Equações diferenciais ordinárias

Uwe Kähler

Aveiro, 2^o semestre de 2012/2013

5 Equações diferenciais ordinárias

5.1 Introdução

5.1.1 Motivação e exemplos

Vários problemas físicos requerem a determinação de funções que satisfazem equações envolvendo uma ou mais das suas derivadas. Equações deste tipo designam-se por *equação diferenciais ordinárias* e são o objecto do estudo deste capítulo.

No que se segue, vamos iniciar com vários exemplos concretos de tais equações, a que se seguirá o estabelecer da teoria que permite o seu tratamento.

Exemplo 5.1. *(i)* ***Pêndulo linear*** *A equação que descreve o deslocamento $s = s(t)$ de um pêndulo linear é modelada tendo em conta as leis de Hooke (a força exercida é proporcional ao deslocamento) e de Newton (a aceleração é proporcional à força). Obtem-se assim*

$$s''(t) + \omega^2 s(t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{5.1}$$

onde ω é a constante específica do material. Aqui, $s = s(t)$ é a função a determinar, em dependência da variável tempo $t \geq 0$.

(ii) ***Lei de Weber-Fechner*** *A lei psico-somática (dita, lei de Weber-Fechner) estabelece uma relação entre a intensidade de um dado estímulo R e a percepção da intensidade emocional de resposta, $E = E(R)$, como sendo*

$$E'(R) = \frac{\alpha}{R}, \quad \alpha > 0, \tag{5.2}$$

sendo α uma dada constante de proporcionalidade.

(iii) ***Circuito de resistência/impedância*** *Baseada nas leis de Kirchhoff, Ohm e Faraday, a equação*

$$LI'(t) + RI(t) = U(t), \quad t > 0, \tag{5.3}$$

relaciona a intensidade de corrente no instante $t > 0$, $I = I(t)$ (em amperes), com a resistência do circuito R (em ohms), a sua indutância L (em henries) e a voltagem $U = U(t)$ (em volts) do circuito nesse instante .

(iv) ***Logística*** *A função logística $p = p(t)$ descreve a evolução, ao longo do tempo, de uma população confinada a um espaço limitado (e.g. uma cultura bacteriológica em laboratório):*

$$p'(t) = p(t)[\alpha - \beta p(t)], \quad t > 0, \tag{5.4}$$

onde $\alpha, \beta > 0$ são constantes fixadas à priori.

Os exemplos acima referem-se ao caso de equações diferenciais ordinárias (vulgo, EDO's) mas é possível considerar modelos mais complicados, onde a função a determinar depende de duas ou mais variáveis independentes. As equações diferenciais resultantes dizem-se *equações diferenciais parciais*, ou *EDP's*. Apesar de não efectuarmos o seu estudo aqui, daremos um exemplo de uma tal EDP, de importância em Física-Matemática.

Exemplo 5.2. ***Equação de Laplace - potencial de um corpo*** *A função potencial* $U : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *de um dado corpo (isto é, a função que estabelece o potencial de um corpo na posição* $(x, y, z) \in \Omega$*, um subconjunto aberto e conexo de* $\mathbb{R}^3$*, satisfaz*

$$\Delta U := \partial^2_{xx} U + \partial^2_{yy} U + \partial^2_{zz} U = 0, \tag{5.5}$$

em Ω *(dita, equação de Laplace).*

Nota: um último comentário: em cada caso, há um balanço delicado a manter entre os parâmetros com os quais estabelecemos uma equação diferencial e a realidade que procuramos reproduzir. Modelos mais complicados descrevem realidades mais complexas, logo, mais realístas, mas tornam-se, em contra-partida, mais difíceis de resolver.

5.1.2 Conceitos adicionais

Antes de iniciarmos com as definições propriamente ditas desta teoria, necessitaremos de introduzir alguns conceitos adicionais, como sejam a noção de *conjunto aberto e conexo de* $\mathbb{R}^n$, e de *derivada parcial de uma função*, e respectiva *regularidade*, (ver Exemplo 5.2).

Vamos iniciar com o conceito de derivada parcial.

A **derivada parcial de uma função** $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **em ordem a uma das variáveis** x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, onde $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$, é construída fixando as restantes variáveis

$$F(x_i) = f(\underbrace{x_1, \cdots, x_{i-1}}_{fixas}, x_i, \underbrace{x_{i+1}, \cdots, x_n}_{fixas}),$$

e derivando a função resultante (entendida como função de uma única variável) em ordem a x_i,

$$\partial_{x_i} f := F'(x_i).$$

Como exemplo, tome-se $f(x, y, z) = x^2 y + x e^{yz}$. Então, a derivada parcial de f em ordem a x obtém-se fazendo

$$F(x) = y x^2 + e^{yz} x \quad \Rightarrow \quad \partial_x f := F'(x) = 2yx + e^{yz} = 2xy + e^{yz}.$$

Já para a derivada parcial de f em ordem a y teremos

$$F(y) = x^2 y + x e^{zy} \quad \Rightarrow \quad \partial_y f := F'(y) = x^2 + xz e^{zy} = x^2 + xz e^{yz}$$

enquanto que para a derivada parcial de f em ordem a z vem

$$F(z) = x^2y + xe^{yz} \quad \Rightarrow \quad \partial_z f := F'(z) = xye^{yz} = xye^{yz}.$$

O conceito de *conjunto aberto* está ligado à noção de vizinhança de um ponto, que por sua vez é dada à custa da função *distância entre pontos*.

Assim, chamaremos **vizinhança** $\delta > 0$ **de um ponto** $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto de pontos

$$V_\delta(a) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n : \|x - a\| := \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \delta\}. \tag{5.6}$$

Em $\mathbb{R}^2$, as vizinhanças correspondem aos círculos dados por $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \delta^2$, de centro em $a = (a_1, a_2)$ e raio $\delta > 0$, enquanto que, em $\mathbb{R}^3$, correspondem a esferas dadas por $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \delta^2$, de centro em $a = (a_1, a_2, a_3)$ e raio $\delta > 0$.

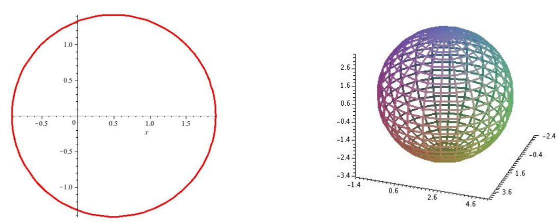

Figura 1: Vizinhança em $\mathbb{R}^2$ de centro em $a = (1/2, 0)$ e raio $\delta = \sqrt{2}$; vizinhança em $\mathbb{R}^3$ de centro em $a = (1, 2, 0)$ e raio $\delta = 3, 3$;

Dado um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é **ponto fronteiro** de A sse a vizinhança $V_\delta(a)$ intersecta pontos de A e do complementar de A, $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$, qualquer que seja $\delta > 0$. O conjunto de todos os pontos fronteiros de A designa-se por **fronteira de** A, e representa-se por $fr(A)$ ou ∂A.

Um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **aberto** sse $\partial A \cap A = \emptyset$. Um subconjunto não vazio e aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **conexo** sse quaisquer dois pontos $a, b \in A$ puderem ser unidos por uma linha poligonal totalmente contida em A.

Introduzidos que foram os conceitos básicos de topologia, passamos à noção de continuidade, essencial para estabelecer / estudar a regularidade de funções reais de várias variáveis reais. Este conceito será introduzido com o devido rigor em Análise Matemática 3, pelo que daremos aqui uma definição preliminar, seguida de uma condição de indôle prática.

Definição 5.1. *Seja D um subconjunto não vazio, aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$.*

Uma função $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D \mapsto y = F(\mathbf{x})$, diz-se contínua no ponto

$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$ sse para todo o $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in V_\delta(\mathbf{x}^0) \quad \Rightarrow \quad \left|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0)\right| < \varepsilon.$$

De uma forma mais simples, a implicação acima corresponde a ter-se

$$|x_1 - x_1^0| + \cdots + |x_n - x_n^0| \to 0 \quad \Rightarrow \quad \left|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^0)\right| \to 0.$$

Todavia, e para a necessidade prática deste curso, vamos usar o seguinte critério, que assenta no princípio de que se tem uma *álgebra de limites*:

Critério de continuidade - ***Se*** *F puder ser re-escrita, no aberto, não-vazio e conexo D, como uma composição, soma, diferença, produto ou quociente (na condição do denominador não se anular) de funções reais contínuas,* ***então*** *F é contínua em D.*

Exemplo 5.3. *Considere-se a função $F(x, y) = x^y$. Se admitirmos*

$$F(x, y) = x^y := e^{\ln(x^y)} = e^{y \ln x},$$

teremos que as funções reais de variável real $y \mapsto y$ e $x \mapsto \ln(x)$ são contínuas (a última, na condição adicional de $x > 0$). Assim, o produto $(x, y) \mapsto t = y\ln(x)$ é uma função contínua, e a composição $(x, y) \mapsto e^t = e^{y \ln(x)}$ é também uma função contínua. Então, a função dada $F(x, y) = x^y$ é contínua em $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

Note-se que

$$F(-1, 2) = (-1)^2 = +1$$

existe mas o critério dado nada diz sobre a continuidade de F neste ponto. O critério ***apenas*** *estabelece em que condições podemos garantir a continuidade de F, mas nada se pode concluir nos casos omissos.*

Diremos que F é classe C^m em D, e escrevemos $F \in C^m(D)$, $m \in \mathbb{N}_0$, se todas as suas derivadas parciais até à ordem m são contínuas em D.

5.2 Equações diferenciais ordinárias

No que se segue, os conjuntos a considerar serão **domínios**, ou seja, subconjuntos *não vazios, abertos e conexos*.

5.2.1 Definições e notações

Definição 5.2. *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ dois domínios, onde $n \in \mathbb{N}$.*

Considerem-se as funções reais $F : D \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ e $f : G \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

i) Chama-se ***EDO implícita de ordem*** n *à equação que expressa a dependência de* $y = y(x)$ *em relação à variável independente* x

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \quad (x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \in D, \tag{5.7}$$

equação esta que depende de x *e de* y*, e suas derivadas, até à ordem* n*.*

ii) Chama-se ***EDO explícita de ordem*** n *à equação que expressa a dependência de* $y = y(x)$ *em relação à variável independente* x *na forma*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \quad (x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in G \tag{5.8}$$

equação esta em que a derivada $y^{(n)}$ *depende de* x *e de* y*, e suas derivadas até à ordem* $n-1$*.*

De forma idêntica, as soluções de uma EDO (explícita ou implícita) podem ser dadas de duas formas.

Definição 5.3. *i) Dados um intervalo* $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ *e uma função* $y : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, com* $x \mapsto y(x)$*, diremos que* $y = y(x)$ *é uma* ***solução explícita*** *da EDO em* $\mathbb{I}$ *se verificar a EDO aí, ou seja, se se tiver, respectivamente,*

(1) EDO implícita (5.7) :
$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) \in D$ *e* $F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$*, para todo o* $x \in \mathbb{I}$*;*

(2) EDO explícita (5.8) :
$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)) \in G$ *e* $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x))$*, para todo o* $x \in \mathbb{I}$*.*

ii) Dados um domínio $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$ *e uma função* $u : \mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, diremos que a equação* $u(x, y) = 0$*, representa uma* ***solução implícita*** *da EDO em* $\mathbb{B}$ *se, num dado intervalo* $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$*, corresponder a uma solução explícita da EDO.*

Exemplo 5.4. *(i)* $y' = xy^2$

A EDO é explícita de 1^a *ordem. A função* $y(x) = -\frac{2}{1+x^2}$ *constitui uma solução explícita no intervalo* $\mathbb{I} = \mathbb{R}$*.*

(ii) $(yy^{(5)})^2 + xy'' + \ln y = 0$

A EDO é implícita de 5^a *ordem, e tem uma solução explícita* $y(x) = 1$*, no intervalo* $I = \mathbb{R}$*.*

(iii) $yy' + x = 0$

A EDO é implícita de 1^a *ordem, com uma solução implícita dada por* $x^2 + y^2 = R^2$*,* $R \geq 0$ *(equação de circunferência centrada na origem). Desta, podemos retirar as soluções explícitas,*

$$y_1(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\sqrt{R^2 - x^2},$$

ambas válidas no intervalo $\mathbb{I} = [-R, R]$.

(iv) $(y')^2 + 1 = 0$

A EDO é implícita de 1^a *ordem, e não possui soluções reais.*

Note-se [Exemplo 5.4 (iii)], que a solução de uma EDO (explícita / implícita) pode depender de um ou mais parâmetros livres reais. Qualquer família de soluções explícitas da forma

$$y = y(x; C_1, \cdots, C_r), \quad x \in \mathbb{I},$$

onde $C_1, \cdots, C_r$, são r parâmetros livres reais (ditos, *constantes de integração*), constitui uma **solução com** r **parâmetros livres**. Uma tal solução, para uma EDO de ordem n, diz-se **geral** se contém *exactamente* n parâmetros livres, e **completa** se pudermos obter todas as soluções da EDO à custa desta. Note-se que, apesar da lei que descreve a solução geral poder tomar diferentes aparências, a família de curvas descrita é única (justificando assim a unicidade da solução geral).

Chamamos **solução particular** de uma EDO a qualquer solução que não dependa de parâmetros livres. Em geral, estas são obtidas por concretização dos parâmetros livres na solução geral da EDO. Todavia, há casos em que certas soluções particulares não podem ser obtidas directamente por concretização dos parâmetros livres. Este tipo anómalo de solução designa-se por **solução singular** da EDO. Em geral, uma solução singular corresponde a ter a condição de *unicidade da solução* a falhar em cada ponto do domínio.

