beta \\ x + by + z = \alpha \\ \beta x + y = \beta(1 + 2\beta) \end{cases}$ (j) $\begin{cases} x + y + 7z = -7 \\ 2x + 3y + 17z = -16 \\ x + 2y + (\alpha^2 + 1)z = 3\alpha \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = \beta \\ \alpha x + y + z = 0 \end{cases}$ (l) $\begin{cases} x - y = 1 \\ \alpha x + 4z = \alpha + 1 \\ 2x - y + 2z = 4 \end{cases}$

Exercício 5.9. *Determine os valores dos parâmetros reais α, β e γ para os quais os sistemas a seguir indicados são consistentes.*

$$\begin{cases} x + y + 2z = \alpha \\ x + z = \beta \\ 2x + y + 3z = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = \alpha \\ 2x + 5y + 3z = \beta \\ x + 8z = \gamma \end{cases}.$$

Exercício 5.10. *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ \alpha x + 2y + z = 2 \\ x - y + z = \beta \end{cases},$$

onde α e β são parâmetros reais.

1. *Determine os valores de α e β para os quais o sistema é possível e determinado.*

2. *Determine o conjunto de soluções do sistema, no caso particular de $\alpha = -4$ e $\beta = 1$.*

Exercício 5.11. *Seja* $M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{bmatrix}$ *a matriz completa de um sistema de equações lineares, onde* α *e* β *são parâmetros reais. Determine os valores de* α *e* β *para os quais o sistema é:*

1. *inconsistente;*
2. *consistente e determinado;*
3. *consistente e simplesmente indeterminado;*
4. *consstente e duplamente indeterminado.*

Exercício 5.12. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + y + z = 2 \\ x + y + \alpha z = 3 \end{cases}$$

e responda a cada uma das seguintes questões:

1. *Determine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *de modo a que este sistema seja compatível e determinado.*
2. *Resolva o sistema para os valores de* α *encontrados na alínea anterior.*

Exercício 5.13. *Considere o sistema de equações lineares*

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 5y - z = -3 \\ \alpha^2 x + 4\alpha^2 y - z = \alpha + 1 \end{cases},$$

onde a é um parâmetro real e responda.

1. *Discuta este sistem em função do parâmetro* α.
2. *Determine o conjunto de soluções do sistema, para* $\alpha = 0$.

Exercício 5.14. *Resolva, com recurso à regra de Cramer, o sistema* $A\hat{x} = \hat{b}$, *onde* A *é a matriz do Exercício 4.7 - item 1 e* $\hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Capítulo 6

Vetores e valores próprios de matrizes quadradas

6.1 Conceitos e resultados básicos

As matrizes quadradas possuem vetores próprios e valores proprios que são conceitos com muitas aplicações práticas, nomeadamente em engenharia e economia.

Definição 6.1. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n com entradas reais ou complexas, designa-se por par próprio todo o par $(\lambda, \hat{u})$, onde λ é um escalar e $\hat{u}$ é um vetor não nulo, tal que*

$$A\hat{u} = \lambda\hat{u}. \tag{6.1}$$

O escalar λ designa-se por ***valor próprio*** *de A e o vetor $\hat{u}$ designa-se por* ***vetor próprio*** *de A associado ao valor próprio λ.*

Os vetores que satisfazem a equação (6.1) são as soluções do sistema homogéneo

$$(A - \lambda I_n)\,\hat{x} = \hat{0}, \tag{6.2}$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n e é claro que este sistema tem uma solução não nula se e só se é indeterminado, ou seja, se e só se

$$\det (A - \lambda I_n) = 0. \tag{6.3}$$

A equação (6.3) designa-se por **equação característica** da matriz A. Se consideramos λ como uma variável, então $\det (A - \lambda I_n)$ é um polinómio em λ de grau n que se designa por **polinómio característico** de A. Como consequência, os valores próprios de A vão ser precisamente as raízes deste polinómio característico. Como o polinómio característico de uma matriz quadrada A de ordem

n tem grau n, pelo **Teoreama Fundamental da Álgebera**, este polinómio tem n raízes (reais ou complexas) algumas das quais podem ser repetidas e, consequentemente, podemos concluir que A tem n valores próprios (reais ou complexos), alguns dos quais podem ser repetidos (quando o polinómio característico tem raízes múltiplas). Assim, supondo que uma matriz quadrada A tem n valores próprio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, não necessariamente distintos, então o polinómio característico da matriz A é o polinómio na variável λ

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

A multiplicidade de um valor próprio λ de uma matriz como raíz do polinómio característico designa-se por **multiplicidade algébrica** desse valor próprio e denota-se por $m_a(\lambda)$. Um valor próprio diz-se **simples** quando tem multiplicidade algébrica igual a 1.

O número de vetores próprios linearmente independentes associados a um dado valor próprio λ designa-se por **multiplicidade geométrica** de λ e denota-se por $m_g(\lambda)$.

Dado um valor próprio λ de uma matriz quadrada A de ordem n, o subespaço nulo da matriz $(A - \lambda I)$ designa-se por **subespaço próprio** ou **subespaço invariante** do valor próprio λ.

6.2 Determinação de subespaços próprios

Antes de prosseguirmos, convém notar que qualquer solução não nula do sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)\hat{x} = \hat{0}$$

é um vetor próprio de A associado a λ. A dimensão do subespaço nulo da matriz $(A - \lambda I)$, ou seja, a sua nulidade é precisamente a multiplicidade geométrica do valor próprio λ a qual não excede a multiplicidade algébrica de λ, ou seja, $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Exemplo 6.1. *Vamos determinar os valores próprios da matriz quadrada*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

e as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
Solução*. Calculando o polinómio característico de A obtém-se*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}) \\ &= (1-\lambda)^2(6-\lambda). \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são $\lambda = 1$ com $m_a(1) = 2$, e $\lambda = 6$ com $m_a(6) = 1$. Segue-se a determinação das respectivas multiplicidades geométricas.

1. *Determinação do subespaços próprio associado ao valor próprio* $\lambda = 1$. *Resolvendo o sistema homogéneo:*

$$(A - I)\hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtém-se $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right.$.
Logo, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ *é gerado pelo vetor* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e, consequentemente,* $m_g(1) = 1$.

2. *Determinação do subespaços próprio associado ao valor próprio* $\lambda = 6$. *Resolvendo o sistema homogéneo:*

$$(A - 6I)\hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtém-se $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 5x \\ z & = & 10x \end{array} \right.$.
Logo, o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 6$ *é gerado pelo vetor* $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ *e, consequentemente,* $m_g(6) = 1$

O conjunto dos valores próprios de uma matriz quadrada A de ordem n, com as respectivas multiplicidades, designa-se por espectro de A e denota-se por $\sigma(A)$. Usualmente, admitindo que $\mu_1, \ldots, \mu_p$ são os valores próprios distintos da matriz A, o seu espectro é representado da seguinte forma:

$$\sigma(A) = \{\mu_1^{[m_1]}, \ldots, \mu_p^{[m_p]}\},$$

onde $\mu_i^{[m_i]}$ significa que $m_a(\mu_i) = m_i$, para $i = 1, \ldots, p$. Nestas condições, é claro que $m_1 + \cdots + m_p = n$.

