КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти координаты центра и радиус окружности: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Решение. Приведем уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ к виду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, выделяя полные квадраты в левой его части: $(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 3 = 0$, или $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$. Значит, центр окружности – точка $N(3; -2)$, радиус $R = 4$.

Пример 2. Дано уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

1) длину его осей; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

Решение. Приведем уравнение эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$ к каноническому виду, разделив обе части его на 225:

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, из которого следует:

1) $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, т. е. $a = 5$, $b = 3$, $2a = 10$ − длина большой оси, $2b = 6$ − длина малой оси;

2) используя равенство $c^2 = a^2 - b^2$, найдем $c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$, значит, $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$.

3) эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Пример 3. Дано уравнение гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. Найти:

1) длины полуосей гиперболы; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

Решение. Разделим обе части уравнения на 144. Получим каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, из которого следует:

1) $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, т. е. $a = 4$, $b = 3$;

2) используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, найдем $c = \sqrt{16+9} = 5$, значит, фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$

3) эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$;

4) уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x$, т.е. в данном случае $y = \pm\frac{3}{4}x$.

Пример 4. Получить каноническое уравнение кривой второго порядка и определить ее тип: $9x^2 + 4y^2 + 90x - 8y + 193 = 0$.

Решение. Приведем уравнение $9x^2 + 4y^2 + 90x - 8y + 193 = 0$ к каноническому виду, выделяя полные квадраты в левой его части:

$$9(x^2 + 10x + 25) - 225 + 4(y^2 - 2y + 1) - 4 + 193 = 0,$$

$$9(x+5)^2 + 4(y-1)^2 = 36,$$

$$\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

Получили уравнение вида $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, где $X = x+5, Y = y-1$, $a = 2, b = 3$. Значит, это уравнение эллипса, центр симметрии которого – точка $N(-5;1)$, $b = 3$ - большая полуось, $a = 2$ - малая полуось, фокусы лежат на прямой $x = -5$.