L2 SPI — Maths

Mathieu Gaborit

Novembre 2012

I - Intégrales

A) $h(x) = \sqrt{|1-x|}$, pour $x \in [0,2]$

Sur $[0,1]$ $\quad 1-x \geq 0$, donc $\sqrt{1-x}$ existe.

Sur $[1,2]$ $\quad 1-x \leq 0$, mais $x-1 \geq 0$ et $|1-x| = x-1$, donc $\sqrt{|1-x|} = \sqrt{x-1}$.

On peut donc redéfinir $h(x)$ de la manière suivante :

$$h(x) = \sqrt{|1-x|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} & \forall x \in [0,1] \\ \sqrt{x-1} & \forall x \in [1,2] \end{cases}$$

On peut ainsi écrire l'intégrale comme une somme d'intégrales :

$$\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{\int_1^2 \sqrt{x-1}\mathrm{d}x}_{(2)}$$

Résolution de l'intégrale (1) On procède par changement de variable :

$$y = 1-x, \quad x = 1-y, \quad \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$$

On change ensuite les bornes :

1 - 0 = 1
1 - 1 = 0

On arrive donc à :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x}\mathrm{d}x & \Leftrightarrow \int_1^0 -\sqrt{y}\mathrm{d}y \\ & \Leftrightarrow \int_0^1 y^{1/2}\mathrm{d}y \\ & \Leftrightarrow \left[y^{3/2}\right]_0^1 \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Résolution de l'intégrale (2) On procède là encore par changement de variable

$$y = x-1, \quad x = y-1, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}y$$

On change ensuite les bornes :

1 - 1 = 0
2 - 1 = 1

On arrive donc à :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y$$

Soit l'intégrale calculée juste au dessus, on peut donc calculer l'intégrale complète :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 h(x)\mathrm{d}x &= 2 \times \int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2 \times \frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

B) $h(x) = \sqrt{|1-x|}$, pour $x \in [0,2]$

On cherche à calculer :

$$I = \int_2^3 \ln(x^2-1)\mathrm{d}x$$

On commence par opérer une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x^2-1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{x^2-1} \\ v(x) = x \end{cases}$$

L'équation devient alors :

$$\begin{aligned}
I &= \left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
&= \left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2-2+2}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
&= \left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - 2\int_2^3 \mathrm{d}x + 2\int_2^3 \frac{x^2-1}{x^2-1}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - 2\int_2^3 \mathrm{d}x}_{(1)} + \underbrace{2\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x}_{(2)}
\end{aligned}$$

Si la partie (1) se calcule sans souci, la partie (2) est un peu plus compliquée. Je me suis penché sur les développements possibles de $1/x^2-1$ et ai trouvé une formule utilisant limités et me permettant de réduire ainsi :

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow 2\int_2^3 \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \int_2^3 \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow [\ln(x-1)]_2^3 - [\ln(x+1)]_2^3
\end{aligned}$$

On ré-injecte alors dans notre équation et on a :

$$
\begin{aligned}
I &= \left[x\ln(x^2-1)\right]_2^3 - 2\int_2^3 \mathrm{d}x + [\ln(x-1)]_2^3 - [\ln(x+1)]_2^3 \\
&= 3\ln(2^3) - 2\ln(3) - 2 - \ln(2) + \ln(2^2) - \ln(3) \\
&= 9\ln(2) - 2\ln(3) - 2 - \ln(2) + 2\ln(2) - \ln(3) \\
&= 10\ln(2) - 3\ln(3) - 2 \\
&\approx 1.63563
\end{aligned}
$$

II - Masse d'un fil

On commence par écrire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ décrivant la courbe, à parcourir pour $x \in [0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
\gamma :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
t &\longmapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

La dérivé de $\gamma(t)$ est alors :

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Et on calculera facilement la norme de $\gamma'(t)$:

$$
\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\| &= \sqrt{1^2 + (2t)^2} \\
&= \sqrt{1 + 4t^2}
\end{aligned}
$$

On définit par ailleurs une fonction décrivant la densité au point de paramètre x telle que :

$$
\begin{gathered}
\rho(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2} \\
\rho(\gamma(t)) = \sqrt{1 + 4x^2}
\end{gathered}
$$

Reste à écrire l'intégrale curviligne permettant de calculer la masse M :

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \rho(\gamma(t)) \times \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} \cdot \sqrt{1 + 4t^2} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_0^1 4t^2 \mathrm{d}t \\
&= 1 + \frac{4}{3}\left[x^3\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{3} + \frac{4}{3} \\
M &= \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

