Effets de réflexion et transmission sur deux interfaces

Mathieu Gaborit | TD1 L3 SPI

Novembre 2013

1. Problème

Données deux interfaces (1 et 2) séparant respectivement les milieux 1 et 2 (de paramètres ρ_1, c_1 et ρ_2, c_2) et les milieux 2 et 1.

Une onde acoustique vient frapper la première interface en un point A avec un angle à la normale θ_1. L'onde transmise dans le milieu 2 vient rencontrer ensuite une seconde interface où une partie est transmise à nouveau vers le milieu 1 (voir figure 1). On se propose de définir et de lier entre elles les ondes incidentes, réfléchies et transmises sur chacune des interfaces 1 et 2.

1.1. Conditions du problème

Nous étudierons d'abord la première interface puis la seconde. Les conditions suivantes sont supposées à chacune des deux interfaces :

- Condition de Sommerfeld : on ne considère pas d'onde retour
- Condition à l'interface : continuité de la pression et de la vitesse normale à l'interface.

De plus, les ondes seront considérées monochromatiques.

1.2. Notations

Les pressions incidente, réfléchie et transmise à l'interface i seront notées p_i^I, p_i^R et p_i^T, les vitesses normales aux deux interfaces, elles, seront notées : v_i^I, v_i^R et v_i^T.

1.3. Schéma du problème

Le problème peut être schématisé comme montré en figure 1.

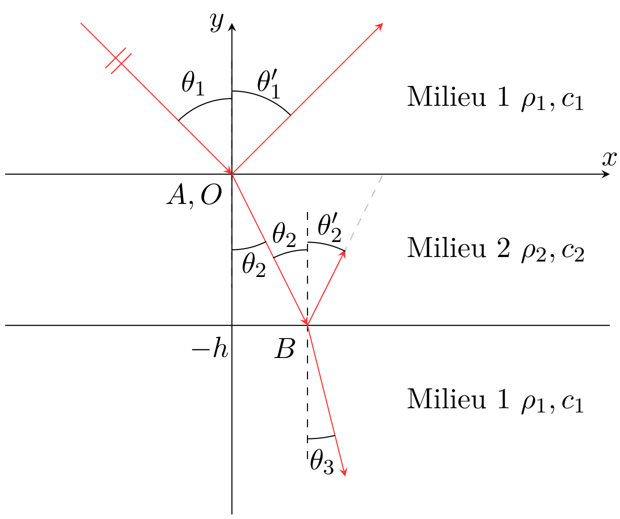

Fig. 1 : Schématisation complète du problème

2. Interface 1

On considère le problème à l'interface 1 uniquement (voir figure 2).

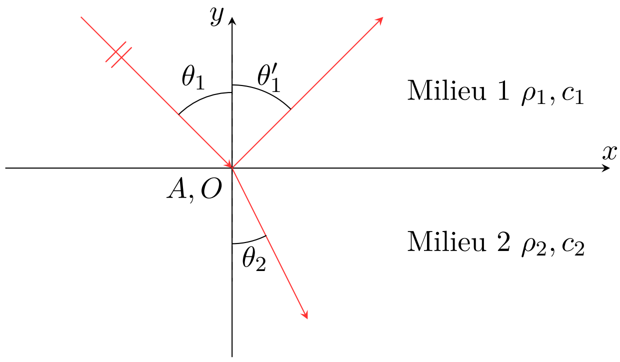

FIG. 2 : Considération des effets à l'interface 1

2.1. Position du problème

Pressions totales Dans le milieu 1, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_1^{TOT}(x,y,t) = 0 \; ; \; \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \geq 0 \tag{2.1}$$

Dans le milieu 2, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_2^{TOT}(x,y,t) = 0 \; ; \; \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \leq 0 \tag{2.2}$$

Champ monochromatique Les ondes sont considérées monochromatiques, l'équation d'Helmholtz est donc vérifiée dans chacun des milieux :

$$(\Delta + k_1^2)p_1(x,y) = 0 \; ; \; \forall x, t \qquad 2.3$$
$$(\Delta + k_2^2)p_2(x,y) = 0 \; ; \; \forall x, t \qquad 2.4$$

On définit les nombres d'onde $k_i = {}^{\omega_i}/_{c_i}$, ω_i étant la pulsation de l'onde dans le milieu i ($i \in \{1,2\}$).

