

Couplage des méthodes FEM et DGM

Rapport de projet

M1 Acoustique

Année universitaire 2014-2015

Remerciements

Sommaire

I	Fondamentaux	2
I.	Formulation par éléments finis — Cas 1D	3
I.1.	Partie théorique	3
a)	Formulation par éléments finis	3
b)	Solution Analytique	7
c)	Passage aux éléments quadratiques	7
I.2.	Simulation	8
II.	Méthodes de Galerkin — Cas 1D	8
II.1.	Généralités	8
II	Le rapprochement	10
III.	Une histoire de réflexion	11
III.1.	Partie Théorique	11

Introduction

Première partie

Fondamentaux

I. Formulation par éléments finis — Cas 1D

Dans cette partie, l'objectif est d'exprimer le problème de la propagation acoustique dans une cavité unidimensionnelle en utilisant le formalisme "éléments finis".

Le schéma du problème est présenté en figure 1.

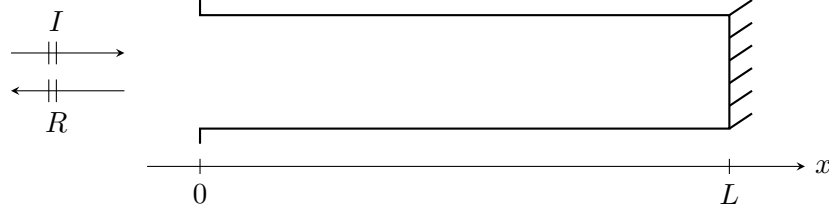


FIGURE 1 – Schéma du problème de propagation dans une cavité acoustique 1D de longueur L.

I.1. Partie théorique

a) Formulation par éléments finis

Position du Problème Le domaine considéré est noté Ω et sa frontière $\partial\Omega$.

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ imposent :

$$\begin{cases} \partial_n p|_{x=L} = 0 \\ p|_{x=0} = p_i + p_r \end{cases} \quad (1)$$

Formulation Variationnelle Le problème est régi par l'équation d'Helmholtz sans source telle que présentée en (2) (avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde, c la célérité du son dans le milieu, et ω la pulsation).

$$(\Delta + k^2)p(x, \omega) = 0 \quad (2)$$

En faisant usage de la formulation variationnelle (avec δp le champ variationnel), puis d'une intégration par parties, le problème s'exprime comme en (3).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta p \, \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \, \delta p \, d\Omega &= 0, \quad \forall \delta p \\ \int_{\Omega} p'' \, \delta p \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \, \delta p \, d\Omega &= 0, \quad \forall \delta p \\ \left[p' \, \delta p \right]_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} p' \, \delta p' \, d\Omega + k^2 \int_{\Omega} p \, \delta p \, d\Omega &= 0, \quad \forall \delta p \end{aligned} \quad (3)$$

Considérant les conditions aux limites, il est possible de simplifier le crochet comme suit.

$$\left[p' \, \delta p \right]_{\partial\Omega} = \underbrace{p'(L)\delta p(L)}_{=0 \because \partial_n p|_{x=L}=0} - p'(0)\delta p(0) \quad (4)$$

En ré-injectant (4) dans (3) et en ré-organisant les termes, il apparait l'équation ??.

$$\int_{\Omega} p' \delta p' d\Omega - k^2 \int_{\Omega} p \delta p d\Omega = -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \quad (5)$$

Fonctions de forme Supposant que les champs p et δp sur un intervalle $[x_i, x_j]$ sont décomposables en une combinaison linéaire de fonctions φ_k (dites fonctions de forme) assorties des valeurs du champs aux extrémités du domaine, il vient :

$$\begin{cases} p = \varphi_1(x)p(x_i) + \varphi_2(x)p(x_j) \\ p' = \varphi'_1(x)p_i + \varphi'_2(x)p(x_j) \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p = \varphi_1(x)\delta p(x_i) + \varphi_2(x)\delta p(x_j) \\ \delta p' = \varphi'_1(x)\delta p(x_i) + \varphi'_2(x)\delta p(x_j) \end{cases} \quad (6)$$

Pour alléger les notations, on pose $\alpha_k \Leftrightarrow \alpha(x_k)$ où α est un champ et x_k un point, de même $\varphi_k \Leftrightarrow \varphi_k(x)$.