III - Centre de gravité d'une courbe homogène

IV - Travail sur un triangle

Pour mieux saisir le sujet, on commence par un petit schéma :

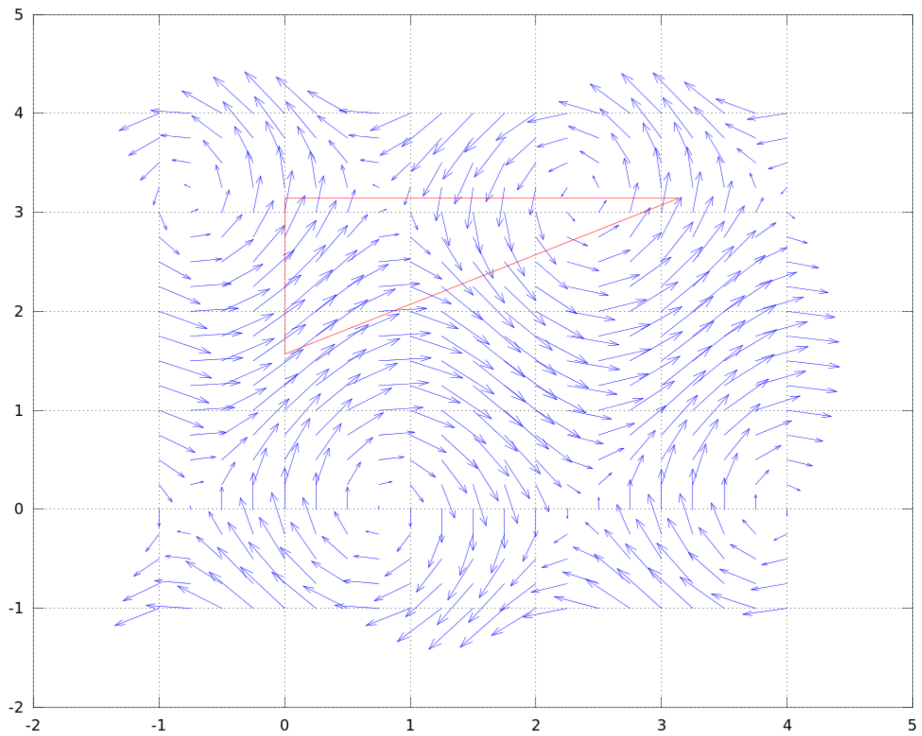

FIGURE 1 – Le champ de vecteurs (en bleu) et le triangle (en rouge)

On a l'expression de notre champ de force tel que :

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}$$

On cherche donc à calculer le travail de la force appliquée par ce champ sur un corps parcourant le triangle rouge composé des points $A(0, \pi)$, $B(\pi, \pi)$ et $C(0, \pi/2)$. On parcourt le triangle dans l'ordre $A \to B \to C \to A$.

On sait le que le travail total W est égal à la somme des travaux sur $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$:

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$$

On peut définir une fonction $\gamma(t)$ pour chaque segment de droite en fonction d'un paramètre t variant entre 0 et π. Pour deux points $X(X_x, X_y)$ et $Y(Y_x, Y_y)$ et le segment $X \to Y$, on aura :

$$\gamma_{XY} = \begin{pmatrix} {}^{Y_x - X_x}/_{\pi} t + X_x \\ {}^{Y_y - X_y}/_{\pi} t + X_y \end{pmatrix}$$

On peut ensuite définir pour chaque segment l'action de F sur ce segment $F(\gamma(t))$ et la dérivée $\gamma'(t)$ de $\gamma(t)$.

On a alors :

$$\begin{array}{rlrlrl}
\gamma_{AB}(t) = & \begin{pmatrix} t \\ \pi \end{pmatrix} & F_{\gamma_{AB}} = & \begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} & \gamma'_{AB}(t) = & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_{BC}(t) = & \begin{pmatrix} -t + \pi \\ -t/2 + \pi \end{pmatrix} & F_{\gamma_{BC}} = & \begin{pmatrix} \sin(-t/2 + \pi) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} & \gamma'_{BC}(t) = & \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\
\gamma_{CA}(t) = & \begin{pmatrix} 0 \\ t/2 + \pi/2 \end{pmatrix} & F_{\gamma_{CA}} = & \begin{pmatrix} \sin(t/2 + \pi/2) \\ \cos(0) \end{pmatrix} & \gamma'_{CA}(t) = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

W_{AB}

$$\begin{aligned}
W_{AB} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \sin(\pi) \mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

