departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. Para cada alínea, a matriz A representa um endomorfismo do espaço vectorial indicado, em relação à base canónica desse espaço vectorial. Verifica que u é vector próprio desse endomorfismo associado a λ.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $u = (1,1)$ e $\lambda = 2$, em $\mathbb{R}^2$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $u = (0,1,1)$ e $\lambda = 3$, em $\mathbb{R}^3$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u = (1,0,2)$ e $\lambda = -1$, em $\mathbb{R}^3$.

2. Determine os valores próprios do endomorfismo φ do espaço indicado e determine os subespaço próprios associados correspondentes.

   (a) $\varphi(x,y) = (y,x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) $\varphi(x,y) = (2x, y-x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (c) $\varphi(x,y) = (3x+3y, x+5y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (d) $\varphi(x,y,z) = (-x+y-z, x+z, x+z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

   (e) $\varphi(ax^2+bx+c) = (5c+6b+2a) - (b+8a)x + (c-2a)x^2$, $\forall ax^2+bx+c \in P_2[x]$;

   (f) $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$, $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Considere um endomorfismo ϕ de $\mathbb{R}^6$ tal que o seu polinómio característico é $p_\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda-2)^3$.

   (a) Indique todos os valores próprios de ϕ e as respectivas multiplicidades algébricas.

   (b) Diga quais as multiplicidades geométricas possíveis para cada subespaço próprio associado.

4. Seja ψ um endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido, em relação à base canónica, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

   O vector $u = (1,1)$ é um vector próprio de ψ? Em caso afirmativo, indique o valor próprio que lhe está associado.

5. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, em relação à base canónica, pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que 1 e 2 são valores próprios de φ.

   (b) Verifique que $u = (1,1,0)$, $v = (-1,-1,0)$ e $w = (2,2,0)$ são vectores próprios associados ao valor próprio 1 e $z = (0,-1,-1)$ é vector próprio associado ao valor próprio 2.

Sugestão: Resolva as duas alíneas sem calcular directamente os valores próprios e os vectores próprios do endomorfismo.

6. Considere os endomorfismos ϕ e ψ de $\mathbb{R}^3$ definidos, em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$, pelas matrizes A e C, respectivamente, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix},$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c$ parâmetros reais. Determine $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c$ de modo a que os vectores $u = (1,1,1)$, $v = (1,0,-1)$ e $w = (1,-1,0)$ sejam vectores próprios de ϕ e -1, 0 e 1 sejam valores próprios de ψ.

7. Determine os valores próprios e a respectiva multiplicidade algébrica, do endomorfismo φ do espaço indicado definido, em relação à base canónica desse espaço, pela matriz:

   (a) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^2$;

   (b) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (c) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (d) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (e) $M(\varphi; \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, em $\mathbb{R}^4$.

8. Determine os valores próprios, as respectivas multiplicidades algébrica e geométrica, bem como os subespaços próprios associados, do endomorfismo ψ de $\mathbb{R}^3$ definido, em relação à base indicada, pela matriz:

   (a) $M(\psi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica;

   (b) $M(\psi;\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica;

   (c) $M(\psi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$;

   (d) $M(\psi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((1,0,1),(1,-1,0),(0,0,1))$;

   (e) $M(\psi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B} = ((-1,1,-1),(1,-1,0),(-1,0,1))$.

9. Considere o endomorfismo ϕ de $P_2[x]$, definido pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

   em relação à base canónica $\mathcal{B}_{P_2[x]} = (1, x, x^2)$ de $P_2[x]$.

   (a) Diga para que valores reais de a esse endomorfismo admite o valor próprio 2.

   (b) Para os valores de a encontrados na alínea anterior, determine o subespaço próprio associado a 2.

10. Seja φ um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido, em relação à base canónica, pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que $S = \langle (0,-1,1) \rangle$ seja um subespaço próprio de φ.

11. Considere um endomorfismo ψ de $\mathbb{R}^4$ definido pela matriz:

$$M(\psi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

   onde $\mathcal{B} = ((1,0,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(1,1,1,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(a) Indique os valores próprios e os subespaços próprios de ψ associados.

(b) Sendo S a soma dos subespaços próprios de ψ, determine:

i. uma base para S;

ii. um subespaço complementar de S.

