

Couplage des méthodes FEM et DGM

Rapport de projet

M1 Acoustique

Année universitaire 2014-2015

Remerciements

Sommaire

I	Fondamentaux	2
I.	Méthode des éléments finis	3
A)	Généralités	3
B)	Fonctions d'interpolation classiques	5
1.	Éléments Linéaires	5
2.	Éléments quadratiques	5
3.	Note sur l'implémentation	6
C)	Problème 1D	6
1.	Solution par éléments finis	7
2.	Solution analytique	8
3.	Convergence	9
II.	Méthode de Galerkin discontinue avec ondes planes	10
A)	Généralités	10
B)	Discretisation des champs	10
C)	Problème 1D	10
II	Le rapprochement	11
III.	Retour sur les conditions aux limites en MEF	12
A)	Méthode des caractéristiques	12
B)	Étude de convergence : splines cubiques	12
IV.	Rapport avec la MGD	12
III	Couplage	13
V.	Du point de vue des éléments finis	14
VI.	Du point de vue de Galerkin	14
VII.	Etude de convergence	14

Introduction

Première partie

Fondamentaux

I. Méthode des éléments finis

intro FEM

A) Généralités

Formulation Variationnelle Le problème est régi par l'équation d'Helmholtz sans source telle que présentée en (1) (avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde, c la célérité du son dans le milieu, et ω la pulsation).

$$(\Delta + k^2)p(x, \omega) = 0 \quad (1)$$

En faisant usage de la formulation variationnelle (avec δp le champ variationnel), puis d'une intégration par parties, le problème s'exprime comme en (2).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= 0, \quad \forall \delta p \\ - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \end{aligned} \quad (2)$$

Fonctions de forme Supposant que les champs p et δp sur un intervalle $[x_i, x_j]$ sont décomposables en une combinaison linéaire de fonctions φ_k (dites fonctions de forme) assorties des valeurs du champs à des points particuliers x_k du domaine, il vient (cas 1D) :

$$\begin{cases} p = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) p(x_k) \\ p' = \sum_{k=1}^N \varphi'_k(x) p(x_k) \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \delta p(x_k) \\ \delta p' = \sum_{k=1}^N \varphi'_k(x) \delta p(x_k) \end{cases} \quad (3)$$

Pour alléger les notations, on pose $\alpha_k \Leftrightarrow \alpha(x_k)$ où α est un champ et x_k un point, de même $\varphi_k \Leftrightarrow \varphi_k(x)$.

Il est de ré-écrire les équations de (3) de manière vectorielle comme présenté en (4).

$$p = [\varphi_1 | \cdots | \varphi_N] \begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{Bmatrix} = [\varphi_1 | \cdots | \varphi_N] \underline{p} \quad (4)$$

Et de même pour les champs p' , δp et $\delta p'$, on note $\underline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}'$ les vecteurs des fonctions de forme et de leur dérivées respectivement.

En utilisant cette dernière équation (4), en considérant une partition du domaine Ω de sorte que $\Omega = \sum_e \Omega_e$ où l'équation (1) est vérifiée sur chacune des parties de Ω et en utilisant la relation de Chasles, il vient (de (??)) :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \nabla p \nabla \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \delta p \, d\Omega &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \\ \Leftrightarrow \sum_e \left\{ - \int_{\Omega_e} \nabla p_e \nabla \delta p_e \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} p_e \delta p_e \, d\Omega \right\} &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \\ \Leftrightarrow \sum_e \left\{ - \int_{\Omega_e} \underline{\delta p_e^T} \underline{\varphi_e'^T} \underline{\varphi_e'} p_e \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega_e} \underline{\delta p_e^T} \underline{\varphi_e^T} \underline{\varphi_e} p_e \, d\Omega \right\} &= - \int_{\partial\Omega} \nabla p \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \end{aligned}$$