Dans un premier temps, les fonctions utilisés $\varphi_{1,2}$ sont des fonctions linéaires présentant le profil présenté en figure 2. Les équations de ces fonctions sont données ci-après :

$$\varphi_1 = 1 - \frac{x}{h} ; \quad \varphi_2 = \frac{x}{h}$$

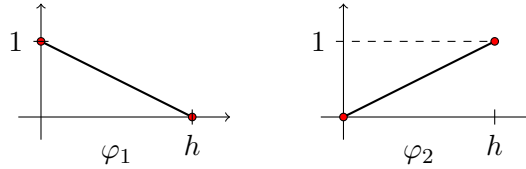


FIGURE 2 – Présentation des fonctions de forme linéaires utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

Il est alors possible de ré-écrire les équations de (6) de manière vectorielle comme présenté en (7).

$$\begin{cases} p = [\varphi_1 | \varphi_2] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = [\varphi_1 | \varphi_2] \underline{p} \\ p' = [\varphi'_1 | \varphi'_2] \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = [\varphi'_1 | \varphi'_2] \underline{p} \end{cases}, \quad \begin{cases} \delta p = [\varphi_1 | \varphi_2] \begin{Bmatrix} \delta p_i \\ \delta p_j \end{Bmatrix} = [\varphi_1 | \varphi_2] \underline{\delta p} \\ \delta p' = [\varphi'_1 | \varphi'_2] \begin{Bmatrix} \delta p_i \\ \delta p_j \end{Bmatrix} = [\varphi'_1 | \varphi'_2] \underline{\delta p} \end{cases} \quad (7)$$

En utilisant cette dernière équation (7), en considérant une partition du domaine Ω de sorte que $\Omega = \sum_e \Omega_e$ où l'équation (2) est vérifiée sur chacune des parties de Ω et en utilisant la relation de Chasles, il vient (de (5)) :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} p' \delta p' d\Omega - k^2 \int_{\Omega} p \delta p d\Omega = -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} p'_e \delta p'_e d\Omega - k^2 \int_{\Omega_e} p_e \delta p_e d\Omega \right\} &= -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T [\varphi'_1 | \varphi'_2]^T [\varphi'_1 | \varphi'_2] \underline{p}_e d\Omega \right. \\
&\quad \left. - k^2 \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T [\varphi_1 | \varphi_2]^T [\varphi_1 | \varphi_2] \underline{p}_e d\Omega \right\} = -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T \begin{bmatrix} \varphi_1'^2 & \varphi_1' \varphi_2' \\ \varphi_1' \varphi_2' & \varphi_2'^2 \end{bmatrix} \underline{p}_e d\Omega \right. \\
&\quad \left. - k^2 \int_{\Omega_e} \underline{\delta p}_e^T \begin{bmatrix} \varphi_1^2 & \varphi_1 \varphi_2 \\ \varphi_1 \varphi_2 & \varphi_2^2 \end{bmatrix} \underline{p}_e d\Omega \right\} = -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \underline{\delta p}_e^T \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega_e} \varphi_1'^2 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_1' \varphi_2' d\Omega \\ \int_{\Omega_e} \varphi_1' \varphi_2' d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_2'^2 d\Omega \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{K}}_e} \underline{p}_e \right. \\
&\quad \left. - k^2 \underline{\delta p}_e^T \underbrace{\begin{bmatrix} \int_{\Omega_e} \varphi_1^2 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega \\ \int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega & \int_{\Omega_e} \varphi_2^2 d\Omega \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{M}}_e} \underline{p}_e \right\} = -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \underline{\delta p}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{p}_e d\Omega - k^2 \underline{\delta p}_e^T \underline{\underline{M}}_e \underline{p}_e d\Omega \right\} &= -p'(0)\delta p(0), \quad \forall \delta p
\end{aligned}$$

(8)

Dans les équations précédentes, les quantités indicées d'un e sont valables sur un élément. Les quantités soulignées une fois sont des vecteurs, celles soulignées deux fois des matrices¹.

