

Couplage des méthodes FEM et DGM

Rapport de projet

M1 Acoustique

Année universitaire 2014-2015

Remerciements

Sommaire

I	Méthode des Éléments finis	2
I.	Généralités	3
A)	Formulation Variationnelle	3
B)	Fonctions de forme	3
C)	Matrices Booléennes et Vecteurs Globaux	4
II.	Fonctions d'interpolation classiques	5
A)	Éléments Linéaires	5
B)	Éléments quadratiques	5
C)	Note sur l'implémentation	6
III.	Problème 1D	6
A)	Position du Problème	7
B)	Solution par éléments finis	7
C)	Prise en compte de l'excitation	7
D)	Solution analytique	8
E)	Convergence	9
II	Méthode de Galerkin Discontinue avec Ondes Planes	11
I.	Généralités	12
II.	Discretisation des champs	13
III.	Problème 1D	13
A)	Condition limite à droite	13
B)	Condition limite à gauche	14
III	Couplage – Caractéristiques et Conditions aux Limites	15
I.	Retour sur les conditions aux limites en MEF	16
A)	Utilisation de la formulation de Galerkin	16
B)	Condition en $x = 0$	16
C)	Interpolation des caractéristiques	17
D)	Influence sur la convergence	18
IV	Amélioration de la convergence	19
I.	Une nouvelle interpolation : les splines d'Hermite	20
A)	Formulation classique	20

B)	Méthode des caractéristiques	20
II.	Etude de convergence	21
A	Splines d'Hermite	25

Introduction

Part I

Méthode des Éléments finis

I. Généralités

A) Formulation Variationnelle

Le problème est régi par l'équation d'Helmholtz sans source telle que présentée en (1) (avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde, c la célérité du son dans le milieu, et ω la pulsation).

$$(\Delta + k^2)p(x, \omega) = 0 \quad (1)$$

En faisant usage de la formulation variationnelle (avec δp le champ variationnel), puis d'une intégration par parties, le problème s'exprime comme en (2).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= 0, \quad \forall \delta p \\ - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \end{aligned} \quad (2)$$

B) Fonctions de forme

Supposant que les champs p et δp sur un intervalle $[x_i, x_j]$ sont décomposables en une combinaison linéaire de fonctions φ_k (dites fonctions de forme) assorties des valeurs du champs à des points particuliers x_k du domaine, il vient (cas 1D):

$$\begin{cases} p = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) p(x_k) \\ p' = \sum_{k=1}^N \varphi'_k(x) p(x_k) \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \delta p(x_k) \\ \delta p' = \sum_{k=1}^N \varphi'_k(x) \delta p(x_k) \end{cases} \quad (3)$$

Pour alléger les notations, on pose $\alpha_k \Leftrightarrow \alpha(x_k)$ où α est un champ et x_k un point, de même $\varphi_k \Leftrightarrow \varphi_k(x)$.

Il est de ré-écrire les équations de (3) de manière vectorielle comme présenté en (4).

$$p = [\varphi_1 | \cdots | \varphi_N] \begin{Bmatrix} p_i \\ \vdots \\ p_j \end{Bmatrix} = [\varphi_1 | \cdots | \varphi_N] \underline{p} \quad (4)$$

Et de même pour les champs p' , δp et $\delta p'$, on note $\underline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}'$ les vecteurs des fonctions de forme et de leur dérivées respectivement.

En utilisant cette dernière équation (4), en considérant une partition du domaine Ω de sorte que $\Omega = \sum_e \Omega_e$ où l'équation (1) est vérifiée sur chacune des parties de Ω et en utilisant la relation de Chasles, il vient (de (??)):

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \\ \Leftrightarrow \sum_e \left\{ - \int_{\Omega_e} \nabla p_e \nabla \delta p_e \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} p_e \delta p_e \, d\Omega \right\} &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \\ \Leftrightarrow \sum_e \left\{ - \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T \underline{\varphi}'^T \underline{\varphi}' p_e \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} p_e \, d\Omega \right\} &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes, les quantités indicées d'un e sont valables sur un élément. Les quantités soulignées une fois sont des vecteurs, celles soulignées deux fois des matrices¹. Après calcul des produits $\underline{\varphi}^T \underline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}'^T \underline{\varphi}'$ et passage des intégrales dans les matrices ainsi obtenues, il vient :

$$\Leftrightarrow \sum_e \left\{ -\underline{\delta p}^T \underline{K}_e \underline{p} + k^2 \underline{\delta p}^T \underline{M}_e \underline{p} \right\} = - \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \quad (5)$$

Avec :

$$\underline{M}_e = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_e} \varphi_1^2 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega & \cdots & \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_N d\Omega \\ \int_{\Omega_e} \varphi_2 \varphi_1 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_2^2 d\Omega & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega_e} \varphi_N \varphi_1 d\Omega & & \cdots & \int_{\Omega_e} \varphi_N^2 d\Omega \end{bmatrix}$$

Et de même pour \underline{K}_e en considérant les dérivées $(\varphi'_1, \dots, \varphi'_N)$ des fonctions de forme plutôt que les fonctions elles-mêmes. Ces matrices sont appelées matrices élémentaires.

C) Matrices Booléennes et Vecteurs Globaux

L'objectif est maintenant d'exprimer l'intérieur de la somme en fonction non plus des extrémités de l'éléments en cours \underline{p}_e et $\underline{\delta p}_e$ mais des vecteurs globaux $\underline{\mathbb{P}}$ et $\underline{\delta \mathbb{P}}$.