6.3 Matrizes diagonalizáveis

Uma matriz quadrada A diz-se **semelhante** a uma matriz quadrada B se existir uma matriz invertível M tal que $A = MBM^{-1}$. É imediato concluir que que duas matrizes semelhantes A e B têm o mesmo determinate. Com efeito,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(MBM^{-1}) = \det(M)\det(B)\det(M^{-1}) \\ &= \det(M)\det(B)\frac{1}{\det(M)} = \det(B). \end{aligned}$$

Por outro lado, também se verifica facilmente que a relação de semelhança entre matrizes quadradas da mesma ordem é uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva (a prova desta afirmação fica como exercício).

Uma matriz quadrada de ordem n diz-se **defectiva** se não admite um conjunto de n vetores próprios que formem uma base. Caso contrário, ou seja, caso admita um conjunto de n vetores próprios que formem uma base, diz-se **não defectiva**. As matrizes não defectivas são diagonalizáveis. Com efeito, sendo A uma matriz quadrada de ordem n não defectiva, se U é uma matriz quadrada de ordem n cujas colunas são vetores próprios de A que formam uma base, então

$$AU = U\Lambda,$$

onde Λ é um matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios de A. Ou seja, sendo $U = (\hat{u}_1 \ \cdots \ \hat{u}_n)$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, vem que

$$\begin{aligned} AU &= (A\hat{u}_1 \ \cdots \ A\hat{u}_n) \\ &= (\lambda_1\hat{u}_1 \ \cdots \ \lambda_n\hat{u}_n) \\ &= (\hat{u}_1 \ \cdots \ \hat{u}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= U\Lambda. \end{aligned}$$

Dado que U é uma matriz invertível (porque as suas colunas são linearmente independentes), vem que

$$A = U\Lambda U^{-1},$$

ou seja, a matriz A é semelhante à matriz diagonal Λ. Neste caso, dizemos que A é **diagonalizável** e que U é a matriz diagonalizante. Como consequência desta análise podemos concluir o seguinte teorema.

Teorema 6.1. *Uma matriz quadrada de ordem n é diagonalizável se e só se é não defectiva, ou seja, tem n vectors próprios linearmente independentes.*

Deste teorema (tendo em conta o Teorema 6.3 e o Corolário 6.4 mais adiante) decorre o seguinte corolário.

Corolário 6.2. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n com p valores próprios distintos $\mu_1, \ldots, \mu_p$, a matriz A é diagonalizável se e só se*

$$m_g(\mu_1) + \cdots + m_g(\mu_p) = n.$$

6.4 Algumas propriedades dos valores e vetores próprios

Segue-se um teorema que nos garante que a valores próprios distintos correspondem vetores próprios linearmente independentes.

Teorema 6.3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com p valores próprios distintos, $\mu_1, \ldots, \mu_p$ e sejam $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p$ vetores próprios de A associados, respectivamente, a cada um dos valores próprios indicados. Então $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p$ são linearmente independentes.*

Demonstração. Vamos fazer a prova por indução sobre p, tendo em conta que para $p = 1$ o resultado é trivialmente verdadeiro. Suponhamos que o resultado se verifica quando o número de vetores é menor do que p, com $p > 1$ e suponhamos que existem escalares $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ tais que

$$\gamma_1 \hat{u}_1 + \cdots + \gamma_p \hat{u}_p = \hat{0}. \tag{6.4}$$

Então vem que

$$\begin{aligned} \hat{0} &= A\hat{0} \\ &= A(\gamma_1 \hat{u}_1 + \cdots + \gamma_p \hat{u}_p) \\ &= \gamma_1 A\hat{u}_1 + \cdots + \gamma_p A\hat{u}_p \\ &= \gamma_1 \mu_1 \hat{u}_1 + \cdots + \gamma_p \mu_p \hat{u}_p. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Multiplicando ambos os membros da equação (6.4) por μ_p obtém-se a equação

$$\gamma_1 \mu_p \hat{u}_1 + \cdots + \gamma_p \mu_p \hat{u}_p = \hat{0}. \tag{6.6}$$

Subtraindo membro a membro as equações (6.5) e (6.6), vem que

$$\gamma_1(\mu_1 - \mu_p)\hat{u}_1 + \cdots + \gamma_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p)\hat{u}_{p-1} = \hat{0}.$$

Tem-se assim uma combinação linear de $p - 1$ vetores próprios associados a $p - 1$ valores próprios distintos. Logo, por hipóteses de indução, estes vetores próprios são linearmente independentes e, consequentemente, dado que $\mu_p \notin \{\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}\}$

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_{p-1} = 0.$$

Seguidamente, substituindo estes escalares na equação (6.4), obtém-se $\gamma_p \hat{u}_p = \hat{0}$, pelo que $\gamma_p = 0$. Logo, $\gamma_1 = \cdots = \gamma_{p-1} = \gamma_p = 0$, ou seja, os vetores próprios $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p$ são linearmente independentes. □

Como consequência imediata deste teorema tem-se o seguinte corolário.

Corolário 6.4. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n com p valores próprios distintos, $\mu_1, \ldots, \mu_p$ e sejam $\mathcal{U}_{\mu_1}, \mathcal{U}_{\mu_2} \ldots, \mathcal{U}_{\mu_p}$ os subespaços próprios de A associados, respectivamente, a cada um dos valores próprios indicados. Então*

$$\mathcal{U}_{\mu_1} + \mathcal{U}_{\mu_2} + \cdots + \mathcal{U}_{\mu_p}$$

é uma soma direta.

Demonstração. Basta provarmos que qualquer vetor $\hat{u} \in \mathcal{U}_{\mu_1} + \mathcal{U}_{\mu_2} + \cdots + \mathcal{U}_{\mu_p}$ se escreve de forma única como soma de elementos dos subespaços vetoriais $\mathcal{U}_{\mu_1}, \mathcal{U}_{\mu_2}, \ldots, \mathcal{U}_{\mu_p}$. Com efeito, seja $\hat{u} = \hat{u}_1 + \cdots + \hat{u}_p$, com $\hat{u}_i \in \mathcal{U}_{\mu_i}$, para $i = 1, \ldots, p$ e suponhamos que $\hat{u} = \hat{v}_1 + \cdots + \hat{v}_p$, com $\hat{v}_i \in \mathcal{U}_{\mu_i}$, para $i = 1, \ldots, p$. Então
$$\hat{0} = \hat{u} - \hat{u} = (\hat{u}_1 - \hat{v}_1) + \cdots + (\hat{u}_p - \hat{v}_p).$$
É claro que cada um dos vetores $\hat{u}_i - \hat{v}_i$ é um vetor próprio de A pertencente a $\mathcal{U}_{\mu_i}$, para $i = 1, \ldots, p$. Uma vez que a cada par de vetores próprios distintos $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$ corresponde um vetor próprio $\hat{u}_i - \hat{v}_i$ do subespaço próprio $\mathcal{U}_{\mu_i}$ e que, de acordo com o Teorema 6.3, no seu conjunto estes vetores são linearmente independentes, concluímos que $\hat{u}_i = \hat{v}_i$, para $i = 1, \ldots, p$. $\square$

Deste corolário, podemos concluir ainda que se a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios distintos for igual à respectiva multiplicidades algébrica, ou seja, sendo $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ os valores próprios distintos de uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais (ou complexas), se $m_g(\mu_i) = \dim(\mathcal{U}_{\mu_i}) = m_a(\mu_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, p$, pelo que $m_g(\mu_1) + m_g(\mu_2) + \cdots + m_g(\mu_p) = n$, então
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{U}_{\mu_1} \oplus \mathcal{U}_{\mu_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{U}_{\mu_p}.$$
Logo, os vetores próprios de A formam uma base para $\mathbb{R}^n$ e, consequentemente, A é não defectiva.

