

# COUPLAGE FEM/DGM

## Analyse des méthodes et proposition de couplage

---

Mathieu Gaborit

Master 1 Acoustique

Université du Maine

O. Dazel — Enseignant-Chercheur

Année 2014-2015

- Méthodes numériques : enjeu majeur pour la simulation de systèmes complexes
- Grande diversité dans les méthodes disponibles
- Fortes spécificités pour chaque méthode
- Méthodes classiques : FEM, DGM, etc...

- Méthodes numériques : enjeu majeur pour la simulation de systèmes complexes
- Grande diversité dans les méthodes disponibles
- Fortes spécificités pour chaque méthode
- Méthodes classiques : FEM, DGM, etc...

Comment combiner deux méthodes pour profiter d'un maximum d'avantages ?

Problème de référence

Méthodes

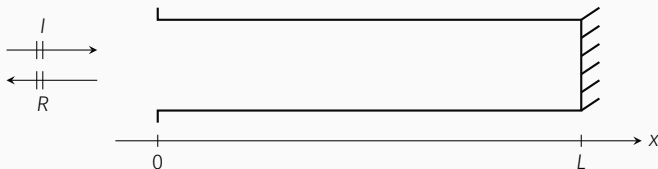
Couplage

Amélioration de la convergence

Et ensuite ?

## PROBLÈME DE RÉFÉRENCE

---



## Hypothèses

- Propagation 1D
- Convention temporelle  $e^{j\omega t}$
- Paroi en  $x = L$  infiniment rigide
- Entrée excitée par une onde plane d'amplitude unitaire
- Effets visco-thermiques négligés
- $err = |\arg(R) - \arg(\hat{R})|^2 / |\arg(R)|^2$

## MÉTHODES

---

$$(k^2[M] - [K]) \mathbb{P} = \int_{\partial\Omega} v \nabla p d\Gamma$$

## Généralités

- Formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation d'un maillage non-structuré
- Bonne modélisation de systèmes détaillés



$$(k^2[M] - [K]) \mathbb{P} = \int_{\partial\Omega} v \nabla p d\Gamma$$

## Généralités

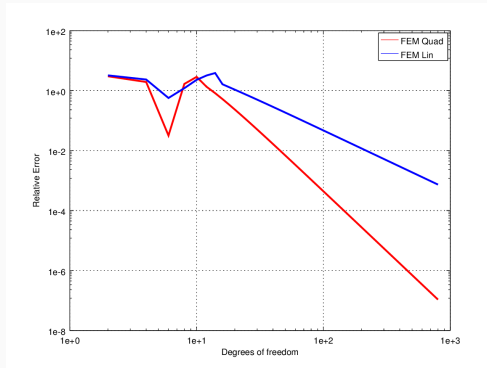
- Formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation d'un maillage non-structuré
- Bonne modélisation de systèmes détaillés

## Limites

- Augmentation du temps de calcul avec le nombre d'éléments
- Nécessité d'au moins 2 éléments par longueur d'onde

Influence du type d'éléments

## Influence du type d'éléments



Erreur relative en fonction du nombre de degrés de libertés  
pour des éléments **linéaires** et **quadratiques**

$$\int_{\Omega} \vec{v}^T (j\omega + A\nabla) \vec{u} d\Gamma = 0$$

## Généralités

- Basée sur la formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation des caractéristiques de l'EDP comme champ de test (Gabard & Dazel, 2015, *Int. J. Numer. Engng.*)
- Possibilité d'utiliser de grands éléments

$$\int_{\Omega} \vec{v}^T (j\omega + A\nabla) \vec{u} d\Gamma = 0$$

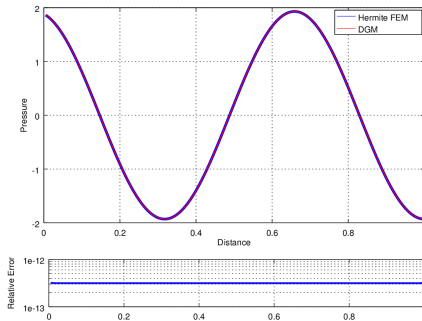
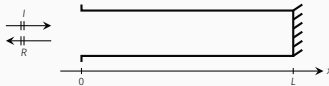
## Généralités

