ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

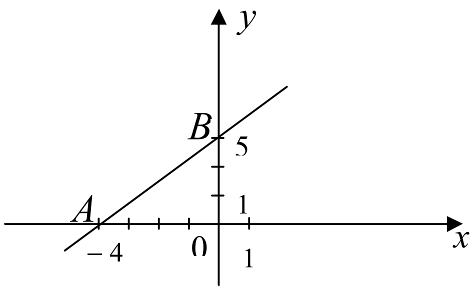
Пример 1. Построить прямые, описываемые уравнениями:

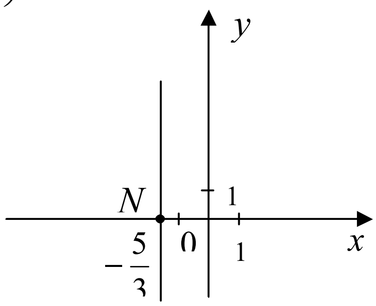
1) $5x - 4y + 20 = 0$; 2) $3x + 5 = 0$.

Решение.

1) для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек. Удобно брать точки пересечения прямой с осями координат. Пусть A − точка пересечения прямой $5x - 4y + 20 = 0$ с осью Ox, а B – с осью Oy, тогда $y_A = 0$, $x_B = 0$. Координаты точек A и B удовлетворяют уравнению прямой $5x - 4y + 20 = 0$. Поэтому при $y_A = 0$ получаем $5x_A + 20 = 0$, $x_A = -4$, т. е. $A(-4;\,0)$, при $x_B = 0$, $-4y_B + 20 = 0$, $y_B = 5$, т. е. $B(0;\,5)$. Отмечаем точки A и B и проводим через них прямую.

2) преобразуем уравнение $3x + 5 = 0$ к виду $x = -\dfrac{5}{3}$. Это уравнение прямой, проходящей через точку $N\left(-\dfrac{5}{3};\,0\right)$ параллельно оси Oy.





Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;4)$ и образующей с осью Ox угол $\alpha = 135^\circ$.

Решение. Найдем угловой коэффициент прямой $k = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}135^\circ = -1$. Подставляя координаты данной точки M_0 и значение углового коэффициента в уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$, получаем искомое уравнение прямой: $y - 4 = -1\cdot(x - 3)$ или $y = -x + 7$, или $x + y - 7 = 0$ − общее уравнение прямой.

Пример 3. Найти острый угол между прямыми, определяемыми уравнениями $5x - y - 3 = 0$ и $3x + 2y - 7 = 0$. Найти точку пересечения этих прямых.

Решение. Пусть φ – острый угол между прямыми, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых. Из уравнений прямых найдем k_1 и k_2: $y = 5x - 3$, т.е. $k_1 = 5$; $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2}$, т. е. $k_2 = -\dfrac{3}{2}$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{-\frac{3}{2} - 5}{1 - \frac{3}{2}\cdot 5}\right| = 1$, т. е. $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Чтобы найти точку пересечения прямых, составим систему:

$$\begin{cases} 5x - y - 3 = 0, \\ 3x + 2y - 7 = 0. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и сложив со вторым, получаем $13x - 13 = 0$, т. е. $x = 1$. Из первого уравнения находим $y = 5x - 3 = 2$. Прямые пересекаются в точке $(1;\,2)$.

Пример 4. Даны три вершины трапеции $ABCD$: $A(4;\,-1)$, $B(-6;\,-3)$, $C(2;\,3)$. Найти: 1) уравнения оснований BC и AD; 2) уравнение высоты BM, проведенной к AD; 3) длину высоты BM.

Решение.

1) Найдем уравнение BC. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Здесь $(x_1;\,y_1)$ - координаты точки B, $(x_2;\,y_2)$ - точки C. Получим $\dfrac{x + 6}{2 + 6} = \dfrac{y + 3}{3 + 3}$, $6(x + 6) = 8(y + 3)$, $3x + 18 = 4y + 12$, т. е. уравнение BC:

$3x - 4y + 6 = 0$ или $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{2}$.

Угловой коэффициент BC равен $k_{BC} = \dfrac{3}{4}$. Основание AD параллельно BC , поэтому угловой коэффициент AD также равен $\frac{3}{4}$. Воспользуемся уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$. Здесь $(x_0; y_0)$ – координаты точки A, $k = k_{AD} = \frac{3}{4}$. Получим $y + 1 = \frac{3}{4}(x - 4)$ или $3x - 4y - 16 = 0$.

2) Высота BM перпендикулярна AD. Следовательно, $k_{BM} = -\frac{1}{k_{AD}} = -\frac{4}{3}$, а уравнение BM будет иметь вид

$$y + 3 = -\frac{4}{3}(x + 6), \text{или } 3y + 9 = -4x - 24, \text{ или } 4x + 3y + 33 = 0.$$

3) Найдем длину высоты BM по формуле расстояния от точки до прямой. Прямая AD задана уравнением $3x - 4y - 16 = 0$, точка B имеет координаты $(-6; -3)$. Получаем

$$BM = \frac{|3 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) - 16|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{22}{5} = 4,4.$$