L2 SPI — Maths

Mathieu Gaborit

Septembre 2012

I - Multiplication de matrices

On a les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule :

$$^tA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } ^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, on calcule AB et $^tB^tA$.
On trouve d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Et d'autre part :

$$^tB^tA = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

II - Matrices Inversibles

A)

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve alors $\det A = 1$, ce qui prouve que A est inversible.
On calcule ensuite

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^t \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve enfin :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot^t \hat{A} \\ &= \frac{1}{1} \cdot^t \hat{A} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

B)

On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve alors $\det B = 1$, ce qui prouve que B est inversible.

On calcule ensuite

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^t \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque de nouveau que $\frac{1}{\det B} = 1$, on a :

$$B^{-1} =^t \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C)

On a

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

On sait donc que C est inversible et on aura $C^{-1} =^t \widehat{C}$, on calcule :

$$\begin{aligned} C^{-1} =^t \widehat{C} &= {}^t\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

III - Volcan

On a :

$$p(x, y) = -500 + x^4y^2 + \ln(1 + 4x^2 + 5y^2)$$

On commence par calculer les dérivées partielles de cette fonction dont nous auront besoin juste après :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 4x^3y^2 + \frac{8x}{1 + 4x^2 + 5y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 2x^4y + \frac{10y}{1 + 4x^2 + 5y^2} \end{aligned}$$

Les coordonnées du point Q sont $(1, 2)$.

A) Direction Nord Ouest en partant de Q

Pour savoir si l'on commence par descendre ou monter, on calcule la différentielle de $p(x, y)$ au point Q :

$$
\begin{aligned}
dp &= \left[4 \times 2^2 + \frac{8}{1+4+5\times 2^2}\right] dx + \left[2 \times 2 + \frac{10 \times 2}{1+4+5\times 2^2}\right] dy \\
&= \left[16 + \frac{8}{25}\right] dx + \left[4 + \frac{20}{25}\right] dy \\
&= \frac{408}{25} dx + \frac{120}{25} dy
\end{aligned}
$$

La "direction nord-ouest" correspond en fait à une infime variation $-\epsilon$ de dx et une variation $+\epsilon$ de dy en même temps. On injecte ces variations dans l'équation ci-dessus ($\epsilon > 0$) :

$$
\begin{aligned}
dp \pm \epsilon &= \frac{408}{25}(dx - \epsilon) + \frac{120}{25}(dy + \epsilon) \\
&= \frac{408}{25} dx + \frac{120}{25} dy + \left(\frac{120}{25} - \frac{408}{25}\right) \epsilon \\
&= dp - \frac{288}{25} \epsilon
\end{aligned}
$$

Ayant pris un ϵ positif, on a $dp > dp + \epsilon$. Lorsque l'on se déplace dans la direction nord-ouest à partir du point $Q(1, 2)$, on commence par descendre.

B) Direction de plus grande pente

On a calculé le gradient de p en Q juste au dessus, on a donc :

$$
\overrightarrow{\nabla p} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 408 \\ 120 \end{pmatrix}
$$

La direction de plus grande pente est la droite dont le vecteur directeur est $\overrightarrow{\nabla p(1,2)}$: Il s'agit de la droite d'équation :

$$
\overrightarrow{\nabla p(1,2)}_y x - \overrightarrow{\nabla p(1,2)}_x y + c = 0
$$

On remplace ensuite les variables par leur valeur :

$$
\frac{120}{25} x - \frac{408}{25} y + c = 0
$$

et pour trouver le c, on regarde ce que donne l'équation au point Q (on est sûrs qu'elle y passe) :

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{408}{25} \times 2 - \frac{120}{25} \\
&= \frac{696}{25} \\
&= 27.84
\end{aligned}
$$