En notant que on peut exprimer \underline{p}_e sur le premier élément en fonction de $\underline{\mathbb{P}}$ *via* :

$$\underline{p}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_e} \underline{\mathbb{P}}$$

De même il est possible d'exprimer $\underline{\delta p}_e^T = \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T$. En remplaçant dans (5), il vient :

$$\sum_e \left\{ \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T \underline{K}_e \underline{L}_e \underline{\mathbb{P}} \, d\Omega - k^2 \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T \underline{M}_e \underline{L}_e \underline{\mathbb{P}} \, d\Omega \right\} = - \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}} \quad (6)$$

Si on considère un problème 1D de longueur L (tel que présenté en figure 3), alors le second membre peut s'écrire :

$$- \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma = - \left(\nabla p \Big|_L \underline{\delta \mathbb{P}}_N - \nabla p \Big|_0 \underline{\delta \mathbb{P}}_0 \right)$$

Comme ni $\underline{\mathbb{P}}$ ni $\underline{\delta \mathbb{P}}$ ne dépendent de l'élément, il est possible de les sortir de la somme, qui est ensuite distribuée sur les deux termes comme suit :

$$\underline{\delta \mathbb{P}}^T \left[\underbrace{\sum_e \left\{ \underline{L}_e^T \underline{K}_e \underline{L}_e \right\}}_{\underline{K}} - k^2 \underbrace{\sum_e \left\{ \underline{L}_e^T \underline{M}_e \underline{L}_e \right\}}_{\underline{M}} \right] \underline{\mathbb{P}} = - \left(\nabla p \Big|_L \underline{\delta \mathbb{P}}_N - \nabla p \Big|_0 \underline{\delta \mathbb{P}}_0 \right), \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}}$$

Le fait que cette expression soit valable pour tout $\underline{\delta \mathbb{P}}$, implique :

¹Le nombre de soulèvements correspondant à l'ordre tensoriel de la quantité.

$$\left[-\underline{\underline{K}} + k^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\underline{P}} = \begin{Bmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\nabla p|_L \end{Bmatrix} \quad (7)$$

II. Fonctions d'interpolation classiques

La précision et l'efficacité de la méthode des éléments finis repose grandement sur le choix judicieux des fonctions de forme φ .

Communément, le choix, pour des problèmes en traction/compression, se fait entre des fonctions linéaires et quadratiques.

Il est nécessaire, lors de la comparaison de ces deux alternatives, de prendre en compte non pas le nombre d'éléments mais bien le nombre de degrés de liberté². En effet, le concept derrière l'interpolation avec des polynômes est toujours le même : pour un polynôme de degré N , il faut $N + 1$ point.

A) Éléments Linéaires

La première interpolation possible utilise des fonctions affines. L'idée est alors d'écrire :

$$p = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x)$$

Avec $p_{1,2}$ les valeurs du champ à chaque extrémité $x_{1,2}$ et $\varphi_{1,2}$ nulles en $x_{2,1}$ et égales à l'unité en $x_{1,2}$. Ainsi, les deux fonctions ont le profil présenté en figure 1.

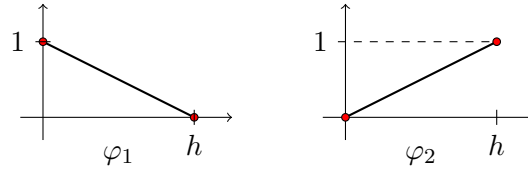


Figure 1: Présentation des fonctions de forme linéaires utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

Pour un élément de longueur h , les expressions des fonctions de forme linéaires sont donc :

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{h} \quad ; \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{h}$$

B) Éléments quadratiques

Une deuxième possibilité est d'utiliser une interpolation quadratique (polynôme de degré 2). Pour ce faire, en plus des deux points précédemment considérés, il faudra en utiliser un

²Points où sont calculées les valeurs des champs utilisées ensuite pour l'interpolation.

troisième situé au centre de l'élément. Les fonctions de formes sont alors au nombre de trois et le champ est approximé par :

$$p(x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + p_3\varphi_3(x)$$

Les expressions des fonctions d'ordre 2 sont données ci-après : elles sont calculées en utilisant le polynôme interpolateur de Lagrange. Les graphes sont présentés en figure 2.

$$\varphi_1(x) = \frac{(h-2x)(h-x)}{h^2} \quad , \quad \varphi_2(x) = \frac{-4x(x-h)}{h^2} \quad , \quad \varphi_3(x) = \frac{x(2x-h)}{h^2}$$

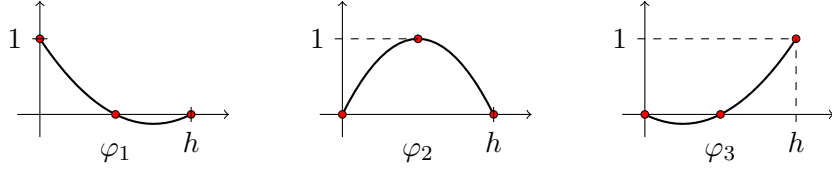


Figure 2: Présentation des fonctions de forme quadratiques utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

Avec 3 fonctions d'interpolation, les matrices élémentaires seront de taille 3 (comportant ainsi 9 éléments).

C) Note sur l'implémentation

La méthode des éléments finis fait appel aux intégrales des produits de fonction de forme.

Dans le cas où tous les éléments sont les mêmes, il est possible de calculer une seule fois les matrices élémentaires (à la main par exemple) et de réaliser l'assemblage à partir de ces patrons.