Dans les équations précédentes, les quantités indicées d'un e sont valables sur un élément. Les quantités soulignées une fois sont des vecteurs, celles soulignées deux fois des matrices¹. Après calcul des produits $\underline{\varphi}^T \underline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}'^T \underline{\varphi}'$ et passage des intégrales dans les matrices ainsi obtenues, il vient :

$$\Leftrightarrow \sum_e \left\{ -\underline{\delta p}^T \underline{K}_e \underline{p} + k^2 \underline{\delta p}^T \underline{M}_e \underline{p} \right\} = - \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \delta p \quad (5)$$

Avec :

$$\underline{M}_e = \begin{bmatrix} \int_{\Omega_e} \varphi_1^2 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega & \cdots & \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_N d\Omega \\ \int_{\Omega_e} \varphi_2 \varphi_1 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_2^2 d\Omega & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega_e} \varphi_N \varphi_1 d\Omega & & \cdots & \int_{\Omega_e} \varphi_N^2 d\Omega \end{bmatrix}$$

Et de même pour \underline{K}_e en considérant les dérivées $(\varphi'_1, \dots, \varphi'_N)$ des fonctions de forme plutôt que les fonctions elles-mêmes. Ces matrices sont appelées matrices élémentaires.

Matrices Booléennes et Vecteurs Globaux L'objectif est maintenant d'exprimer l'intérieur de la somme en fonction non plus des extrémités de l'éléments en cours \underline{p}_e et $\underline{\delta p}_e$ mais des vecteurs globaux $\underline{\mathbb{P}}$ et $\underline{\delta \mathbb{P}}$.

En notant que on peut exprimer \underline{p}_e sur le premier élément en fonction de $\underline{\mathbb{P}}$ via :

$$\underline{p}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_e} \underline{\mathbb{P}}$$

De même il est possible d'exprimer $\underline{\delta p}_e^T = \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T$. En remplaçant dans (5), il vient :

$$\sum_e \left\{ \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T \underline{K}_e \underline{L}_e \underline{\mathbb{P}} \, d\Omega - k^2 \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{L}_e^T \underline{M}_e \underline{L}_e \underline{\mathbb{P}} \, d\Omega \right\} = - \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma, \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}} \quad (6)$$

Si on considère un problème 1D de longueur L (tel que présenté en figure 3), alors le second membre peut s'écrire :

$$- \int_{\partial\Omega} \nabla p \, \delta p \, d\Gamma = - \left(\nabla p \Big|_L \underline{\delta \mathbb{P}}_N - \nabla p \Big|_0 \underline{\delta \mathbb{P}}_0 \right)$$

Comme ni $\underline{\mathbb{P}}$ ni $\underline{\delta \mathbb{P}}$ ne dépendent de l'élément, il est possible de les sortir de la somme, qui est ensuite distribuée sur les deux termes comme suit :

$$\underline{\delta \mathbb{P}}^T \left[\underbrace{\sum_e \left\{ \underline{L}_e^T \underline{K}_e \underline{L}_e \right\}}_{\underline{K}} - k^2 \underbrace{\sum_e \left\{ \underline{L}_e^T \underline{M}_e \underline{L}_e \right\}}_{\underline{M}} \right] \underline{\mathbb{P}} = - \left(\nabla p \Big|_L \underline{\delta \mathbb{P}}_N - \nabla p \Big|_0 \underline{\delta \mathbb{P}}_0 \right), \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}}$$

Le fait que cette expression soit valable pour tout $\underline{\delta \mathbb{P}}$, implique :

1. Le nombre de soulignements correspondant à l'ordre tensoriel de la quantité.

$$\left[-\underline{\underline{K}} + k^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\underline{P}} = \begin{Bmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\nabla p|_L \end{Bmatrix} \quad (7)$$

B) Fonctions d'interpolation classiques

La précision et l'efficacité de la méthode des éléments finis repose grandement sur le choix judicieux des fonctions de forme φ .

Communément, le choix, pour des problèmes en traction/compression, se fait entre des fonctions linéaires et quadratiques.

Il est nécessaire, lors de la comparaison de ces deux alternatives, de prendre en compte non pas le nombre d'éléments mais bien le nombre de degrés de liberté². En effet, le concept derrière l'interpolation avec des polynômes est toujours le même : pour un polynôme de degré N , il faut $N + 1$ point.

