Acoustique en Fluide Réel

Relations utiles

$$\Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$
$$\mu = \nu\rho$$
$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

Thermodynamique

Voir pp. 8-9-17-18-21-23.

Transformation adiabatique

$$PV^{\gamma} = cte$$
$$c^2 = \frac{\gamma}{\rho \chi_T}$$
$$C_p = \frac{P_0}{\rho_0 T_0}\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

Gaz Parfait

$$PV = nRT$$
$$\alpha = \beta = {}^1/_T \quad , \quad \chi_T = {}^1/_P$$

Relations pour un fluide bivariant

$$dS = \frac{C_p}{T}dT - \frac{P\beta}{\rho}\chi_T dP$$
$$dT = -\frac{T}{\rho \chi_T P}d\rho + \frac{T}{P}dP$$
$$d\rho = \rho\chi_T(dP - P\beta dT)$$

Équations fondamentales

Voir equations (2.1-2-3) ainsi que le chapitre 1.

Conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Conservation de l'énergie

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \lambda \Delta T + \mathcal{O}(||v||^2)$$

Équation de Navier-Stokes

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad}P + \mu\boldsymbol{\Delta}\mathbf{v} + (\eta + \frac{\mu}{3})\mathbf{grad}\mathrm{div}\mathbf{v}$$
$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\mathbf{grad}P + (\eta + \frac{4}{3}\mu)\mathbf{grad}\mathrm{div}\mathbf{v} - \mu\mathbf{rotrot}\mathbf{v}$$

Loi de Fourier

$$\varphi = -\lambda\mathbf{grad}T$$

φ : flux de chaleur

Équations du Problème Acoustique

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{c_0}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_0 c_0}{T_0}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho_0 c_0 \mathrm{div}(\mathbf{v_l}) = 0 \\ \left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - l_v\Delta\right]\mathbf{v_l} = -\frac{1}{\rho_0 c_0}\mathbf{grad}p \\ \left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - l'_v\Delta\right]\mathbf{v_v} = \mathbf{0} \\ \left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - l_h\Delta\right]\tau = \frac{1}{\rho_0 c_0 C_p}\frac{\partial p}{\partial t} \end{cases}$$

Équations du Problème Acoustique

Pour le détail des approximations formulées, voir diapos et les équations (2.44 à 49). Au premier ordre de $k_0 l_{vh} << 1$ et pour $\xi = p,\ \mathbf{v_l},\ \text{ou } \tau$:

$$\begin{cases} (\Delta + k_v^2)\mathbf{v_v} = 0 \\ (\Delta + k_a^2)\xi_a \approx 0 \\ (\Delta + k_h^2)\xi_h \approx 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{aligned} k_a &= k_0\sqrt{1 - jk_0 l_{vh}} \\ k_v &= \sqrt{\frac{-jk_0}{l'_v}} \\ k_h &= \sqrt{\frac{-jk_0}{l_h}} \end{aligned}$$

Équations d'ondes

Fluide visqueux non conducteur

$$\left[1 + \frac{l_v}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\right]\Delta p - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$
$$k \approx k_0 - j\frac{l_v}{2}k_0^2$$

Fluide visqueux et conducteur

Voir pp. 24-25.

$$\underbrace{\left[\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t} - l_h\Delta\right]}_{entropique}\underbrace{\left[\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + l_{vh}\frac{1}{c_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta\right]}_{acoustique} p \approx 0$$

Avec relaxation thermique moléculaire

Voir p. 29 équation (2.34-35).

$$\left[\Delta + k_0^2\left(1 - jk_0 l_{vh} - \sum_q D_q \frac{j\omega\theta_q}{1 + j\omega\theta_q}\right)\right]p = 0$$
$$D_q = \frac{(\gamma - 1)C_{V_q}^v}{C_p}$$

Atténuation monoatomique

Voir pp. 26-27.

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad , \quad k = k_0 - j\frac{l_{vh}}{2}k_0^2$$

Relations $\mathbf{v_l} \leftrightarrow \tau \leftrightarrow p$ monoatomique

$$\begin{cases} p_a \approx \tau_a \rho_0 C_p \\ p_h \approx 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v_{la}}}{\partial t} \approx -\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_0}{\rho_0 T_0}\mathbf{grad}\tau_a \\ v_l h \approx \frac{\gamma P_0}{\rho_0 c_0 T_0} l_h \mathbf{grad}\tau_h \end{cases}$$

Conditions à une interface

Voir équations (2.40 à 43).

$$\mathbf{v}_{\backslash\backslash}(\mathbf{r_f}, t) = \mathbf{v_p}_{\backslash\backslash}(\mathbf{r_f}, t)$$
$$\tau(\mathbf{r_f}, t) = 0$$

Longueurs Caractéristiques

Longueurs l_v, l'_v, l_h et l_{vh}

Voir équations (2.8-9-10) et paragraphe (2.21.2).

$$l_v = \frac{1}{\rho_0 c_0}\left(\frac{4}{3}\mu + \eta\right) \quad , \quad l'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0}$$
$$l_h = \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 C_p} \quad , \quad l_{vh} = l_v = (\gamma - 1)l_h$$

Couches limites thermiques et visqueuses

Voir p.31, équations (2.38-39).

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho}} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$$
$$\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho C_p}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} = \frac{\delta_\nu}{\Pr}$$

Propagation dans les guides

Équation de propagation

Voir équations (2.77-78).

$$\partial_{xx}^2 p + k^2 p = 0$$
$$k = k_0\sqrt{1 + \frac{f_\nu + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}}$$

Fonctions visqueuse et thermique

Tuyau Cylindrique (rayon R)

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{2}{k_{v,h}R}\frac{\mathrm{J}_1(k_{v,h}R)}{\mathrm{J}_0(k_{v,h}R)}$$

Fente (largeur h)

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{\tanh\left(\frac{(1+j)h}{2\delta_{\nu,\kappa}}\right)}{\left(\frac{(1+j)h}{2\delta_{\nu,\kappa}}\right)}$$

Tuyau à section carrée

Voir p. 41 équation (2.87).