Il faut noter que les matrices élémentaires sont symétriques et que les symétries inhérentes aux fonctions de forme permettent de réduire grandement le nombre de calculs à effectuer : de 9 éléments dans la matrice élémentaire pour des éléments quadratiques, seuls 5 devront être calculés pour la remplir complètement.

Si toutefois l'objectif est d'étudier la convergence de la méthode, alors il faudra recalculer les fonctions pour les N itérations ou paramétrer les fonctions de forme avec un paramètre h .

Toujours est-il qu'il est aussi possible de s'épargner des calculs peu épanouissants en utilisant des techniques d'intégration numérique pour obtenir les valeurs des intégrales : dans la suite et les scripts utilisés pour obtenir les résultats ici, l'intégration est faite soit à la main — rare, ou plus généralement en utilisant la quadrature de Gauss.

III. Problème 1D

Dans cette partie, l'objectif est d'exprimer le problème de la propagation acoustique dans une cavité unidimensionnelle en utilisant le formalisme "éléments finis".

Le schéma du problème est présenté en figure 3.

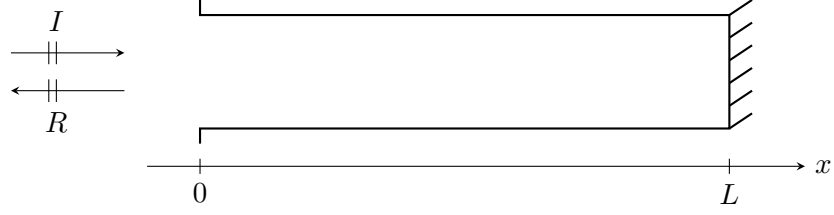


Figure 3: Schéma du problème de propagation dans une cavité acoustique 1D de longueur L .

A) Position du Problème

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ imposent :

$$\begin{cases} \nabla p|_{x=L} = 0 \\ p|_{x=0} = p_i + p_r \end{cases} \quad (8)$$

B) Solution par éléments finis

En se plaçant dans le formalisme éléments finis, il vient — d'après (12) :

$$[-\underline{\underline{K}} + k^2 \underline{\underline{M}}] \underline{\underline{\mathbb{P}}} = \begin{pmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\nabla p|_L \end{pmatrix} \quad (9)$$

En considérant la condition en limite en $x = L$, le second membre est simplifié :

$$[-\underline{\underline{K}} + k^2 \underline{\underline{M}}] \underline{\underline{\mathbb{P}}} = \begin{pmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

C) Prise en compte de l'excitation

Le problème est posé de sorte que l'entrée du résonateur est excitée par une onde plane se propageant vers les x croissants et que les interactions à l'interface produisent une onde plane réfléchie se propageant vers les x décroissants. Ainsi, en notant p_i l'onde incidente et p_r l'onde réfléchie :

$$\begin{cases} p_i(x) = 1e^{-jk_x x} \\ p_r(x) = Re^{+jk_x x} \end{cases} \quad (11)$$

La continuité des pressions et des vitesses normales en $x = 0$ amène :

$$p(0) = e^{-jk_x \times 0} + Re^{jk_x \times 0} \Leftrightarrow p'(0) = jk(R - 1)$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (12), il vient :

$$[\underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}}] \underline{\mathbb{P}} = \begin{Bmatrix} jk(R-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Il est alors intéressant de rassembler les inconnues sur la gauche de l'équation en introduisant le vecteur étendu suivant :

$$\underline{X} = [\underline{\mathbb{P}} \mid R]^T$$

Il est aussi nécessaire d'étendre la matrice de la partie gauche d'une colonne. Pour maintenir des dimensions cohérentes dans le système d'équations, il faudra enfin retranscrire la condition de continuité suivante sur la dernière ligne :

$$\underline{\underline{P}}_0 = 1 + R$$

soit :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & -jk \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right)}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \underline{\mathbb{P}} \\ R \end{Bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -jk \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (13)$$

La résolution se fait alors simplement sur un système de calcul matriciel :

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$$

D) Solution analytique

Afin d'apprécier la qualité de l'approximation par éléments finis, il est nécessaire de disposer d'une solution analytique. Le problème est ici posé de sorte que l'impédance en $x = L$ est connue (voir équation (14)).

$$Z_L = Z(L) \rightarrow \infty \quad (14)$$

En utilisant la théorie des lignes (et en particulier la formule de l'impédance ramenée), il vient (avec $Z_c = \rho c$ l'impédance caractéristique) :

$$\begin{aligned} Z_i = Z(0) &= Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(kL)}{Z_c + jZ_L \tan(kL)} \\ &= Z_c \frac{Z_L}{Z_L} \frac{1 + jZ_c/Z_L \tan(kL)}{Z_c/Z_L + j \tan(kL)} \\ Z_i &\underset{Z_L \rightarrow \infty}{\approx} Z_c \frac{1}{j \tan(kL)} \end{aligned} \quad (15)$$