Definição 6.2. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, designa-se por traço de A e denota-se $tr(A)$, a soma dos elementos da sua diagonal principal, ou seja,*
$$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Vamos terminar este capítulo com dois teoremas que enunciamos sem demonstração. O primeiro relaciona o determinante e o traço de uma matriz quadrada com o produto e a soma, respectivamente, dos seus valores próprios.

Teorema 6.5. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os valores próprios de A. Então*
$$\begin{aligned} \det(A) &= \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \\ tr(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \end{aligned}$$

O teorema a seguir, conhecido por teorema de Cayley-Hamilton, estende as raízes do polinómio característico de uma matriz quadrada A à própria matriz A enquanto raiz do correspondente polinómio matricial, ou seja, o polinómio característico onde as potências da variável denotam as potências da matriz A.

Teorema 6.6 (Teorema de Cayley-Hamilton)**.** *Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $p(\lambda)$ é o seu polinómio característico, então $p(A) = 0$.*

Deve observar-se que se $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, então

$$p(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n.$$

Como aplicação deste teorema, podemos calcular a inversa (caso exista) de uma matriz, conforme a seguir se exemplifica.

Exemplo 6.2. *Com recurso ao teorema de Cayley-Hamilton, vamos determinar a inversa da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução. *Dado que o polinómio característico desta matriz A é*

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1,$$

aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, obtém-se

$$p(A) = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2A - A^2 = I_2 \Leftrightarrow A(2I_2 - A) = I_2.$$

Logo, uma vez que a inversa é única, podemos concluir que $A^{-1} = 2I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6.5 Exercícios

Exercício 6.1. *Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais ou complexas. Prove que a relação de semelhança entre matrizes é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}_n$, ou seja, é um relação reflexiva simétrica e transitiva.*

Exercício 6.2. *Verifique a veracidade de cada uma das seguintes afirmações:*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *e $u^T = (1, 1)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda = 2$;*
2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *e $u^T = (0, 1, 1)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda = 3$;*
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e $u^T = (1, 0, 2)$ é um vetor próprio da matriz A associado ao valor próprio $\lambda = -1$.*

Exercício 6.3. *Determine os valores próprios de cada uma das matrizes que representam o respectivo endomorfismo φ do espaço vetorial real indicado em cada uma das alíneas e determine os correspondentes subespaços próprios associados.*

1. $\varphi(x, y) = (y, x)$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

2. $\varphi(x, y) = (2x, y - x)$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

3. $\varphi(x, y) = (3x + 3y, x + 5y)$, *para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

4. $\varphi(x, y, z) = (-x + y - z, x + z, x + z)$, *para todo* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

5. $\varphi(ax^2 + bx + c) = (5c + 6b + 2a) - (b + 8a)x + (c - 2a)x^2$, *para todo* $ax^2 + bx + c \in P_2[x]$;

6. $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a + c \\ b - 2c & d \end{bmatrix}$, *para todo* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 6.4. *Considere um endomorfismo ϕ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^6$ cujo polinómio característico da matriz A que o representa é*

$$p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 2)^3.$$

1. *Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.*

2. *Indique quais as multiplicidades geométricas possíveis para cada subespaço próprio associado.*

Exercício 6.5. *Considere o endomorfismo ϕ do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ cuja matriz que o representa é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu$ são parâmetros reais. Determine $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu$ de modo a que os vetores $\hat{u}^T = (1, 1, 1)$, $\hat{v}^T = (1, 0, -1)$ e $\hat{w}^T = (1, -1, 0)$ sejam vetores próprios de A.

Exercício 6.6. *Seja $\mathcal{E}$ um e.v. real, φ um endomorfismo de $\mathcal{E}$ tal que A é uma matriz que o representa e seja λ um valor próprio de A. Diga (justificando) se são verdadeiras ou falsas as afirmações que se seguem.*

1. *O escalar λ^2 é valor próprio da matriz A^2 que representa o endomorfismo $\varphi \circ \varphi$ de $\mathcal{E}$.*

2. *O escalar λ^n é valor próprio da matriz A^n que representa o endomorfismo $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ vezes}}$ de $\mathcal{E}$.*

3. *O escalar λ também é valor próprio da matriz A^T.*

4. *O escalar $\alpha\lambda$ é valor próprio da matriz αA que representa o endomorfismo $\alpha\varphi$ de $\mathcal{E}$, para todo $\alpha \neq 0$.*

5. *Se* $\lambda \neq 0$, *então o escalar* λ^{-1} *é valor próprio da matriz* A^{-1} *que representa do endomorfismo* φ^{-1} *de* $\mathcal{E}$.
6. *Se* $\lambda = 0$, *então o subespaço próprio de* A *associado ao valor próprio* λ *é* $N(\varphi)$.
7. *Se* $\lambda = 0$ *e* $m_a(\lambda) = 2$ *então* $\dim N(\varphi) = 2$.
8. *Se* φ *é monomorfismo então* $\lambda \neq 0$.
9. *O endomorfismo* φ *é um isomorfismo se e só se* $\lambda \neq 0$.
10. *Se* $\hat{v}_1$ *e* $\hat{v}_2$ *são vetores próprios de* A *linearmente independentes, então estão associados a valores próprios distintos.*

Exercício 6.7. *Diga para que valores do parâmetro real* α, *o endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *definido pela matriz* A *não é diagonalizável, supondo que*

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 6.8. *Seja* ψ *um endomorfismo de* $\mathbb{R}^5$ *tal que* -2 *e* 7 *são valores próprios de uma matriz* A *que o representa, com* $m_a(-2) = 2$ *e* $m_g(7) = 3$. *Diga, justificando:*

1. *qual o polinómio característico de* A*;*
2. *em que condições* A *é diagonalizável.*

Exercício 6.9. *Seja* φ *um endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *e suponha que a matriz* A *que o representa tem como vetores próprios* $(1,1,1)^T$, $(1,0,1)^T$ *e* $(0,-1,1)^T$, *associados aos valores próprios* 2, 1 *e* 0, *respectivamente.*

1. *Conclua, justificando, que* A *é diagonalizável.*
2. *Determine a matriz* A.

