42707 ANÁLISE MATEMÁTICA II
LIÇÕES VIII

Vítor Neves

2009/2010

Capítulo 6

Equações diferenciais ordinárias

6.1 Preliminares

$$x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m \ \rightsquigarrow \ \|x\| \ := \ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ é **aberto**

$$\Updownarrow$$

$$\forall a \in A \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \big[\|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow x \in A\big]$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} &\forall a = (a_1, \cdots, a_m) \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \\ &\qquad \forall i = 1, \cdots, m \quad \big]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon\big[\times \cdots \times \big]a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon\big[\subseteq A\big] \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} &\forall a = (a_1, \cdots, a_m) \in A \ \forall i = 1, \cdots, m \qquad \exists I_i :=]\alpha_i, \beta_i[\subseteq \mathbb{R} \\ &\qquad a \in \prod_{i=1}^{m} I_i \ \subseteq \ A \end{aligned}$$

Definição 6.1.1
Suponha-se que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ $(n \in \mathbb{N})$, Ω *é aberto,* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *e que* $I :=]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$*. Uma função*

$$y : I \to \mathbb{R}$$

diz-se ***solução*** *da* ***equação diferencial ordinária de ordem n***

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \ = \ 0 \tag{6.1}$$

quando

1. *y tem n derivadas definidas em I*
2. *Para qualquer $x \in I$,*

$$\begin{aligned} (x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) &\ \in \ \Omega \\ F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) &\ = \ 0 \end{aligned}$$

Se, para alguma função $f : C \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to$, a equação (6.1) *for equivalente a*

$$y^{(n)} \ = \ f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{6.2}$$

diz-se redutível à ***forma normal*** *(ou explícita).*

Definição 6.1.2 *Um problema de* ***valores iniciais*** *ou problema* ***de Cauchy*** *para uma equação diferencial* (6.1) *num intervalo I é um sistema de condições*

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \ = \ 0 \\ x_0 \in I \\ (x_0, y_0, \cdots, y_{n-1}) \in \Omega \\ y^{(i)}(x_0) = y_i & \qquad 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Na forma normal

$$\begin{cases} y^{(n)} \ = \ f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \\ x_0 \in I \\ (x_0, y_0, \cdots, y_{n-1}) \in \Omega \\ y^{(i)}(x_0) = y_i & \qquad 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

6.2 Equações de primeira ordem redutíveis à forma normal

6.2.1 Forma explícita

$$y' \; = \; f(x,y) \tag{6.3}$$

$$\textbf{Curva integral } (x,\phi(x)) \; (x\in I)$$

$$\Updownarrow$$

$$\phi'(x) \; = \; f\big(x,\phi(x)\big) \qquad (x\in I)$$

Proposição 6.2.1 $\big(x,\phi(x)\big)$ $(x\in I)$ *é curva integral de* (6.3) *sse*

1. ϕ *é solução de* (6.3)
2. *Em cada ponto* $\big(x,\phi(x)\big)$ *do gráfico de* ϕ*, existe tangente com declive* $f\big(x,\phi(x)\big)$*.*

$$\textbf{Isoclínica } \big(x,\zeta(x)\big) \; (r<x<s)$$

$$\Updownarrow$$

$$f\big(x,\zeta(x)\big)=k\in\mathbb{R} \qquad (r<x<s)$$

6.2.2 Variáveis separáveis

$$\begin{aligned} y' &= g(x)\eta(y) && (6.4) \\ h(y)y' &= g(x) && (6.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_a^y \frac{1}{\eta(\sigma)} d\sigma &= \int_a^x g(t)dt \\ \int_a^y h(\sigma)d\sigma &= \int_a^x g(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dy} = h(y) \\ \frac{dG}{dx} = g(x) \\ H(y) = G(x) + k \quad (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Eventualmente

$$y = \Psi(G(x) + k) \quad (k \in \mathbb{R})$$

6.2.3 Homogéneas

f é homogénea de grau zero

$$\equiv$$

$$\forall t, x, y \in \mathbb{R} \left[(x,y), (tx,ty) \in \mathbf{dom}(f) \ \Rightarrow \ f(tx,ty) = f(x,y) \right]$$

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x} \\ xu &= y \\ u + xu' &= y' = \phi(u) \\ u' &= \frac{1}{x}\big(\phi(u) - u\big) \\ &= g(x)h(u) \end{aligned}$$

6.2.4 Exactas

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{6.7}$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$$

$$\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) = M\big(x,y(x)\big) + N\big(x,y(x)\big)y'(x) = 0$$

$$\Phi(x,y(x)) = k \quad (k \in C \subseteq \mathbb{R})$$

Eventualmente

$$y(x) = \Psi(x,k)$$

Φ diz-se um ***potencial*** do ***campo vectorial***
$(x,y) \mapsto \big(M(x,y), N(x,y)\big)$

O gráficos das curvas integrais são curvas **equipotenciais** do campo

As curvas tangentes ao campo são as **linhas de força**

Proposição 6.2.2 *As linhas de força e as curvas equipotenciais do mesmo campo são mutuamente ortogonais.*