Matrices Booléennes et Vecteurs Globaux L'objectif est maintenant d'exprimer l'intérieur de la somme en fonction non plus des extrémités de l'éléments en cours \underline{p}_e et $\underline{\delta p}_e$ mais des vecteurs globaux $\underline{\mathbb{P}}$ et $\underline{\delta \mathbb{P}}$.

En notant que on peut exprimer \underline{p}_e sur le premier élément en fonction de $\underline{\mathbb{P}}$ via :

$$\underline{p}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_e} \underline{\mathbb{P}}$$

De même il est possible d'exprimer $\underline{\delta p}_e^T = \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{\underline{L}}_e^T$. En remplaçant dans (8), il vient :

$$\begin{aligned}
& \sum_e \left\{ \underline{\delta p}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{p}_e - k^2 \underline{\delta p}_e^T \underline{\underline{M}}_e \underline{p}_e \right\} = -p'(0)\underline{\delta \mathbb{P}}_0, \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}} \\
\Leftrightarrow \sum_e \left\{ \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{\underline{L}}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{L}}_e \underline{\mathbb{P}} d\Omega - k^2 \underline{\delta \mathbb{P}}^T \underline{\underline{L}}_e^T \underline{\underline{M}}_e \underline{\underline{L}}_e \underline{\mathbb{P}} d\Omega \right\} &= -p'(0)\underline{\delta \mathbb{P}}_0, \quad \forall \underline{\delta \mathbb{P}} \quad (9)
\end{aligned}$$

1. Le nombre de soulignements correspondant à l'ordre tensoriel de la quantité.

Comme ni $\underline{\mathbb{P}}$ ni $\delta\underline{\mathbb{P}}$ ne dépendent de l'élément, il est possible de les sortir de la somme, qui est ensuite distribuée sur les deux termes comme suit :

$$\delta\underline{\mathbb{P}}^T \left[\underbrace{\sum_e \{ \underline{L}_e^T \underline{K}_e \underline{L}_e \}}_{\underline{K}} - k^2 \underbrace{\sum_e \{ \underline{L}_e^T \underline{M}_e \underline{L}_e \}}_{\underline{M}} \right] \underline{\mathbb{P}} = -p'(0) \delta\underline{\mathbb{P}}_0, \quad \forall \delta\underline{\mathbb{P}}$$

Le fait que cette expression soit valable pour tout $\delta\underline{\mathbb{P}}$, implique :

$$\left[\underline{K} - k^2 \underline{M} \right] \underline{\mathbb{P}} = \begin{Bmatrix} -p'(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Prise en compte de l'excitation Le problème est posé de sorte que l'entrée du résonateur est excitée par une onde plane se propageant vers les x croissants et que les interactions à l'interface produisent une onde plane réfléchie se propageant vers les x décroissants. Ainsi, en notant p_i l'onde incidente et p_r l'onde réfléchie :

$$\begin{cases} p_i(x) = 1e^{-jk_x x} \\ p_r(x) = Re^{+jk_x x} \end{cases} \quad (11)$$