1. Éléments Linéaires

La première interpolation possible utilise des fonctions affines. L'idée est alors d'écrire :

$$p = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x)$$

Avec $p_{1,2}$ les valeurs du champ à chaque extrémité $x_{1,2}$ et $\varphi_{1,2}$ nulles en $x_{2,1}$ et égales à l'unité en $x_{1,2}$. Ainsi, les deux fonctions ont le profil présenté en figure 1.

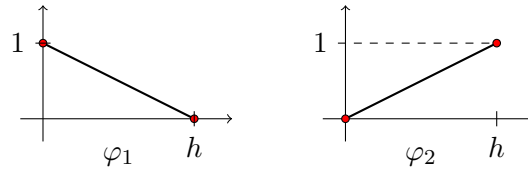


FIGURE 1 – Présentation des fonctions de forme linéaires utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

Pour un élément de longueur h , les expressions des fonctions de forme linéaires sont donc :

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{h} \quad ; \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{h}$$

2. Éléments quadratiques

Une deuxième possibilité est d'utiliser une interpolation quadratique (polynôme de degré 2). Pour ce faire, en plus des deux points précédemment considérés, il faudra en

2. Points où sont calculées les valeurs des champs utilisées ensuite pour l'interpolation.

utiliser un troisième situé au centre de l'élément. Les fonctions de formes sont alors au nombre de trois et le champ est approximé par :

$$p(x) = p_1\varphi_1(x) + p_2\varphi_2(x) + p_3\varphi_3(x)$$

Les expressions des fonctions d'ordre 2 sont données ci-après : elles sont calculées en utilisant le polynôme interpolateur de Lagrange. Les graphes sont présentés en figure 2.

$$\varphi_1(x) = \frac{(h-2x)(h-x)}{h^2} \quad , \quad \varphi_2(x) = \frac{-4x(x-h)}{h^2} \quad , \quad \varphi_3(x) = \frac{x(2x-h)}{h^2}$$

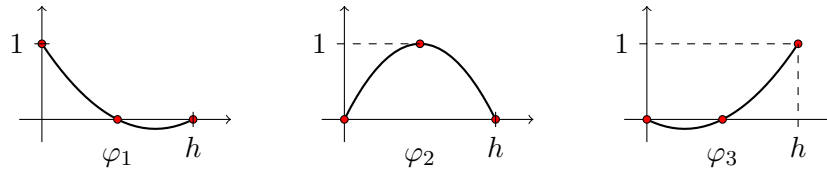


FIGURE 2 – Présentation des fonctions de forme quadratiques utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

Avec 3 fonctions d'interpolation, les matrices élémentaires seront de taille 3 (comportant ainsi 9 éléments).

3. Note sur l'implémentation

La méthode des éléments finis fait appel aux intégrales des produits de fonction de forme.

Dans le cas où tous les éléments sont les mêmes, il est possible de calculer une seule fois les matrices élémentaires (à la main par exemple) et de réaliser l'assemblage à partir de ces patrons.

Il faut noter que les matrices élémentaires sont symétriques et que les symétries inhérentes aux fonctions de forme permettent de réduire grandement le nombre de calculs à effectuer : de 9 éléments dans la matrice élémentaire pour des éléments quadratiques, seuls 5 devront être calculés pour la remplir complètement.

Si toutefois l'objectif est d'étudier la convergence de la méthode, alors il faudra recalculer les fonctions pour les N itérations ou paramétrer les fonctions de forme avec un paramètre h .

Toujours est il qu'il est aussi possible de s'épargner des calculs peu épanouissants en utilisant des techniques d'intégration numérique pour obtenir les valeurs des intégrales : dans la suite et les scripts utilisés pour obtenir les résultats ici, l'intégration est faite soit à la main — rare, ou plus généralement en utilisant la quadrature de Gauss.

C) Problème 1D

Dans cette partie, l'objectif est d'exprimer le problème de la propagation acoustique dans une cavité unidimensionnelle en utilisant le formalisme "éléments finis".

