departamento de matemática **universidade de aveiro**

1. No espaço euclidiano indicado, munido do produto interno canónico, converta os seguintes sistemas ortogonais em sistemas ortonormais.

   (a) $\{(-1,2),(6,3)\}$, em $\mathbb{R}^2$;

   (b) $\{(1,0,-1),(2,0,2),(0,5,0)\}$, em $\mathbb{R}^3$;

   (c) $\{(15,15,15),(-12,12,0),(13,13,-13)\}$, em $\mathbb{R}^3$.

2. No espaço euclidiano indicado, munido com o produto interno canónico, utilize o método de ortonormalização de Gram-Schmidt para transformar a base $\mathcal{B}$ numa base ortonormada $\mathcal{B}'$.

   (a) em $\mathbb{R}^2$,

      i. $\mathcal{B} = ((1,-3),(2,2))$;

      ii. $\mathcal{B} = ((1,0),(3,-5))$;

   (b) em $\mathbb{R}^3$,

      i. $\mathcal{B} = ((1,0,0),(3,0,-2),(0,4,1))$;

      ii. $\mathcal{B} = ((1,1,1),(-1,1,0),(1,2,1))$.

3. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno definido por:

   $$(x_1,x_2) \bullet (y_1,y_2) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

   Construa uma base $\mathcal{B}$ ortonormada de $\mathbb{R}^2$, a partir da base canónica.

4. Considere, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, o produto interno definido por

   $$(x_1,x_2,x_3) \bullet (y_1,y_2,y_3) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

   Determine uma base $\mathcal{B}$ ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja E um espaço euclidiano de dimensão 2 e seja $\mathcal{B} = (v_1,v_2)$ uma base ortonormada de E. Determine:

   (a) $(v_1+v_2) \bullet (2v_1+v_2)$;

   (b) $\|v_1+v_2\|$;

   (c) $\|2v_1+v_2\|$.

6. Considere um espaço vectorial real E e seja $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ uma base de E tal que $e_i \bullet e_i = 2$, para todo $i \in \{1,2,3\}$, e $e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_3 = 1$ e $e_1 \bullet e_3 = 0$.

   Determine uma base ortonormada de E.

1. (a) $\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$;
   (b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0)\right\}$;
   (c) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$.

2. (a) i. $\mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$; ii. $\mathcal{B}' = ((1,0),(0,-1))$;
   (b) i. $\mathcal{B}' = ((1,0,0), (0,0,-1), (0,1,0))$;
   ii. $\mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$.

3. $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right)\right)$.

4. $\mathcal{B} = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

5. (a) 3; (b) $\sqrt{2}$; (c) $\sqrt{5}$.

6. $\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, -\frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}e_2, \frac{1}{\sqrt{12}}e_1 - \frac{2}{\sqrt{12}}e_2 + \frac{3}{\sqrt{12}}e_3\right)$.