Exercício 6.10. *Considere cada uma das matrizes* A *a seguir indicadas, enquanto matrizes representativas de endomorfismos de espaços vectoriais* $\mathbb{R}^k$, *com* k *adequadamente escolhido, e verifique em que casos estas matrizes são diagonalizáveis.*

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$;

e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

f) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 6.11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que* $\det(A) = 12$ *e 1 e 3 são valores próprios de A.*

1. *Determine o valor próprio de A que falta conhecer.*
2. *Determine $tr(A)$.*
3. *Determine os valores próprios de A^{-1};*
4. *Determine os valores próprios de A^{25}.*

Exercício 6.12. *Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que* $\det(A) = 10$ *e $tr(A) = 8$.*

1. *Se um dos valores próprios de A tem multiplicidade algébrica igual 2, determine o valor próprio que falta conhecer.*
2. *Sabendo que 1024 é valor próprio de A^{10}, determine os valores próprios de A.*

Exercício 6.13. *Com recurso ao teorema de Cayley-Hamilton, determine A^{-1} para cada um dos seguintes casos.*

a) $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Capítulo 7

Espaços vetoriais com produto interno

7.1 Definições e exemplos

A introdução do conceito de produto interno em espaços vetoriais reais ou complexos é da maior importância, quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista das aplicações. Uma vez que os espaços vetoriais reais são casos particulares de espaços vetoriais complexos, vamos introduzir a noção de produto interno no contexto mais geral dos espaços vetoriais complexos, ou seja, sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Definição 7.1. *Sejam $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dois espaços vetoriais complexos.*

1. *Uma aplicação $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ diz-se uma transformação anti-linear se $T(\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}) = \bar{\alpha}T(\hat{u}) + \bar{\beta}T(\hat{v})$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e quaisquer que sejam $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}_1$, onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ denotam os conjugados de α e β, respectivamente. Se $\mathcal{V}_2 = \mathbb{C}$, diz-se que T é uma funcional anti-linear.*

2. *Uma forma sesquilinear em $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ é uma aplicação $\omega : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{C}$ que satisfaz as seguintes condições:*

   (a) é linear no primeiro argumento, ou seja,

   $$\omega(\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}, \hat{w}) = \alpha\omega(\hat{u}, \hat{w}) + \beta\omega(\hat{v}, \hat{w});$$

   (b) é anti-linear no segundo argumento, ou seja,

   $$\omega(\hat{w}, \alpha\hat{u} + \beta\hat{v}) = \bar{\alpha}\omega(\hat{w}, \hat{u}) + \bar{\beta}\omega(\hat{w}, \hat{v});$$

   Se $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}$, dizemos que ω é uma forma sesquilinear em $\mathcal{V}$

É imediato concluir que uma forma sesquilinear definida num e.v. real é uma forma bilinear. Segue-se a definição de **produto interno** ou **produto escalar** de vetores.

Definição 7.2. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. sobre um corpo $K = \mathbb{C}$ (resp. $K = \mathbb{R}$). Um produto interno em $\mathcal{V}$ é uma forma sesquilinear hermitiana (resp. bilinear simétrica) definida positiva ω em $\mathcal{V}$, ou seja,*

1. *ω é linear no primeiro argumento, o que equivale a dizer que $\omega(\hat{u}, \cdot)$ é uma funcional linear em $\mathcal{V}$.*
2. *ω é anti-linear no segundo argumento, o que equivale a dizer que $\omega(\cdot, \hat{u})$ é uma funcional anti-linear em $\mathcal{V}$.*
3. *$\omega(\hat{u}, \hat{v}) = \overline{\omega(\hat{v}, \hat{u})}$ quaisquer que sejam $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$, ou seja, é hermitiana;*
4. *$\omega(\hat{u}, \hat{u}) > 0$ qualquer que seja $\hat{u} \in \mathcal{V} \setminus \{\hat{0}\}$, ou seja, é definida positiva.*

Uma forma definida positiva também se designa por **estritamente positiva**.

Em geral utiliza-se o símbolo $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$ (ou $\hat{u}|\hat{v}$) para denotar o produto interno entre os vetores $\hat{u}$ e $\hat{v}$. Note-se que, de acordo com a definição, dado que $\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = \overline{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}$, podemos concluir que $\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \in \mathbb{R}$. Esta propriedade dá sentido à condição 4.

Exemplo 7.1. *Seguem-se três exemplos de produtos internos.*

1. *A forma definida no conjunto dos vetores de $\mathbb{C}^n$:*

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \hat{v}^H \hat{u} = \sum_{j=1}^{n} \bar{v}_j u_j, \tag{7.1}$$

onde u_j e v_j, para $j = 1, \cdots, n$, denotam as componentes do vetor $\hat{u}$ e $\hat{v}$, respectivamente, é um produto interno de $\mathbb{C}^n$.

2. *A forma definida nos espaço vetorial complexo das matrizes $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$:*

$$\langle A, B \rangle = tr(B^H A) \tag{7.2}$$

é um produto interno em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

3. *A forma definida no e.v. real das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, ou seja, $\mathcal{C}[a, b]$:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \tag{7.3}$$

é um produto interno em $\mathcal{C}[a, b]$.

Um e.v. onde está definido um produto interno diz-se um e.v. **com produto interno**.

Teorema 7.1. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real com produto interno. Então*

$$\forall \hat{u} \in \mathcal{V} \;\; \langle \hat{0}, \hat{u} \rangle = 0.$$

Demonstração. Seja $\hat{u} \in \mathcal{V}$, então

$$\begin{aligned}\langle \hat{0}, \hat{u}\rangle &= \langle 0\hat{v}, \hat{u}\rangle, \text{ onde } \hat{v} \text{ é um vetor arbitrário de } \mathcal{V},\\ &= 0\langle \hat{v}, \hat{u}\rangle,\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Diz-se que os vetores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ pertencentes a um e.v. $\mathcal{V}$ com produto interno são **ortogonais** se $\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle = 0$. Como consequência, desta definição e do Teorema 7.1 decorre que o vetor nulo, $\hat{0}$, é ortogonal a qualquer outro vetor.

Definição 7.3. *Um e.v. de dimensão finita com produto interno sobre um corpo K diz-se **euclidiano** se $K = \mathbb{R}$ e **unitário** se $K = \mathbb{C}$* [1].

7.2 Espaços vetoriais normados

Definição 7.4. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real com produto interno e seja $\hat{u} \in \mathcal{V}$. Designa-se por norma euclidiana do vetor $\hat{u}$ e denota-se por $\|\hat{u}\|$, o escalar*

$$\|\hat{u}\|_E = \sqrt{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle}.$$

Com base nos conceitos já introduzidos podemos definir a **projecção ortogonal** de um vetor $\hat{v}$ sobre o vetor $\hat{u}$ como sendo o vetor $\hat{v}' = \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\|\hat{u}\|_E^2}\hat{u}$. Tendo em conta esta definição, segue-es que o vetor $\hat{u}$ é ortogonal ao vetor $\hat{v} - \hat{v}' = \hat{v} - \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\|\hat{u}\|_E^2}\hat{u}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\langle \hat{u}, \hat{v} - \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\|\hat{u}\|_E^2}\hat{u}\rangle &= \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle - \langle \hat{u}, \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\|\hat{u}\|_E^2}\hat{u}\rangle\\ &= \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle - \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\|\hat{u}\|_E^2}\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle\\ &= \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle - \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

A Figura 7.1 ilustra a projecção ortogonal do vetor $\hat{v}$ sobre o vetor $\hat{u}$. Note-se que o vetor $\hat{v}'$ é precisamente esta projecção e o vetor $\hat{v} - \hat{v}'$ é ortogonal ao vetor $\hat{u}$.

A norma euclidiana anteriormente introduzida é um caso particular de norma cuja definição geral se apresenta a seguir.

Definição 7.5. *Dado um e.v. arbitrário $\mathcal{V}$ sobre um corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), designa-se por norma em $\mathcal{V}$ a aplicação $\|\ \| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_0^+$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

[1] Um e.v. de dimensão infinita munido de um produto interno diz-se um espaço pré-hilbertiano.