Le schéma du problème est présenté en figure 3.

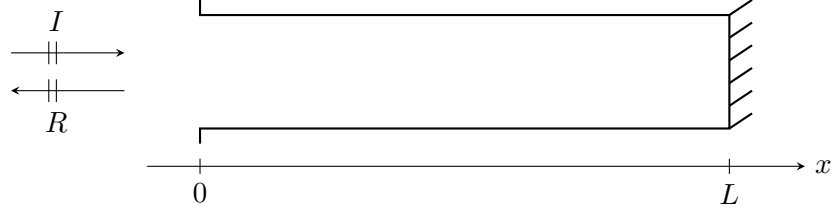


FIGURE 3 – Schéma du problème de propagation dans une cavité acoustique 1D de longueur L .

Position du Problème Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ imposent :

$$\begin{cases} \nabla p|_{x=L} = 0 \\ p|_{x=0} = p_i + p_r \end{cases} \quad (8)$$

1. Solution par éléments finis

En se plaçant dans le formalisme éléments finis, il vient — d'après (12) :

$$[-\underline{K} + k^2 \underline{M}] \underline{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\nabla p|_L \end{pmatrix} \quad (9)$$

En considérant la condition en limite en $x = L$, le second membre est simplifié :

$$[-\underline{K} + k^2 \underline{M}] \underline{\mathbb{P}} = \begin{pmatrix} \nabla p|_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Prise en compte de l'excitation Le problème est posé de sorte que l'entrée du résonateur est excitée par une onde plane se propageant vers les x croissants et que les interactions à l'interface produisent une onde plane réfléchie se propageant vers les x décroissants. Ainsi, en notant p_i l'onde incidente et p_r l'onde réfléchie :

$$\begin{cases} p_i(x) = 1e^{-jk_x x} \\ p_r(x) = Re^{+jk_x x} \end{cases} \quad (11)$$

La continuité des pressions et des vitesses normales en $x = 0$ amène :

$$p(0) = e^{-jk_x \times 0} + Re^{jk_x \times 0} \Leftrightarrow p'(0) = jk(R - 1)$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (12), il vient :

$$\left[\underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}} \right] \underline{\mathbb{P}} = \begin{Bmatrix} jk(R-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Il est alors intéressant de rassembler les inconnues sur la gauche de l'équation en introduisant le vecteur étendu suivant :

$$\underline{X} = [\underline{\mathbb{P}} \mid R]^T$$

Il est aussi nécessaire d'étendre la matrice de la partie gauche d'une colonne. Pour maintenir des dimensions cohérentes dans le système d'équations, il faudra enfin retranscrire la condition de continuité suivante sur la dernière ligne :

$$\underline{\underline{P}}_0 = 1 + R$$

soit :

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & -jk \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right)}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \underline{\mathbb{P}} \\ R \end{Bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -jk \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}}_{\underline{b}} \quad (13)$$

La résolution se fait alors simplement sur un système de calcul matriciel :

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{b}$$

2. Solution analytique

Afin d'apprécier la qualité de l'approximation par éléments finis, il est nécessaire de disposer d'une solution analytique. Le problème est ici posé de sorte que l'impédance en $x = L$ est connue (voir équation (14)).

$$Z_L = Z(L) \rightarrow \infty \quad (14)$$

En utilisant la théorie des lignes (et en particulier la formule de l'impédance ramenée), il vient (avec $Z_c = \rho c$ l'impédance caractéristique) :

$$\begin{aligned} Z_i = Z(0) &= Z_c \frac{Z_L + j Z_c \tan(kL)}{Z_c + j Z_L \tan(kL)} \\ &= Z_c \frac{Z_L}{Z_L} \frac{1 + j Z_c/Z_L \tan(kL)}{Z_c/Z_L + j \tan(kL)} \\ Z_i &\underset{Z_L \rightarrow \infty}{\approx} Z_c \frac{1}{j \tan(kL)} \end{aligned} \quad (15)$$