En considérant une onde incidente d'amplitude 1 (en incidence normale) générant, à l'interface, une onde transmise (dans le résonateur) et une onde réfléchie d'amplitude R (voir le système d'équations (11)), puis en écrivant les conditions de continuité, il vient :

$$R = \frac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c}$$

En remplaçant (15) dans l'équation précédente :

$$R = \frac{Z_c}{j \tan(k * L)} \quad (16)$$

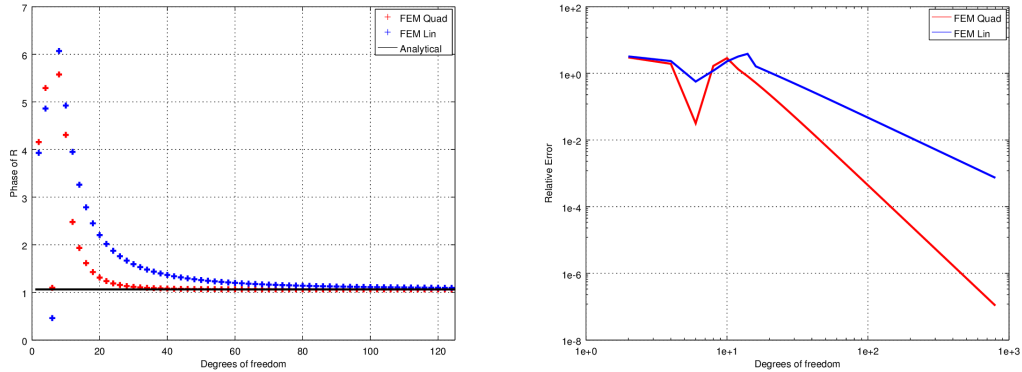
E) Convergence

La suite compare la phase du coefficient de réflexion analytique et celle du coefficient calculé par éléments finis. L'étude vise à la comparaison des courbes de convergence pour des éléments linéaires et quadratiques.

La fonction d'erreur utilisée mesure l'erreur sur la phase du coefficient de réflexion :

$$err = \frac{|\arg(R) - \arg(\hat{R})|^2}{|\arg(R)|^2} \quad (17)$$

Les résultats sont présentés en figure 4.



(a) Valeurs de $\arg(R)$ en fonction du nombre de degrés de liberté. (b) Valeurs des fonctions d'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté.

Figure 4: Résultat des simulations. En rouge, les résultats pour des éléments quadratiques en bleu pour des éléments linéaires : on remarque une meilleure convergence des premiers (voir figure 4b). Dans les deux cas, la valeur théorique est correctement approchée si l'on augmente le nombre d'éléments.

Le passage d'éléments linéaires à des éléments quadratiques augmente d'un ordre la convergence de la méthode, comme le montre le diagramme de convergence (figure 4b).

Il faut noter toutefois que dans un cas comme dans l'autre, l'approximation tend vers la solution exacte en augmentant le nombre d'éléments.

Une autre limite apparaît lorsqu'est considérée l'influence de la fréquence : en effet, pour une bonne précision de l'approximation, il est nécessaire de disposer d'au moins 2

éléments par longueur d'onde : les méthodes par éléments finis sont donc très gourmandes aux hautes fréquences de part la nécessité de disposer d'un maillage toujours plus fin et donc d'augmenter drastiquement la taille des structures de donnée.

Part II

Méthode de Galerkin Discontinue avec Ondes Planes

I. Généralités

Soit un milieu de propagation où sont valable les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} j\omega\rho v = -\nabla p \\ p = -\rho c^2 \nabla u \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} j\omega\rho v = -\nabla p \\ j\omega p = -\rho c^2 \nabla v \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow j\omega \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho c^2 & 0 \end{bmatrix} \nabla \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(j\omega + \underline{\underline{A}} \frac{\partial}{\partial x} \right) \underline{u} = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

L'idée est alors de découpler les équations précédentes en diagonalisant $\underline{\underline{A}}$, il vient :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}} \quad , \quad \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{Q}}^{-1}$$

En posant

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \underline{u} \tag{19}$$

l'équation (18) devient :

$$j\omega \underline{\tilde{u}} + \underline{\underline{\Lambda}} \nabla \underline{\tilde{u}} = 0$$

En isolant les valeurs positives et négatives de $\underline{\underline{\Lambda}}$ (notées $\Lambda^{+,-}$) ainsi que les vecteurs associés $\underline{\underline{P}}^{+,-}$ et $\underline{\underline{Q}}^{+,-}$, il est possible d'écrire :

$$\begin{cases} \tilde{u}^+ = \underline{\underline{Q}}^+ \underline{u} \\ \tilde{u}^- = \underline{\underline{Q}}^- \underline{u} \end{cases} \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{\underline{P}}^+ \tilde{u} + \underline{\underline{P}}^- \tilde{u} \tag{20}$$

Formulation variationnelle En utilisant la formulation variationnelle et une intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \underline{v}^T \left(j\omega + \underline{\underline{F}} \nabla \right) \underline{u} d\Omega &= 0 \quad , \quad \forall \underline{v} \\
 - \left(\int_{\Omega} j\omega \underline{v} + \underline{\underline{A}}^T \nabla \underline{v} \right)^T \underline{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{v}^T \underline{\underline{A}} \underline{u} d\Gamma &= 0 \quad , \quad \forall \underline{v}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Nota Bene Le symbole \cdot^T représente une transposition Hermitienne.

L'objectif est alors de choisir le champ de test \underline{v} permettant d'annuler l'intégrale sur Ω :

$$\left(j\omega + \underline{\underline{A}}^T \nabla \right) \underline{v} = 0 \tag{22}$$

De toute l'équation (21), il reste alors :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{v}^T \underline{\underline{A}} \underline{u} d\Gamma = 0 \quad , \quad \forall \underline{v} \tag{23}$$

II. Discrétisation des champs

Le choix des fonctions test est un enjeu prépondérant dans la méthode de Galerkin discontinue. La suite cherche à discrétiser les champs de tests *via* une base d'ondes planes, comme proposé par Gabard *et al.*[GO].