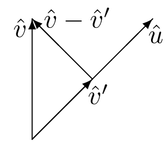

Figura 7.1: Projecção ortogonal do vetor $\hat{v}$ sobre o vetor $\hat{u}$.

1. ***Positividade:*** $\|\hat{u}\| \geq 0 \ \ \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$ *e* $\|\hat{u}\| = 0$ *se e só se* $\hat{u} = \hat{0}$.
2. ***Homogeneidade:*** $\|\lambda\hat{u}\| = |\lambda|\|\hat{u}\| \qquad \forall \lambda \in K \ \forall \hat{u} \in \mathcal{V}$.
3. ***Desigualdade triangular:*** $\|\hat{u}+\hat{v}\| \leq \|\hat{u}\| + \|\hat{v}\| \qquad \forall \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$.

Antes de verificarmos que a norma euclidiana, definida à custa do produto interno, satisfaz todas estas propriedades, convém estudar a **desigualdade de Cauchy-Schwarz** (também conhecida por desigualdade de Cauchy-Buniakowski).

Teorema 7.2. *Num e.v.* $\mathcal{V}$ *sobre um corpo* K *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) munido de um produto interno* $\langle \ , \ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ *é válida a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou seja, dados dois vetores arbitrários* $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$,

$$|\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle|^2 \leq \langle \hat{u}, \hat{u}\rangle\langle \hat{v}, \hat{v}\rangle.$$

Demonstração. Sejam $\hat{u}$ e $\hat{v}$ dois vetores arbitrários de $\mathcal{V}$ que não são simultaneamente nulos. Por exemplo, seja $\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle \neq 0$. Então $\forall \lambda \in K$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda\hat{u}+\hat{v}, \lambda\hat{u}+\hat{v}\rangle \\ &= \langle \lambda\hat{u}, \lambda\hat{u}+\hat{v}\rangle + \langle \hat{v}, \lambda\hat{u}+\hat{v}\rangle \\ &= \langle \lambda\hat{u}, \lambda\hat{u}\rangle + \langle \lambda\hat{u}, \hat{v}\rangle + \langle \hat{v}, \lambda\hat{u}\rangle + \langle \hat{v}, \hat{v}\rangle \\ &= \lambda\bar{\lambda}\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle + \lambda\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle + \bar{\lambda}\langle \hat{v}, \hat{u}\rangle + \langle \hat{v}, \hat{v}\rangle. \end{aligned}$$

Logo, vem que

$$\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle \left(\lambda\bar{\lambda} + \lambda\frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle} + \bar{\lambda}\frac{\overline{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle} + \frac{\langle \hat{v}, \hat{v}\rangle}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle} \right) \geq 0 \ \ \forall \lambda \in K,$$

o que é equivalente a

$$\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle \left((\lambda + \frac{\overline{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle})(\bar{\lambda} + \frac{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle}) + \frac{\langle \hat{v}, \hat{v}\rangle}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle} - (\frac{|\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle|}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle})^2 \right) \geq 0 \ \ \forall \lambda \in K.$$

Fazendo $\lambda = -\frac{\overline{\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle}}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle}$ obtém-se

$$\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle \left(\frac{\langle \hat{v}, \hat{v}\rangle}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle} - (\frac{|\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle|}{\langle \hat{u}, \hat{u}\rangle})^2 \right) \geq 0,$$

ou ainda

$$|\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle|^2 \leq \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle.$$

No caso de de se ter $\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = 0$ e $\langle \hat{v}, \hat{v} \rangle = 0$, vem que $\hat{u} = \hat{v} = \hat{0}$ e a desigualdade é trivialmente verificada. □

A prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz é bastante mais simples se nos confinarmos aos espaços euclidianos. Com efeito, neste caso, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda\hat{u} + \hat{v}, \lambda\hat{u} + \hat{v} \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \lambda^2 + 2\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \lambda + \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle \geq 0,$$

pelo que podemos concluir que este polinómio do segundo grau em λ não tem duas raízes distintas (porquê?) e, nestas condições, o binómio discriminante não pode ser positivo, ou seja, $4(\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle)^2 - 4\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle \leq 0$, o que é equivalente à desigualdade

$$\begin{array}{rcl} (\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle)^2 & \leq & \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle \\ & \Updownarrow & \\ |\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle| & \leq & \|\hat{u}\|_E \|\hat{v}\|_E. \end{array}$$

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. sobre o corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$. Vamos provar que a norma euclidiana, $\|\ \|_E$, definida à custa deste produto interno satisfaz as propriedades requeridas pela norma (em sentido lato). Com efeito, sejam $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$.

1. $\|\hat{u}\|_E^2 = \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle > 0$ se $\hat{u} \neq \hat{0}$ e no caso de se ter $\hat{u} = \hat{0}$ vem que $\|\hat{u}\|_E^2 = \langle 0\hat{v}, \hat{0} \rangle$, onde $\hat{v}$ é um vetor arbitrário de $\mathcal{V}$, pelo que $\|\hat{u}\|_E^2 = 0\langle \hat{v}, \hat{0} \rangle = 0$. Assim, fica provado que a norma euclidiana satisfaz a propriedade de positividade.

2. $\|\lambda\hat{u}\|_E^2 = \langle \lambda\hat{u}, \lambda\hat{u} \rangle = \lambda^2 \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = \lambda^2 \|\hat{u}\|_E^2$, pelo que $\|\lambda\hat{u}\|_E = |\lambda| \|\hat{u}\|_E$. Assim, fica provado que a norma euclidiana satisfaz a propriedade de homogeneidade.

3. Em primeiro lugar, deve observar-se que

$$\begin{aligned} \|\hat{u} + \hat{v}\|_E^2 &= \langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{u} + \hat{v} \rangle \\ &= \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle + \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle \\ &= \|\hat{u}\|_E^2 + \|\hat{v}\|_E^2 + \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle + \overline{\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle} \\ &= \|\hat{u}\|_E^2 + \|\hat{v}\|_E^2 + 2\mathcal{R}(\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle), \end{aligned} \tag{7.4}$$

onde $\mathcal{R}(a + bi) = a$, ou seja, é a parte real do número complexo $a + bi$. Logo, uma vez que

$$2\mathcal{R}(\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle) \leq 2|\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle| \leq 2\|\hat{u}\|_E \|\hat{v}\|_E,$$

de acordo com (7.4), obtém-se

$$\|\hat{u} + \hat{v}\|_E^2 \leq \|\hat{u}\|_E^2 + \|\hat{v}\|_E^2 + 2\|\hat{u}\|_E \|\hat{v}\|_E = (\|\hat{u}\|_E + \|\hat{v}\|_E)^2,$$

pelo que $\|\hat{u} + \hat{v}\|_E \leq \|\hat{u}\|_E + \|\hat{v}\|_E$. Assim, fica provada a desigualdade triangular.

Uma base de um e.v. arbitrário de dimensão finita, $\mathcal{B} = \{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n\}$, diz-se **ortogonal** quando $\langle \hat{u}_i, \hat{u}_j \rangle = 0 \;\; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$; diz-se **normada** quando $\|\hat{u}\| = 1 \;\; \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ e diz-se **ortonormada** quando se verificam as duas condições.

