1	a)	
	b)	
	c)	
2	a)	
	b)	
	c)	
	d)	
3	–	
4	a)	
	b)	
5	–	
6	a)	
	b)	

Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Exame de Recurso
Análise Matemática I (CURSO: Licenciatura em Matemática)

Duração: 3h00m 4 de fevereiro de 2013

Nome: ____

Número: ______________ **Classificação:** ______________

Declaro que desisto: ____

Notas importantes: 1. Os resultados usados devem ser enunciados com precisão. O rigor das deduções e o cuidado prestado à sua redação são elementos importantes para a apreciação da qualidade das respostas.
2. Não é permitido usar máquinas de calcular, consultar apontamentos ou quaisquer outros elementos.
3. Não é permitido se ausentar da sala sem antes dar o seu teste por concluído e o entregar ao docente.
4. Qualquer tentativa de fraude implica (entre outras consequências) a classificação de zero.
5. Se tiver dúvidas na interpretação das questões, explicite-as na prova.
6. A cotação de cada pergunta está indicada entre parêntesis retos.

1. [3.0] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \,. \end{cases}$

   (a) Mostre que f é contínua no ponto $x = 0$.

   (b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   (c) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e que $f'(0) = 1$.

2. [8.0] Considere a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termo geral $u_n = 2^n\,\pi^{-(n+3)}$ e o conjunto $A = \{\frac{1}{2} + u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente **e** determine $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(b) Indique, caso existam: $\inf(A)$, $\min(A)$, $\sup(A)$ e $\max(A)$.

(c) Determine

$\mathrm{int}(A) =$

$\mathrm{ext}(A) =$

$\mathrm{fr}(A) =$

$\overline{A} =$

$A' =$

(d) Diga, justificando, qual a natureza (convergência simples, absoluta ou divergênca) das seguintes séries: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(2n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$.

3. [2.0] Use o **Critério da Condensação de Cauchy** para mostrar que se $p > 1$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

4. [3.0] Determine as seguintes primitivas:

(a) $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx =$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x^2+4)(x+1)} \, dx =$

5. [1.5] Caso exista, determine o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} \, dx$.

6. [2.5]

   (a) Demonstre que o limite de uma sucessão convergente é único.

   (b) Enuncie e demonstre a **fórmula de Barrow**.

— **FIM** —