Condition de Sommerfeld

Conditions à l'interface A l'interface, il y a continuité des pressions et des vitesses normales. Ainsi :

$$p_1^{TOT}(x, y = 0, t) = p_2^{TOT}(x, y = 0, t) \; ; \; \forall x, t \qquad 2.5$$
$$v_1^{TOT}(x, y = 0, t) = v_2^{TOT}(x, y = 0, t) \; ; \; \forall x, t \qquad 2.6$$

Dans le milieu 2, on ne considérera que l'onde transmise, ainsi pour les equations (2.2), (2.5) et (2.6), on aura :

$$p_2^{TOT} = p_1^T$$
$$v_2^{TOT} = v_1^T$$

On définit alors :

$$p_1^{TOT} = p_1^I + p_1^R$$

2.2. Forme générale des pressions

Les ondes sont considérés monochromatiques :

$$\begin{aligned} p_1^I(x,y,t) &= A_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1 x + k_1 \cos\theta_1 y)} & 2.7 \\ p_1^R(x,y,t) &= B_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1' x + k_1 \cos\theta_1' y)} & 2.8 \\ p_1^T(x,y,t) &= A_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin\theta_2 x + k_2 \cos\theta_2 y)} & 2.9 \end{aligned}$$

2.3. Forme générales des vitesses normales

On sait que les vitesses normales ont une expression de la forme : $v_i(x,y,t) = v_i(x,y)e^{j\omega_i t}$, d'après l'équation d'Euler, on peut écrire les équations (2.10) et (2.11).

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial v_1^{TOT}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad v_1^{TOT} = -\frac{1}{j\omega_1\rho_1}\frac{\partial p_1^{TOT}}{\partial y} & 2.10 \\ \rho_2 \frac{\partial v_1^{T}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^{T}}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad v_1^{T} = -\frac{1}{j\omega_2\rho_2}\frac{\partial p_1^{T}}{\partial y} & 2.11 \end{aligned}$$

De l'équation (2.10) on peut déduire la forme de v_1^{TOT} (équation (2.12)), et de (2.11) on déduit (2.13).

$$\begin{aligned} v_1^{TOT} &= -\frac{1}{j\rho_1\omega_1}\left[jA_1k_1\cos\theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1\sin\theta_1 x + k_1\cos\theta_1 y)} - jB_1k_1\cos\theta_1' e^{j(\omega_1 t - k_1\sin\theta_1' x - k_1\cos\theta_1' y)}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho_1\omega_1}\left[A_1k_1\cos\theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1\sin\theta_1 x + k_1\cos\theta_1 y)} - B_1k_1\cos\theta_1' e^{j(\omega_1 t - k_1\sin\theta_1' x - k_1\cos\theta_1' y)}\right] \quad 2.12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1^{T} &= -\frac{1}{j\rho_2\omega_2}\left[jA_2k_2\cos\theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2\sin\theta_2 x + k_2\cos\theta_2 y)}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho_2\omega_2}\left[A_2k_2\cos\theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2\sin\theta_2 x + k_2\cos\theta_2 y)}\right] \quad 2.13 \end{aligned}$$

2.4. Conditions aux limites

Continuité des pressions

On a

$$(2.5) \Leftrightarrow p_1^{TOT}(x, y=0, t) = p_1^T(x, y=0t) \ ; \ \forall x, t$$

Ainsi, en insérant (2.7), (2.8) et (3.9) dans (2.5), on obtient l'équation (2.14).

$$A_1 e^{j\omega_1 t} e^{-jk_1\sin\theta_1 x} + B_1 e^{j\omega_1 t} e^{-jk_1\sin\theta_1' x} = A_2 e^{j\omega_2 t} e^{-jk_2\sin\theta_2 x} \quad 2.14$$

On veut que (2.14) soit valable pour tout t, on a alors :

$$e^{j\omega_1 t} = e^{j\omega_2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \quad 2.15$$

On veut aussi que (2.14) soit valable pour tout x, on a alors :

$$\begin{aligned} e^{-jk_1 \sin\theta_1 x} = e^{-jk_1 \sin\theta_1' x} &= e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} \\ \text{d'où } \theta_1 &= \theta_1' & 2.16 \\ e^{-jk_1 \sin\theta_1 x} &= e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} \\ \Leftrightarrow k_1 \sin\theta_1 &= k_2 \sin\theta_2 & 2.17 \end{aligned}$$

En ré-injectant ces résultats dans (2.14), on déduit :

$$A_1 + B_1 = A_2 \qquad 2.18$$

Continuité des vitesses normales à l'interface

On a :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \omega & (2.15) \\ \theta_1 = \theta_1' & (2.16) \\ k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 & (2.17) \end{cases}$$