Exemplo 5.5. *(i) A EDO* $y' - 5y = 0$ *tem a solução geral* $y(x) = Ce^{5x}$, $C \in \mathbb{R}$, *válida em* $I = \mathbb{R}$. *As funções* $y(x) = 0$, $y(x) = 17e^{5x}$ *e* $y(x) = -0,002e^{5x}$ *dizem-se soluções particulares da EDO.*

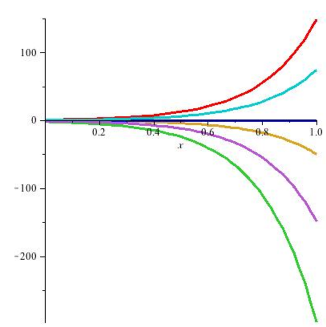

Figura 2: Soluções particulares de $y' - 5y = 0$

(ii) $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$ *é uma EDO implícita de* 1^a *ordem com solução geral* $y(x) = 2Cx - C^2$, $C \in \mathbb{R}$. *As rectas definidas por cada solução particular são tangentes à parábola* $y = x^2$, *que satisfaz*

a EDO (ou seja, falha a condição de unicidade de solução em cada ponto da parábola). Assim, $y = x^2$ diz-se uma solução singular da EDO.

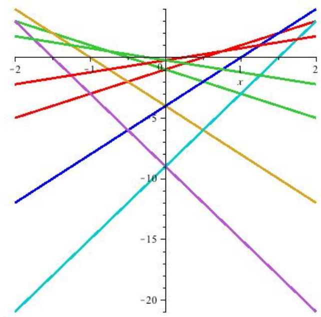

Figura 3: Soluções particulares de $(y')^2 - 4xy' + 4y = 0$ e solução singular $y = x^2$.

(iii) $(y')^2 = 4y$ *é uma EDO implícita*[1] *de* 1^a *ordem com solução geral* $y(x) = (x - C)^2,\ C \in \mathbb{R}$. *As parábolas definidas por cada solução particular são tangentes à recta* $y = 0$, *que satisfaz igualmente a EDO (de novo, falha a condição de unicidade de solução em cada ponto da recta real). Assim,* $y = 0$ *diz-se uma solução singular da EDO.*

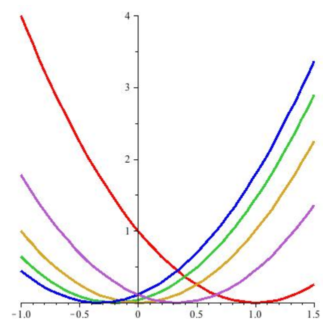

Figura 4: Soluções particulares de $(y')^2 = 4y$ e solução singular $y = 0$.

(iv) A EDO de 1^a *ordem* $|y'| + |y| = 0$ *não tem solução geral, mas tem uma solução singular* $y = 0$.

O processo de determinação de soluções gerais de uma EDO chama-se *integração* da EDO, visto a sua solução geral ser (usualmente) obtida por integração.

Para efeito do seu cálculo numérico, a EDO é considerada resolvida quando a solução é expressa por integrais, os quais podem ser posteriormente calculados por métodos de quadratura (não abordados nesta disciplina, mas que podem ser facilmente encontrados em livros de análise numérica).

[1] De notar que esta se transforma rapidamente numa EDO explicíta, fazendo $y' = 2\sqrt{y}$.

Exemplo 5.6. *Seja $f \in C(\mathbb{R})$. A EDO $y'' = f(x),\ x \in \mathbb{R}$, tem uma solução geral que pode ser obtida por intermédio de duas integrações sucessivas. Em primeiro lugar,*

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

para um certo $x_0 \in \mathbb{R}$ fixo. Integrando de novo resulta

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(u)du + C_2 = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{u} f(t)dt \right) du + C_1(x - x_0) + C_2,$$

para C_1, C_2 constantes reais.

5.2.2 Problemas de Valores Iniciais

Vamos agora estudar uma situação, comum em problemas de Física-Matemática, na qual o objectivo é a obtenção de soluções particulares para EDO's explícitas. Para o efeito, a concretização dos parâmetros (constantes de integração) é feita à custa da introdução de condições adicionais.

Definição 5.4 (Problema de Valores Iniciais (PVI)). *Dados a EDO explícita (5.8) e um $(n+1)-$uplo $(x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in G$, diz-se que o sistema*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), & (x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \in G \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{5.9}$$

constitui um PVI para a EDO (5.8).

O nome PVI (*Problemas de Valores Iniciais*) deriva das aplicações práticas, em que fenómenos dependentes do tempo, $y = y(t),\ t \geq 0$, são modelados via EDO's do tipo (5.8), e onde se pretende obter a solução particular que satisfaz às condições iniciais $y(0), y'(0)$, etc., previamente conhecidas. Várias adaptações e variantes deste problema podem ser dadas (e.g., usar uma EDO implícita, ou dar condições incompletas) mas todas serão aqui designadas por PVI.

Geometricamente, determinar a solução particular que satisfaz ao PVI corresponde a encontrar, na solução geral da EDO (família de curvas), a curva particular que satisfaz às condições iniciais do PVI (fixando o ponto inicial x_0 e respectivas derivadas nesse ponto).

Exemplo 5.7. *(i)* ***Pêndulo linear*** *- um movimento axial é determinado, em cada instante $t > 0$, pela posição $s = s(t)$ e velocidade $v = s'(t)$ do corpo. No caso do pêndulo linear,* *obtem-se o PVI*

$$\begin{cases} s''(t) + \omega^2 s(t) = 0, & t \geq 0 \\ s(0) = s_0 \\ s'(0) = v_0 \end{cases}$$

Este PVI admite solução única

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \ t > 0,$$

representável em termos de plano de fase (plano de coordenadas s e s') por

$$\omega^2 s^2 + (s')^2 = \omega^2 s_0^2 + v_0^2$$

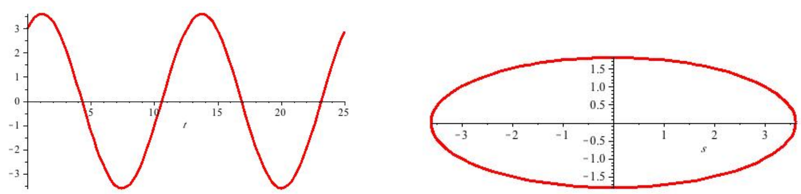

Figura 5: Solução particular, e plano de fase, para a frequência $\omega = \frac{1}{2}$, e valores iniciais $s_0 = 3, v_0 = 1$

(ii) O PVI

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 & (t, x) \in \mathbb{R}^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

tem solução particular $x(t) = \tan(t)$, válida no intervalo $\mathbb{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

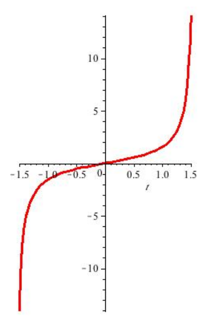

Figura 6: Solução particular do PVI

Note-se que a solução $x = x(t)$ é válida apenas quando $t \in \mathbb{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, enquanto que a EDO não apresenta nenhuma restrição em tempo.

Definição 5.5. *O PVI diz-se localmente resolúvel num ponto* $(x_0, y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{n-1}(x_0)) \in G$ *se existir* $\epsilon > 0$ *tal que a função* $y = y(x)$

i) existe para todo $x \in \mathbb{I} =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$;

ii) satisfaz o PVI em $\mathbb{I}$.

Uma solução nestas condições diz-se uma solução local do PVI.

O Exemplo 5.7 (*ii*) constitui um exemplo de um PVI localmente resolúvel no ponto $(t_0, x(t_0)) = (0, 0)$, com solução local $x(t) = \tan(t)$ no intervalo $\mathbb{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Há uma classificação dos PVI's em termos de existência e unicidade de soluções locais, da autoria de J. Hadamard[2].

Definição 5.6 (Bem-posto)**.** *Um PVI diz-se bem-posto se*

i) possui solução (local ou global);

ii) a solução é única;

iii) a solução depende, de forma contínua, dos valores iniciais dados.

A importância desta classificação é óbvia: um PVI bem-posto garante que a solução obtida para a realidade que o problema modela é *bem comportada*, isto é, a solução existe, é única e (importante) pequenos erros nos dados iniciais não afectam muito a solução final do problema. Todavia, confirmar se o PVI é, ou não, um problema bem-posto é, em geral, uma tarefa difícil.

O seguinte exemplo ilustra alguns dos problemas que surgem quando um PVI é um problema mal-posto.

Exemplo 5.8. *O PVI*

$$\begin{cases} y' = y^{1/3}, & x \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admite a solução geral

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < C \\ \left[\frac{2}{3}(x - C)\right]^{3/2} & x \geq C \end{cases}$$

onde C *é uma constante real não negativa.*

[2]Matemático Francês, 1865-1963.

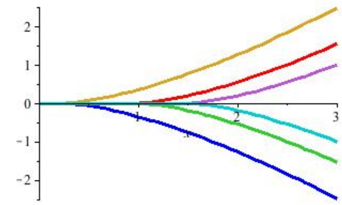

Figura 7: Algumas soluções do PVI

É óbvio que qualquer elemento desta família cumpre as condições do PVI. Em consequência, este problema não tem solução única (de facto, toda e qualquer curva desta família satisfaz o PVI dado) pelo que se diz mal-posto.

5.2.3 Interpretação geométrica de uma EDO explícita de 1^a ordem

Dada uma EDO explícita

$$y' = f(x,y), \quad (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2,$$

a solução geral desta é constituída pelas curvas diferenciáveis $y = y(x)$ que têm, em cada ponto $(x,y) \in G$, um declive dado por $y'(x) = f(x,y)$. Este facto permite efectuar uma representação gráfica dos vectores com origem nos pontos (x,y) e com inclinação $f(x,y)$ (dito, *campo direccional* associado à EDO).

Exemplo 5.9. *A EDO explícita $y' = 1 - 2xy$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem associada a si o campo direccional dos vectores $\vec{v} = (x,y)$ tais que*

$$\frac{y}{x} := m = f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = 1 - 2xy,$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se assim a representação gráfica

$$(x,y) \mapsto \vec{v} = (x,(1-2xy)x),$$

das direcções associadas às curvas $y = y(x)$, soluções da EDO $y' = f(x,y)$, que se ilustrada na figura abaixo indicada.

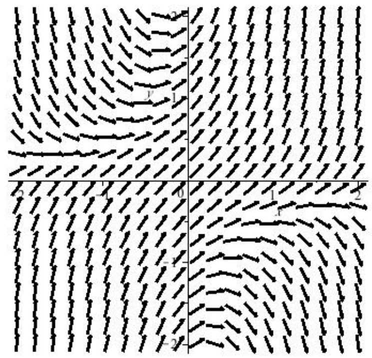

Figura 8: Campo direccional (normalizado para efeitos de visualização) dos vectores $\vec{v}$.

Note-se, no campo direccional, a confirmação do facto de que toda a solução desta EDO cumpre a condição $y'(0) = 1$. *Assim, o PVI que tenha esta como condição inicial é mal-posto.*

Nas próximas secções vamos abordar diferentes técnicas de resolução (global ou local) de EDO's. Iniciaremos este estudo com o caso das EDO's de 1^a ordem.

5.3 EDO's de 1^a ordem

Vamos passar às classificações mais comuns de EDO's, e respectivos problemas de existência e unicidade das suas soluções.

5.3.1 EDO's exactas

O primeiro tipo de EDO's surge quando se efectua "reverse engineering" a partir da solução geral. Conhecida que seja uma família

$$u(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{5.10}$$

como encontrar a EDO de que (5.10) é solução geral implícita? Admitindo que esta família pode ser re-escrita na forma explícita $y = y(x)$, então

$$\begin{aligned} u(x, y) = C \quad &\Leftrightarrow \quad u(x, y(x)) = C \\ &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(u(x, y(x))\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \partial_x u(x, y) + \partial_y u(x, y) y' = 0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

A análise de (5.11) também indica as condições de regularidade a impôr à função $u = u(x, y)$.

Definição 5.7. *Sejam* $G \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio e* $A, B : G \to \mathbb{R}$ *duas funções contínuas nesse domínio, isto é,* $A, B \in C(G)$.

A EDO

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0, \quad (x,y) \in G, \tag{5.12}$$

diz-se uma EDO exacta se existir uma função $u : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *de classe* C^1 *no seu domínio, tal que*

$$\partial_x u = A, \quad \partial_y u = B, \quad \text{em } G,$$

e diz-se então que $u = u(x,y)$ *constitui uma primitiva de (5.12).*

É também usual dizer-se que $u = u(x,y)$ é uma primitiva do campo vectorial

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in G.$$

Exemplo 5.10. *A EDO*

$$y + xy' = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma EDO exacta, com solução geral $\quad xy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$

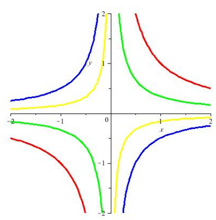

Figura 9: Soluções particulares da EDO $y + xy' = 0$.

Exemplo 5.11. *Dão-se, abaixo, alguns exemplos de campos vectoriais.*

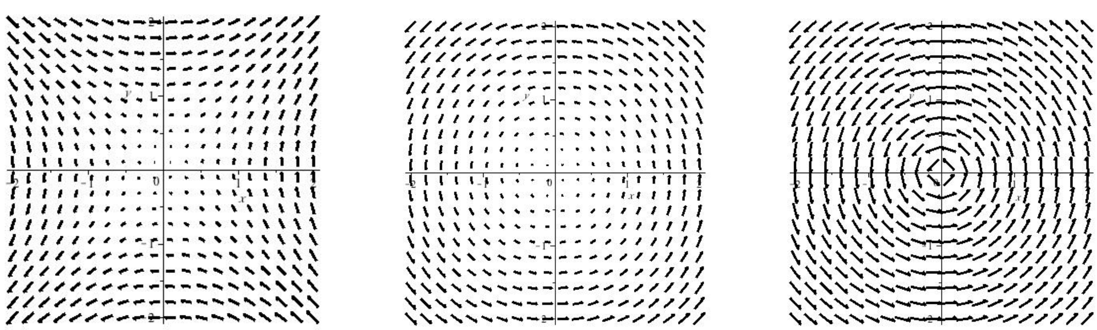

Figura 10: Campos vectoriais de $(x,y) \mapsto (y,x)^T$, $(x,y) \mapsto (-y,x)^T$, $(x,y) \mapsto (-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^T$, resp.

