42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II

Transformada de Laplace

Exercícios T5A

Vítor Neves

2009/2010

1. Calcule as transformadas de Laplace das funções definidas a seguir indicando também os domínios de cada uma

$$(a)\ f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

$$(b) f(t) \ = \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega} \leq t \end{cases} (\omega > 0)$$

$$(c) f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ e^t & 1 < t \end{cases}$$

2. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e periódica de período $T > 0$. Prove que

$$\mathcal{L}[f](s) \ = \ \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \qquad (s > 0)$$

3. Procure a menor ordem exponencial das funções dadas a seguir.

$(a)\ f(t) = \operatorname{sen} t$ $\qquad (b)\ f(t) = 3t$ $\qquad (c)\ f(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$

$(a)\ f(t) = \operatorname{senh} t$ $\qquad (b)\ f(t) = te^t$ $\qquad (c)\ f(t) = \frac{e^{3t}}{1+et}$

4. Mostre que existe transformada de Laplace, $\mathcal{L}[f](s)$ das funções definidas a seguir

   (a) $f(t) = \frac{1}{1+t}$ $(s > 0)$ $\qquad$ (b) $f(t) = \frac{e^{at}}{1+t}$ $(s > a)$

   (a) $f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$ $(s > 0)$ $\qquad$ (b) $f(t) = t \log\, t, (s > 0)$

5. Mostre que a função dada por $f(t) = te^t \operatorname{sen}\left(e^{t^2}\right)$ tem transformada de Laplace, mas não é de ordem exponencial.

6. Determine a transformada de Laplace, com o domínio respectivo, das funções dadas de seguida.

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}, \qquad f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}, \qquad f(t) = t^2 \operatorname{senh} t$$

7. Determine com o domínio respectivo

   (a) $\mathcal{L}\left[2t + 3e^{2t} + 4\operatorname{sen}(3t)\right](s)$ $\quad$ (b) $\mathcal{L}\left[\alpha^N t^N\right](s)$ $(\alpha \in \mathbb{R}; N \in \mathbb{N})$

   (c) $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right](s)$ $\quad$ (d) $\mathcal{L}\left[\cosh^2(3t)\right](s)$

8. Encontre funções f que satisfaçam

$$(a)\ \mathcal{L}[f]s = \frac{2s}{s+4} \qquad (b)\ \mathcal{L}[f]s = \frac{3}{s+3} - \frac{3s}{s^2+3}$$

9. Decida se a função definida por $g(s) = \frac{s}{\log\, s}$ $(s > 0)$ é ou não uma transformada de Laplace.

10. Mostre que se f' é integrável em qualquer intervalo $[0, b] \subseteq \mathbb{R}$ e é de ordem exponencial, também f é de ordem exponencial.