12. Sejam E um espaço vectorial real e φ um endomorfismo de E. Seja ainda λ um valor próprio de φ. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, justificando.

(a) O escalar λ^2 é valor próprio de $\varphi \circ \varphi$.

(b) O escalar λ^n é valor próprio de $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ vezes}}$.

(c) Seja A a matriz de φ, em relação a uma base fixa de E. Então λ também é valor próprio do endomorfismo ψ definido pela matriz A^T, em relação à mesma base.

(d) O escalar $\alpha\lambda$ é valor próprio de $\alpha\varphi$, para todo $\alpha \neq 0$.

(e) Se $\lambda \neq 0$, o escalar λ^{-1} é valor próprio de φ^{-1}.

(f) Se $\lambda = 0$ então o subespaço próprio de φ associado a λ é $\operatorname{Nuc}\varphi$.

(g) Se $\lambda = 0$ e $m_a(\lambda) = 2$, então $\dim \operatorname{Nuc}\varphi = 2$.

(h) Se φ é monomorfismo então $\lambda \neq 0$.

(i) φ é isomorfismo se e só se $\lambda \neq 0$.

(j) Se v_1 e v_2 são vectores próprios linearmente independentes então estão associados a valores próprios distintos.

13. Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Prove que o polinómio característico de A é

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

Observação: $\operatorname{tr}(A)$ é o traço da matriz A, ou seja, é a soma de todos os elementos da diagonal principal de A.

14. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de A.
Prove que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$ e $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p$.

15. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Sabendo que $\det(A) = 12$ e que 1 e 3 são valores próprios de A, determine:

(a) o outro valor próprio de φ;

(b) $\operatorname{tr}(A)$;

(c) os valores próprios de A^{-1};

(d) os valores próprios de A^{25}.

Sugestão: Nas alíneas (a) e (b), aplique o resultado obtido no exercício 14; nas alíneas (c) e (d), aplique o exercício 12.

16. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det(A) = 10$ e $\operatorname{tr}(A) = 8$. Calcule os valores próprios de A, sabendo que:

    (a) um dos valores próprios tem multiplicidade algébrica 2;

    (b) 1024 é valor próprio de A^{10}.

Sugestão: Aplique novamente os exercícios 12 e 14.

17. Considere o seguinte teorema:

    Teorema de Cayley-Hamilton: *Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $p(\lambda)$ o seu polinómio característico. Então $p(A) = 0$.*

    Observação: Se $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ então $p(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I_n$.

    Usando o teorema anterior, pode calcular-se a inversa de uma matriz; por exemplo, seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. O seu polinómio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. Pelo teorema anterior,

    $$p(A) = 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A + I_2 = 0 \Leftrightarrow 2A - A^2 = I_2 \Leftrightarrow A(2I_2 - A) = I_2$$

    Como a inversa de uma matriz é única, temos que $A^{-1} = 2I_2 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

    Para cada uma das alíneas, calcule A^{-1}, usando o método anterior:

    (a) $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$;

    (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

    (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. (a) $\sigma(\varphi)=\{-1,1\}$, $U_{-1}=\{(-y,y):y\in\mathbb{R}\}$, $U_1=\{(y,y):y\in\mathbb{R}\}$;
   (b) $\sigma(\varphi)=\{1,2\}$, $U_1=\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{(-y,y):y\in\mathbb{R}\}$;
   (c) $\sigma(\varphi)=\{2,6\}$, $U_2=\{(-3y,y):y\in\mathbb{R}\}$, $U_6=\{(y,y):y\in\mathbb{R}\}$;
   (d) $\sigma(\varphi)=\{-1,0,1\}$, $U_{-1}=\{(-2y,y,y):y\in\mathbb{R}\}$, $U_0=\{(x,0,-x):x\in\mathbb{R}\}$, $U_1=\{(0,z,z):z\in\mathbb{R}\}$;
   (e) $\sigma(\varphi)=\{-4,3\}$, $U_{-4}=\{6a-8ax-3ax^2:a\in\mathbb{R}\}$, $U_3=\{5a-2ax+ax^2:a\in\mathbb{R}\}$;
   (f) $\sigma(\varphi)=\{-2,-1,1\}$, $U_{-2}=\left\{\begin{bmatrix}x & 0\\ -x & 0\end{bmatrix}:x\in\mathbb{R}\right\}$, $U_{-1}=\left\{\begin{bmatrix}2y & -y\\ -y & 0\end{bmatrix}:y\in\mathbb{R}\right\}$, $U_1=\left\{\begin{bmatrix}2z & 3z\\ z & w\end{bmatrix}:z,w\in\mathbb{R}\right\}$.