Avec ces informations, on peut récrire l'expression de v_1^{TOT} et v_1^T (equations (2.12) et (2.13)) :

$$\begin{aligned} (2.12) \Leftrightarrow v_1^{TOT} &= -\frac{1}{\rho_1\omega_1}\left[A_1 k_1 \cos\theta_1 e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1 x)} - B_1 k_1 \cos\theta_1' e^{j(\omega_1 t - k_1 \sin\theta_1' x)}\right] \\ &= -\frac{k_1\cos\theta_1}{\rho_1\omega} e^{j\omega t} e^{-jk_1 \sin\theta_1 x}\left[A_1 - B_1\right] & 2.19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2.13) \Leftrightarrow v_1^{T} &= -\frac{1}{\rho_2\omega_2}\left[A_2 k_2 \cos\theta_2 e^{j(\omega_2 t - k_2 \sin\theta_2 x + k_2\cos\theta_2 y)}\right] \\ &= -\frac{k_2\cos\theta_2}{\rho_2\omega} A_2 e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} & 2.20 \end{aligned}$$

En remplaçant (2.19) et (2.20) dans l'équation (2.6), on déduit la relation (2.21).

$$\begin{aligned} (2.6) \Leftrightarrow -\frac{k_1\cos\theta_1}{\rho_1\omega} e^{j\omega t} e^{-jk_1 \sin\theta_1 x}\left[A_1 - B_1\right] &= -\frac{k_2\cos\theta_2}{\rho_2\omega} e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} A_2 \\ \frac{k_1\cos\theta_1}{\rho_1} e^{-jk_1 \sin\theta_1 x}\left[A_1 - B_1\right] &= -\frac{k_2\cos\theta_2}{\rho_2} e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} A_2 \\ \frac{k_1\cos\theta_1}{\rho_1}\left[A_1 - B_1\right] &= -\frac{k_2\cos\theta_2}{\rho_2} A_2 & 2.21 \end{aligned}$$

3. Interface 2

On ne considère désormais le problème qu'a l'interface 2 :

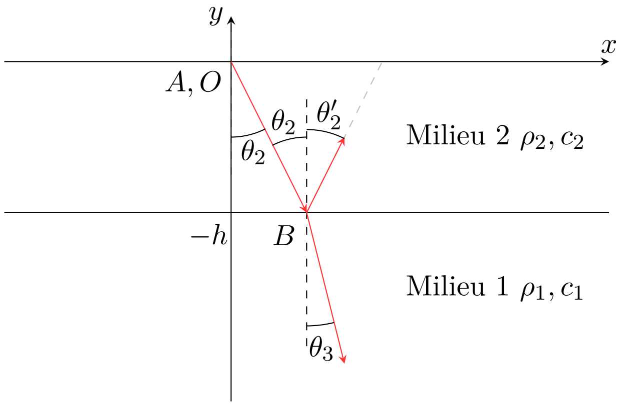

FIG. 3 : Considération des effets à l'interface 2

3.1. Position du problème

Pressions totales Dans le milieu 2, la pression totale vérifie :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_2^{TOT}(x,y,t) = 0 \; ; \; \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \in [-h; 0] \tag{3.1}$$

Dans le milieu 1, la pression totale vérifie

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p_1^{TOT}(x,y,t) = 0 \; ; \; \forall x, t \,\text{et}\, \forall y \leq -h \tag{3.2}$$

Champ monochromatique Les ondes sont considérées monochromatiques, l'équation d'Helmholtz est donc vérifiée dans chacun des milieux :

$$(\Delta + k_2^2)p_2(x,y) = 0 \; ; \; \forall x, t \quad 3.3$$
$$(\Delta + k_1^2)p_1(x,y) = 0 \; ; \; \forall x, t \quad 3.4$$

Condition de Sommerfeld

Conditions à l'interface A l'interface, il y a continuité des pressions et des vitesses normales. Ainsi :

$$p_2^{TOT}(x, y=-h, t) = p_1^{TOT}(x, y=-h, t) \; ; \; \forall x, t \quad 3.5$$
$$v_2^{TOT}(x, y=-h, t) = v_1^{TOT}(x, y=-h, t) \; ; \; \forall x, t \quad 3.6$$

Dans le milieu 1, on ne considérera que l'onde transmise, ainsi pour les equations (3.2), (3.5) et (3.6), on aura :

$$p_1^{TOT} = p_1^T$$
$$v_1^{TOT} = v_1^T$$

On définit alors :

$$p_2^{TOT} = p_2^I + p_2^R$$

Par ailleurs, on remarque que l'onde incidente à l'interface 2 n'est autre que l'onde transmise depuis l'interface 1, on a alors :

$$p_2^I = p_1^T \Rightarrow p_2^{TOT} = p_1^T + p_2^R$$

De plus, p_1^T est définie par la relation (3.9).