W_{BC}

$$\begin{aligned}
W_{BC} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(-t/2 + \pi) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} \cdot \gamma'_{BC}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\pi \sin(-t/2 + \pi) \mathrm{d}t - \int_0^\pi \cos(-2t) \mathrm{d}t \\
&= 2 \left[\cos\left(-\frac{t}{2} + \pi \right) \right]_0^\pi - \frac{1}{4} \left[\sin(-2t) \right]_0^\pi \\
&= -2
\end{aligned}$$

W_{CA}

$$\begin{aligned}
W_{CA} &= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \sin(t/2 + \pi/2) \\ \cos(0) \end{pmatrix} \cdot \gamma'_{CA}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(0) \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

On somme alors :

$$\begin{aligned}
W &= W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} \\
&= \frac{\pi}{2} - 2
\end{aligned}$$

V - Travail d'un champ de force

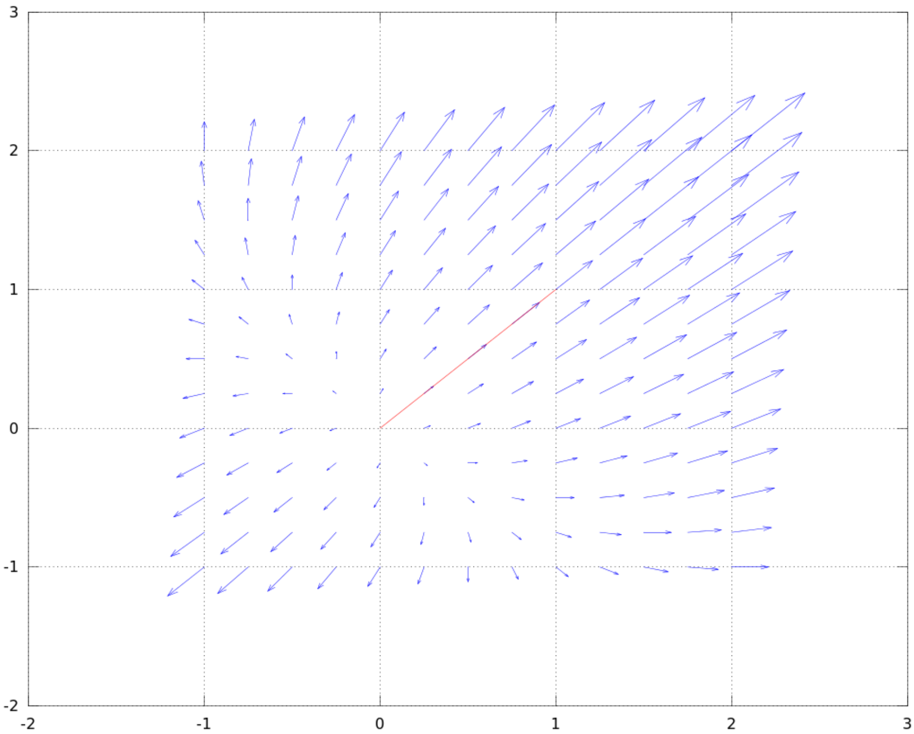

FIGURE 2 – Le champ de vecteurs (en bleu) et la droite de déplacement (en rouge)

Afin de mieux visualiser le problème, on commence par tracer le champ de vecteurs (en bleu) et la droite sur laquelle on se déplace (en rouge), la figure finale est disponible en figure 2.

L'équation de la courbe de déplacement est : $y(t) = {}^{\Delta y}/_{\Delta x} t = \frac{1}{1}t = t$, on peut la ré-écrire sous la forme d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

Le déplacement s'effectue dans un champ de force (*i.e.* un champ de vecteurs) d'équation :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} \end{array}$$

On calcule aisément $F(\gamma(t))$ pour $t \in [0, 1]$:

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \end{pmatrix}$$

On calcule de même $\gamma'(t)$:

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, calculer le travail du champ de force revient à intégrer pour t allant de 0 à 1 le produit scalaire de $F(\gamma(t))$ et de $\gamma'(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t &= 2\int_0^1 3t\mathrm{d}t \\
&= 6\int_0^1 t\mathrm{d}t \\
&= 6\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Cette quantité étant positive, on en déduit que le travail est globalement moteur.

VI - Equations différentielles

A) $x' + x = e^{-t}, x(0) = 0$

$$x' + x = e^{-t} \tag{1}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, la solution de l'équation homogène (sans second membre) est donc :

$$S_h = \left\{\lambda e^{-t} + g_0, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec g_0 une solution particulière.

Recherche d'une solution particulière On a $x' = x = e^{-t}$, soit $x' + ax = P(t)e^{rt}$ avec $P(t) = 1, a = 1, r = -1$.