La continuité des pression et des vitesses normales en $x = 0$ amène :

$$p(0) = e^{-jk_x \times 0} + Re^{jk_x \times 0} \Leftrightarrow p'(0) = jk(R - 1)$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (12), il vient :

$$\left[\underline{K} - k^2 \underline{M} \right] \underline{\mathbb{P}} = \begin{Bmatrix} -jk(R - 1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Il est alors intéressant de rassembler les inconnues sur la gauche de l'équation en introduisant le vecteur étendu suivant :

$$\underline{X} = [\underline{\mathbb{P}} \mid R]^T$$

Il est aussi nécessaire d'étendre la matrice de la partie gauche d'une colonne. Pour maintenir des dimensions cohérentes dans le système d'équations, il faudra enfin retranscrire la condition de continuité suivante sur la dernière ligne :

$$\underline{P}_0 = 1 + R$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & jk \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & \underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}} & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array} \right)}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \underline{\underline{P}} \\ \underline{\underline{R}} \end{array} \right\}}_{\underline{\underline{X}}} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} jk \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}}_{\underline{\underline{b}}} \quad (13)$$

La résolution se fait alors simplement sur un système de calcul matriciel :

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{b}}$$

b) Solution Analytique

Afin d'apprécier la qualité de l'approximation par éléments finis, il est nécessaire de disposer d'une solution analytique. Le problème est ici posé de sorte que l'impédance en $x = L$ est connue (voir équation (14)).

$$Z_L = Z(L) \rightarrow \infty \quad (14)$$

En utilisant la théorie des lignes (et en particulier la formule de l'impédance ramenée), il vient (avec $Z_c = \rho c$ l'impédance caractéristique) :

$$\begin{aligned} Z_i = Z(0) &= Z_c \frac{Z_L + jZ_c \tan(kL)}{Z_c + jZ_L \tan(kL)} \\ &= Z_c \frac{Z_L}{Z_L} \frac{1 + jZ_c/Z_L \tan(kL)}{Z_c/Z_L + j \tan(kL)} \\ Z_i &\underset{Z_L \rightarrow \infty}{\approx} Z_c \frac{1}{j \tan(kL)} \end{aligned} \quad (15)$$

En considérant une onde incidente d'amplitude 1 (en incidence normale) générant, à l'interface, une onde transmise (dans le résonateur) et une onde réfléchie d'amplitude R (voir le système d'équations (11)), puis en écrivant les conditions de continuité, il vient :

$$R = \frac{Z_i - Z_c}{Z_i + Z_c}$$

En remplaçant (15) dans l'équation précédente :

$$R = \frac{Z_c}{j \tan(k * L)} \quad (16)$$

c) Passage aux éléments quadratiques

Dans la section a), il était question d'interpoler les champs physiques par des fonctions linéaires, et ce sur chacun des éléments. D'une manière générale, l'utilisation de polynôme d'ordre supérieur à 1 donne de meilleurs résultats.

Du point de vue technique, le passage de polynômes d'ordre 1 à des polynômes d'ordre 2 passe par l'utilisation de la formule du polynôme interpolateur de Lagrange. Le gain d'un

ordre dans le polynôme est possible en ajoutant un point au centre de l'élément. Celui-ci ne fait pas partie du maillage à proprement parler (voir figure 3).

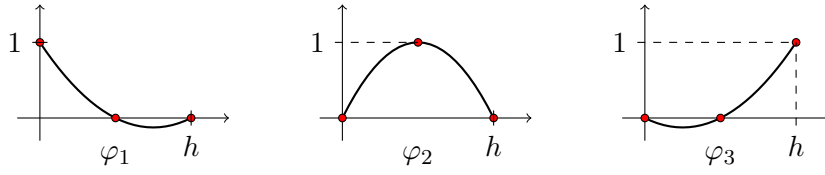


FIGURE 3 – Présentation des fonctions de forme utilisées. L'élément est ici considéré de longueur h .

De cette manière, les polynômes utilisés sont les suivants :

$$\varphi_1 = \frac{(h-2x)(h-x)}{h^2}, \quad \varphi_2 = \frac{-4x(x-h)}{h^2}, \quad \varphi_3 = \frac{x(2x-h)}{h^2}$$

Dans le reste des calculs, le passage aux éléments quadratiques agrandit les matrices élémentaires (de 2×2 à 3×3), les calculs desdites matrices sont alors réalisés par intégration numérique². Par extension, ce changement d'ordre fait aussi varier la taille de la matrice $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}}$ qui passe de $(N+1)^2$ valeurs³ à $(2N+1)^2$ valeurs. Les vecteurs \underline{X} et \underline{b} sont aussi adaptés en fonction de la nouvelle taille du système.