7.3 Propriedades dos espaços vetoriais euclidianos

Vamos exemplificar algumas das propriedades dos espaços vetoriais euclidianos, nos quais vamos supor definida a norma euclidiana $\| \; \|$.

Exemplo 7.2. *Vamos considerar um e.v. euclidiano $\mathcal{V}$.*

1. *Dados dois vetores arbitrários $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$,*

   (a) *é válida a desigualdade*

   $$|\|\hat{u}\| - \|\hat{v}\|| \leq \|\hat{u} + \hat{v}\|;$$

   (b) *verifica-se a igualdade*

   $$\|\hat{u} + \hat{v}\|^2 + \|\hat{u} - \hat{v}\|^2 = 2\left(\|\hat{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2\right);$$

   (c) *$\hat{u}$ e $\hat{v}$ são linearmente dependentes se e só se $|\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle| = \|\hat{u}\|\|\hat{v}\|$.*

2. *Dado um vetor $\hat{u} \neq \hat{0}$ e um vetor arbitrário $\hat{v}$, ambos de $\mathcal{V}$, verifica-se que $\hat{v}$ se pode representar como soma de um vetor colinear com $\hat{u}$ (ou seja, múltiplo escalar de $\hat{u}$) e um vetor ortogonal a $\hat{u}$.*

Solução.

1. (a) Sem perda de generalidade, vamos supor que $\|\hat{u}\| \geq \|\hat{v}\|$. Então, fazendo $\hat{u} = (\hat{u} + \hat{v}) - \hat{v}$, da desigualdade triangular vem que $\|\hat{u}\| \leq \|\hat{u} + \hat{v}\| + \|\hat{v}\|$. Logo, $\|\hat{u}\| - \|\hat{v}\| \leq \|\hat{u} + \hat{v}\|$ e, consequentemente, $|\|\hat{u}\| - \|\hat{v}\|| \leq \|\hat{u} + \hat{v}\|$.

   (b) Com efeito,

   $$\begin{aligned} \|\hat{u} + \hat{v}\|^2 + \|\hat{u} - \hat{v}\|^2 &= \langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{u} + \hat{v} \rangle + \langle \hat{u} - \hat{v}, \hat{u} - \hat{v} \rangle \\ &= \|\hat{u}\|^2 + 2\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle + \|\hat{v}\|^2 + \|\hat{u}\|^2 - 2\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle + \|\hat{v}\|^2 \\ &= 2\left(\|\hat{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2\right). \end{aligned}$$

   (c) Com efeito, os vetores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são linearmente dependentes se e só se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda\hat{u} + \hat{v} = \hat{0}$. De um modo equivalente, podemos afirmar que $\langle \lambda\hat{u} + \hat{v}, \lambda\hat{u} + \hat{v} \rangle = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ se e só se $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são linearmente dependentes. Logo, $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são linearmente dependentes se e só se o polinómio do segundo grau em λ

   $$\|\hat{u}\|^2\lambda^2 + 2\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle\lambda + \|\hat{v}\|^2 = 0$$

   tem uma única raiz, ou seja, se e só se o seu binómio discriminante é nulo, quer dizer

   $$4\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle^2 - 4\|\hat{u}\|^2\|\hat{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle^2 = \|\hat{u}\|^2\|\hat{v}\|^2.$$

2. Fazendo $\hat{v} = \lambda\hat{u} + \hat{w}$, com $\hat{w} \perp \hat{u}$, vem que $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = \lambda\|\hat{u}\|^2 + \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle}{\|\hat{u}\|^2}$ (uma vez que $\hat{u} \neq \hat{0}$ e $\langle \hat{u}, \hat{w} \rangle = 0$). Assim, basta fazer $\hat{w} = \hat{v} - \frac{\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle}{\|\hat{u}\|^2}\hat{u}$ e, nestas condições, vem

$$\hat{v} = \frac{\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle}{\|\hat{u}\|^2}\hat{u} + (\hat{v} - \frac{\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle}{\|\hat{u}\|^2}\hat{u}).$$

■

Note-se que a propriedade 1b generaliza a conhecida propriedade da geometria elementar que assegura que num paralelogramo a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

Definição 7.6. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v, euclidano e sejam E e F dois subconjuntos não vazios de vetores de $\mathcal{V}$. Diz-se que E é ortogonal a F e escreve-se $E \perp F$ se todo o vetor de E é ortogonal a todo o vetor de F.*

Desta definição decorre que se $E \perp F$ então $F \perp E$ pelo que a relação de ortogonalidade é uma relação simétrica. Se E é um conjunto singular, $E = \{\hat{u}\}$, em vez de se dizer que o conjunto E é ortogonal a F, por abuso de linguagem (mas para simplificar) dizemos que $\hat{u}$ é ortogonal a F e escreve-se $\hat{u} \perp \hat{F}$. Sendo S um subconjunto de vetores do e.v. euclidiano $\mathcal{V}$, denota-se por $S^{\perp}$ e lê-se S orto, o conjunto de vetores $\{\hat{u} \in \mathcal{V} : \hat{u} \perp S\}$.

Teorema 7.3. *Dado um subconjunto não vazio arbitrário de vetores, S, de um e.v. euclidiano $\mathcal{V}$, $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$.*

Demonstração. É claro que $S^{\perp} \neq \emptyset$, dado que $\hat{0} \in S^{\perp}$. Se $\hat{u}, \hat{v} \in S^{\perp}$, então $\forall \hat{w} \in S$ vem que $\langle \hat{u} + \hat{v}, \hat{w} \rangle = \langle \hat{u}, \hat{w} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = 0$, pelo que $\hat{u} + \hat{v} \in S^{\perp}$. Se $\hat{u} \in S^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\forall \hat{w} \in S$ vem que $\langle \alpha\hat{u}, \hat{w} \rangle = \alpha\langle \hat{u}, \hat{w} \rangle = 0$, pelo que $\alpha\hat{u} \in S^{\perp}$. □

7.4 Matriz da métrica e complemento ortogonal de um subespaço vetorial

Considere um e.v. euclidiano $\mathcal{V}$, uma sua base ordenada $\mathcal{B} = \{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n\}$ e dois vetores $\hat{w}, \hat{v} \in \mathcal{V}$ tais que $\hat{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T_{\mathcal{B}}$ e $\hat{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T_{\mathcal{B}}$, ou seja,

$$\hat{w} = w_1\hat{u}_1 + \cdots + w_n\hat{u}_n \text{ e } \hat{v} = v_1\hat{u}_1 + \cdots + v_n\hat{u}_n.$$

Pela bilinearidade do produto interno definido em espaços vetoriais euclidianos, vem que

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{w}, \hat{v} \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} w_j \hat{u}_j, \sum_{j=1}^{n} v_j \hat{u}_j \rangle \\
&= w_1 v_1 \langle \hat{u}_1, \hat{u}_1 \rangle + \cdots + w_1 v_n \langle \hat{u}_1, \hat{u}_n \rangle \\
&\quad + \\
&\quad w_2 v_1 \langle \hat{u}_2, \hat{u}_1 \rangle + \cdots + w_2 v_n \langle \hat{u}_2, \hat{u}_n \rangle \\
&\quad + \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \\
&\quad w_n v_1 \langle \hat{u}_n, \hat{u}_1 \rangle + \cdots + w_n v_n \langle \hat{u}_n, \hat{u}_n \rangle \\
&= (w_1 \ \cdots \ w_n) \begin{pmatrix} \langle \hat{u}_1, \hat{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{u}_1, \hat{u}_n \rangle \\ \langle \hat{u}_2, \hat{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{u}_2, \hat{u}_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \hat{u}_n, \hat{u}_1 \rangle & \cdots & \langle \hat{u}_n, \hat{u}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad (7.5) \\
&= \hat{w}^T M \hat{v},
\end{aligned}
$$

onde M (matriz em (7.5)) se designa por **matriz da métrica** do produto interno em relação á base $\mathcal{B}$. Note-se que, uma vez que $\langle \hat{u}_i, \hat{u}_j \rangle = \langle \hat{u}_j, \hat{u}_i \rangle$, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, a matriz da métrica é uma matriz simétrica.