- Basée sur la formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation des caractéristiques de l'EDP comme champ de test (Gabard & Dazel, 2015, *Int. J. Numer. Engng.*)
- Possibilité d'utiliser de grands éléments

## Limites

- Quasi-insensible aux petits détails
- Incompatibles avec (ou mal adaptés à) certains problèmes

Solution exacte en 1D...



Pression acoustique dans la cavité de **référence** et calculée par **DGM** en fonction de la distance.

## COUPLAGE

---

## Classiquement

- $R$  comme une inconnue
- Vecteurs et matrices étendues
- Traduction exacte des équations de continuité



## Classiquement

- $R$  comme une inconnue
- Vecteurs et matrices étendues
- Traduction exacte des équations de continuité

$$\left( \begin{array}{cccc|c} & & & & -jk \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}} & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{P} \\ \hline R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -jk \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \right\}$$

### Caractéristiquement...

- Utilisation des caractéristiques pour exprimer la condition limite en  $x = 0$
- Besoin des fonctions de forme pour exprimer les champs
- Nécessité de dériver les fonctions de forme...

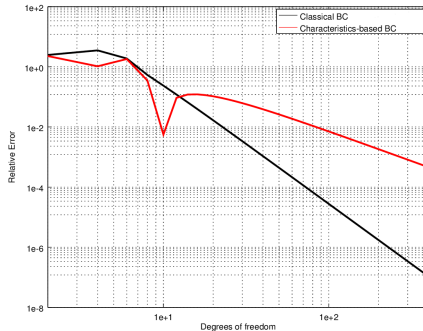
## Caractéristiquement...

- Utilisation des caractéristiques pour exprimer la condition limite en  $x = 0$
- Besoin des fonctions de forme pour exprimer les champs
- Nécessité de dériver les fonctions de forme...

$$\nabla p \Big|_0 = -jk - \frac{jk}{2} \left[ \left( \varphi_1(0) + \frac{\varphi_1'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_1 + \left( \varphi_2(0) + \frac{\varphi_2'(0)}{jk} \right) \mathbb{P}_2 \right]$$

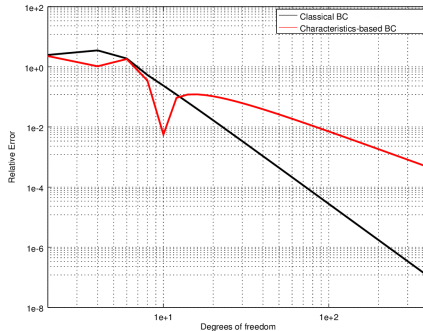
Dérivation des fonctions de forme :  
perte d'un ordre de convergence ?

Malheureusement... oui.



Erreur relative en fonction du nombre d'éléments pour la méthode classique et pour des **caractéristiques**

Malheureusement... oui.



Erreur relative en fonction du nombre d'éléments pour la méthode classique et pour des **caractéristiques**

Comment éviter ce (gros) désagrément ?

## AMÉLIORATION DE LA CONVERGENCE

---

**Question :** Existe-t-il une méthode d'interpolation donnant **directement accès** à la dérivée du champ ?

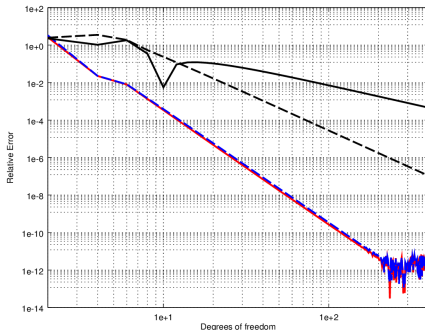
**Question :** Existe-t-il une méthode d'interpolation donnant **directement accès** à la dérivée du champ ?