Les expressions des champs discrétisés sont tirées directement de la résolution des équations différentielles (18) et (??). Il faut noter que le problème à résoudre pour \underline{v} est l'adjoint de celui à résoudre pour \underline{u} (la matrice \underline{A} n'étant pas symétrique).

Les solutions recherchés sont donc composées d'une somme d'ondes planes :

$$\xi(x) = \xi_+ e^{-jkx} + \xi_- e^{+jkx}$$

La solution pour \underline{u} est donc de la forme :

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-jkx} & 0 \\ 0 & e^{+jkx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-jkx}/Z_0 & -e^{+jkx}/Z_0 \\ e^{-jkx} & e^{+jkx} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_u(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}}_{\underline{U}} \quad (24)$$

Le champ de test \underline{v} est solution du problème adjoint, la solution pour \underline{v} est donc de la forme

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} Z_0 & -Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-jkx} & 0 \\ 0 & e^{+jkx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta A \\ \delta B \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_0 e^{-jkx} & -Z_0 e^{+jkx} \\ e^{-jkx} & e^{+jkx} \end{bmatrix}}_{\underline{U}_v(x)} \underbrace{\begin{Bmatrix} \delta A \\ \delta B \end{Bmatrix}}_{\underline{V}} \quad (25)$$

III. Problème 1D

En repartant de (23) et en considérant un problème 1D (voir figure 3), il vient :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{v}^T \underline{A} \underline{u} d\Gamma = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\underline{v}^T(L) \underline{A} \underline{u}(L)}_{\text{droite}} - \underbrace{\underline{v}^T(0) \underline{A} \underline{u}(0)}_{\text{gauche}} = 0, \quad \forall \underline{v} \quad (26)$$

A) Condition limite à droite

A droite, la paroi rigide implique :

$$\begin{aligned} v(L) = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \tilde{u}^+ = -\tilde{u}^- \Leftrightarrow \tilde{u}^+ = R^- \tilde{u}^- \end{aligned}$$

En utilisant maintenant (20), et en réutilisant le résultat précédent :

$$\begin{aligned} \underline{u} = \underline{P}^+ \tilde{u}^+ + \underline{P}^- \tilde{u}^- &\Leftrightarrow \underline{u} = \underline{P}^+ \tilde{u}^+ + \underline{P}^- R^- \tilde{u}^+ \\ &\Leftrightarrow \underline{u} = \left(\underline{P}^+ + \underline{P}^- R^- \right) \underline{Q}^+ u \end{aligned} \quad (27)$$

B) Condition limite à gauche

A gauche, les conditions de continuité impliquent :

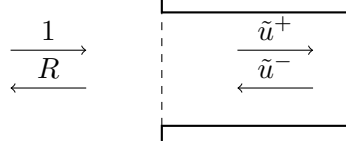


Figure 5: Interface à gauche du problème.

$$P \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{u}^+ = 1 \\ \tilde{u}^- = R = \underline{Q}^- \underline{u} \end{cases}$$

En ré-exprimant u , il vient :

$$\underline{u} = \underline{P}^+ \tilde{u}^+ + \underline{P}^- \tilde{u}^- \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{P}^+ + \underline{P}^- \underline{Q}^- \underline{u} \quad (28)$$

En remettant (27) et (28) dans (26) et en utilisant les expressions discrétisées des champs, il vient :

$$\mathbb{V}^T \left[\underline{\underline{U}}_v^T(L) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}} (\underline{P}^+ + \underline{P}^- R^-) \underline{Q}^+ \underline{U}_u(L) - \underline{U}_u(0) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}} \underline{P}^- \underline{Q}^- \underline{U}_u(0) \right] \mathbb{U} \\ = -\mathbb{V}^T \underline{\underline{U}}_v^T(0) \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}} \underline{P}^+ , \quad \forall \mathbb{V} \quad (29)$$

Part III

Couplage – Caractéristiques et Conditions aux Limites

I. Retour sur les conditions aux limites en MEF

Dans cette section, l'objectif est de proposer une formulation de la condition en limite en $x = 0$ du problème présenté en figure 6 qui n'impose pas de rajouter une ligne au système d'équations de la FEM.

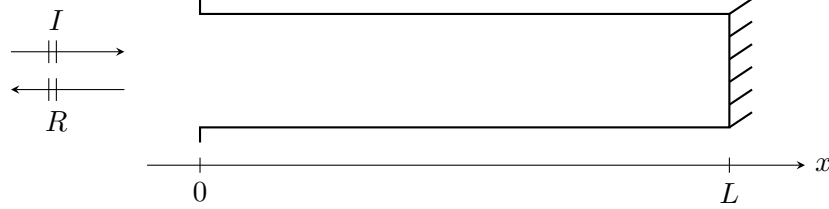


Figure 6: Schéma du problème de propagation dans une cavité acoustique 1D de longueur L.