On remarque que $a = -r$, on aura donc une solution particulière à l'équation (1) de la forme :

$$g_0 : t \longmapsto Q(t)e^{-t}$$

où $Q(t)$ est un polynôme tel que $\deg Q = \deg P + 1$, $Q(t)$ sera donc de la forme :

$$Q(t) = \alpha t + \beta$$

d'où :

$$g_0 : t \longmapsto (\alpha x + \beta)e^{-t}$$
$$g_0' : t \longmapsto \alpha e^{-t} - \alpha t e^{-t} - \beta e^{-t}$$

g_0 étant solution de (1), on remplace pour déterminer les constantes α et β :

$$\alpha e^{-t} + (\beta - \beta)e^{-t} + (\alpha - \alpha)te{-}t = e^{-t}$$

On remarque que tout se simplifie, et qu'il ne reste plus que $\alpha = 1$ (après division par e^{-t}. β n'a pas d'importance et peut prendre d'importe quelle valeur, ici, nous choisirons 0.

$$g_0 : t \longmapsto te^{-t}$$

Et donc, la solution générale est :

$$S_g = \left\{\lambda e^{-t} + te^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Solution unique On fixe enfin la constante λ au regard des conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda e^0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda = 0 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour solution finale :

$$x : t \longmapsto te^{-t}$$

B) $x'' - 4x = 0$

$$x'' - 4x = 0 \tag{2}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, on calcule le discriminant de l'équation caractéristique (3) pour connaitre la forme de la solution :

$$X^2 - 4 = 0 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 \\ r_0 &= \frac{-\sqrt{\Delta}}{2} \\ &= -2 \\ r_1 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$S_h = \left\{Ae^{-2t} + Be^{2t} + g_0,\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec g_0 une solution particulière.

Recherche d'une solution particulière Le second membre de l'équation est une constante, la solution en sera donc une aussi.

On prend g_0 égale au second membre, soit $g_0 = 0$, on a alors $g_0' = g_0'' = 0$.

Pour vérification on remplace dans l'équation 2 :

$$0 - 4 \times 0 = 0$$

Notre solution particulière est donc cohérente

Notre solution générale ressemble alors à :

$$S_g = \left\{ Ae^{-2t} + Be^{2t},\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

La dérivée de cette solution générale est l'ensemble des fonctions

$$S_g' = \left\{ -2Ae^{-2t} + 2Be^{2t},\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Solution unique On fixe enfin les constantes A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} Ae^0 + Be^0 = 1 \\ -2Ae^0 - 2Be^0 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 & (L_1) \\ -2A - 2B = 0 & (L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B & (L_1) \\ 4B = 2 & (L_3 \leftarrow L_2 + 2L_1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} & (L_1) \\ B = \frac{1}{2} & (L_3) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour solution finale :

$$x : t \longmapsto \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

C) $x'' + 4x' + 4x = 1$

$$x'' + 4x' + 4x = 1 \tag{4}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, on calcule le discriminant de l'équation caractéristique (5) pour connaitre la forme de la solution :

$$X^2 + 4X + 4 = 0 \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 0 \\
r &= \frac{-4}{2} \\
&= -2
\end{aligned}
$$

$$S_h = \left\{Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + g_0,\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec g_0 une solution particulière.

Recherche d'une solution particulière Le second membre de l'équation est une constante, la solution en sera donc une aussi.

Si g_0 est constante, alors ses dérivées *n-ième* seront nulles, g_0 étant avant tout solution de (4), on peut écrire :

$$0 + 4 \times 0 + 4 \times g_0 = 1$$

On aura donc :

$$g_0 = \frac{1}{4}$$

La solution générale ressemble alors à :

$$S_g = \left\{Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \frac{1}{4},\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

La dérivée de cette solution générale est l'ensemble des fonctions

$$S'_g = \left\{-2Ae^{-2t} + Be^{-2t} - 2Bte^{-2t},\ A, B \in \mathbb{R}\right\}$$

Solution unique On fixe enfin les constantes A et B avec les conditions initiales :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{array}\right. \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} Ae^0 + \frac{1}{4} = 1 \\ -2Ae^0 + Be^0 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} A = \frac{3}{4} & (L_1) \\ -2A + B = 0 & (L_2) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} A = \frac{3}{4} & (L_1) \\ B = 2 \times \frac{3}{4} & (L_2) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} A = {}^{3}\!/_{4} & (L_1) \\ B = {}^{3}\!/_{2} & (L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne, pour solution finale :

$$x : t \longmapsto \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}$$

D) $x'' - 3x' + 2x = e^{-t}$

$$x'' - 3x' + 2x = e^{-t} \tag{6}$$

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

C'est une équation différentielle du second ordre, on calcule le discriminant de l'équation caractéristique (7) pour connaitre la forme de la solution :

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 \\ r_0 &= \frac{3 - \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= 1 \\ r_1 &= \frac{3\sqrt{\Delta}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$S_h = \left\{ Ae^t + Be^{2t} + g_0,\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec g_0 une solution particulière.