**Réponse :** Oui ! L'interpolation par **splines d'Hermite** !

$$p_e(x) = \left[ \tilde{h}_{00}(x) | \tilde{h}_{10}(x) | \tilde{h}_{01}(x) | \tilde{h}_{11}(x) \right] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p'_1 \\ p_2 \\ p'_2 \end{Bmatrix}$$

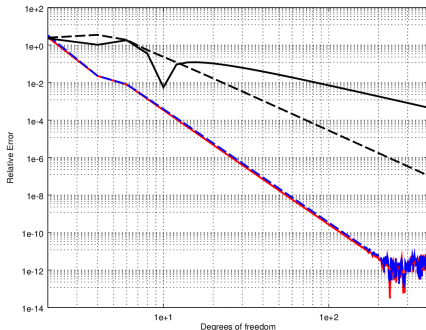


Words are good... show me the curve !



Erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté pour les méthodes classique (- -) et des caractéristiques (—) pour des éléments quadratiques et des **spline d'Hermite**

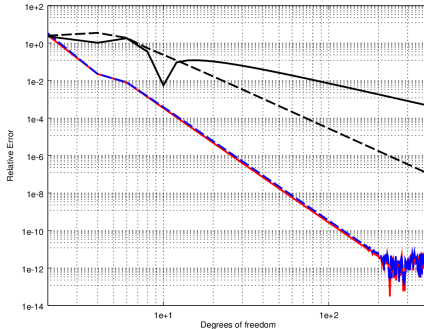
Words are good... show me the curve !



Erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté pour les méthodes classique ( - - ) et des caractéristiques ( — ) pour des éléments quadratiques et des spline d'Hermite

Ça converge !

Words are good... show me the curve !

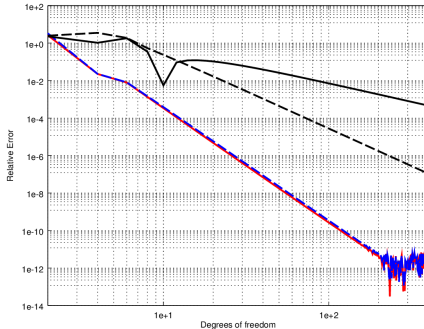


Erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté pour les méthodes classique (- -) et des caractéristiques (—) pour des éléments quadratiques et des **spline d'Hermite**

Ça converge !

Mieux que les éléments quadratiques...

Words are good... show me the curve !



Erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté pour les méthodes classique (- -) et des caractéristiques (—) pour des éléments quadratiques et des **spline d'Hermite**

Ça converge !

Mieux que les éléments quadratiques...pour les deux méthodes

ET ENSUITE ?

---

- Coupler plusieurs éléments DGM et FEM ensemble
- Analyser le comportement du couplage en 2D
- Appliquer la méthode à de vrais problèmes
- Analyser l'évolution du temps de calcul
- Auto-sélection de la méthode la plus adaptés à certains groupes d'éléments sur un maillage quelconque
- etc...

- Prise en main et analyse de 2 méthodes de calcul
- Introduction aux possibilités de couplage entre méthodes
- Travail sur un sujet de recherche intéressant
- Possibilités de poursuite du projet

- G. Gabard, O. Dazel, **A discontinuous Galerkin Method with Plane Waves for Sound Absorbing Materials**, 2015, *Int. J. Numer. Engng*, à paraître
- G. Gabard, P. Gamallo, T. Huttunen, **A comparison of wave-based discontinuous Galerkin, ultra-wave and least-square method for wave problems**, 2011, *Int. J. Numer. Engng*, vol. 85 no 3
- **Analyse Numérique : une approche mathématique**, M. Schatzman



MERCI !

DES QUESTIONS ?

`mathieu@matael.org`