Pour ce problème et en utilisant le formalisme des éléments finis, le système à résoudre avant l'application de la condition limite en $x = 0$ mais après celle de la condition en $x = L$ est tel que présenté en (10) :

$$[-\underline{\underline{K}} + k^2 \underline{\underline{M}}] \underline{\underline{P}} = \begin{Bmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

A) Utilisation de la formulation de Galerkin

Sous le formalisme de la méthode de Galerkin, il vient :

$$j\omega \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho c^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} \Leftrightarrow j\omega \underline{u} + \underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}} \underline{u} = 0 \quad (31)$$

Où $\underline{\underline{P}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{Q}}$ est une diagonalisation de $\underline{\underline{F}}$ telle que :

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0 & -Z_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 Z_0 \\ 1/2 & -1/2 Z_0 \end{bmatrix}$$

En posant $\tilde{\underline{u}} = \underline{\underline{Q}} \underline{u}$, le système (31) s'écrit simplement $j\omega \tilde{\underline{u}} + \underline{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{u}} = 0$ et les conditions aux limites peuvent s'écrire sous la forme

$$\underline{\underline{C}} \underline{u} = \underline{s} \Leftrightarrow \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}} \tilde{\underline{u}} = \underline{s}$$

B) Condition en $x = 0$

Les conditions de continuité sur p et v permettent d'écrire :

$$\begin{cases} p(0) = 1 + R \\ v(0) = \frac{1}{Z_0}(1 - R) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix}$$

Soit, en insérant le produit PQ :

$$\begin{aligned} \underline{P} \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix}_0 &= \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix}_0 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2Z_0 \\ 1/2 & -1/2Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix}_0 &= \begin{bmatrix} 1/Z_0 & 0 \\ 0 & -1/Z_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Les relations d'intérêt sont donc :

$$\begin{cases} \tilde{u}_0^+ = 1/Z_0 \\ \tilde{u}_0^- = -R/Z_0 \end{cases} \quad (32)$$

C) Interpolation des caractéristiques

Le système (32) est écrit en fonction des caractéristiques $\tilde{u}^{+,-}$, et il conviendrait de l'exprimer en utilisant les fonctions de forme $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ introduites par la méthode des éléments finis.

Nota Bene Dans la suite de la démonstration, ne sont utilisés que des éléments linéaires pour alléger les calculs. Le concept est exactement le même pour des éléments quadratiques.

Ainsi, il vient³ :

$$p(0) = \varphi_1(0)\mathbb{P}_1 + \varphi_2(0)\mathbb{P}_2 \quad \text{et} \quad v(0) = \frac{-1}{j\omega\rho} (\varphi_1'(0)\mathbb{P}_1 + \varphi_2'(0)\mathbb{P}_2)$$

Soit :

$$\begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix}_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\varphi_1'(0)}{j\omega\rho} & -\frac{\varphi_2'(0)}{j\omega\rho} \\ \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \end{bmatrix}}_W \begin{Bmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \end{Bmatrix}$$

En reprenant enfin la définition des $\tilde{u}^{+,-}$, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix}_0 = Q \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix}_0 = QW \begin{Bmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

En développant il vient notamment :

$$\tilde{u}_0^- = -\frac{1}{2Z_0} \left[\left(\varphi_1(0) + \frac{\varphi_1'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_1 + \left(\varphi_2(0) + \frac{\varphi_2'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_2 \right] \quad (34)$$

Finalement, la quantité d'intérêt est $\nabla p|_0$, accessible depuis $v(0)$ via l'équation d'Euler. D'après la définition des $\tilde{u}^{+,-}$:

³La seconde étant déduite de la première *via* l'équation d'Euler.

$$\begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix}_0 = W \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix}_0 \Leftrightarrow v = \tilde{u}_0^+ + \tilde{u}_0^- \quad (35)$$

En prenant \tilde{u}_0^+ tel que défini en (32) et \tilde{u}_0^- comme indiqué en (34) il vient :

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{2Z_0} \left[\left(\varphi_1(0) + \frac{\varphi_1'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_1 + \left(\varphi_2(0) + \frac{\varphi_2'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_2 \right] \\ \Leftrightarrow \nabla p \Big|_0 &= -jk - \frac{jk}{2} \left[\left(\varphi_1(0) + \frac{\varphi_1'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_1 + \left(\varphi_2(0) + \frac{\varphi_2'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_2 \right] \end{aligned}$$

En retranscrivant cette condition dans le système (30), il est alors possible de résoudre le problème sans faire apparaître R . Cette quantité servant (dans le cadre de ce document) de référence pour les comparaisons, il est bon de remarquer que R peut facilement être retrouvé en utilisant (34) et la seconde équation de (32).

D) Influence sur la convergence

La simulation présentée ici utilise des éléments quadratiques. En effet, cette méthode demandant de dériver les fonctions de forme, elle ne pourra qu'être désastreuse avec des fonctions d'interpolation linéaires.

En figure 7 est présenté l'évolution de l'erreur relative commise par l'approximation en fonction du nombre d'éléments.

La courbe noire représente l'erreur commise par la méthode classique, avec l'ajout du R aux inconnues. La courbe rouge présente l'erreur que commet la méthode basée sur les caractéristiques pour l'écriture des conditions aux limites. Il est à noter que l'utilisation de la formulation par caractéristiques semble donner de moins bons résultats : en effet, le fait de devoir dériver les fonctions de forme fait qu'un ordre de convergence est perdu.