Exemplo 7.3. *Considere o e.v. real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno*

$$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = 2u_1v_1 + u_1v_2 - u_1v_3 + u_2v_1 + 3u_2v_2 - u_3v_1 + u_3v_3,$$

e a base ordenada $\mathcal{B} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3\}$*, onde* $\hat{w}_1 = (1, 0, 0)$*,* $\hat{w}_2 = (1, 1, 0)$ *e* $\hat{w}_3 = (1, -1, 1)$*.*

1. *Vamos determinar a matriz da métrica* M *do produto interno em relação à base* $\mathbb{B}$*.*
2. *Vamos determinar* $\langle (0, 1, 0)_{\mathbb{B}}, (2, -1, 1)_{\mathcal{B}} \rangle$*, utilizando a matriz da métrica da alínea anterior.*

Solução. Vamos resolver cada uma das alíneas da seguinte forma.

1. Dado que $\langle \hat{w}_1, \hat{w}_1 \rangle = 2$, $\langle \hat{w}_1, \hat{w}_2 \rangle = 3$, $\langle \hat{w}_1, \hat{w}_3 \rangle = 0$, $\langle \hat{w}_2, \hat{w}_2 \rangle = 7$, $\langle \hat{w}_2, \hat{w}_3 \rangle = -2$ e $\langle \hat{w}_3, \hat{w}_3 \rangle = 2$, a matriz da métrica deste produto interno relativamente a esta base é a matriz
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
2. Utilizando a matriz M obtém-se
$$\langle (0, 1, 0)_{\mathcal{B}}, (2, -1, 1)_{\mathcal{B}} \rangle = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -3.$$

■

Dado um e.v. com produto interno $\mathcal{V}$ e um seu subespaço vetorial $\mathcal{U}$ designa-se por **complemento ortogonal** do subespaço $\mathcal{U}$ e denota-se por $\mathcal{U}^\perp$ o conjunto de vetores

$$\mathcal{U}^\perp = \{\hat{v} \in \mathcal{V} : \langle \hat{v}, \hat{u} \rangle = 0 \ \forall \hat{u} \in \mathcal{U}\}.$$

Note-se que, de acordo com o Teorema 7.3, o conjunto de vetores $\mathcal{U}^\perp$ é um subespaço vetorial.

Teorema 7.4. *Se $\mathcal{U}$ é um subespaço vetorial do e.v. euclidiano $\mathcal{V}$, então*

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp,$$

onde $\oplus$ denota a soma direta.

Demonstração. Seja $\hat{w} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp$. Então $\hat{w} \perp \hat{w} \Leftrightarrow \langle \hat{w}, \hat{w} \rangle = 0 \Leftrightarrow \hat{w} = \hat{0}$. Logo, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\hat{0}\}$.
Seja $\hat{v} \in \mathcal{V}$, $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k\}$ uma base ortonormada de $\mathcal{U}$ e seja

$$\hat{u} = \langle \hat{v}, \hat{e}_1 \rangle \hat{e}_1 + \langle \hat{v}, \hat{e}_2 \rangle \hat{e}_2 + \cdots + \langle \hat{v}, \hat{e}_k \rangle \hat{e}_k.$$

Então, dado que $\hat{u} \in \mathcal{L}(\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k\})$, $\hat{u} \in \mathcal{U}$. Por outro lado, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} \langle \hat{v} - \hat{u}, \hat{e}_i \rangle &= \langle \hat{v} - \sum_{j=1}^{k} \langle \hat{v}, \hat{e}_j \rangle \hat{e}_j, \hat{e}_i \rangle \\ &= \langle \hat{v}, \hat{e}_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle \hat{v}, \hat{e}_j \rangle \langle \hat{e}_j, \hat{e}_i \rangle \\ &= \langle \hat{v}, \hat{e}_i \rangle - \langle \hat{v}, \hat{e}_i \rangle \langle \hat{e}_i, \hat{e}_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $\langle \hat{v} - \hat{u}, \hat{e}_i \rangle = 0 \Leftrightarrow (\hat{v} - \hat{u}) \perp \hat{e}_i$. Logo, $\hat{v} - \hat{u} \in \mathcal{U}^\perp$.
Desta forma, podemos concluir que $\hat{v} = \hat{u} + (\hat{v} - \hat{u})$, com $\hat{u} \in \mathcal{U}$ e $\hat{v} - \hat{u} \in \mathcal{U}^\perp$, pelo que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$. □

Dado um e.v. euclidiano $\mathcal{V}$ e um seu subespaço vetorial $\mathcal{U}$, com facilidade se reconhecem as seguintes propriedades:

1. $\left(\mathcal{U}^\perp\right)^\perp \equiv \mathcal{U}$;

2. Se $\dim(\mathcal{V}) = n$ e $\dim(\mathcal{U}) = p$, então $\dim\left(\mathcal{U}^\perp\right) = n - p$;

3. Se $S \subset T \subset \mathcal{V}$, então $T^\perp \subset S^\perp$.

Seguem-se as demonstrações de cada uma destas propriedades.

1. Se $\hat{v} \in \left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp}$, então $\hat{v} \perp \mathcal{U}^{\perp}$ e consequentemente, $\hat{v} \in \mathcal{U}$, pelo que $\left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp} \subset \mathcal{U}$.
   Se $\hat{u} \in \mathcal{U}$, então $\hat{u} \perp \hat{U}^{\perp}$ e consequentemente, $\hat{u} \in \left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp}$, pelo que $\mathcal{U} \subset \left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Assim, podemos concluir que $\mathcal{U} = \left(\mathcal{U}^{\perp}\right)^{\perp}$.
2. A prova desta propriedade é imediata, tendo e conta que $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp}$.
3. Se $\hat{u} \in T^{\perp}$, então $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = 0 \; \forall \hat{v} \in T$. Logo, em particular, $\langle \hat{u}, \hat{w} \rangle = 0 \; \forall \hat{w} \in S$, pelo que $\hat{u} \in S^{\perp}$. Assim, $T^{\perp} \subset S^{\perp}$.

7.5 Exercícios

Exercício 7.1. *Prove que o conjunto de vetores $\{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p\} \subset \mathcal{V} \setminus \{\hat{0}\}$, onde $\mathcal{V}$ é um e.v. euclidiano, no qual*

$$\langle \hat{u}_i, \hat{u}_j \rangle = 0 \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, p\}, \text{ com } i \neq j,$$

é um conjunto linearmente independente.