Teorema 5.1. *Considere-se uma EDO exacta nas condições da Definição 5.7, sendo* $u : G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma sua primitiva. Então*

a) a função $y = y(x)$, $x \in]a, b[$, *é uma solução explícita da EDO (5.12) sse tivermos*

i) $(x, y(x)) \in G$ *para todo o* $x \in]a, b[$;

ii) existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ *tal que* $u(x, y(x)) = C$ *para todo o* $x \in]a, b[$.

b) para todo o $(x_0, y_0) \in G$ *tal que* $B(x_0, y_0) \neq 0$, *o PVI*

$$\begin{cases} A(x,y) + B(x,y)y' = 0, & (x,y) \in G \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

é localmente resolúvel, com solução única, e a solução particular procurada é $u(x, y) = u(x_0, y_0)$.

Demonstração. a) Imediato, por aplicação da regra de cadeia para a derivada e tendo em atenção a Definição 5.7.

b) A curva $u(x, y) = C$ (dita *curva de nível da função* u) que passa pelo ponto $(x_0, y_0) \in G$ é dada por $u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Porque $\partial_y u(x_0, y_0) = B(x_0, y_0) \neq 0$, então

$$y'(x) = -\frac{\partial_x u(x, y(x))}{\partial_y u(x, y(x))},$$

é função contínua da variável x, pelo que existe localmente uma única primitiva $y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt$, e tem-se $u(x, y(x)) = u(x_0, y_0)$ nessa vizinhança (Teorema das Funções Implícitas).

□

Para determinar se uma EDO é, ou não exacta, usa-se o seguinte teorema. A demonstração deste baseia-se no Teorema de Schwarz, pelo que é remetida para Análise Matemática 3.

Teorema 5.2 (Teste de exactidão)**.** *Sejam* $G \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio e* $A, B \in C^1(G)$.

A EDO

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0, \quad (x, y) \in G$$

é exacta sse as funções A, B *satisfazem o teste de integrabilidade*

$$\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y) \tag{5.13}$$

para todo $(x, y) \in G$.

Exemplo 5.12. *(i) A EDO* $(2x + 3\cos(y)) + (2y - 3x\sin(y))y' = 0$ *é exacta, uma vez que*

$$\begin{aligned} \partial_y A = \partial_x B \quad &\Leftrightarrow \quad \partial_y(2x + 3\cos(y)) = \partial_x(2y - 3x\sin(y)) \\ &\Leftrightarrow \quad -3\sin(y) = -3\sin(y), \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) *A EDO* $(y^2 - x) + (x^2 - y)y' = 0$ *não é exacta em* $\mathbb{R}^2$ *pois*

$$\partial_y(y^2 - x) \neq \partial_x(x^2 - y)$$

sempre que $x \neq y$.

(iii) *É possível construir EDO's exactas para as quais o Teste da Exactidão falha. Para tal, basta construir uma solução geral* u *tal que as suas derivadas parciais* $\partial_x u = A$ *e* $\partial_y u = B$ *não sejam de classe* C^1 *(por outras palavras,* $u \in C^1$ *mas* $u \notin C^2$*). Assim,*

$$u(x,y) = (x^2 + y^2)^{3/2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$*, pelo que* $u(x,y) = C, C \in \mathbb{R}$*, constitui solução geral da EDO exacta* $x(x^2+y^2)^{1/2} + y(x^2+y^2)^{1/2}y' = 0$ *em* $\mathbb{R}^2$*. Todavia, temos apenas*

$$\partial_y A = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \partial_x B$$

se $(x,y) \neq (0,0)$*, ou seja, o Teste da Exactidão falha na origem.*

(iv) *A função*

$$u(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0),$$

é de classe C^2 *no domínio* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*, pelo que* $u(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$*, é solução geral de*

$$\frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}y' = 0,$$

no domínio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

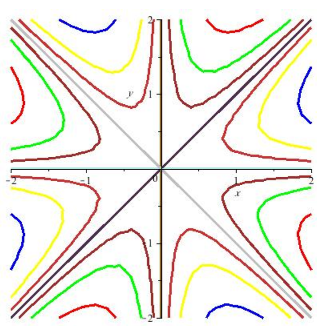

Figura 11: Curvas de nível associadas a $u = u(x,y)$.

O processo de resolução de uma EDO exacta

$$A(x,y)+B(x,y)y'=0, \quad (x,y)\in G,$$

onde $A, B \in C^1(G)$, é esquematizado a seguir:

Passo-0: confirmar que a EDO é *de facto* exacta, isto é, $\partial_y A = \partial_x B$ em G.

Passo-1: integração da EDO,

$$\begin{cases} \partial_x u = A \\ \partial_y u = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \int_x A(x,y)dx + K(y) \\ --- \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \int_x A(x,y)dx + K(y) \\ \partial_y \left(\int_x A(x,y)dx + K(y)\right) = B(x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \int_x A(x,y)dx + K(y) \\ \partial_y \left(\int_x A(x,y)dx\right) + K'(y) = B(x,y) \end{cases}$$

Note-se que o termo $\int_x A(x,y)dx$ é independente da variável x, o que permite determinar $K = K(y)$ por simples primitivação. O processo acima descrito pode ser também executado iniciando com a integração da segunda equação, $\partial_y u = B$ (ver exemplos que se seguem).

Obtida que seja a função u, a solução geral implícita da EDO será dada por $u(x,y) = C, \quad C\in\mathbb{R}$, em G.

Passo-2: resolução do PVI (se aplicável) $y(x_0) = y_0$, com $(x_0, y_0) \in G$. Para tal, tome-se a constante $\tilde{C} = u(x_0, y_0)$, e teremos a solução particular implícita

$$u(x,y) = \tilde{C} = u(x_0,y_0)$$

do PVI. Sempre que possível, deveremos apresentar a solução particular *explícita*, ou seja, resolver

$$u(x,y(x)) = u(x_0,y_0) \quad \Leftrightarrow \quad y = y(x), \quad x\in]a,b[\subset \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.13. *(i) Resolva o PVI*

$$\begin{cases} 2xy + (2y+x^2)y' = 0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Temos,

Passo-0: $\partial_y A = 2x = \partial_x B$, *em* $\mathbb{R}^2$.

Passo-1:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_x u = 2xy\\ \partial_y u = 2y + x^2\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}u(x,y) = \int_x 2xy dx + K(y)\\ ---\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}u(x,y) = x^2y + K(y)\\ \partial_y\left(x^2y + K(y)\right) = 2y + x^2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}---\\ K'(y) = 2y\end{array}\right.$$

donde se tira $K(y) = y^2$ *e* $u(x,y) = x^2y + K(y) = x^2y + y^2$. *A solução geral implícita é*

$$x^2y + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

em $G = \mathbb{R}^2$.

Passo-2: *para* $y(0) = 1$ *temos* $\tilde{C} = u(0,1) = 1$, *pelo que a solução particular implícita vem*

$$x^2y + y^2 = 1, \quad \text{em } \mathbb{R}^2,$$

com uma forma explícita

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^4+4} - x^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Resolva o PVI

$$\left\{\begin{array}{ll}-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}y' = 0, & (x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\\ y(1) = 1 & \end{array}\right.$$

Temos,

Passo-0: $\partial_y A = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x B$, *em* G.

Passo-1:

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_x u = -\frac{y}{x^2+y^2}\\ \partial_y u = \frac{x}{x^2+y^2}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}---\\ u(x,y) = \int_y \frac{x}{x^2+y^2}dy + K(x)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}\partial_x\left(\arctan\frac{y}{x} + K(x)\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}\\ u(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + K(x)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}K'(x) = 0\\ ---\end{array}\right.$$

donde se tira $K(x) = 0$ *e* $u(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + K(x) = \arctan\frac{y}{x}$. *A solução geral implícita é*

$$arctan\frac{y}{x} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

em $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Passo-2: *para $y(1) = 1$ temos $\tilde{C} = u(1,1) = \pi/4$, pelo que a solução particular implícita vem*

$$arctan \frac{y}{x} = \pi/4, \quad em\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Para a forma explícita da solução há necessidade de fraccionar o domínio [atendendo a que se pretende uma solução $y = y(x)$ contínua (e.g., para $x > 0$)], donde

$$arctan \frac{y}{x} = \pi/4 \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = x, \quad x > 0.$$

5.3.2 EDO's de variáveis separáveis

Definição 5.8. *Uma EDO diz-se de variáveis separáveis se puder ser re-escrita na forma explícita*

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad x \in]a,b[, y \in]c,d[, \tag{5.14}$$

onde $f :]a,b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (a < b)$, e $g :]c,d[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (c < d)$, são funções contínuas.

A solução geral é obtida de forma elementar, por análise do segundo membro de (5.14).

1) existe $\eta_0 \in]c,d[$ para o qual se tem $g(\eta_0) = 0$ (zeros de g); então a *solução constante*

$$y(x) = \eta_0, \quad x \in]a,b[,$$

é uma solução (particular) da EDO (5.14).

2) $g(y) \neq 0$ para os restantes valores de $y \in]c,d[\setminus \{\eta_0 : g(\eta_0) = 0\}$; então posso escrever (5.14) na forma

$$f(x)dx = \frac{dy}{g(y)} \left(= \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx \right),$$

donde, primitivando, obtém-se

$$\int f(x)dx = \int \frac{dy}{g(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_\alpha^x f(t)dt = \int_\beta^y \frac{d\tau}{g(\tau)} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

para $\alpha \in]a,b[,\ \beta \in]c,d[\setminus \{\eta_0 : g(\eta_0) = 0\}$, que constitui a solução geral de (5.14).

Em estricto rigor, a notação $\int f(x)dx$ já indica, por si só, a família das primitivas de f. Todavia, e no sentido de não sobrecarregar as notações, é comum convencionar-se que $\int f(x)dx$ representa **uma e uma só primitiva** desta família, escrevendo assim a solução geral como

$$\int f(x)dx = \int \frac{dy}{g(y)} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

para $x \in]a,b[,\ y \in]c,d[\backslash \{\eta_0 : g(\eta_0) = 0\}$, em vez da forma correcta, constante do segundo membro da equivalência (5.15).

Observe-se também que, nestas condições, a EDO pode igualmente ser vista como uma EDO exacta, onde

$$u(x,y) = \int f(x)dx - \int \frac{dy}{g(y)} = F(x) - G(y),$$

para $x \in]a,b[,\ y \in]c,d[\backslash \{\eta_0 : g(\eta_0) = 0\}$.

Teorema 5.3. *Sejam $f \in C(]a,b[),\ (a < b)$, e $g \in C(]c,d[),\ (c < d)$, duas funções contínuas. Para $x_0 \in]a,b[$ e $y_0 \in]c,d[$, o PVI*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x)g(y), & x \in]a,b[, y \in]c,d[, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é localmente resolúvel, com solução única, se

a) $g(y_0) \neq 0$ *ou*

b) $g(y_0) = 0$ *e existe uma constante $L > 0$ para a qual se tem*

$$|g(y)| \leq L|y - y_0|$$

numa vizinhança de y_0.

A condição b) indica que g satisfaz (localmente) uma condição de Lipschitz.

Demonstração. a) Imediato, dado que a EDO é então exacta e podemos aplicar o Teorema 5.1.

b) A demonstração desta é um caso particular do Teorema de Existência e Unicidade da solução local de uma EDO (futuro).

□

À semelhança das EDO's exactas, o processo de resolução da EDO

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad f \in C(]a,b[),\ g \in C(]c,d[),$$

pode ser esquematizado como indicado a seguir:

Passo-0: determinar os zeros $\eta_0 \in]c,d[$ da função g. Para cada zero η_0, a solução $y(x) = \eta_0,\ x \in]a,b[$ constitui uma solução particular da EDO.

Passo-1: partição do intervalo $]c,d[$ em função dos zeros de g obtidos no passo-0 e resolução da EDO

$$f(x)dx = \frac{dy}{g(y)}$$

em cada um dos sub-intervalos obtidos.

Ter-se-á uma solução geral implícita

$$\int f(x)dx - \int \frac{dy}{g(y)} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

válida em cada um dos sub-intervalos obtidos.

Passo-2: resolução do PVI (se aplicável)

- se y_0 é um zero de g, então a solução particular é dada por $y(x) = y_0$.

- se y_0 não é um zero de g, então estamos no caso de uma EDO exacta; determine-se $\tilde{C} = u(x_0, y_0)$, para $u(x,y) = \int f(x)dx - \int \frac{dy}{g(y)}$, e a solução particular implícita (válida num certo sub-intervalo de $]c, d[$) é

$$\int f(x)dx = \int \frac{dy}{g(y)} + \tilde{C},$$

e resolvemos esta solução em ordem a y para obter (se possível) a solução particular explícita do PVI.

Exemplo 5.14. *(i) Para a EDO $y' = y^2$, com $x, y \in \mathbb{R}$, vem*

Passo-0: *temos $g(y) = y^2$ donde g se anula para $\eta_0 = 0$. A solução $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, é uma solução particular da EDO.*

Passo-1: *Para $y \neq 0$, temos $\frac{dy}{y^2} = 1$, se $y > 0$, donde*

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C, \ C \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}, \quad x \neq -C \text{ e } y > 0.$$

Analogamente, se $y < 0$. Note-se que, apesar da EDO estar definida em $\mathbb{R}^2$, só possui soluções não triviais nos semi-planos $x < -C$ ou $x > -C$.

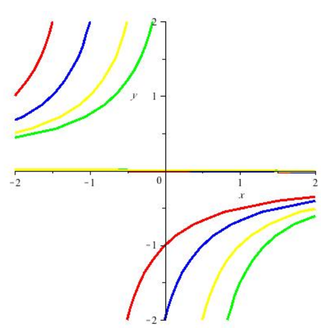

Figura 12: Soluções particulares da EDO de variáveis separáveis $y' = y^2$.

Passo-2: *impondo uma condição de valor inicial* $y(x_0) = y_0 > 0$, *teremos a solução particular explícita*

$$y(x) = -\frac{y_0}{1 + y_0(x - x_0)} > 0$$

válida para $x < x_0 - \frac{1}{y_0}$.

(ii) *Considere-se a EDO* $x - yy' = 0$, *para* $x, y \in \mathbb{R}$. *Dividindo ambos os membros da equação por* y *conduz a*

$$x - yy' = 0, \quad \Leftrightarrow \quad y' = x \times \frac{1}{y}, \quad y \neq 0,$$

e diremos que a EDO inicial é de variáveis separáveis para $y \neq 0$.