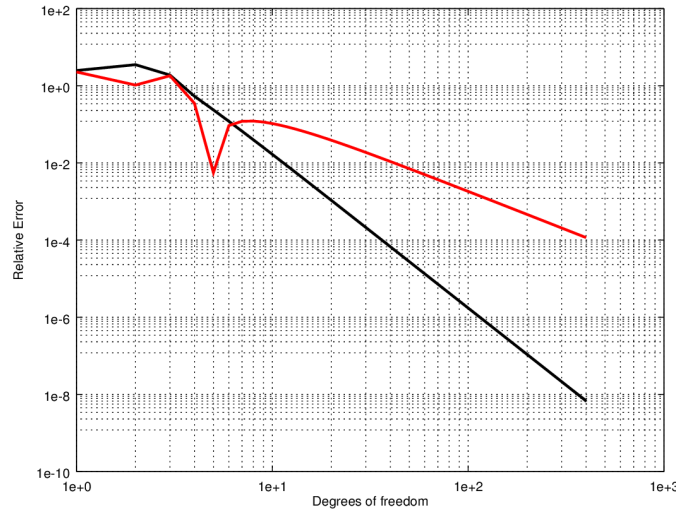


Figure 7: Erreur commise par les deux méthodes (ajout du coefficient de réflexion aux inconnues et caractéristiques) en fonction du nombre d'éléments utilisé. L'étude est réalisée uniquement pour des éléments quadratiques. Il faut noter que l'utilisation des caractéristiques donne de moins bons résultats dans ce cas.

Part IV

Amélioration de la convergence

Comme dit à la fin de la partie III, la formulation des conditions limites au moyen des caractéristiques conduit à la dérivation des fonctions de forme classiques. Ce point est clairement un désavantage pour cette méthode car elle force la perte d'un ordre de convergence.

Dans cette partie, un nouveau jeu de fonctions d'interpolation est proposé dans le but de pallier ce problème. Afin d'évaluer la pertinence de la proposition, la comparaison est réalisée entre des éléments quadratiques et la base proposée pour une formulation par caractéristiques d'une part et sans d'autre part.

I. Une nouvelle interpolation : les splines d'Hermite

Un moyen d'éviter la perte d'un ordre de convergence à l'utilisation de la méthode par caractéristiques serait d'utiliser un ensemble de fonctions d'interpolation permettant l'accès direct à la dérivée de la quantité.

L'interpolation par splines d'Hermite utilise 4 «degrés de libertés» répartis sur les deux extrémité du segment à interpoler : 2 pour le champ lui-même et 2 pour sa dérivée.

Le champ interpolé pour un segment e d'extrémités 1 et 2 est défini tel que :

$$p_e(x) = \underbrace{[h_{00}(x)|h_{10}(x)|h_{01}(x)|h_{11}(x)]}_H \begin{Bmatrix} p_1 \\ p'_1 \\ p_2 \\ p'_2 \end{Bmatrix}$$

Il en va de même pour v_e en remplaçant simplement les valeurs dans le vecteur colonne et p'_e ou v'_e en reprenant le vecteur colonne de leur homologue non dérivé et en dérivant les fonctions d'interpolation⁴.

Les expressions desdites fonctions sont explicitées en annexe A.

En suivant une méthode tout à fait analogue à celle développée pour le calcul des matrices élémentaires en partie I, il vient :

$$\underline{\underline{M_e}} = H^T H \quad , \quad \underline{\underline{K_e}} = H'^T H'$$

A) Formulation classique

La formulation classique revient, une fois de plus, à considérer le coefficient de réflexion R comme une inconnue.

Cette méthode ayant déjà été détaillée en partie I, elle ne sera pas ré-expliquée ici. Le fait de considérer une interpolation par splines d'Hermite change en effet l'implémentation mais pas les expressions fonctionnelles.

B) Méthode des caractéristiques

De manière tout à fait semblable à ce qui a été mis en place en partie III, il vient :

⁴Le vecteur est alors noté H' .

$$\begin{aligned}
p_e(0) &= \underbrace{[h_{00}(0)|h_{10}(0)|h_{01}(0)|h_{11}(0)]}_H \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_4 \end{pmatrix} \\
v_e(0) = -\frac{1}{j\omega\rho} \nabla p \Big|_0 &= -\frac{1}{j\omega\rho} \underbrace{[h_{00}(0)|h_{10}(0)|h_{01}(0)|h_{11}(0)]}_H \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le seul point important étant ici de bien garder en tête que le vecteur $\underline{\mathbb{P}}$ contient les valeurs du champ de pression aux points voulues entrelacées avec les valeurs de la dérivée de ce même champ.

En évaluant les polynômes et leurs dérivées en 0, et avec $\underline{u}_0 = \underline{Q}u_0$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{pmatrix}_0 &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2Z_0 \\ 1/2 & -1/2Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{j\omega\rho} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2Z_0 & -\frac{1}{2j\omega\rho} & 0 & 0 \\ -1/2Z_0 & -\frac{1}{2j\omega\rho} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{P}_3 \\ \mathbb{P}_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sachant que (32) et (35) sont toujours valables, il vient :

$$\begin{aligned}
v(0) &= \tilde{u}_0^+ + \tilde{u}_0^- = \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{2Z_0}\mathbb{P}_1 - \frac{1}{j\omega\rho}\mathbb{P}_2 \\
\nabla p \Big|_0 &= -j\omega\rho v(0) = -jk + \frac{jk}{2}\mathbb{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbb{P}_2
\end{aligned}$$

Cette expression est alors à remplacer dans le second membre de (10) et la résolution peut se faire par simple division.

II. Etude de convergence

Afin d'évaluer au mieux l'amélioration apportée par l'utilisation des splines d'Hermite, il est intéressant de comparer les résultats rendus par les éléments quadratiques d'une part et les splines d'Hermite d'autre part et ce pour la méthode classique et la méthodes basée sur les caractéristiques.

La convergence des différentes méthodes est évaluée en utilisant la formule d'erreur proposée en (17). Les résultats sont présentés en figure 8.