I.2. Simulation

L'équation (12) est facilement implémentable dans un système de calcul matriciel (ici, GNU/Octave et plus rarement MATLAB[®] sont utilisés).

La suite compare la phase du coefficient de réflexion analytique et celle du coefficient calculé par éléments finis.

Les résultats sont présentés en figure 4.

Le passage d'éléments linéaires à des éléments quadratiques augmente d'un ordre la convergence de la méthode, comme le montre le diagramme de convergence (figure ??).

Il faut noter toutefois que dans un cas comme dans l'autre, l'approximation tend vers la solution exacte en augmentant le nombre d'éléments.

Une autre limite apparaît lorsqu'est considérée l'influence de la fréquence : en effet, pour une bonne précision de l'approximation, il est nécessaire de disposer d'au moins 2 éléments par longueur d'onde : les méthodes par éléments finis sont donc très gourmandes aux hautes fréquences de part la nécessité de disposer d'un maillage toujours plus fin et donc d'augmenter drastiquement la taille des structures de donnée.

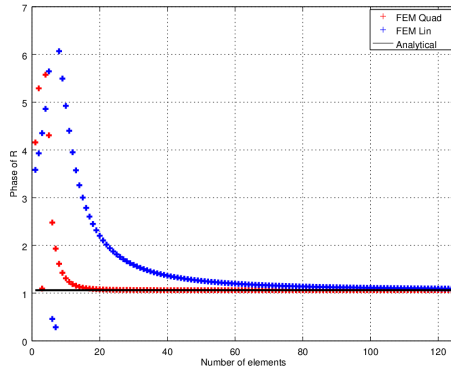
II. Méthodes de Galerkin — Cas 1D

II.1. Généralités

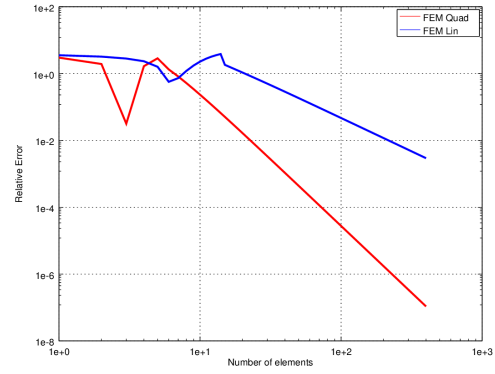
Parmi les méthodes d'analyse numérique et de calcul, les méthodes basées sur la discrétisation des champs sont nombreuses.

2. Ici, en utilisant la quadrature de Gauss et 4 points.

3. Rappel : $\underline{\underline{A}}$ est carrée.



(a) Point 1



(b) Point 2

FIGURE 4 – Résultat des simulations. En rouge, les résultats pour des éléments quadratiques en bleu pour des éléments linéaires : on remarque une meilleure convergence des premiers (voir figure 4b). Dans les deux cas, la valeur théorique est correctement approchée si l'on augmente le nombre d'éléments.

Contrairement aux méthodes par éléments finis ou différences finis, les méthodes de Galerkin se basent sur la discrétisation de la solution sur une base de fonctions d'essai judicieusement choisie.

Dans le cas présenté ici, la discrétisation utilise la méthode proposée par Gabard *et al.*[GGH11, GO]. Il s'agit de choisir comme base de fonctions les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles.

Deuxième partie

Le rapprochement

III. Une histoire de réflexion

Dans cette section, l'objectif est de proposer une formulation de la condition en limite en $x = 0$ du problème présenté en figure 5 qui n'impose pas de rajouter une ligne au système d'équations de la FEM.