Passo-0: *porque* $g(y) = \frac{1}{y}$ *não tem zeros, este passo não gera soluções particulares.*

Passo-1: *Para* $y \neq 0$, *a solução geral é dada por*

$$\int x dx - \int y dy = C \Leftrightarrow x^2 - y^2 = C \quad C \in \mathbb{R},$$

e para $y > 0$ *tem-se a solução geral explícita*

$$y(x) = \sqrt{x^2 - C}, \quad x^2 > C,$$

enquanto que para $y < 0$ *se tem a solução geral explícita*

$$y(x) = -\sqrt{x^2 - C}, \quad x^2 > C.$$

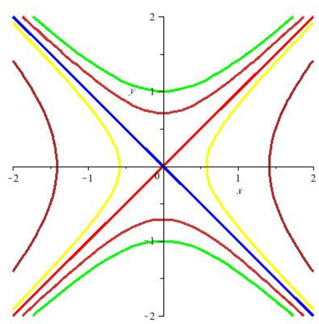

Figura 13: Soluções particulares da EDO de variáveis separáveis $x - yy' = 0$.

(iii) *Para a EDO* $y' = \frac{1-y^2}{x}$, *com* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}$,

Passo-0: $1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, *donde temos duas soluções particulares da EDO,* $y_1(x) = +1$ *e* $y_2(x) = -1$.

Passo-1: *Para $y^2 \neq 1$ tem-se*

$$y' = \frac{1-y^2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{1-y^2} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = Kx^2, \quad K = e^{2C} > 0,$$

a solução geral implícita donde se retiram as soluções explícitas,

\- *se* $\frac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1$, *então*

$$y(x) = \frac{Kx^2 - 1}{Kx^2 + 1}, \quad \text{para } x \neq 0;$$

\- *se* $\frac{1+y}{1-y} < 0 \Leftrightarrow -1 < y \ \vee \ y > 1$, *então*

$$y(x) = \frac{Kx^2 + 1}{Kx^2 - 1}, \quad \text{para } x \neq 0 \text{ e } Kx^2 \neq 1.$$

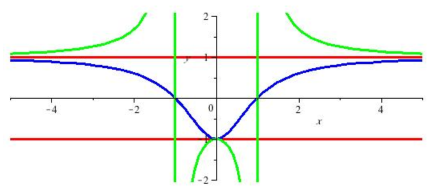

Figura 14: Soluções particulares da EDO para $K = 1$.

Exemplo 5.15. *Depósito cilíndrico - Um depósito cilíndrico de raio $R > 0$ está cheio de água até uma altura $h_0 > 0$. Por acção da gravidade ($\mathbf{g} \approx 9,8m/s^2$), o líquido escoa-se por um buraco circular no fundo do depósito, de raio $\rho > 0$ (assuma-se estas medidas expressas em metros).*

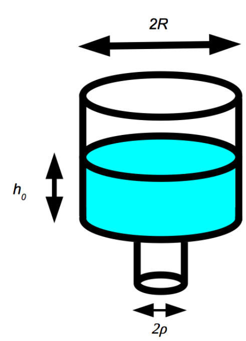

Figura 15: Depósito de água

A lei de Toricelli implica que a velocidade do escoamento é dada por

$$v(t) = -\sqrt{2\mathbf{g}h(t)}, \quad t \geq 0.$$

Por outro lado, a lei da conservação da massa diz-nos que o volume V_f do líquido que se escoa pelo furo corresponde ao volume V_i em falta no depósito. Dado que o volume é aqui área $\times$ altura, e, no limite, a variação em tempo da altura corresponde à velocidade, tem-se então

$$V_i = V_f \;\Leftrightarrow\; R^2 h'(t) = \rho^2 v(t), \quad t \geq 0,$$

donde obtemos o PVI

$$\begin{cases} h'(t) = -\frac{\rho^2}{R^2}\sqrt{2\mathbf{g}h(t)}, & t \geq 0, \\ h(0) = h_0. \end{cases}$$

Tomando $K = \frac{\rho^2}{R^2}\sqrt{2\mathbf{g}}$, obtemos a solução

$$h(t) = \begin{cases} (\sqrt{h_0} - \frac{Kt}{2})^2, & se \quad 0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{h_0}}{K} \\ \\ 0, & se \quad t > \frac{2\sqrt{h_0}}{K} \end{cases}.$$

Observe-se que o PVI em que a condição inicial é fixada como sendo $h(t_0) = 0$ para um certo instante $t_0 > 0$, não tem solução única para $0 \leq t < t_0$ (ou seja, o problema é *mal-posto*). O significado físico é óbvio: não é possível determinar, *à posteriori*, qual a quantidade de água que existia inicialmente no depósito.

5.3.3 EDO's lineares de 1^a ordem

Definição 5.9. *Sejam $a, f : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções, onde $\mathbb{I}$ denota um intervalo conexo de $\mathbb{R}$.*

A EDO

$$y' + a(x)y = f(x), \quad x \in \mathbb{I}, \tag{5.16}$$

diz-se uma EDO linear de 1^a ordem.

A EDO (5.16) diz-se homogénea se $f = 0$ no intervalo $\mathbb{I}$, e in-homogénea, ou completa, no caso contrário.

Dada uma EDO completa $y' + ay = f$, a EDO homogénea $y' + ay = 0$ diz-se a *EDO homogénea associada à EDO completa* dada.

Lema 5.1. *Se $a = a(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{I}$, a EDO homogénea*

$$y' + a(x)y = 0, \quad x \in \mathbb{I}, \tag{5.17}$$

tem solução geral dada por

$$y(x) = Ce^{-\int a(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{5.18}$$

onde $\int a(x)dx$ denota uma primitiva da função a.

Demonstração. A solução $y = 0$ (isto é, $C = 0$) é solução de (5.17).

Para $y \neq 0$, a EDO (5.17) é uma EDO de variáveis separáveis, com

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int a(x)dx + K \quad \Leftrightarrow \quad y = Ce^{-\int a(x)dx},$$

onde $C = \pm e^K,\ K \in \mathbb{R}$. $\square$

Interpretação fisíca de uma EDO linear de 1^a ordem homogénea - processos evolutivos são usualmente denotados por $x = x(t)$, dependente da variável temporal $t > 0$. A mudança relativa

$$\frac{x(t+\Delta_t) - x(t)}{x(t)}, \quad x(t) \neq 0,$$

no intervalo $[t, t+\Delta_t]$ dá-nos, no limite ($\Delta_t \to 0$), a *taxa de variação momentânea*

$$a(t) := \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{x(t+\Delta_t) - x(t)}{x(t)} \frac{1}{\Delta_t} = \frac{x'(t)}{x(t)}.$$

Assim, o crescimento livre, com uma taxa de variação momentânea conhecida $a = a(t)$, é descrito pela EDO linear homogénea

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad t > 0.$$

Exemplo 5.16. *Considere-se a EDO linear homogénea correspondente a uma taxa de variação constante $a(t) = a \in \mathbb{R}$. O PVI*

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem, por solução, $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad t \in \mathbb{R}$. Interprete-se agora as diferentes situações.

Caso 1. *$a < 0$; esta situação representa um processo de diminuição, com $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ (e.g., lei de refrigeração, decomposição de radioactividade, etc.).*

Caso 2. *$a > 0$; descreve um processo de crescimento exponencial, onde $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$. Modelo proposto inicialmente por Thomas Robert Malthus (1766-1834) para descrever o crescimento de uma população. Dado que, na prática, nenhuma população pode crescer indefinidamente (falta de recursos, doenças, etc.) este modelo foi abandonado em favor do de Pierre François Verhulst (1804-1849)*

$$x' = (a - bx)x, \quad a, b > 0,$$

que admite a solução geral [3]

$$x(t) = \frac{a}{b + Ce^{-at}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, verifica-se que estas soluções, apesar de crescentes em tempo, se encontram limitadas superiormente por

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{a}{b + Ce^{-at}} = \frac{a}{b},$$

implicando assim que a população que a equação modela tende a estabilizar ao fim de um certo tempo (donde, constituindo um modelo mais real para o crescimento de populações).

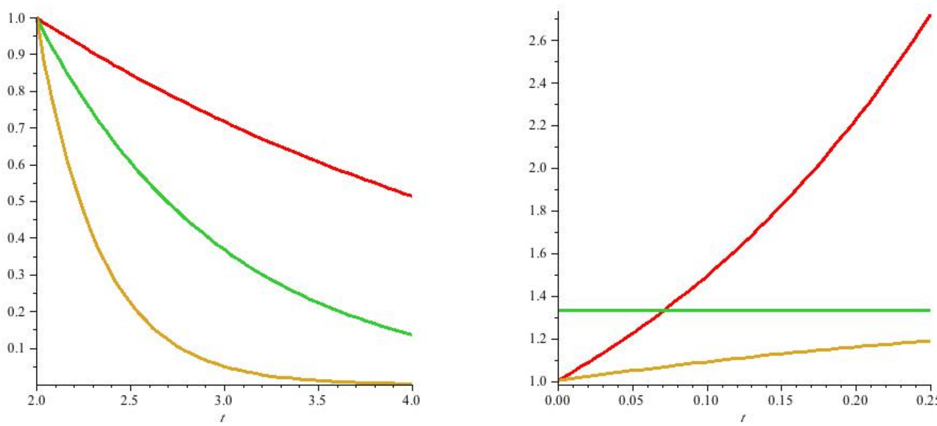

Figura 16: $x' = ax$, para $a = -1/3, -1, -3$ e $x(2) = 1$; $\quad x' = 4x$ e $x' = 4x + 3x^2$, com $x(0) = 1$.

Teorema 5.4 (Solução de EDO linear de 1^a ordem)**.** *A EDO linear de 1^a ordem (5.16), onde* $a, f \in C(\mathbb{I})$, *tem nesse intervalo a solução geral*

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(\xi)} f(\xi) d\xi + C \right), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{5.19}$$

para um $x_0 \in \mathbb{I}$, *e onde* $A = A(x)$ *representa uma primitiva de* $a = a(x)$, *isto é,* $A(x) = \int a(x)dx$.

Demonstração. Esta prova baseia-se no *método da variação das constantes*: suponha-se que a solução de (5.19) tem a forma

$$y(x) = C(x) y_h(x),$$

onde $y_h = y_h(x) (\neq 0)$ é uma solução da EDO homogénea associada a (5.16). Substituindo na

[3]Esta EDO diz-se uma equação de Bernoulli, com parâmetro $\alpha = 2$.

equação completa vem

$$\begin{aligned}
f(x) &= y'(x) + a(x)y(x) \\
&= \left[C'(x)y_h(x) + C(x)y_h'(x)\right] + a(x)\left[C(x)y_h(x)\right] \\
&= C'(x)y_h(x) + C(x)\underbrace{\left[y_h'(x) + a(x)y_h(x)\right]}_{=0} \\
&= C'(x)y_h(x),
\end{aligned}$$

donde resulta para a função $C(x)$, escolhido que seja um $x_0 \in \mathbb{I}$, a expressão

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y_h(\xi)} f(\xi) d\xi + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pelo Lema 5.1, uma solução não nula da EDO homogénea associada é $y_h(x) = e^{-A(x)}$, com $A(x) = \int a(x)dx$, o que completa a prova. $\square$

Exemplo 5.17. *Considere a EDO linear de 1ª ordem* $y' - \frac{2}{x}y = x\ln(x), x > 0$.

A EDO homogénea associada tem solução geral $y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}$. *Aplicando o método da variação das constantes, procuramos a solução geral da forma* $y = C(x)x^2,\ x > 0$. *Substituindo na EDO completa vem*

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2}{x}y = x\ln(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \left[C'(x)x^2 + \underbrace{C(x)2x\right] - \frac{2}{x}\left[C(x)x^2\right]}_{=0} = x\ln(x) \quad [\text{lembre } y = C(x)x^2] \\
&\Rightarrow \quad C'(x)x^2 = x\ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad C'(x) = \frac{\ln(x)}{x} \\
&\Rightarrow \quad C(x) = \int \frac{\ln(x)}{x}dx \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ou seja, a solução geral da EDO completa é

$$y = \left(\frac{\ln^2(x)}{2} + C\right)x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + Cx^2,\ C \in \mathbb{R}.$$

O método da variação das constantes foi introduzido por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e é também aplicável a EDO's lineares de ordem superior.

Um outro processo para resolver a EDO (5.16) é o seguinte. Observe-se que, multiplicando ambos os membros de (5.16) pelo factor $e^{A(x)} \neq 0$ (onde, de novo, $A(x) = \int a(x)dx$), se tem

$$y' - a(x)y - f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{A(x)}y' + \left[e^{A(x)}a(x)y - f(x)e^{A(x)}\right] = 0, \tag{5.20}$$

e onde esta última é agora uma EDO exacta. Com efeito,

$$\partial_x \left(e^{A(x)}\right) = a(x)e^{A(x)} = \partial_y \left(e^{A(x)}a(x)y - f(x)e^{A(x)}\right),$$

pelo que o Teorema 5.2 garante a existência de solução e é apenas questão de integrar a EDO exacta.

Adicionalmente, são válidas as seguintes consequências para EDO's lineares de 1^a ordem :

1. Existência global e unicidade da solução

Sendo a, f funções contínuas no intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{I}$ e dado um valor inicial $y_0 \in \mathbb{R}$, então a solução do PVI

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) & x \in \mathbb{I} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é única e global em $\mathbb{I}$, sendo dada por

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(\xi)} f(\xi) d\xi\right), \quad x \in \mathbb{I},$$

com $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi$.

2. Estrutura da solução geral

A solução geral da EDO (5.16) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = y_p(x) + Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde y_p representa uma (qualquer) solução particular da EDO completa e y_h, a solução geral da EDO homogénea associada.

