Exam – August 19, 2016

1.1 Objective

1.2 Système Elément-fini discrétisé

Nous considérons le probèle discrétisé de n sous-structures. Chaque sous-structure est représentée par son déplacement $\mathbf{U}_k$ (k représente le numéro de la sous-structure). Chacune d'entre elle est modélisée indépendamment des autres et la dynamique est associée à une matrice de raideur $[\mathbf{K}_k]$ et une matrice de masse $[\mathbf{M}_k]$. L'assemblage entre les sous-structures est réalisé à l'aide de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ représentant les forces de couplage aux noeuds des interfaces entre sous-structures.

Le système éléments-finis global s'écrit:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}] & [\mathbf{L}] \\ [\mathbf{L}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

Le vecteur global des déplacements $\mathbf{U}$ est obtenu en concaténant les déplacement de chacune des sous-structures. La matrice dynamique $[\mathbf{A}]$ est obtenues en juxtaposant les blocs dynamiques de chacune des sous-structures. Ainsi:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_n \end{Bmatrix}, \quad [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_1] - \omega^2[\mathbf{M}_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [\mathbf{K}_n] - \omega^2[\mathbf{M}_n] \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Le terme $[\mathbf{L}]\boldsymbol{\lambda}$ dans (1.1) traduit la continuité des forces entre sous-structures et le terme $[\mathbf{L}]^T\mathbf{U}$ traduit la continuité des déplacements aux interfaces.

1.3 Ecriture des bases modales

Pour chacune des sous-structures, une base modale $[\boldsymbol{\Phi}_k]$ peut être calculée à partir des matrices $[\mathbf{K}_k]$ $[\mathbf{M}_k]$. Cette base modale est associée à une matrice diagonale $[\boldsymbol{\Omega}_k^2]$ des pulsations propres aux carré.

La base modale découplée globale $[\mathbf{\Phi}]$ est construite en juxtaposant les bases modales découplées:

$$[\mathbf{\Phi}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{\Phi}_1] & & \\ & \ddots & \\ & & [\mathbf{\Phi}_n] \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Pour chaque degré de liberté d'interface, un mode d'attache peut être calculé pour chacune des deux structures reliées au degré de liberté considéré. On peut ainsi construire une matrice $[\mathbf{\Psi}]$. La colonne associé au degré de liberté étant la concaténation des deux modes d'attache. On peut également construire un vecteur résiduel global $\mathbf{\Psi_F}$

1.4 Résolution modale sans correction

La résolution modale sans correction revient à considérer le changement de variable suivant:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{\Phi}]\mathbf{q}. \tag{1.4}$$

$\mathbf{q}$ représente la contribution des modes élastiques. Seuls les modes de la structure sont conservés dans ce cas. Le système projeté sur la base modale s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{\Delta}] & [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{L}] \\ [\mathbf{L}]^T[\mathbf{\Phi}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

$[\mathbf{\Delta}]$ est la matrice dynamique qui s'écrit:

$$[\mathbf{\Delta}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{\Omega}_1^2] - \omega^2[\mathbf{I}] & & \\ & \ddots & \\ & & [\mathbf{\Omega}_n^2] - \omega^2[\mathbf{I}] \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

1.5 Résolution modale avec correction

La résolution modale avec correction revient à considérer le changement de variable suivant:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{\Phi}]\mathbf{q} + [\mathbf{\Psi}]\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{\Psi}_F. \tag{1.7}$$

La seconde partie du système (1.1) se réécrit donc:

$$[\mathbf{L}^T][\mathbf{\Phi}]\mathbf{q} + [\mathbf{L}^T][\mathbf{\Psi}]\boldsymbol{\lambda} = -[\mathbf{L}]^T\mathbf{\Psi}_F \tag{1.8}$$

Cela nous permet donc de réécrire le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ en fonction de la contribution des modes élastiques et de vecteurs constants:

$$\boldsymbol{\lambda} = [\mathbf{C}_{\lambda q}]\mathbf{q} + \mathbf{F}_\lambda \tag{1.9}$$

avec les matrices suivantes:

$$[\mathbf{C}_{\lambda q}] = -\left([\mathbf{L}^T][\mathbf{\Psi}]\right)^{-1}[\mathbf{L}^T][\mathbf{\Phi}], \quad \mathbf{F}_\lambda = -\left([\mathbf{L}^T][\mathbf{\Psi}]\right)^{-1}[\mathbf{L}]^T\mathbf{\Psi}_F. \tag{1.10}$$

On peut ainsi réécrire le vecteur des déplacements $\mathbf{U}$ en fonction de $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{\Phi}}]\mathbf{q} + \hat{\mathbf{U}} \tag{1.11}$$

La matrice $[\hat{\mathbf{\Phi}}]$ correspond à la matrice des modes globaux de la structure construit à partir d'un mode élastique et des corrections statiques des autres modes pour assurer la continuité des déplacement aux interfaces. $\hat{\mathbf{U}}$ correspond à la correction de déplacement due à la force. Ils sont définis par:

$$[\hat{\mathbf{\Phi}}] = [\mathbf{\Phi}] + [\mathbf{\Psi}][\mathbf{C}_{\lambda q}], \quad \hat{\mathbf{U}} = [\mathbf{\Psi}]\mathbf{F}_\lambda + \mathbf{\Psi}_F. \tag{1.12}$$

Notons que la continuité des forces est également assurée.

Nous pouvons maintenant rechercher la contribution des modes $\mathbf{q}$. Pour cela, il faut projeter la première partie du système (1.1) sur la base des modes élastiques

$$[\mathbf{\Phi}]^T\left([\mathbf{A}][\hat{\mathbf{\Phi}}]\mathbf{q} + \hat{\mathbf{U}}\right) + [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{L}]\left([\mathbf{C}_{\lambda q}]\mathbf{q} + \mathbf{F}_\lambda\right) = [\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{F} \tag{1.13}$$

Etant donné l'orthogonalité des familles des modes retenus $[\mathbf{\Phi}]$ et des modes d'attaches $[\mathbf{\Psi}]$ et $\mathbf{\Psi}_F$, on a

$$[\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{A}][\hat{\mathbf{\Phi}}] = [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{A}][\mathbf{\Phi}] = [\mathbf{\Delta}], \quad [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{A}]\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \tag{1.14}$$

Le système linéaire est alors:

$$\left([\mathbf{\Delta}] + [\mathbf{\Phi}]^T[\mathbf{L}][\mathbf{C}_{\lambda q}]\right)\mathbf{q} = [\mathbf{\Phi}]^T\left(\mathbf{F} - [\mathbf{L}]\mathbf{F}_\lambda\right). \tag{1.15}$$