Recherche d'une solution particulière Le second membre est de la forme $P(t)e^{rt}$ avec $P(t) = 1, r = -1$. On remarque que -1 n'est pas racine de (7), donc, avec une solution particulière de la forme $g_0 = Q(t)e^{-t}$, $Q(t)$ sera donc du même degré que P, soit une constante.

On a alors :

$$\begin{aligned} Q(t) &= \alpha \\ g_0 : \ t \longmapsto &\ \alpha e^{-t} \\ g_0' : \ t \longmapsto &\ -\alpha e^{-t} \\ g_0'' : \ t \longmapsto &\ \alpha e^{-t} \end{aligned}$$

On détermine alors le α en remplacant dans (6) :

$$\begin{aligned} (\alpha + 3\alpha + 2\alpha)e^{-t} &= = e^{-t} \\ 6\alpha &= 1 \\ \alpha &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La solution particulière est alors :

$$g_0 : t \longmapsto \frac{1}{6}e^{-t}$$

La solution générale ressemble alors à :

$$S_g = \left\{ Ae^t + Be^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t},\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

La dérivée de cette solution générale est l'ensemble des fonctions

$$S'_g = \left\{ Ae^t + 2Be^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t},\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Solution unique On fixe enfin les constantes A et B avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{array} \right. \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} Ae^0 + Bte^0 = -\frac{1}{6} & (L_1) \\ Ae^0 + 2Be^0 = \frac{1}{6} & (L_2) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} A = -\frac{1}{6} - B & (L_1) \\ B = \frac{2}{6} & (L_3 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} A = -\frac{1}{6} - \frac{2}{6} = -\frac{3}{6} & (L_1) \\ B = \frac{2}{6} & (L_3 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne, pour solution finale :

$$x : t \longmapsto -\frac{3}{6}e^t + \frac{2}{6}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{-t}$$

VII - Une de plus

Il s'agit cette fois de résoudre l'équation suivante :

$$y'' + 2y' + y = te^t \tag{8}$$

Le sujet ne nous donnant pas les conditions initiales, on aboutira à un ensemble de solutions.

On procède à la résolution de la manière habituelle : on commence par résoudre l'équation caractéristique :

$$X^2 + 2X + 1 = 0 \tag{9}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2^2 - 4 = 0 \\
r_0 &= \frac{-2}{2} = -1
\end{aligned}$$

On aura alors une solution de la forme :

$$S_h = \left\{ Ae^{-t} + Bte^{-t} + g_0, A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec g_0 une solution particulière.

Recherche d'une solution particulière On a un second membre de la forme $P(t)e^{rt}$ avec $P(t) = t$ et $r = 1$.

r n'est pas racine de l'équation caractéristique (9), on cherche donc une solution de forme $g_0 = Q(t)e^t$ avec $Q(t)$ de même degré que $P(t)$ (degré 1 ici).

On aura

$$Q(t) = \alpha t = \beta$$

Donc g_0 et ses dérivées première et seconde s'écriront :

$$\begin{array}{rcl} g_0 & = & \alpha te^t + \beta e^t \\ g_0' & = & \alpha te^t + \alpha e^t + \beta e^t \\ g_0'' & = & 2\alpha e^t + \alpha te^t + \beta e^t \end{array}$$

g_0 étant avant tout solution de l'équation (8), on remplace dans celle-ci :

$$\begin{array}{rcl} g_0'' + 2g_0' + g_0 & = & te^t \\ te^t & = & 2\alpha e^t + \alpha te^t + \beta e^t + 2\alpha te^t + 2\alpha e^t + 2\beta e^t + \alpha te^t + \beta e^t \\ te^t & = & (4\alpha + 4\beta)e^t + 4\alpha te^t \end{array}$$

Déterminer α et β revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 4\alpha + 4\beta = 0 \\ 4\alpha = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = -\frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

La solution particulière g_0 s'écrit donc :

$$g_0 = \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}e^t$$

Et la solution générale de l'équation :

$$S = \left\{ Ae^{-t} + Be^{-t} + \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{4}e^t,\ A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Les constantes A et B seront à déterminer à partir d'éventuelles conditions initiales.