3. Princípio da sobreposição

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e

$$y_1'(x) + a(x)y_1(x) = f_1(x) \quad \& \quad y_2'(x) + a(x)y_2(x) = f_2(x)$$

então $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ é solução de

$$y' + a(x)y = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

4. Soluções particulares

Quando $a = a(x)$ é constante e o segundo membro de (5.16) tem a forma

$$p(x), \quad p(x)e^{kx}, \quad p(x)e^{kx}\cos(\omega x) + q(x)e^{kx}\sin(\omega x),$$

onde $p = p(x), q = q(x)$ são polinómios e k, ω são constantes reais, então existe uma solução particular de (5.16) do mesmo tipo, cujos coeficientes podem ser determinados por substituição na EDO.

O processo de resolução da EDO (5.16), onde $a, f \in C(\mathbb{I})$, segue o esquema:

Passo-0: determinar uma primitiva $A(x) = \int a(x)dx$ e a subsequente solução geral da EDO homogénea associada

$$y_h(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R};$$

Passo-1: determinar uma solução particular $y_p = y_p(x)$ da EDO completa (5.16), quer pelo método da variação das constantes, quer pelo processo de determinação de solução particular a partir da forma do segundo membro (quando aplicável, claro).

Passo-2: obtenção da solução geral $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.

Passo-3: resolução do PVI, ou seja, determinação da constante C a partir do valor inicial $y_0 = y(x_0)$ (se aplicável).

Exemplo 5.18. *(i) Resolva a EDO*

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3, \quad x > 0.$$

Temos,

Passo-0:

$$A(x) = \int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad A(x) = \ln(x), \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \quad y_h(x) = Ce^{-\ln(x)} = C\frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Passo-1: $a(x) = \frac{1}{x}$ *não é constante, pelo que vamos usar o método da variação das constantes. A solução procurada é assim da forma*

$$y = C(x)\frac{1}{x}.$$

Substituindo na equação vem

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad C'(x)\frac{1}{x} = x^3$$
$$\Rightarrow \quad C(x) = \frac{x^5}{5} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

pelo que uma solução particular será

$$y_p(x) = \frac{x^4}{5}.$$

Passo-2: *A solução geral é*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C\frac{1}{x} + \frac{x^4}{5}, \quad x > 0.$$

(ii) Resolva a EDO

$$y' + 2y = 3e^{5x} + x^3 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Passo-0: $y_h(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$

Passo-1: $a(x) = 2$ *é constante, pelo que podemos usar o processo de determinação de solução particular a partir da forma do segundo membro:*

$$\begin{aligned} f_1(x) = 3e^{5x} \quad &\Leftrightarrow \quad y_1(x) = Ae^{5x} \\ &\Leftrightarrow \quad 3e^{5x} = y_1' + 2y_1 \\ &\Leftrightarrow \quad 3e^{5x} = 5Ae^{5x} + 2Ae^{5x} \\ &\Rightarrow \quad A = \frac{3}{7}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) = x^3 - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y_2(x) = Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 - 1 = y_2' + 2y_2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 - 1 = (3Bx^2 + 2Cx + D) + 2(Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) \\ &\Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}, C = \frac{-3}{4}, D = \frac{3}{4}, D = \frac{-7}{8}. \end{aligned}$$

pelo que uma solução particular será (princípio da sobreposição de soluções)

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = \frac{3}{7}e^{5x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}.$$

Passo-2: *A solução geral é*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= Ce^{-2x} + \frac{3}{7}e^{5x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(iii) Estudo do circuito de resistência/impedância [ver Problema 5.1 (iii), Equação (5.3)]

$$LI'(t) + RI(t) = U(t), \quad t > 0.$$

Passo-0: *A EDO homogénea associada tem por solução geral*

$$I_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Fisicamente, esta lei descreve o decaimento da intensidade de corrente no circuito após se desligar o gerador.

Se o circuito corresponde a uma situação de corrente contínua, $U(t) = U_0$*, constante, então*

Passo-1: *Uma solução particular é* $I_p(t) = \frac{U_0}{R}$.

Passo-2: *A solução geral fica*

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Passo-3: *Para o PVI com condição inicial* $I(0) = I_0$*, constante, teremos a solução*

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \left(\frac{U_0}{R} - I_0\right) e^{-\frac{R}{L}t},$$

que satisfaz $\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{U_0}{R}$*. Fisicamente, tal significa que, independentemente da corrente inicial* I_0*, com o decorrer do tempo a intensidade de corrente estabilizará no valor* $\frac{U_0}{R}$.

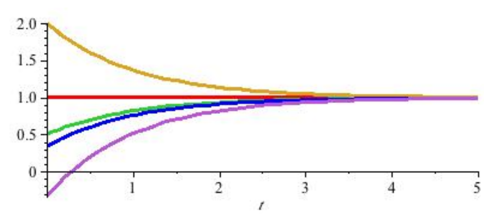

Figura 17: Representação da solução do PVI para diferentes valores de $I(0) = I_0$

Se, por outro lado, o circuito corresponder a uma situação de corrente alternada, $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$*, então*

Passo-1: *Uma solução particular é da forma* $I_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$*, para* $A, B \in \mathbb{R}$*. Substituindo na EDO*

$$\begin{aligned} LI'(t) + RI(t) = U_0\cos(\omega t) \quad &\Leftrightarrow \quad (RA + \omega LB)\cos(\omega t) + (RB - \omega LA)\sin(\omega t) = U_0\cos(\omega t) \\ &\Rightarrow \quad RA + \omega LB = U_0 \quad \& \quad RB - \omega LA = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad A = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}U_0 \quad \& \quad B = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}U_0 \end{aligned}$$

ou seja, tem-se a solução particular

$$I_p(t) \quad = \quad \frac{U_0}{R^2+\omega^2L^2}\left[R\cos(\omega t)+\omega L\sin(\omega t)\right] = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\omega_0\right),$$

onde $\omega_0 = \arctan\frac{\omega L}{R}$.

Passo-2: *A solução geral (e completa) é*

$$I(t) = I_h(t)+I_p(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\omega_0\right), \quad C\in\mathbb{R}.$$

Passo-3: *Para o PVI com condição inicial* $I(0)=I_0$, *obtemos o valor da constante* C *como*

$$C = I_0-\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega_0\right),$$

donde o PVI tem a solução

$$I(t) = \left(I_0-\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega_0\right)\right)e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\omega_0\right).$$

Com o decorrer do tempo

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t-\omega_0\right)$$

a intensidade de corrente estabiliza, independentemente do valor inicial I_0 *dado.*

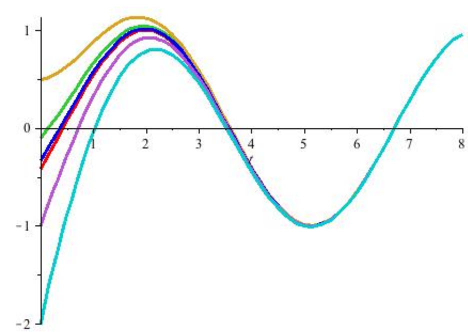

Figura 18: Representação da solução do PVI para diferentes valores de $I(0)=I_0$

5.3.4 Factor integrante

Vimos em (5.20) que uma EDO linear de 1^a ordem completa pode reduzir-se ao caso de uma EDO exacta se multiplicarmos ambos os membros da equação pelo factor $e^{A(x)}$. A questão que agora se põe é se podemos generalizar essa construção ao caso de outras EDO's?

Dito de outra forma, dada uma **EDO não exacta**

$$A(x,y)+B(x,y)y'=0,\quad (x,y)\in G\subset\mathbb{R}^2, \tag{5.21}$$

podemos construir um factor $M(x,y)\neq 0$ no domínio G tal que, multiplicando ambos os membros da equação por este,

$$M(x,y)A(x,y)+M(x,y)B(x,y)y'=0,\quad (x,y)\in G\subset\mathbb{R}^2,$$

a nova equação é agora uma **EDO exacta**? Se um tal factor $M=M(x,y)$ existir, diz-se um *factor integrante* ou *multiplicador de Euler*[4] da EDO (5.21).

Exemplo 5.19. *A EDO $-y+xy'=0$, com $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, é uma EDO não exacta pois,*

$$\partial_y\left(-y\right)\neq\partial_x\left(x\right).$$

Todavia, multiplicada que seja pelo factor $M(x,y)=\frac{1}{x^2},\ x\neq 0$, a EDO resultante

$$-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{x}y'=0,\quad x\neq 0,$$

é exacta, $\partial_y\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\partial_x\left(\frac{1}{x}\right)$, e admite a solução geral

$$\frac{y}{x}=C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Esta solução, válida para $x\neq 0$, é extensível a todo o domínio $\mathbb{R}^2$ fazendo $y=Cx,\ C\in\mathbb{R}$.

Passemos à construção do factor integrante. Se $A,B\in C^1(G)$ então uma função $M:G\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe C^1 e tal que $M(x,y)\neq 0$ em G, dir-se-á um factor integrante de (5.21) se

$$\partial_y\left(M(x,y)A(x,y)\right)=\partial_x\left(M(x,y)B(x,y)\right), \tag{5.22}$$

para todo o $(x,y)\in G$. Desenvolvendo, obtemos uma equação com derivadas parciais

$$\begin{aligned}\partial_y\left(MA\right)=\partial_x\left(MB\right)\quad&\Leftrightarrow\quad(\partial_yM)A+M(\partial_yA)=(\partial_xM)B+M(\partial_xB)\\&\Leftrightarrow\quad(\partial_yM)A-(\partial_xM)B=M(\partial_xB-\partial_yA),\quad\text{em } G.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Para se poder resolver (5.23) vamos impôr que M seja função de *uma única variável.*

Caso 1: $M=M(x)$. Então (5.23) reduz-se a

$$-M'(x)B(x,y)=M(x)\left[\partial_xB(x,y)-\partial_yA(x,y)\right]\quad\Leftrightarrow\quad\frac{M'(x)}{M(x)}=\frac{\partial_yA(x,y)-\partial_xB(x,y)}{B(x,y)},$$

[4] Matemático Suiço Leonhard Euler (1707-1783)

donde

1) a equação (5.23) é resolúvel *se*
$$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B}$$
é função *unicamente* da variável x,

2) e nesse caso tem-se o factor integrante
$$\ln|M(x)| = \int \left(\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B}\right) dx \quad \Rightarrow \quad M(x) = exp\left(\int \frac{\partial_y A - \partial_x B}{B} dx\right).$$

Caso 2: $M = M(y)$. Analogamente,

1) a equação (5.23) é resolúvel *se*
$$\frac{\partial_x B - \partial_y A}{A}$$
é função *unicamente* da variável y,

2) e nesse caso tem-se o factor integrante
$$\ln|M(y)| = \int \left(\frac{\partial_x B - \partial_y A}{A}\right) dx \quad \Rightarrow \quad M(y) = exp\left(\int \frac{\partial_x B - \partial_y A}{A} dx\right).$$

Exemplo 5.20. *A EDO*
$$y(2xy-1) + xy' = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
não é uma EDO exacta pois
$$\partial_y\left(2xy^2 - y\right) = 4xy - 1 \neq 1 = \partial_x(x).$$
Uma vez que
$$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B} = \frac{(4xy-1)-1}{x} = 4y - \frac{2}{x}$$
não função unicamente da variável x*, não há factor integrante da forma* $M = M(x)$*. Mas, porque*
$$\frac{\partial_x B - \partial_y A}{A} = \frac{1-(4xy-1)}{y(2xy-1)} = -\frac{2}{y}$$
é função unicamente da variável y*, existe factor integrante da forma* $M = M(y)$*, e*
$$M(y) = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{C}{y^2}, \quad y \neq 0.$$
Multiplicando a EDO inicial pelo factor integrante obtido tem-se
$$y(2xy-1) + xy' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2x - \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y^2}y' = 0, \quad y \neq 0$$

que, integrada, tem solução geral

$$x^2 - \frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Note-se, todavia, que a solução particular $y = 0$ *(que excluímos da solução geral da EDO exacta) é também solução da EDO inicial.*

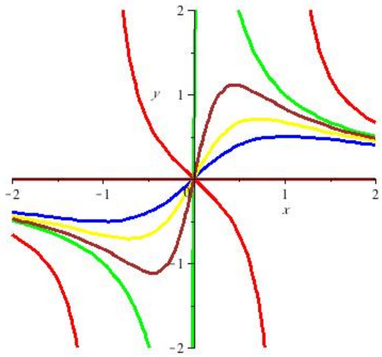

Figura 19: Representação de diferentes soluções particulares da EDO $\quad y(2xy-1)+xy'=0$

5.3.5 Equação de Bernoulli

Certas EDO's podem ser resolvidas efectuando uma mudança de variável que as reduz a EDO's de tipo conhecido. Um exemplo é a equação de Bernoulli[5]

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}, \tag{5.24}$$

onde a, b são funções contínuas e $\alpha \neq 0, 1$. Note-se que

$$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x), \quad y \neq 0$$

donde a mudança de variável

$$u = y^{1-\alpha}, \quad u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

reduz esta equação a uma EDO linear de 1^a ordem na nova variável $u = u(x)$,

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + a(x)u = b(x).$$

Integrada que seja esta EDO, o desfazer da mudança de variável

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

dá-nos a solução geral da EDO original (5.24).

