

Effets de réflexion et transmission sur deux interfaces

Mathieu Gaborit | TD1 L3 SPI
Novembre 2013

1. Problème

Données deux interfaces (1 et 2) séparant respectivement les milieux 1 et 2 (de paramètres ρ_1, c_1 et ρ_2, c_2) et les milieux 2 et 1.

Une onde acoustique vient frapper la première interface en un point A avec un angle à la normale θ_1 . L'onde transmise dans le milieu 2 vient rencontrer ensuite une seconde interface où une partie est transmise à nouveau vers le milieu 1 (voir figure 1). On se propose de définir et de lier entre elles les ondes incidentes, réfléchies et transmises sur chacune des interfaces 1 et 2.

1.1. Conditions du problème

Nous étudierons d'abord la première interface puis la seconde. Les conditions suivantes sont supposées à chacune des deux interfaces :

- Condition de Sommerfeld : on ne considère pas d'onde retour
- Condition à l'interface : continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface.

De plus, les ondes seront considérées monochromatiques.

1.2. Notations

Les pressions incidente, réfléchi et transmise à l'interface i seront notées p_i^I , p_i^R et p_i^T , les vitesses normales aux deux interfaces, elles, seront notées : v_i^I , v_i^R et v_i^T .

1.3. Schéma du problème

Le problème peut être schématisé comme montré en figure 1.

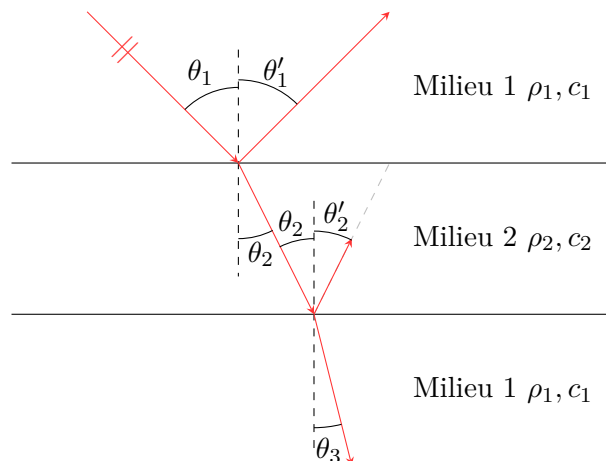


FIG. 1 : Schématisation complète du problème

2. Interface 1

On considère le problème à l'interface 1 uniquement (voir figure 2).

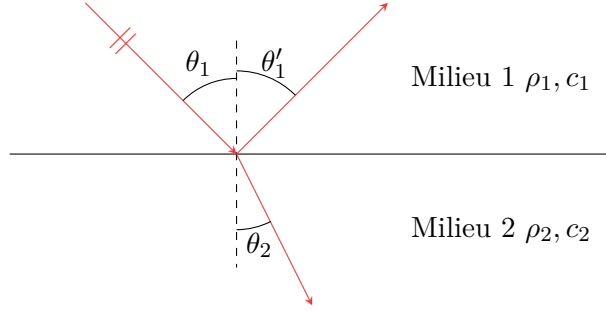


FIG. 2 : Considération des effets à l'interface 1

2.1. Position du problème

Pressions totales Dans le milieu 1, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_1^{TOT}(x, y, t) = 0 ; \forall x, t \text{ et } \forall y \geq 0 \quad (2.1)$$

Dans le milieu 2, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p_2^{TOT}(x, y, t) = 0 ; \forall x, t \text{ et } \forall y \leq 0 \quad (2.2)$$

Champ monochromatique Les ondes sont considérées monochromatiques, l'équation d'Helmholtz est donc vérifiée dans chacun des milieux :

$$(\Delta + k_1^2)p_1(x, y) = 0 ; \forall x, t \quad (2.3)$$

$$(\Delta + k_2^2)p_2(x, y) = 0 ; \forall x, t \quad (2.4)$$

On définit les nombres d'onde $k_i = \omega_i/c_i$, ω_i étant la pulsation de l'onde dans le milieu i ($i \in \{1, 2\}$).

Condition de Sommerfeld

Conditions à l'interface A l'interface, il y a continuité des pressions et des vitesses normales. Ainsi :

$$p_1^{TOT}(x, y = 0, t) = p_2^{TOT}(x, y = 0, t) ; \forall x, t \quad (2.5)$$

$$v_1^{TOT}(x, y = 0, t) = v_2^{TOT}(x, y = 0, t) ; \forall x, t \quad (2.6)$$

Dans le milieu 2, on ne considérera que l'onde transmise, ainsi pour les equations (2.2), (2.5) et (2.6), on aura :

$$\begin{aligned} p_2^{TOT} &= p_1^T \\ v_2^{TOT} &= v_1^T \end{aligned}$$

On définit alors :

$$p_1^{TOT} = p_1^I + p_1^R$$

2.2. Forme générale des pressions

Les ondes sont considérés monochromatiques :

$$p_1^I(x, y, t) = A_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \cos \theta_1 y)} \quad 2.7$$

$$p_1^R(x, y, t) = B_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta'_1 x + k_1 \cos \theta'_1 y)} \quad 2.8$$

$$p_1^T(x, y, t) = A_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin \theta_2 x + k_2 \cos \theta_2 y)} \quad 2.9$$