En considérant une onde incidente d'amplitude 1 (en incidence normale) générant, à l'interface, une onde transmise (dans le résonateur) et une onde réfléchie d'amplitude R (voir le système d'équations (11)), puis en écrivant les conditions de continuité, il vient :

$$R = \frac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c}$$

En remplaçant (15) dans l'équation précédente :

$$R = \frac{Z_c}{j \tan(k * L)} \quad (16)$$

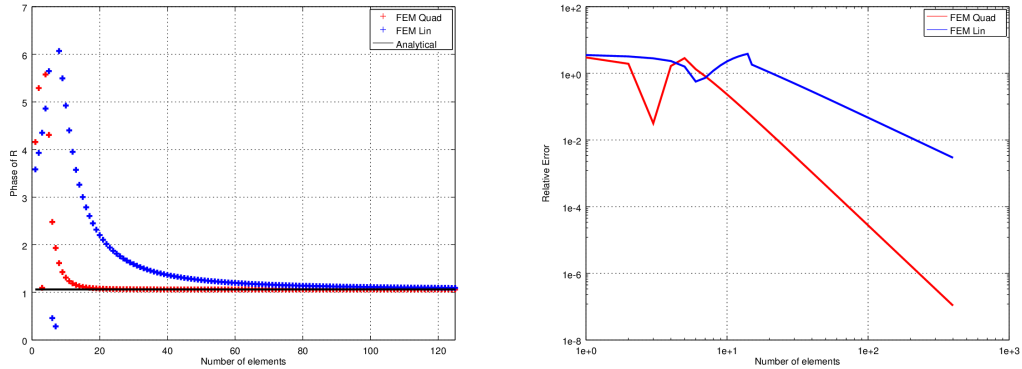
3. Convergence

La suite compare la phase du coefficient de réflexion analytique et celle du coefficient calculé par éléments finis. L'étude vise à la comparaison des courbes de convergence pour des éléments linéaires et quadratiques.

La fonction d'erreur utilisée mesure l'erreur sur la phase du coefficient de réflexion :

$$err = \frac{|\arg(R) - \arg(\hat{R})|^2}{|\arg(R)|^2}$$

Les résultats sont présentés en figure 4.



(a) Valeurs de $\arg(R)$ en fonction du nombre de degrés de liberté. (b) Valeurs des fonctions d'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté.

FIGURE 4 – Résultat des simulations. En rouge, les résultats pour des éléments quadratiques en bleu pour des éléments linéaires : on remarque une meilleure convergence des premiers (voir figure 4b). Dans les deux cas, la valeur théorique est correctement approchée si l'on augmente le nombre d'éléments.

Le passage d'éléments linéaires à des éléments quadratiques augmente d'un ordre la convergence de la méthode, comme le montre le diagramme de convergence (figure 4b).

Il faut noter toutefois que dans un cas comme dans l'autre, l'approximation tend vers la solution exacte en augmentant le nombre d'éléments.

Une autre limite apparaît lorsqu'est considérée l'influence de la fréquence : en effet, pour une bonne précision de l'approximation, il est nécessaire de disposer d'au moins 2

éléments par longueur d'onde : les méthodes par éléments finis sont donc très gourmandes aux hautes fréquences de part la nécessité de disposer d'un maillage toujours plus fin et donc d'augmenter drastiquement la taille des structures de donnée.

II. Méthode de Galerkin discontinue avec ondes planes

- A) Généralités**
- B) Discrétisation des champs**
- C) Problème 1D**

Deuxième partie

Le rapprochement

III. Retour sur les conditions aux limites en MEF

A) Méthode des caractéristiques

B) Étude de convergence : splines cubiques

IV. Rapport avec la MGD

Troisième partie

Couplage

V. Du point de vue des éléments finis

VI. Du point de vue de Galerkin

VII. Etude de convergence

Conclusion

Bibliographie

- [GGH11] G. Gabard, P. Gamallo, and T. Huttunen. A comparison of wave-based discontinuous galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(3) :380–402, 2011.
- [GO] G. Gabard and Dazel O. A discontinuous galerkin method with plane waves for sound absorbing material.