[5]Em nome do Matemático Johann Bernoulli (1667-1784)

Exemplo 5.21. *O oscilador harmónico com fricção do ar (ou, absorção de turbulência) satisfaz a equação*

$$x'' + \omega^2 x + r x' |x'| = 0,$$

onde a força de travagem é proporcional ao quadrado da velocidade. Efectue-se uma mudança de variável, em que o deslocamento $x = x(t)$ é expresso em termos da velocidade $v(x) = x'$. Tem-se então

$$v(x) = x' \quad \Rightarrow \quad x'' = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v'v$$

donde

$$\begin{aligned} x'' + \omega^2 x + r x'|x'| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad vv' + \omega^2 x + rv|v| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad vv' + r\sigma v^2 = -\omega^2 x, \quad \text{onde } \sigma = \frac{v}{|v|} = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \quad v' + r\sigma v = -\omega^2 x v^{-1}, \quad v \neq 0, \end{aligned}$$

uma EDO de Bernoulli, com $\alpha = -1$. Então

$$\begin{aligned} v' + r\sigma v = -\omega^2 x v^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad vv' + r\sigma v^2 = -\omega^2 x, \quad v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(2vv') + r\sigma v^2 = -\omega^2 x, \quad v \neq 0. \end{aligned}$$

ou seja, a mudança de variável $y = v^2$ reduz esta EDO à EDO linear de 1ª ordem

$$\frac{1}{2}y' + r\sigma y = -\omega^2 x,$$

de solução geral

$$y(x) = Ce^{-2r\sigma x} - \frac{\omega^2}{r\sigma}x + \frac{\omega^2}{2r^2}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\sigma = \pm 1 \Rightarrow \sigma^2 = 1).$$

Desfazendo as mudanças de variável anteriores obtem-se a solução geral

$$v(x) = x'(t) = \begin{cases} \sqrt{Ce^{-2rx} - \frac{\omega^2}{r}x + \frac{\omega^2}{2r^2}} & v > 0 \quad (\sigma = +1) \\ \\ -\sqrt{Ce^{2rx} + \frac{\omega^2}{r}x + \frac{\omega^2}{2r^2}} & v < 0 \quad (\sigma = -1) \end{cases}.$$

5.4 Teoremas de existência, unicidade e dependência contínua dos valores iniciais

Para que um PVI se diga bem-, ou mal-posto, há que estabelecer a existência, unicidade e dependência, de forma contínua, da solução relativamente aos valores iniciais. Vamos iniciar este estudo com a garantia de existência de solução. Note-se que a existência de solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

é já garantida pela continuidade do segundo membro $f(x, y)$.

Teorema 5.5 (Teorema de Peano[6]). *Seja R um rectângulo em $\mathbb{R}^2$, dado por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}, \quad (a, b > 0).$$

Se $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua então o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5.25}$$

tem pelo menos uma solução $y = y(x)$ válida no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Observação 1. A demonstração clássica deste teorema não será aqui dada, visto requerer conhecimentos de integração em $\mathbb{R}^n$ (método da linha poligonal, da autoria de Euler).

Uma prova alternativa consiste em notar que o PVI (5.25) se pode escrever na forma integral

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{5.26}$$

pelo que a existência de solução para (5.25) se reduz a mostrar que (5.26) possui um ponto fixo.

Observação 2. Note-se também que o Teorema 5.5 garante a *existência*, mas não a *unicidade* da solução. Como exemplo, veja-se que o PVI

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

admite duas soluções $y_1(x) = 0$ e

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

ambas válidas em $\mathbb{R}$. Este PVI é *mal-posto*.

Lema 5.2 (Lema de Gronwall). *Seja φ uma função contínua no intervalo $[a, b], (a < b)$, que satisfaz*

[6] Giuseppe Peano (1858-1932)

a desigualdade

$$0 \leq \varphi(x) \leq C + L \int_a^x \varphi(t)dt \tag{5.27}$$

para certos $C, L \geq 0$. Então, verifica-se

$$\varphi(x) \leq Ce^{L(x-a)}, \tag{5.28}$$

para todo o $x \in [a, b]$.

Demonstração. Tome-se

$$\phi(x) = C + L \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Vem então $\phi'(x) = L\varphi(x)$. Por (5.27), tem-se

$$\phi'(x) = L\varphi(x) \leq L \left(C + L \int_a^x \varphi(t)dt \right) = L\phi(x),$$

donde se conclui que

$$\left(\phi(x)e^{-Lx}\right)' = \left(\phi'(x) - L\phi(x)\right) e^{-Lx} \leq 0,$$

ou seja, $\phi(x)e^{-Lx}$ é uma função decrescente. Consequentemente,

$$\varphi(x)e^{-Lx} \leq \phi(x)e^{-Lx} \leq \phi(a)e^{-La} = Ce^{-La}, \quad x \geq a,$$

donde

$$\varphi(x) \leq Ce^{L(x-a)}, \quad x \in [a, b].$$

□

Teorema 5.6 (Unicidade)**.** *Seja f uma função contínua num domínio $G \subset \mathbb{R}^2$ que satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y, isto é, existe um $L > 0$ tal que, para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in G$, se tem*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \tag{5.29}$$

Então, se $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$ são soluções do PVI (5.25) num intervalo $\mathbb{I}$, tem-se $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{I}$.

Demonstração. Qualquer solução do PVI (5.25) é também solução da equação integral (5.26). Assim,

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t))dt \right) - \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_2(t))dt \right) \\ &= \int_{x_0}^x \left[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

Porque f satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y, temos

$$0 \leq |y_1(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\, dt \leq L \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)| dt,$$

e, aplicando agora o Lema 5.2 (de Gronwall) com $\varphi(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$, $C = 0$ e $x_0 < x$, concluímos

$$0 \leq \varphi(x) \leq Ce^{-L(x-x_0)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \varphi(x) = |y_1(x) - y_2(x)|, \quad x_0 < x.$$

De forma análoga, temos $y_1(x) = y_2(x)$ para $x < x_0$. □

Teorema 5.7 (Teorema de Picard-Lindelöf [7]). *Seja R um rectângulo em $\mathbb{R}^2$, dado por*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}, \quad (a, b > 0).$$

Se $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz uma condição de Lipschitz na variável y, isto é, existe um $L > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \tag{5.30}$$

para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in R$, então o PVI (5.25) tem solução única $y = y(x)$ válida no intervalo $\mathbb{J} = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, onde

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad \text{com } M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|.$$

Demonstração. Suponha-se, sem perca de generalidade, $x_0 = 0$.

Com base na forma integral (5.26) para a EDO, designe-se por $A : u \mapsto A[u]$ a operação que transforma uma função u, contínua em $\mathbb{J} = [-\alpha, \alpha]$, numa nova função dada por

$$A[u](x) = y_0 + \int_0^x f(t, u(t))dt.$$

Escolhida que seja uma função inicial $u = u(x)$, podemos construir a sucessão de funções

$$u_0 = A[u] \quad \text{e} \quad u_n = A[u_{n-1}], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.31}$$

Note-se que,

i) $u_n = A[u_{n-1}] = A^2[u_{n-2}] = \cdots = A^n[u_0] = A^n[u]$;

[7] Charles Émile Picard (Francês, 1856 1941), Ernst Leonard Lindelöf (Finlandês, 1870-1946)

ii) a sucessão (5.31) converge uniformemente em $\mathbb{J} = [-\alpha, \alpha]$ porque

$$\lim_n \left(\sup_{x \in [-\alpha,\alpha]} |u_{n+k}(x) - u_n(x)| \right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Com efeito,

$$|u_{n+k}(x) - u_n(x)|$$

$$= |u_{n+k}(x) \underbrace{- u_{n+k-1}(x) + u_{n+k-1}(x)}_{=0} \underbrace{- u_{n+k-2}(x) + \cdots + u_{n+2}(x)}_{=0} \underbrace{- u_{n+1}(x) + u_{n+1}(x)}_{=0} - u_n(x)|$$

$$\leq |u_{n+k}(x) - u_{n+k-1}(x)| + |u_{n+k-1}(x) - u_{n+k-2}(x)| + \cdots + |u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)| + |u_{n+1}(x) - u_n(x)|$$

$$= \sum_{j=n}^{n+k-1} |u_{j+1}(x) - u_j(x)| .$$

Observe-se agora que, dadas que sejam duas funções iniciais u e v, com gráfico no rectângulo R, e ambas contínuas em $\mathbb{J} = [-\alpha, \alpha]$, então

$$|A[u](x) - A[v](x)| = \left| \int_0^x f(t, u(t)) - f(t, v(t)) dt \right| \leq \left(\max_{t \in [-\alpha,\alpha]} |u(t) - v(t)| \right) Lx,$$

devido a f satisfazer a condição de Lipschitz (5.30). Repetindo, tem-se

$$\begin{aligned}
\left|A^2[u](x) - A^2[v](x)\right| &= \left| \int_0^x f(t, A[u](t)) - f(t, A[v](t)) dt \right| \leq L \int_0^x |A[u](t) - A[v](t)| dt \\
&= L \int_0^x \left(\left| \int_0^t f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau)) d\tau \right| \right) dt \leq L \int_0^x \left(L \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)| \, d\tau \right) dt \\
&\leq L^2 \max_{\tau \in [-\alpha,\alpha]} |u(\tau) - v(\tau)| \int_0^x \left(\int_0^t d\tau \right) dt = L^2 \max_{\tau \in [-\alpha,\alpha]} |u(\tau) - v(\tau)| \left(\int_0^x t dt \right) \\
&= L^2 \left(\max_{\tau \in [-\alpha,\alpha]} |u(\tau) - v(\tau)| \right) \frac{x^2}{2},
\end{aligned}$$

donde, por indução, e tendo em atenção que se tem expressão análoga quando $x < 0$, resulta

$$\begin{aligned}
|A^n[u](x) - A^n[v](x)| &\leq \left| \int_0^x [f(t, A^{n-1}[u](t)) - f(t, A^{n-1}[v](t))] dt \right| \\
&\leq L^n \frac{|x|^n}{n!} \left(\max_{x \in [-\alpha,\alpha]} |u(x) - v(x)| \right).
\end{aligned}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}
|u_{n+k}(x)-u_n(x)| &\le \sum_{j=n}^{n+k-1} |u_{j+1}(x)-u_j(x)| \\
&= \sum_{j=n}^{n+k-1} \left|A^j[u_1](x)-A^j[u_0](x)\right| \\
&\le \left(\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |u_1(x)-u_0(x)|\right) \sum_{j=n}^{n+k-1} L^j \frac{|x|^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |u_{n+k}(x)-u_n(x)| \le \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left[\left(\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |u_1(x)-u_0(x)|\right) \sum_{j=n}^{n+k-1} L^j \frac{|x|^j}{j!}\right]$$
$$\le \left(\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |u_1(x)-u_0(x)|\right) \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n,k\to+\infty.$$

Adicionalmente, a convergência uniforme da sucessão (5.31) garante também a existência e continuidade da função limite da sucessão. Mais, a convergência uniforme da sucessão garante também que o limite desta sucessão é a solução procurada do PVI (5.25), pois verifica a equação integral

$$y(x) = \lim_n u_n(x) = \lim_n \left(y_0 + \int_0^x f(t,u_{n-1}(t))dt\right)$$
$$= y_0 + \int_0^x f(t, \lim_n u_{n-1}(t))dt = y_0 + \int_0^x \lim_n f(t,y(t))dt;$$

iii) resta agora o problema da escolha da função inicial. Uma resposta óbvia é tomar

$$u(x) = y_0, \quad x\in \mathbb{J} = [-\alpha,\alpha].$$

Substituindo,

$$|u_1(x)-u_0(x)| = |u_1(x)-y_0| = \left|\int_0^x f(t,y_0)dt\right| \le M|x| \le b, \quad x\in\mathbb{J},$$

com $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$. O parâmetro $\alpha>0$ é assim escolhido como

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Escolhido que é α, é fácil de confirmar, por indução matemática, que todos os termos da sucessão (5.31) são calculáveis, isto é,

$$(x, u_n(x)) \in R, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{J}.$$

De facto, já mostrámos que tal acontece para $n = 1$. Então

$$|u_n(x) - y_0| = \left| \int_0^x f(t, u_{n-1}(t))dt \right| \leq M|x| \leq M\alpha \leq b$$

dado que $(t, u_{n-1}(t)) \in R$ sempre que $x, t \in \mathbb{J}$.

□

Os termos da sucessão (5.31),

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t))dt, \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.32}$$

designam-se por *iterativas de Picard*. De notar que podemos escolher u_0 arbitrária (mas contínua), na condição de termos ainda

$$|u_0(x) - y_0| \leq b, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{J}.$$

Porque a sucessão das ierativas de Picard converge uniformemente para a solução do PVI em $\mathbb{J}$, é válida a seguinte estimativa de erro, por adaptação de ii),

$$\begin{aligned} |y(x) - u_n(x)| &\leq \left(\max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |u_1(x) - u_0(x)| \right) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\alpha L)^j}{j!} \\ &= \left(\max_{x \in [-\alpha, \alpha]} |u_1(x) - u_0(x)| \right) \frac{(\alpha L)^n}{n!} e^{\alpha L}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Exemplo 5.22. *O PVI*

$$\begin{cases} y' = xy, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem as seguintes iterativas de Picard (escolhida que é $u_0(x) = 1$)

$$u_n(x) = 1 + \int_0^x t u_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

donde tiramos

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot 1 dt = 1 + \frac{x^2}{2}, \\ u_2(x) &= 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= 1+\int_0^x t\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4\cdot 2}\right)dt = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2}+\frac{x^6}{6\cdot 4\cdot 2}, \\
&\vdots \\
u_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}}{(2j)!!} = \sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}}{2^j j!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(x) = \lim_n u_n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{2j}}{2^j j!} = e^{\frac{x^2}{2}},$$

e a aproximação

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}}{2^j j!}$$

acarreta um erro

$$E_n(x) = |y(x)-u_n(x)| = \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{x^{2j}}{2^j j!} = \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!}\ e^{\frac{x^2}{2}}.$$

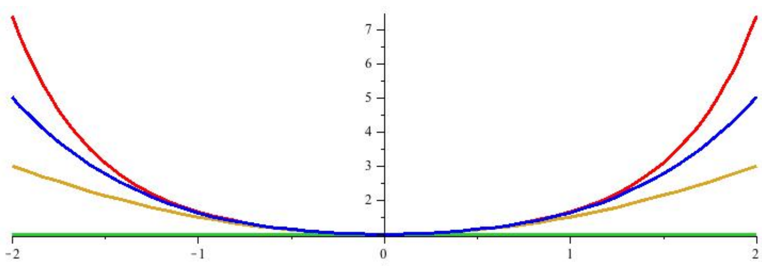

Figura 20: Solução do PVI e primeiras três iterações de Picard

O teorema pode ser adaptado por forma a obtermos a validade da solução num intervalo $[c,d]$ arbitrário.

Teorema 5.8 (Unicidade)**.** *Se a função f é contínua na faixa $\mathbb{R}\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ e satisfaz aí uma condição de Lipschitz na variável y, existe uma solução do PVI (5.25) para qualquer $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times[c,d]$.*

Esta solução pode ser obtida por intermédio das iterativas de Picard (5.32), com estimativa de erro (5.33).