3. (a) $\sigma(\phi)=\{0,1,2\}$, $m_a(0)=2$, $m_a(1)=1$ e $m_a(2)=3$;
   (b) $m_g(0)\in\{1,2\}$, $m_g(1)=1$ e $m_g(2)\in\{1,2,3\}$.

4. u é um vector próprio de ψ associado ao valor próprio 1.

6. $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\theta=\mu=1$, $a=c=0$ e $b=1$.

7. (a) $\sigma(\varphi)=\{-2,1\}$, $m_a(-2)=m_a(1)=1$;
   (b) $\sigma(\varphi)=\{-1,3\}$, $m_a(-1)=1$ e $m_a(3)=2$;
   (c) $\sigma(\varphi)=\{0,2\}$, $m_a(0)=2$ e $m_a(2)=1$;
   (d) $\sigma(\varphi)=\{-1\}$, $m_a(-1)=3$;
   (e) $\sigma(\varphi)=\{-1,1,6\}$, $m_a(-1)=m_a(6)=1$ e $m_a(1)=2$.

8. (a) $\sigma(\psi)=\{-1,1\}$, $m_a(-1)=1=m_g(-1)$, $m_a(1)=2=m_g(1)$, $U_{-1}=\{(x,0,-x):x\in\mathbb{R}\}$ e $U_1=\{(x,y,x):x,y\in\mathbb{R}\}$;
   (b) $\sigma(\psi)=\{0\}$, $m_a(0)=1=m_g(0)$ e $U_0=\{(3y,-y,2y):y\in\mathbb{R}\}$;
   (c) $\sigma(\psi)=\{0,4\}$, $m_a(0)=2=m_g(0)$, $m_a(4)=1=m_g(4)$, $U_0=\{(2y,y,z):y,z\in\mathbb{R}\}$ e $U_4=\{(2z,3z,z):z\in\mathbb{R}\}$;
   (d) $\sigma(\psi)=\{-1,2\}$, $m_a(-1)=1=m_g(-1)$, $m_a(2)=2=m_g(2)$, $U_{-1}=\{(x,0,-x):x\in\mathbb{R}\}$ e $U_2=\{(x,y,2x+3y):x,y\in\mathbb{R}\}$;
   (e) $\sigma(\psi)=\{0,1,2\}$, $m_a(0)=m_g(0)=m_a(1)=m_g(1)=m_a(2)=m_g(2)=1$, $U_0=\{(-7x,7x,-6x):x\in\mathbb{R}\}$, $U_1=\{(-3x,4x,-5x):x\in\mathbb{R}\}$ e $U_2=\{(-y,y,-2y):y\in\mathbb{R}\}$.

9. (a) $a=\frac{2}{3}$; (b) $U_2=\langle 2+x+x^2\rangle=\{2a+ax+ax^2:a\in\mathbb{R}\}$.

10. $a=1$.

11. (a) $\sigma(\psi)=\{0,2\}$, $U_0=\{(0,-w,0,w):w\in\mathbb{R}\}$ e $U_2=\{(8y,3y,10y,11y):y\in\mathbb{R}\}$;
    (b) i. $\mathcal{B}_S=((0,-1,0,1),(8,3,10,11))$; ii. $\langle(1,0,0,0),(0,0,0,1)\rangle$.

12. (a) V; (b) V; (c) V; (d) V; (e) V; (f) V; (g) F; (h) V; (i) V; (j) F.

15. (a) 4; (b) 8; (c) $\sigma\left(A^{-1}\right)=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},1\right\}$; (d) $\sigma\left(A^{25}\right)=\{1,3^{25},4^{25}\}$.

16. (a) $\sigma(A) = \{-1, 10\}$ ou $\sigma(A) = \left\{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 3 + \sqrt{5}\right\}$ ou $\sigma(A) = \left\{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, 3 - \sqrt{5}\right\}$;
    (b) $\sigma(A) = \{1, 2, 5\}$.

17. (a) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; (c) $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.