Exercício 7.2. *Prove que as aplicações a seguir indicadas, definidas no e.v. $\mathcal{V} \equiv \mathbb{R}^n$, são normas de $\mathcal{V}$, onde o n-uplo $(u_1, \ldots, u_n)^T$ denota o vetor genérico $\hat{u}$.*

a)

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_2 : \mathcal{V} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ \hat{u} &\rightsquigarrow \|\hat{u}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathcal{V} &\to \mathbb{R}_0^+ \\ \hat{u} &\rightsquigarrow \|\hat{u}\|_\infty = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} \{|u_i|\}. \end{aligned}$$

Sugestão. *Para resolver a alínea a), tenha em atenção que $\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle}$ tal que para $\hat{w}^T = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\hat{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T$, $\langle \hat{w}, \hat{v} \rangle = w_1 v_1 + \cdots + w_n v_n$. Assim, $\|\hat{w} + \hat{v}\|_2^2 = \langle \hat{w} + \hat{v}, \hat{w} + \hat{v} \rangle = \|\hat{w}\|_2^2 + \|\hat{v}\|_2^2 + 2\langle \hat{w}, \hat{v} \rangle$.*

Exercício 7.3. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{C}$ munido do produto interno $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ e considere-se a base de $\mathcal{V}$, $\mathcal{B} = \{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_n\}$.*

1. *Supondo que a base $\mathcal{B}$ tem quatro vetores $(n = 4)$ e que*

   $$\langle \hat{u}_p, \hat{u}_q \rangle = \max\{p, q\} + (p - q)i \;\; \forall p, q \in \{1, 2, 3, 4\},$$

   escreva a expressão analítica do produto interno de dois vetores arbitrários $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e $\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$.

2. *Supondo que a base $\mathcal{B}$ é ortonormada, prove que o produto interno dos vetores de $\mathcal{V}$ $\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ e $\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ representados por 4-uplos de escalares relativamente à base $\mathcal{B}$ vem dado por*

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \bar{x}_3 y_3 + \bar{x}_4 y_4.$$

Exercício 7.4. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. de dimensão n sobre o corpo K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), munido do produto interno $\langle\ .\ \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$ gerado pelo conjunto ortonormado de vetores $\{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p\}$, com $p \leq n$ ($\mathcal{U} \equiv \mathcal{L}(\{\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_p\})$). Prove que*

$$\forall \hat{w} \in \mathcal{V} \ \ \sum_{j=1}^{p} |\langle \hat{w}, \hat{u}_j \rangle|^2 \leq \|\hat{w}\|_E^2.$$

Sugestão: *desenvolva*

$$\langle \hat{w} - \langle \hat{w}, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 - \cdots - \langle \hat{w}, \hat{u}_p \rangle \hat{u}_p, \hat{w} - \langle \hat{w}, \hat{u}_1 \rangle \hat{u}_1 - \cdots - \langle \hat{w}, \hat{u}_p \rangle \hat{u}_p \rangle.$$

Exercício 7.5. *Prove que num e.v. euclidiano, $\mathcal{V}$, é válido o teorema de Pitágoras e o seu recíproco, ou seja,*

$$\forall \hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V} \ \ \hat{u} \perp \hat{v} \Leftrightarrow \|\hat{u} + \hat{v}\|^2 = \|\hat{u}\|^2 + \|\hat{v}\|^2.$$

Exercício 7.6. *Prove que se $\hat{u}$ e $\hat{v}$ são dois vetores de um e.v. euclidiano tais que $\|\hat{u}\| = \|\hat{v}\|$, então os vetores $\hat{u} - \hat{v}$ e $\hat{u} + \hat{v}$ são ortogonais.*

Exercício 7.7. *Seja $\mathcal{V}$ um e.v. euclidiano de dimensão 3 e seja $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ uma base ortonormada de $\mathcal{V}$.*

1. *Mostre que o conjunto de vetores $\{\hat{e}_1 + \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_1 - \hat{e}_2\}$ é uma base de $\mathcal{V}$.*

2. *Determine a matriz da métrica do produto interno relativamente à base $\{\hat{e}_1 + \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_1 - \hat{e}_2\}$.*

Exercício 7.8. *Verifique quais das seguintes expressões definem produtos internos no e.v. real indicado.*

1. *em $\mathbb{R}^2$:*

   (a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$;

   (b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2$;

   (c) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;

   (d) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

2. *em $\mathbb{R}^3$:*

   (a) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$;

(b) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_3y_3$;

(c) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_3$;

(d) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_2 - x_3y_1 + x_3y_3$.

Exercício 7.9. *Considere o e.v. real* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *e seja* $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. *Prove que a expressão a seguir indicada define um produto interno de* $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B \rangle = tr(A^T B), \qquad \text{com } A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Exercício 7.10. *Seja* $\mathcal{V}$ *um e.v. euclidiano e sejam* $\hat{u}$, $\hat{v}$ *e* $\hat{w}$ *vetores de* $\mathcal{V}$ *tais que:*

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = 2, \quad \langle \hat{v}, \hat{w} \rangle = -3, \quad \langle \hat{w}, \hat{u} \rangle = 5, \quad \|\hat{u}\| = 1, \quad \|\hat{v}| = 2 \quad e \quad \|\hat{w}\| = 3.$$

Determine,

1. $\langle (\hat{u} + \hat{v}), (\hat{w} + \hat{v}) \rangle$;
2. $\langle (2\hat{v} - \hat{w}), (3\hat{u} + 2\hat{w}) \rangle$;
3. $\|\hat{u} + \hat{v}\|$;
4. $\|\hat{u} - 2\hat{v} + 4\hat{w}\|$.

Exercício 7.11. *Considere a aplicação* $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2.$$

1. *Mostre que* φ *é um produto interno.*
2. *Nas alíneas seguintes, considere o produto interno acima definido.*
   (a) *Calcule o produto interno entre os vectores* $u = (1, 3)$ *e* $v = (2, -1)$.
   (b) *Determine a expressão geral da norma de um vector arbitrário de* $\mathbb{R}^2$.
   (c) *Determine* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que o vetor* $(\alpha, 1)$ *é ortogonal a o vetor* $(2, 3)$.

Exercício 7.12. *Seja* $\mathcal{V}$ *um espaço vectorial real munido de um produto interno* $\langle\ ,\ \rangle$ *e da norma* $\|\ \|$ *definida à custa desse produto interno. Dados os vetores* $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{V}$, *prove que:*

1. $\|\hat{u} + \hat{v}\|^2 - \|\hat{u} - \hat{v}\|^2 = 4\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle$;
2. $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = 0$ *se e só se* $\|\hat{u} + \hat{v}\| = \|\hat{u} - \hat{v}\|$;

Bibliografia

[1] Paulo Almeida, Enide Andrade Martins, Sofia Pinheiro, Maria Raquel Pinto, Rosália Rodrigues, Rita Simões, Apontamentos para a unidade curricular de Álgebra Linear, Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 2012.

[2] Isabel Cabral, Cecília Perdigão, Carlos Saiago, Álgebra Linear, Escolar Editora, 2009.

[3] António Monteiro, Álgebra Linear e Geometria Analítica, Mc Graw Hill, 2001.

[4] W. Keith Nicholson, Álgebra Linear, McGraw Hill, 2006.

[5] Ana Paula Santana e João Filipe Queiró, Introdução à Álgebra Linear, Gradiva, 2010.