La droite de plus grande pente est donc la droite d'équation :

$$
\frac{1}{25} \left[120x + 408y + 696\right] = 0
$$

C) Direction pour une pente nulle

Si on veut une pente nulle, le plus simple est de suivre la ligne de niveau telle que :

$$p(x,y) = p(1,2) = -500 + 4 + \ln(25) =\approx -493$$

On peut aussi décider de considérer comme direction pour une pente nulle la tangente à la ligne de niveau sus-citée en Q. On se retrouve alors à calculer l'équation de la droite ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{\nabla p(1,2)}$:

$$\overrightarrow{\nabla p(1,2)}_x x - \overrightarrow{\nabla p(1,2)}_y y + c = 0$$

Ce qui après substitution nous donne :

$$\frac{408}{25}x - \frac{120}{25}y + c = 0$$

On calcul alors le coefficient c comme précédement :

$$\begin{aligned} c &= -\frac{408}{25} \times 2 - \frac{120}{25} \\ &= -\frac{936}{25} \\ &= -37.44 \end{aligned}$$

On a alors la droite d'équation :

$$\frac{1}{25}\left[408x + 120y + 936\right] = 0$$

D) Divergence du gradient de p

Ayant calculé les dérivées partielles, on se contente d'écrire :

$$\overrightarrow{H} = \overrightarrow{\nabla p} = \begin{pmatrix} 4x^3y^2 + \frac{8x}{1+4x^2+5y^2} \\ 2x^4y + \frac{10y}{1+4x^2+5y^2} \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite $div\overrightarrow{H}$ définie par :

$$\begin{aligned} div\overrightarrow{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \\ &= 12x^2 + y^2 + \frac{8(1+4x^2+5y^2) - 8x \times 8x}{(1+4x^2+5y^2)^2} + 2x^2 + \frac{10(1+4x^2+5y^2) - 10y \times 10y}{(1+4x^2+5y^2)^2} \\ &= 2x^2(6y^2+x^2) + \frac{18}{1+4x^2+5y^2} - \frac{64x^2 - 100y^2}{(1+4x^2+5y^2)^2} \end{aligned}$$

$=$

IV - Dérivées partielles d'une fonction composée

Soit une fonction

$$u(x, y) = x^2 + y^3$$

On a

$$x(t, \tau) = e^{t+\tau}$$

et

$$y(t, \tau) = \ln(t\tau)$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial f}{\partial y} \\
&= e^{t+\tau} \times 2e^{t+\tau} + \frac{\tau}{t\tau} 3\left[\ln(t\tau)\right]^2 \\
&= 2e^{2t+2\tau} + \frac{3}{t}\left[\ln(t\tau)\right]^2 \\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial x}{\partial \tau} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tau} \times \frac{\partial f}{\partial y} \\
&= e^{t+\tau} \times 2e^{t+\tau} + \frac{1}{t\tau} 3\left[\ln(t\tau)\right]^2 \\
&= 2e^{2t+2\tau} + \frac{3}{\tau}\left[\ln(t\tau)\right]^2
\end{aligned}$$

V - Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs

On a :

$$\overrightarrow{F} = (z + y)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} z + y \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

A) Divergence

On applique la formule comme suit :

$$\begin{aligned}
div\overrightarrow{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

B) Rotationnel

Calculer $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F}$ revient à calculer le déterminant suivant en développant par rapport à la première colonne :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \frac{\partial}{\partial x} & z+y \\ \overrightarrow{j} & \frac{\partial}{\partial y} & x \\ \overrightarrow{k} & \frac{\partial}{\partial z} & y \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z} \\ -\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial (z+y)}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial (z+y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0+1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

VI - Champ, potentiel, divergence et rotationnel, nos amis de toujours...

On a en coordonnées cylindriques :

$$V(r,\theta,z) = \frac{1}{1+(z+r\cos\theta)^2} + \frac{1}{1+(z+r\sin\theta)^2}$$