2.3. Forme générales des vitesses normales

On sait que les vitesses normales ont une expression de la forme : $v_i(x, y, t) = v_i(x, y) e^{j\omega_i t}$, d'après l'équation d'Euler, on peut écrire les équations (2.10) et (2.11).

$$\rho_1 \frac{\partial v_1^{TOT}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} \Leftrightarrow v_1^{TOT} = -\frac{1}{j\omega_1 \rho_1} \frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} \quad 2.10$$

$$\rho_2 \frac{\partial v_1^T}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^T}{\partial y} \Leftrightarrow v_1^T = -\frac{1}{j\omega_2 \rho_2} \frac{\partial p_1^T}{\partial y} \quad 2.11$$

De l'équation (2.10) on peut déduire la forme de v_1^{TOT} (équation (2.12)), et de (2.11) on déduit (2.13).

$$\begin{aligned} v_1^{TOT} &= -\frac{1}{j\rho_1 \omega_1} \left[jA_1 k_1 \cos \theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \cos \theta_1 y)} - jB_1 k_1 \cos \theta'_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta'_1 x - k_1 \cos \theta'_1 y)} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_1 \omega_1} \left[A_1 k_1 \cos \theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x + k_1 \cos \theta_1 y)} - B_1 k_1 \cos \theta'_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta'_1 x - k_1 \cos \theta'_1 y)} \right] \end{aligned} \quad 2.12$$

$$\begin{aligned} v_1^T &= -\frac{1}{j\rho_2 \omega_2} \left[jA_2 k_2 \cos \theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin \theta_2 x + k_2 \cos \theta_2 y)} \right] \\ &= -\frac{1}{\rho_2 \omega_2} \left[A_2 k_2 \cos \theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin \theta_2 x + k_2 \cos \theta_2 y)} \right] \end{aligned} \quad 2.13$$

2.4. Conditions aux limites

Continuité des pressions

On a

$$(2.5) \Leftrightarrow p_1^{TOT}(x, y = 0, t) = p_1^T(x, y = 0t) ; \forall x, t$$

Ainsi, en insérant (2.7), (2.8) et (2.9) dans (2.5), on obtient l'équation (2.14).

$$A_1 e^{j\omega_1 t} e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} + B_1 e^{j\omega_1 t} e^{-jk_1 \sin \theta'_1 x} = A_2 e^{j\omega_2 t} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \quad 2.14$$

On veut que (2.14) soit valable pour tout t , on a alors :

$$e^{j\omega_1 t} = e^{j\omega_2 t} \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad 2.15$$

On veut aussi que (2.14) soit valable pour tout x , on a alors :

$$e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} = e^{-jk_1 \sin \theta'_1 x} = e^{-jk_2 \sin \theta_2 x}$$

$$\text{d'où } \theta_1 = \theta'_1 \quad (2.16)$$

$$e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} = e^{-jk_2 \sin \theta_2 x}$$

$$\Leftrightarrow k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (2.17)$$

En ré-injectant ces résultats dans (2.14), on déduit :

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (2.18)$$

Continuité des vitesses normales à l'interface

On a :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \omega & (2.15) \\ \theta_1 = \theta'_1 & (2.16) \\ k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 & (2.17) \end{cases}$$

Avec ces informations, on peut récrire l'expression de v_1^{TOT} et v_1^T (equations (2.12) et (2.13)) :

$$\begin{aligned} (2.12) \Leftrightarrow v_1^{TOT} &= -\frac{1}{\rho_1 \omega_1} \left[A_1 k_1 \cos \theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta_1 x)} - B_1 k_1 \cos \theta'_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin \theta'_1 x)} \right] \\ &= -\frac{k_1 \cos \theta_1}{\rho_1 \omega} e^{j\omega t} e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} [A_1 - B_1] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} (2.13) \Leftrightarrow v_1^T &= -\frac{1}{\rho_2 \omega_2} \left[A_2 k_2 \cos \theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin \theta_2 x + k_2 \cos \theta_2 y)} \right] \\ &= -\frac{k_2 \cos \theta_2}{\rho_2 \omega} A_2 e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

En remplaçant (2.19) et (2.20) dans l'équation (2.6), on déduit la relation (2.21).

$$\begin{aligned} (2.6) \Leftrightarrow -\frac{k_1 \cos \theta_1}{\rho_1 \omega} e^{j\omega t} e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} [A_1 - B_1] &= -\frac{k_2 \cos \theta_2}{\rho_2 \omega} e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} A_2 \\ \frac{k_1 \cos \theta_1}{\rho_1} e^{-jk_1 \sin \theta_1 x} [A_1 - B_1] &= -\frac{k_2 \cos \theta_2}{\rho_2} e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} A_2 \\ \frac{k_1 \cos \theta_1}{\rho_1} [A_1 - B_1] &= -\frac{k_2 \cos \theta_2}{\rho_2} A_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$