Os teoremas anteriores garantem a existência e a unicidade da solução. Com base no Lema de Gronwall e na condição de Lipschitz (5.29) vamos agora dar condições para garantir a dependência contínua da solução relativamente aos valores iniciais.

Teorema 5.9. *Seja f uma função contínua no domínio $G \subset \mathbb{R}^2$, que satisfaz aí uma condição de Lipschitz (com constante $L > 0$) na variável y.*

Dadas que sejam duas soluções, $y_1 = y_1(x)$ e $y_2 = y_2(x)$, da EDO $y' = f(x, y)$, que satisfazem

$$(x, y_1(x)), (x, y_2(x)) \in G$$

numa certa vizinhança de x_0, então é válida a estimativa

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| e^{L|x-x_0|},$$

nessa vizinhança.

Demonstração. Suponha-se $x \geq x_0$. Então

$$\begin{aligned}
0 \leq |y_1(x) - y_2(x)| &= \left| \left[y_1(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t)) dt \right] - \left[y_2(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t)) dt \right] \right| \\
&\leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y_1(t)) dt - f(t, y_2(t)) \right] dt \right| \\
&\leq |y_1(x_0) - y_2(x_0)| + L \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_2(x)| dt
\end{aligned}$$

donde, usando o Lema 5.2 (Lema de Gronwall) para $\varphi(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$ obtemos

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \varphi(x) \leq C e^{L(x-x_0)} = |y_1(x_0) - y_2(x_0)| \, e^{L(x-x_0)}.$$

De forma semelhante, quando $x \leq x_0$ obtém-se

$$|y_1(x) - y_2(x)| = \varphi(x) \leq C e^{L(x_0-x)} = |y_1(x_0) - y_2(x_0)| \, e^{-L(x-x_0)},$$

donde retiramos o resultado pretendido. □

Nota: este teorema é importante, na medida em que nos indica como uma pequena perturbação nos valores iniciais

$$|y^\varepsilon(x_0) - y_0| = |y^\varepsilon(x_0) - y(x_0)| \leq \varepsilon$$

(perturbação $y^\varepsilon = y^\varepsilon(x)$ devida, por exemplo, a erro na medição, erro de arredondamento, etc.) influencia a solução "correcta" $y = y(x)$,

$$|y^\varepsilon(x) - y(x)| \leq |y^\varepsilon(x_0) - y(x_0)| e^{L|x-x_0|} \leq \varepsilon e^{L|x-x_0|}.$$

Exemplo 5.23. *Considere-se o PVI*

$$\begin{cases} y' = x\cos(y) - x\cos(x) + 1, & em\ G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y \in \mathbb{R}\} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

A EDO $y' = x\cos(y) - x\cos(x) + 1$ *admite a solução particular* $y_1(x) = x$. *Pelo Teorema de Lagrange (AM1) é fácil de confirmar que* f *satisfaz uma condição de Lipschitz em* G,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x||\cos(y_1) - \cos(y_2)| \leq |x|\,|-\sin(c)(y_1 - y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|,$$

onde c *está entre* y_1 *e* y_2. *A constante de Lipschitz de* f *em* G *é* $L = 2$ *e tem-se, para o PVI, a estimativa*

$$|y(x) - y_1(x)| \leq |y_0 - 0|e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad x - |y_0|e^{2x} \leq y(x) \leq x + |y_0|e^{2x}, \quad x \in [0,2].$$

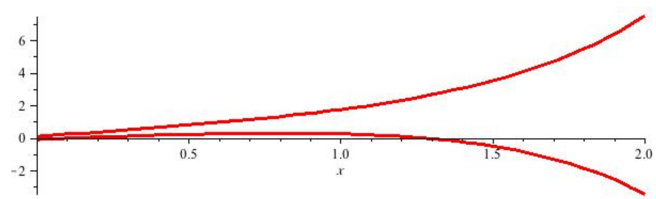

Figura 21: Limites superior e inferior para a solução do PVI, com erro inicial $y_0 = \frac{1}{10}$.

Também de importância, é a dependência contínua da solução em relação ao lado direito, $f(x,y)$.

Teorema 5.10. *Sejam* f *uma função contínua no domínio* $G \subset \mathbb{R}^2$, *que satisfaz aí uma condição de Lipschitz (com constante* $L > 0$*) na variável* y, *e* f^* *uma segunda função, também contínua em* G *e que difere de* f *num máximo de* $\varepsilon > 0$ *nesse domínio, isto é*

$$|f(x,y) - f^*(x,y)| \leq \varepsilon, \quad para\ todo\ (x,y) \in G.$$

Suponha-se $(x_0, y_0) \in G$.

Se $y = y(x)$ *é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & em\ G \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

e $y^* = y^*(x)$ *é solução do segundo PVI*

$$\begin{cases} y' = f^*(x,y), & em\ G \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

então existe um $\delta > 0$ tal que, no intervalo $x_0 \le x \le x_0 + \delta$, é válida a seguinte estimativa

$$|y(x) - y^*(x)| < \varepsilon\delta e^{L(x-x_0)}.$$

Demonstração. Tome-se $\delta > 0$ tal que $(t, y(t)), (t, y^*(t)) \in G$, para todo $t \in [x_0, x_0 + \delta]$. Então

$$\begin{aligned}
0 \le |y(x) - y^*(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) - f^*(t, y^*(t)) dt \right| &\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f^*(t, y^*(t))| \, dt \\
&= \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, y^*(t)) + f(t, y^*(t)) - f^*(t, y^*(t))| \, dt \\
&\le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, y^*(t))| \, dt + \int_{x_0}^{x} |f(t, y^*(t)) - f^*(t, y^*(t))| \, dt \\
&\le L \int_{x_0}^{x} |y(t) - y^*(t)| \, dt + \varepsilon\delta
\end{aligned}$$

donde, usando o Lema 5.2 (Lema de Gronwall) para $\varphi(x) = |y(x) - y^*(x)|$ obtemos

$$|y(x) - y^*(x)| \le \varepsilon\delta \; e^{L(x-x_0)}.$$

□

Este teorema permite substituir um problema complicado por um outro, de solução mais simples, *com conhecimento do erro final cometido*, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 5.24. *Considere-se o PVI*

$$\begin{cases} y' = \sin(y) + x, & \text{em } G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

A função $f(x, y) = \sin(y) + x$ satisfaz uma condição de Lipschitz em G, com $L = 1$, e difere de $f^*(x, y) = \frac{2}{\pi}y + x$ num máximo de $\varepsilon = 0,211$ nessa faixa.

O PVI, com f^* em vez de f, é mais fácil de resolver, tendo a solução

$$y^*(x) = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{\pi}} - 1\right).$$

O Teorema 5.10 assegura-nos que, para $0 \le x \le \delta$, a solução do PVI inicial difere desta última solução em

$$|y(x) - y^*(x)| \le \varepsilon\delta e^{x},$$

ou seja,

$$-\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{\pi}} - 1\right) - \varepsilon\delta e^{x} \le y(x) \le -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{\pi}} - 1\right) + \varepsilon\delta e^{x}.$$

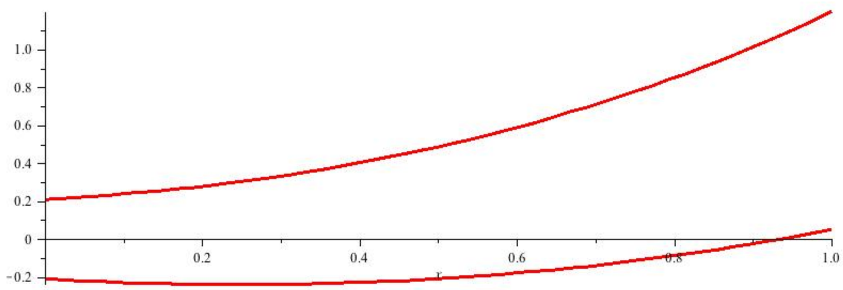

Figura 22: Limites superior e inferior para a solução do PVI inicial, com $\delta = 1$.

5.5 Sistemas lineares de EDO's e EDO's lineares de ordem superior

Muitas aplicações trabalham com uma variável vectorial $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, onde a variação momentânea de cada função componente é expressa em termos do tempo t e das funções componentes $x_j = x_j(t)$. O caso mais simples é o que se descreve a seguir, de um sistema linear de EDO's.

5.5.1 Sistemas lineares de EDO's

Definição 5.10. *Seja* $\mathbb{I} =]a, b[$, $(a < b)$ *um intervalo aberto de* $\mathbb{R}$. *Dadas*

i) a função vectorial $\mathbf{x} : \mathbb{I} =]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *com* $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^T$;

ii) a matriz de (funções) coeficientes $\mathbf{A} : \mathbb{I} =]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$, *com* $t \mapsto \mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1}^n$;

iii) a função de controlo $\mathbf{b} : \mathbb{I} =]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *com* $t \mapsto \mathbf{b}(t) = (b_1(t), \cdots, b_n(t))^T$;

chama-se sistema linear de EDO's ao sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t \in \mathbb{I}. \tag{5.34}$$

O sistema (5.34) diz-se homogéneo se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *no intervalo* $\mathbb{I}$, *e in-homogénea, no caso contrário.*

Exemplo 5.25. *Considere o sistema*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3x(t) + 2y(t) + t^2 z(t) + \cos(t) \\ y'(t) & = & \sin(t)x(t) + 5z(t) \\ z'(t) & = & tx(t) + t^2 y(t) + t^3 z(t) + \sqrt{t}, \end{array} \right.$$

para $t \geq 0$.

Temos assim

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \quad \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^T,$$

com matriz de coeficientes

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & t^2 \\ \sin(t) & 0 & 5 \\ t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

e função de controlo $\mathbf{b}(t) = (\cos(t), 0, \sqrt{t})^T$. *Matricialmente, o sistema escreve-se como*

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & t^2 \\ \sin(t) & 0 & 5 \\ t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 0 \\ \sqrt{t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

Os sistemas lineares possuem várias propriedades em comum com as EDO's lineares de 1^a ordem, nomeadamente:

1. Estrutura da solução geral

A solução geral do sistema (5.34) tem a forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t),$$

onde $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p(t)$ é uma solução particular de (5.34) e $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_h(t)$ representa a solução geral do sistema homogéneo associado a (5.34).

2. Princípio de sobreposição de soluções

Sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ duas constantes reais, e tendo dois sistemas lineares de EDO's

$$\mathbf{x}_1'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{b}_1(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{b}_2(t),$$

com mesma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, então $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2$ é solução do sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \alpha\mathbf{b}_1(t) + \beta\mathbf{b}_2(t).$$

3. Espaço vectorial das soluções do sistema homogéneo

O conjunto das soluções do sistema homogéneo associado a (5.34),

$$\mathcal{L} := \{\mathbf{x} : \mathbb{I} =]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \ t \in \mathbb{I}\}$$

forma um espaço vectorial real de dimensão n, dito *espaço das soluções do sistema homogéneo.* Com efeito, o princípio de sobreposição (com $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$) garante que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \\
&\Rightarrow \quad \alpha\mathbf{x}' = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}), \quad \beta\mathbf{y}' = \mathbf{A}(\beta\mathbf{y}) \\
&\Rightarrow \quad \alpha\mathbf{x}' + \beta\mathbf{y}' = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \Leftrightarrow \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \mathcal{L},
\end{aligned}
$$

quaisquer que sejam as constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para mostrarmos que $\dim \mathcal{L} = n$, vamos em primeiro lugar definir o que se entende por *m soluções vectoriais linearmente independentes.*

Definição 5.11. *Dadas m funções vectoriais $\mathbf{x}_j : \mathbb{I} =]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, j = 1, \ldots, m,$ dizemos que estas são linearmente independentes no intervalo $\mathbb{I}$ se e só se*

$$
\alpha_1 \mathbf{x}_1(t) + \cdots + \alpha_m \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in \mathbb{I} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0.
$$

Com base nesta definição, construa-se agora a seguinte matriz $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ $(n \times n)$ formada pelas n colunas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{L}$,

$$
\mathbf{X}(t) := [\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)] = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},
$$

dita, *matriz das soluções*, e determine-se o seu *determinante de Wronski*

$$
W(t) := \det \mathbf{X}(t) = \det \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}.
$$

Derivando $W = W(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
W'(t) := \frac{d}{dt} \det \mathbf{X}(t) = \det[\mathbf{x}_1'(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)] + \det[\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2'(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)] + \cdots \\
\cdots + \det[\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n'(t)] \\
= \det[\mathbf{A}\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)] + \det[\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)] + \cdots + \det[\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{A}\mathbf{x}_n(t)].
\end{aligned}
$$

Por um lado, tem-se

$$
\det[(\lambda I_n - \mathbf{A})\mathbf{X}] = \det(\lambda I_n - \mathbf{A})\ \det \mathbf{X} = [\lambda^n - \lambda^{n-1} \mathrm{tr}[\mathbf{A}] + \cdots + (-1)^n \det \mathbf{A}]\ \det \mathbf{X},
$$

onde $\mathrm{tr}[\mathbf{A}](t) = \sum_{j=1}^n a_{jj}(t)$ designa o *traço da matriz* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, enquanto que, por outro lado

(Teorema da multiplicação de determinantes),

$$\det[(\lambda I_n - \mathbf{A})\mathbf{X}] = \det[\lambda \mathbf{x}_1 - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 \;\; \lambda \mathbf{x}_2 - \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \;\; \cdots \;\; \lambda \mathbf{x}_n - \mathbf{A}\mathbf{x}_n]$$
$$= \lambda^n \det \mathbf{X} - \lambda^{n-1} \{\det[\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{x}_n] + \det[\mathbf{x}_1 \; \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{x}_n] + \cdots + \det[\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{A}\mathbf{x}_n]\} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n \det \mathbf{A} \det \mathbf{X},$$

donde tiramos (igualdade do coeficiente de λ^{n-1})

$$\operatorname{tr}[\mathbf{A}] \det \mathbf{X} = \{\det[\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{x}_n] + \cdots + \det[\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \cdots \; \mathbf{A}\mathbf{x}_n]\} \det \mathbf{X}.$$

Substituindo na expressão para a derivada de W, vem que esta satisfaz a EDO de variáveis separáveis

$$W'(t) = \operatorname{tr}[\mathbf{A}](t) W(t).$$

Assim, e admitindo que $\operatorname{tr}[\mathbf{A}] = \operatorname{tr}[\mathbf{A}](t)$ é uma função contínua em $\mathbb{I}$, temos para W a solução geral, dita fórmula de Liouville[8],

$$W(t) = W(t_0) \; \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}[\mathbf{A}](s) ds\right), \quad t \in \mathbb{I}, \tag{5.35}$$

com $t_0 \in \mathbb{I}$ fixo. Escolhido que seja t_0 tal que $W(t_0) \neq 0$ vem que

$$0 \neq W(t) = \det \mathbf{X}(t)$$

e provou-se que a dimensão do espaço $\mathcal{L}$ das soluções do sistema homogéneo associado a (5.34) é efectivamente n.