3.2. Forme générale des pressions

Les ondes sont considérées monochromatiques :

$$\begin{aligned} p_1^T(x,y,t) = p_2^I(x,y,t) &= A_2 e^{j(\omega t - k_2 \sin\theta_2 x + k_2 \cos\theta_2 y)} & 3.7 \\ p_2^R(x,y,t) &= B_2 e^{j(\omega t - k_2 \sin\theta_2' x + k_2 \cos\theta_2' y)} & 3.8 \\ p_2^T(x,y,t) &= A_3 e^{j(\omega_3 t - k_1 \sin\theta_3 x + k_1 \cos\theta_3 y)} & 3.9 \end{aligned}$$

3.3. Forme générales des vitesses normales

On sait que les vitesses normales ont une expression de la forme : $v_i(x,y,t) = v_i(x,y)e^{j\omega_i t}$, d'après l'équation d'Euler, on peut écrire les équations (3.10) et (3.11).

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial v_2^{TOT}}{\partial t} = -\frac{\partial p_2^{TOT}}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad v_2^{TOT} = -\frac{1}{j\omega\rho_2}\frac{\partial p_2^{TOT}}{\partial y} & 3.10 \\ \rho_1 \frac{\partial v_1^T}{\partial t} = -\frac{\partial p_1^T}{\partial y} \quad &\Leftrightarrow \quad v_1^T = -\frac{1}{j\omega\rho_1}\frac{\partial p_1^T}{\partial y} & 3.11 \\ & & 3.12 \end{aligned}$$

De l'équation (3.10) on peut déduire la forme de v_2^{TOT} (équation (3.13)), et de (3.11) on déduit (3.14).

$$\begin{aligned} v_2^{TOT} &= -\frac{1}{j\rho_2\omega}\left[jA_2k_2\cos\theta_2 e^{j(\omega t - k_2\sin\theta_2 x + k_2\cos\theta_2 y)} - jB_2k_2\cos\theta_2' e^{j(\omega t - k_2\sin\theta_2' x - k_2\cos\theta_2' y)}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho_2\omega}\left[A_2k_2\cos\theta_2 e^{j(\omega t - k_2\sin\theta_2 x + k_2\cos\theta_2 y)} - B_2k_2\cos\theta_2' e^{j(\omega t - k_2\sin\theta_2' x - k_2\cos\theta_2' y)}\right] \quad 3.13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^T &= -\frac{1}{j\rho_1\omega_3}\left[jA_3k_1\cos\theta_3 e^{j(\omega_3 t - k_1\sin\theta_3 x + k_1\cos\theta_3 y)}\right] \\ &= -\frac{1}{\rho_1\omega_3}\left[A_3k_1\cos\theta_3 e^{j(\omega_3 t - k_1\sin\theta_3 x + k_1\cos\theta_3 y)}\right] \quad 3.14 \end{aligned}$$

3.4. Conditions aux limites

Continuité des pressions

On a

$$(3.5) \Leftrightarrow p_2^{TOT}(x, y=-h, t) = p_2^T(x, y=-h, t)\ ;\ \forall x, t$$

Ainsi, en insérant (3.7), (3.8) et (**??**) dans (3.5), on obtient l'équation (3.15).

$$A_2 e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} e^{-jk_2 \cos\theta_2 h} + B_2 e^{j\omega t} e^{-jk_2 \sin\theta_2' x} e^{jk_2 \cos\theta_2' h} = A_3 e^{j\omega_3 t} e^{-jk_1 \sin\theta_3 x} e^{-jk_1 \cos\theta_3 h} \quad 3.15$$

On veut que (3.15) soit valable pour tout t, on a alors :

$$e^{j\omega t} = e^{j\omega_3 t} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \omega_3 = \omega \quad 3.16$$

On veut aussi que (3.15) soit valable pour tout x, on a alors :

$$\begin{aligned} e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} = e^{-jk_2 \sin\theta_2' x} &= e^{-jk_1 \sin\theta_3 x} \\ \text{d'où } \theta_2 &= \theta_2' && 3.17 \\ e^{-jk_2 \sin\theta_2 x} &= e^{-jk_1 \sin\theta_3 x} \\ \Leftrightarrow k_2 \sin\theta_2 &= k_1 \sin\theta_3 && 3.18 \end{aligned}$$

A FINIR