La figure permet de comparer différents couples de résultats.

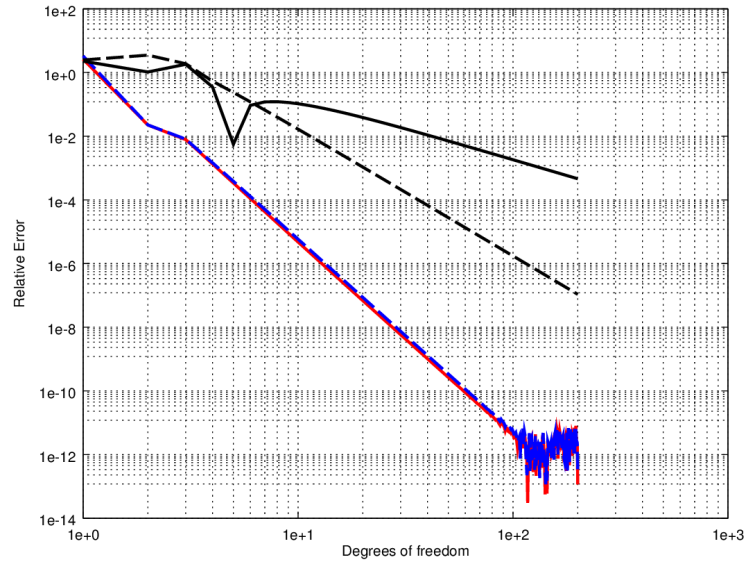


Figure 8: Erreur relative commise avec des éléments quadratiques en noir (pointillés, méthode classique ; plein, méthode des caractéristiques) et avec des splines d'Hermite (en rouge et bleu).

Entre éléments quadratiques et splines d'Hermite Dans tous les cas, les splines d'Hermite donnent de meilleurs résultats que les éléments quadratiques. Les courbes de convergence pour les méthodes basées sur des splines ont, en effet, un ordre de pente supplémentaire par rapport aux éléments quadratiques. De ce point de vue au moins, le passage à des splines d'Hermite est un gain.

Entre méthode classique et méthode par caractéristiques Alors que pour des éléments quadratiques la méthode classique convergeait plus vite, pour les splines d'Hermite, ce n'est pas le cas. Le fait de pouvoir immédiatement accéder à la dérivée de la pression comme inconnue du problème permet de s'affranchir de la perte d'un ordre de convergence lors du passage aux caractéristiques. Les résultats entre la méthode classique et la nouvelle méthode proposée pour une interpolation des champs par splines d'Hermite ont exactement la même alors. Si les courbes pour ce système d'interpolation sont observées de plus près (voir figure 9), il est notable que la courbe de convergence pour la méthode par caractéristiques est d'ailleurs en dessous de celle pour la méthode classique (ce qui suggère une erreur plus faible).

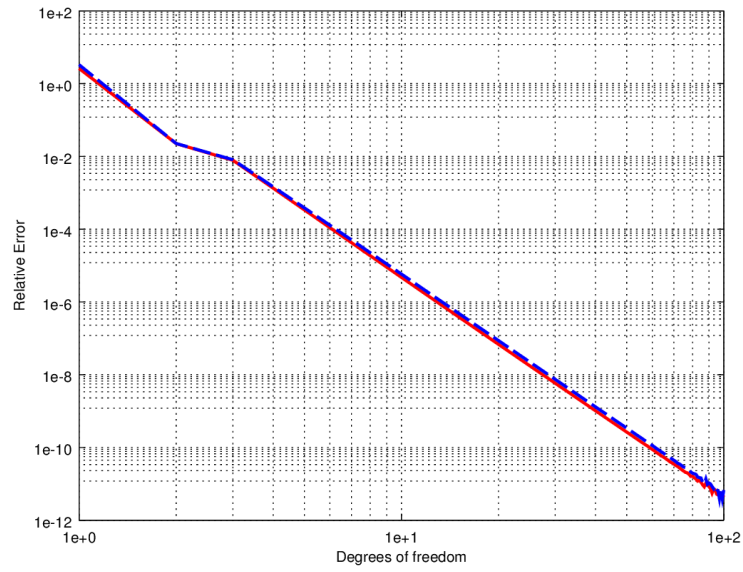


Figure 9: Erreur relative commise avec des splines d'Hermite (en rouge méthodes des caractéristiques et en bleu, méthode classiqu).

Conclusion

Bibliography

- [GGH11] G. Gabard, P. Gamallo, and T. Huttunen. A comparison of wave-based discontinuous galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(3):380–402, 2011.
- [GO] G. Gabard and Dazel O. A discontinuous galerkin method with plane waves for sound absorbing material.

Appendix A

Splines d'Hermite

Les fonctions utilisées pour l'interpolation par spline d'Hermite sont définies telles que[?]
:

$$\begin{cases} h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t \\ h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ h_{11}(t) = t^3 - t^2 \end{cases}$$

L'approximation sur le segment $(0, h)$ demande d'utiliser une version adaptée des polynômes :

$$\begin{cases} \tilde{h}_{00}(t) = 2(t/h)^3 - 3(t/h)^2 + 1 \\ \tilde{h}_{10}(t) = (t/h)^3 - 2(t/h)^2 + (t/h) \\ \tilde{h}_{01}(t) = -2(t/h)^3 + 3(t/h)^2 \\ \tilde{h}_{11}(t) = (t/h)^3 - (t/h)^2 \end{cases}$$