Exemplo 5.26. *Considere-se o sistema linear de EDO's*

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t \geq 0,$$

onde $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. *Observe-se que*

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t \end{bmatrix}$$

[8] Joseph Liouville (Francês, 1809-1882)

constituem duas soluções do sistema que verificam

$$W(t) = \det\left[\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\right] = \det\begin{bmatrix} t & t^3 \\ 0 & t \end{bmatrix} = t^2 \neq 0,$$

para $t > 0$. *Assim, tem-se garantido que*

$$\dim \mathcal{L} = \dim\left\{\mathbf{x} : \mathbb{I} =]0, \infty[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 :\ \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t),\ t > 0\right\} = 2.$$

Estes resultados sumariam-se no seguinte teorema.

Teorema 5.11. *Suponha-se dado o sistema linear (5.34), com a matriz* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ *a satisfazer* $a_{ij} \in C(\mathbb{I}), i, j = 1, \cdots, n$. *Então*

i) n soluções $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1\ \cdots \mathbf{x}_n]$ *do sistema linear homogéneo associado a (5.34) formam uma base, ou sistema fundamental de soluções, para* $\mathcal{L}$ *se e só se* $W(t) = \det \mathbf{X}(t) \neq 0$, *para um* $t \in \mathbb{I}$;

ii) nas condições de i), a solução geral completa do sistema linear homogéneo associado a (5.34) é dada por

$$\mathbf{x}_h(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + C_n\mathbf{x}_n(t), \quad t \in \mathbb{I} \text{ e } C_1, \cdots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.27. *A matriz de soluções*

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)] = e^{t^2}\begin{bmatrix} \cos(t^3) & \sin(t^3) \\ -\sin(t^3) & \cos(t^3) \end{bmatrix}$$

constitui uma matriz fundamental para o sistema homogéneo

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ -3t^2 & 2t \end{bmatrix}\mathbf{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

De facto, o determinante de Wronski é

$$W(t) = \det \mathbf{X}(t) = e^{2t^2},$$

solução da EDO $W'(t) = 4tW(t)$, *e a solução geral completa do sistema homogéneo é*

$$\mathbf{x}_h(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t) = e^{t^2}\begin{bmatrix} C_1\cos(t^3) + C_2\sin(t^3) \\ -C_1\sin(t^3) + C_2\cos(t^3) \end{bmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dada uma condição $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})^T$, *teremos a solução particular*

$$\mathbf{x}(t) = e^{t^2 - t_0^2}\begin{bmatrix} \cos(t^3 - t_0^3) & \sin(t^3 - t_0^3) \\ -\sin(t^3 - t_0^3) & \cos(t^3 - t_0^3) \end{bmatrix}\mathbf{x}_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O cálculo explícito da matriz fundamental $\mathbf{X}$ só é possível em casos particulares. Um destes casos, a tratar de seguida, é a situação em que o sistema linear é redutível a uma EDO linear de ordem superior.

5.5.2 EDO's lineares de ordem superior

Definição 5.12. *Dadas $n+1$ funções $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{I}$ denota um intervalo conexo de $\mathbb{R}$, dizemos que a EDO*

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t), \quad t \in \mathbb{I}, \tag{5.36}$$

é uma EDO linear de ordem n. A EDO (5.36) diz-se homogénea se $b = 0$ no intervalo $\mathbb{I}$, e in-homogénea, no caso contrário.

No que se segue, supõe-se que as funções $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ são contínuas no intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.

A EDO linear de ordem n é redutível a um sistema linear de EDO's fazendo uma substituição recursiva

$$y(t) := x_1(t), \quad y'(t) = x_1'(t) := x_2(t), \quad y''(t) = x_2'(t) := x_3(t), \cdots, \quad y^{(n-1)}(t) = x_{n-1}'(t) := x_n(t)$$

Isto implica que a EDO linear de ordem n

$$y^{(n)}(t) = -a_0(t)y(t) - a_1(t)y'(t) - \cdots - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + b(t)$$

se pode escrever como

$$x_n'(t) = -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-2}(t) + b(t)$$

e obtemos então o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) \\ & \vdots & \\ x_n'(t) & = & -a_0(t)x_1(t) - a_1(t)x_2(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x_{n-2}(t) + b(t) \end{array}\right.$$

que se escreve, na forma matricial, como sendo

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-3}(t) \\ x_{n-2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

ou, voltando à variável inicial $y = y(t)$,

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t), \quad t \in \mathbb{I}, \tag{5.37}$$

sendo

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Note-se que as matrizes $\mathbf{y}$ e $\mathbf{b}$ têm dimensão $n \times 1$, enquanto que a matriz $\mathbf{A}$ tem dimensão $n \times n$.

Diremos que as soluções $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ constituem *n soluções linearmente independentes da EDO (5.36)* se os correspondentes vectores $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ o forem. Note-se que o determinante de Wronski associado aos vectores $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ é dado por

$$W(t) = \det \mathbf{Y}(t) := \det[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \ldots \ \mathbf{y}_n] = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Note-se que a fórmula de Liouville (5.35) fica, neste caso,

$$W(t) = W(t_0) \ \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds\right), \quad t \in \mathbb{I}.$$

Teorema 5.12. *Considere-se a EDO linear de ordem n (5.36), nas condições da Definição 5.12. Então*

i) O conjunto das soluções da EDO homogénea associada a (5.36) forma um espaço vectorial de dimensão n;

ii) n soluções $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ da EDO homogénea associada a (5.36) constituem uma base para esse espaço, isto é, um sistema fundamental do espaço de soluções, se e *só se* $W(t) = \det \mathbf{Y}(t) \neq 0$ *para um dado* $t \in \mathbb{I}$;

iii) Para qualquer $(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *e* $t_0 \in \mathbb{I}$, *o PVI formado pela EDO (5.36) e as condições iniciais* $y^{(j)}(t_0) = \tilde{y}_j, j = 0, \cdots, n-1$, *tem solução única no intervalo* $\mathbb{I}$.

Conhecida que seja uma solução $y_1 = y_1(t)$ da EDO homogénea associada a (5.36), podemos usar esta para obter a EDO homogénea satisfeita pelas restantes soluções, por um método semelhante ao da variação das constantes. Como exemplo, considere-se o caso de $n = 2$,

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

em que é conhecida uma sua solução $y_1 = y_1(t)$. Procure-se (ver Teorema 5.4) a solução geral na forma

$$y(t) = C(t)y_1(t).$$

Substituindo na EDO vem

$$\begin{aligned}
0 &= [C(t)y_1(t)]'' + a_1(t)\,[C(t)y_1(t)]' + a_0(t)\,[C(t)y_1(t)] \\
&= \left[C''(t)y_1(t) + 2C'(t)y_1'(t) + C(t)y_1''(t)\right] + a_1(t)\left[C'y_1(t) + Cy_1'(t)\right] + a_0(t)C(t)y_1(t) \\
&= \left[C''(t)y_1(t) + 2C'(t)y_1'(t) + a_1(t)C'(t)y_1(t)\right] + C(t)\left[\underbrace{y_1''(t) + a_1(t)y_1'(t) + a_0(t)y_1(t)}_{=0}\right] \\
&= C''(t)y_1(t) + C'(t)\left[2y_1'(t) + a_1(t)y_1(t)\right],
\end{aligned}$$

pelo que a mudança de variável $z = C'(t)$ transforma esta última numa EDO de 1^a ordem

$$0 = z'(t) + \alpha(t)z(t), \quad \text{onde } \alpha(t) = \frac{2y_1'(t) + a_1(t)y_1(t)}{y_1(t)}, \quad y_1(t) \neq 0.$$

Obtida que seja a solução geral $z = z(t)$, um processo de integração permite obter $C = C(t)$ e, inserindo esta na forma $y(t) = C(t)y_1(t)$, teremos a solução geral da EDO homogénea inicial.

Este processo (dito, *redução de ordem da EDO original*) determina a EDO homogénea de ordem $n-1$ de que as restantes soluções constituem um sistema fundamental.

Exemplo 5.28. ***[EDO de Legendre**[9]**]*** *A EDO*

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$$

admite a solução particular $y_1(t) = t$. *Pelo método de redução de ordem da EDO*

$$y = C(t)t, \quad y' = C'(t)t + C(t), \quad y'' = C''(t)t + 2C'(t)$$

[9] Adrien-Marie Legendre (Francês, 1752-1833)

donde

$$\begin{aligned} 0 &= (1-t^2)[C''(t)t + 2C'(t)] - 2t[C'(t)t + C(t)] + 2C(t)t \\ &= (1-t^2)tC''(t) + (2-4t^2)C'(t) \\ &= (1-t^2)tz'(t) + (2-4t^2)z(t), \quad \textit{onde temos } z(t) := C'(t). \end{aligned}$$

Esta EDO linear de 1ª ordem tem solução geral

$$z(t) = \frac{K_1}{t^2(t^2-1)}, \quad K_1 \in \mathbb{R} \textit{ e } t \neq 0, -1, +1.$$

Assim, integrando, vem

$$z(t) := C'(t) = \frac{K_1}{t^2(t^2-1)} \quad \Rightarrow \quad C(t) = K_1\left(\ln\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} + \frac{1}{t}\right) + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}$$

pelo que a solução geral da EDO de Legendre é

$$y = K_1\left(t\ln\sqrt{\left|\frac{t-1}{t+1}\right|} + 1\right) + K_2 t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Vamos agora tratar o caso simplificado da EDO linear de ordem n de coeficientes constantes

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b(t), \quad t \in \mathbb{I}, \tag{5.38}$$

isto é, $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. A matriz associada

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

tem valores próprios dados pela equação

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-1)^n \underbrace{\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right)}_{=P(\lambda)}.$$

O polinómio $P(\lambda)$ permite escrever a EDO homogénea associada a (5.38) na forma

$$0 = P(D)y := \left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)y,$$

onde $Dy := y'$. Factorizando este polinómio em função dos seus zeros tem-se

$$0 = P(D)y = (D-\lambda_1)^{k_1}(D-\lambda_2)^{k_2}\cdots(D-\lambda_s)^{k_s}y.$$

Deste modo, cada um destes factores constitui uma EDO

$$(D-\lambda_j)^{k_j}y = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

e o espaço das suas soluções é um sub-espaço vectorial do espaço das soluções da EDO homogénea associada a (5.38), sub-espaço que pode ser calculado via transformadas de Laplace.

Processo de determinação da solução geral da EDO homogénea associada a (5.38)

Passo 1. Determinação dos zeros λ e respectiva multiplicidade k, do polinómio $P(\lambda)$.

Passo 2. Determinação dos sub-espaços associados a cada um dos zeros de $P(\lambda)$;
2.1 Se $\lambda \in \mathbb{R}$, então o sistema fundamental para o sub-espaço é dado por

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = te^{\lambda t}, \quad \cdots, \quad y_k(t) = t^{k-1}e^{\lambda t};$$

2.1 Se $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, então o sistema fundamental para o sub-espaço é dado por

$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad y_3(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_4(t) = te^{\alpha t}\sin(\beta t),$$

$$\cdots, \quad y_{2k-1}(t) = t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad y_{2k-1}(t) = t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t);$$

Passo 3. A solução geral é dada por

$$y(t) = \sum_j \left(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \cdots + C_{k_j} t^{k_j - 1}\right) e^{\lambda_j t}$$

$$+ \sum_s \left[\left(A_1 + A_2 t + \cdots + A_{k_s} t^{k_s - 1}\right)\cos(\beta_s t) + \left(B_1 + B_2 t + \cdots + B_{k_s} t^{k_s - 1}\right)\sin(\beta_s t)\right] e^{\alpha_s t},$$

com C_j, A_j, B_j constantes reais.

Exemplo 5.29. *i) A EDO homogénea $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ tem associado o polinómio*

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

ou seja, um polinómio com três raízes reais $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$ de multiplicidade 1. *Os sistemas fundamentais associados são, respectivamente, $y_1(t) = e^t, y_2(t) = e^{2t}$ e $y_3(t) = e^{3t}$,* *donde a solução geral da EDO é dada por*

$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + Ce^{3t}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

ii) Já a EDO homogénea $y'''' + 4y'' = 0$ *tem associado o polinómio*

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2 = (\lambda^2 + 4)\lambda^2,$$

ou seja, um polinómio com uma raíz real $\lambda_1 = 0$ *de multiplicidade* 2, *e duas raízes complexas,* $\lambda = \pm 2i$, *de multiplicidade* 1.

A raíz real tem associado o sistema fundamental

$$y_1(t) = e^{0t} = 1, \quad y_2(t) = te^{0t} = t,$$

enquanto que as raízes complexas estão associadas ao sistema fundamental

$$y_3(t) = \cos(2t), \quad y_4(t) = \sin(2t).$$

A solução geral procurada é

$$y(t) = A + Bt + C\cos(2t) + D\sin(2t), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, o princípio da estrutura da solução geral da EDO in-homogénea (5.38) determina que a solução geral desta é obtida por soma da solução geral da homogénea associada com uma solução particular de (5.38).

Referências

[1] T. Apostol, Calculus, Vol. I e II, John Wiley & Sons, 1967 e 1969

[2] G.M. Fikhtengol'ts, The fundamentals of mathematical analysis, 2 vol., Oxford, 1965

[3] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary differential equations and boundary value problems - 4th Ed, John Wiley & Sons, Inc., 1986

[4] K. Meyberg, P. Vachenauer, Höhere Mathematik 2 - 4th Ed., Springer-Verlag, 2003.