Effets de réflexion et transmission sur deux interfaces

Mathieu Gaborit | TD1 L3 SPI

Novembre 2013

1. Problème

Données deux interfaces (1 et 2) séparant respectivement les milieux 1 et 2 (de paramètres ρ_1, c_1 et ρ_2, c_2) et les milieux 2 et 1.

Une onde acoustique vient frapper la première interface en un point A avec un angle à la normale θ_1. L'onde transmise dans le milieu 2 vient rencontrer ensuite une seconde interface où une partie est transmise à nouveau vers le milieu 1 (voir figure 1). On se propose de définir et de lier entre elles les ondes incidentes, réfléchies et transmises sur chacune des interfaces 1 et 2.

1.1. Conditions du problème

Nous étudierons d'abord la première interface puis la seconde. Les conditions suivantes sont supposées à chacune des deux interfaces :

- Condition de Sommerfeld : on ne considère pas d'onde retour
- Condition à l'interface : continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface.

De plus, les ondes seront considérées monochromatiques.

1.2. Notations

Les pressions incidente, réfléchie et transmise à l'interface i seront notées p_i^I, p_i^R et p_i^T, les vitesses normales aux deux interfaces, elles, seront notées : v_i^I, v_i^R et v_i^T.

1.3. Schéma du problème

Le problème peut être schématisé comme montré en figure 1.

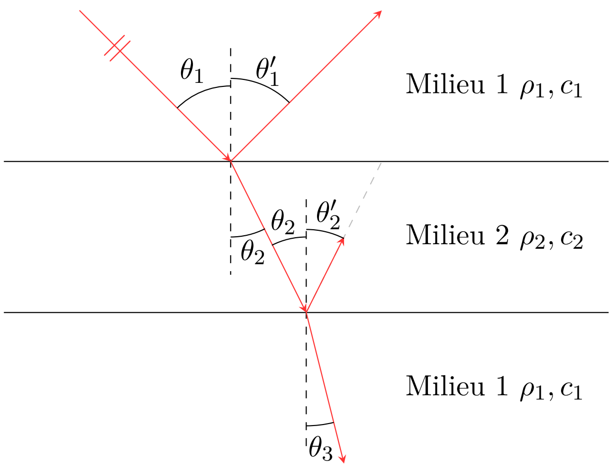

FIG. 1 : Schématisation complète du problème

2. Interface 1

On considère le problème à l'interface 1 uniquement (voir figure 2).

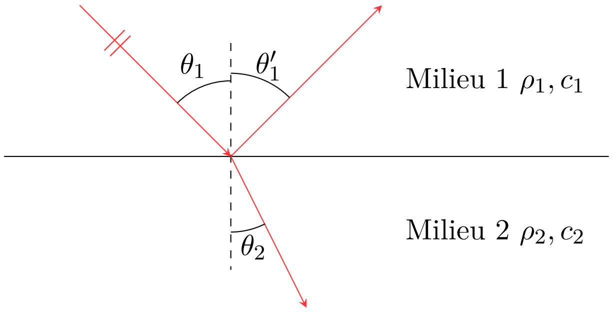

FIG. 2 : Considération des effets à l'interface 1

2.1. Position du problème

Pressions totales Dans le milieu 1, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_1^{TOT}(x,y,t) = 0\ ;\ \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \geq 0 \tag{1}$$

Dans le milieu 2, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_2^{TOT}(x,y,t) = 0\ ;\ \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \leq 0 \tag{2}$$

Champ monochromatique Les ondes sont considérées monochromatiques, l'équation d'Helmholtz est donc vérifiée dans chacun des milieux :

$$(\Delta + k_1^2)p_1(x,y) \quad = \quad 0\ ;\ \forall x, t \tag{3}$$
$$(\Delta + k_2^2)p_2(x,y) \quad = \quad 0\ ;\ \forall x, t \tag{4}$$

On définit les nombres d'onde $k_i = {}^{\omega_i}/_{c_i}$, ω_i étant la pulsation de l'onde dans le milieu i ($i \in \{1,2\}$).

Condition de Sommerfeld

Conditions à l'interface A l'interface, il y a continuité des pressions et des vitesses normales. Ainsi :

$$p_1^{TOT}(x, y=0, t) \quad = \quad p_2^{TOT}(x, y=0, t)\ ;\ \forall x, t \tag{5}$$
$$v_1^{TOT}(x, y=0, t) \quad = \quad v_2^{TOT}(x, y=0, t)\ ;\ \forall x, t \tag{6}$$

Dans le milieu 2, on ne considérera que l'onde transmise, ainsi pour les equations (2), (5) et (6), on aura :

$$p_2^{TOT} = p_1^T$$
$$v_2^{TOT} = v_1^T$$

On défini alors :

$$p_1^{TOT} = p_1^I + p_1^R$$

2.2. Forme générale des pressions

Les ondes sont considérés monochromatiques :

$$
\begin{aligned}
p_1^I(x,y,t) &= A_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1 x + k_1 \cos\theta_1 y)} \qquad (7) \\
p_1^R(x,y,t) &= B_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1' x + k_1 \cos\theta_1' y)} \qquad (8) \\
p_1^T(x,y,t) &= A_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin\theta_2 x + k_2 \cos\theta_2 y)} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

2.3. Forme générales des vitesses normales

On sait que les vitesses normales ont une expression de la forme : $v_i(x,y,t) = v_i(x,y)e^{j\omega_i t}$, d'après l'équation d'Euler, on peut écrire :

$$
\rho_1 \frac{\partial v_1^{TOT}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad v_1^{TOT} = -\frac{1}{j\omega_1\rho_1}\frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} \qquad (10)
$$

$$
\rho_2 \frac{\partial v_1^{T}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^{T}}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad v_1^{T} = -\frac{1}{j\omega_2\rho_2}\frac{\partial p_1^{T}}{\partial y} \qquad (11)
$$

Calcul de v_1^{TOT}