En coordonnées cartésiennes, on arrive à :

$$V(x,yz) = \frac{1}{1+(z+x)^2} + \frac{1}{1+(z+y)^2}$$

A) Calcul du gradient en coordonnées cylindriques

On commence par le calcul des dérivées partielles :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial r} &= -\frac{2(z+r\cos\theta)\cos\theta}{[1+(z+r\cos\theta)^2]^2} - \frac{2(z+r\sin\theta)\sin\theta}{[1+(z+r\sin\theta)^2]^2} \\
\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{2(z+r\cos\theta)r\sin\theta}{[1+(z+r\cos\theta)^2]^2} - \frac{2(z+r\sin\theta)r\cos\theta}{[1+(z+r\sin\theta)^2]^2} \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{2(z+r\cos\theta)}{[1+(z+r\cos\theta)^2]^2} - \frac{2(z+r\sin\theta)}{[1+(z+r\sin\theta)^2]^2}
\end{aligned}
$$

On peut ensuite écrire le gradient de V en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\nabla V} = \overrightarrow{E} = \frac{2(z+r\cos\theta)}{[1+(z+r\cos\theta)^2]^2}\begin{pmatrix} -\cos\theta \\ r\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2(z+r\sin\theta)}{[1+(z+r\sin\theta)^2]^2}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ r\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

B) Calcul du gradient en coordonnées cartésiennes

De nouveau, on commence par calculer les dérivées partielles de $V(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{2(z+x)}{\left[1+(z+x)^2\right]^2} \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{2(z+y)}{\left[1+(z+y)^2\right]^2} \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= -\frac{2(z+x)}{\left[1+(z+x)^2\right]^2} - \frac{2(z+y)}{\left[1+(z+y)^2\right]^2}
\end{aligned}$$

On peut alors écrire le gradient de $V(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\nabla V} = \overrightarrow{E} = -\frac{2(z+x)}{\left[1+(z+x)^2\right]^2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{2(z+y)}{\left[1+(z+y)^2\right]^2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

C) Divergence

On calcule $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial E_y}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{-2\left[1+(z+x)^2\right]^2 - 4\left[1+(z+x)^2\right](z+x)}{\left[1+(z+x)^2\right]^4} \\
&= \frac{-2\left[\left[1+(z+x)^2\right] - 2(x+z)\right]}{\left[1+(z+x)^2\right]^3} \\
\frac{\partial E_y}{\partial y} &= \frac{-2\left[1+(z+y)^2\right]^2 - 4\left[1+(z+y)^2\right](z+y)}{\left[1+(z+y)^2\right]^4} \\
&= \frac{-2\left[\left[1+(z+y)^2\right] - 2(y+z)\right]}{\left[1+(z+y)^2\right]^3}
\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{-2\left[\left[1+(z+x)^2\right] - 2(x+z)\right]}{\left[1+(z+x)^2\right]^3} + \frac{-2\left[\left[1+(z+y)^2\right] - 2(y+z)\right]}{\left[1+(z+y)^2\right]^3}$$

La divergence de $\overrightarrow{E}$, c'est la somme de ces trois termes, on a donc :

$$div\overrightarrow{E} = 2\frac{\partial E_x}{\partial x} + 2\frac{\partial E_y}{\partial y}$$

Ce qui nous donne

$$div\overrightarrow{E} = \frac{-4\left[\left[1+(z+x)^2\right] - 2(x+z)\right]}{\left[1+(z+x)^2\right]^3} + \frac{-4\left[\left[1+(z+y)^2\right] - 2(y+z)\right]}{\left[1+(z+y)^2\right]^3}$$

D) Rotationnel

Calculer le rotationnel de $\overrightarrow{E}$, revient à calculer le déterminant de la matrice suivant en développant par rapport à la première colonne :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \overrightarrow{j} & \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \overrightarrow{k} & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix}$$

On remarque que E_y ne dépendant pas de x, $\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0$, il en va de même pour E_x et y. On a alors : $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$.

Pour le calcul de $\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}$, on remarque seule la première partie de E_z dépend de x et que celle ci est égale à E_x. Le calcul à effectuer de vient donc $\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}$ Et dans E_x, x et z ont des rôles symétriques, on peut donc écrire :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$$

Enfin, on remarque que l'on peut appliquer le même raisonnement pour $\frac{\partial E_y}{\partial z}$ et $\frac{\partial E_z}{\partial y}$
On écrit alors :

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

Et on déduit de cela le rotationnel de $\overrightarrow{E}$:

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$