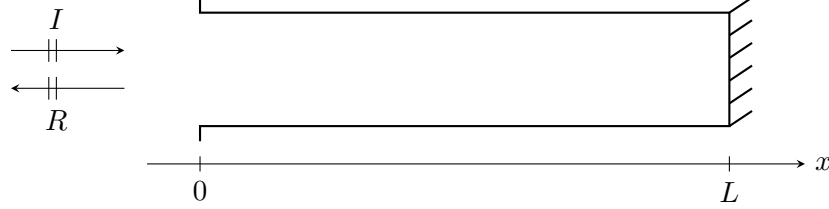


FIGURE 5 – Schéma du problème de propagation dans une cavité acoustique 1D de longueur L .

III.1. Partie Théorique

L'idée est ici de faire apparaître le vecteur \underline{u} utilisé pour la DGM dans le système d'équations (17) régissant le système d'une part et d'exprimer, d'autre part, ce même vecteur avec les fonction de forme de la FEM et les points de calculs des champs associés.

Dans la suite, le système est considéré unidimensionnel ($\nabla = \frac{d}{dx}$).

$$\begin{cases} -\nabla p = j\omega\rho v \\ -\rho c^2 \nabla v = j\omega p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j\omega v = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \\ j\omega p = -\rho c^2 \frac{dv}{dx} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow j\omega \begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/\rho \\ \rho c^2 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{F}}} \frac{d}{dx} \underbrace{\begin{Bmatrix} v \\ p \end{Bmatrix}}_{\underline{u}} \\ &\Leftrightarrow \left(j\omega + \underline{\underline{F}} \frac{d}{dx} \right) \underline{u} = \underline{0} \end{aligned} \quad (18)$$

Pour découpler les équations, il est alors judicieux de diagonaliser $\underline{\underline{F}}$, il vient alors (avec $Z_0 = \rho c$) :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{W}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z_0 & -Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 & 1 \\ -Z_0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2Z_0} \quad (19)$$

En remplaçant (19) dans (18), il est alors possible de faire apparaître le vecteur $\tilde{\underline{u}}$:

$$\begin{aligned} (18) &\Leftrightarrow j\omega \underline{u} + \underline{\underline{W}} \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{W}}^{-1} \underline{u} = 0 \\ &= j\omega \underline{\underline{W}}^{-1} + \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{W}}^{-1} \underline{u} = 0 \\ &= j\omega \tilde{\underline{u}} + \underline{\underline{\Lambda}} \tilde{\underline{u}} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Avec $\tilde{\underline{u}}$ tel que défini en (21).

$$\tilde{\underline{u}} = \underline{\underline{W}}^{-1} \underline{u} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^+ \\ \tilde{u}^- \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Ce vecteur est en fait le vecteur des caractéristiques de l'équation (18).

Conditions en $x = 0$ La continuité des pressions acoustiques et vitesses normales à l'entrée du résonateur permet d'écrire le système de conditions (22).

$$\begin{cases} p(0) = 1 + R \\ v(0) = \frac{1}{\rho c}(1 - R) = \frac{1}{Z_0}(1 - R) \end{cases} \quad (22)$$

En notant \underline{u}_0 le vecteur \underline{u} précédemment introduit pris à la position $x = 0$, il vient :

$$\underline{\underline{C}}\underline{u}_0 = \underline{\underline{C}}' \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Avec les matrices $\underline{\underline{C}}$ et $\underline{\underline{C}}'$ telles que :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{C}}' = \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour ré-exprimer l'équation (23) en fonction des caractéristiques il faut procéder comme suit :

$$\underbrace{\underline{\underline{C}}\underline{\underline{W}}}_{\underline{\underline{\tilde{C}}}}\underline{\underline{W}}^{-1}\underline{u}_0 = \underline{\underline{C}}' \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix}$$

De là, il est possible d'exprimer facilement le vecteur $\underline{\tilde{u}}$ en fonction des deux matrices du jeu de conditions limites :

$$\underline{\underline{\tilde{C}}}\underline{\tilde{u}} = \underline{\underline{C}}' \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\tilde{u}}_0 = \underline{\underline{\tilde{C}}}^{-1}\underline{\underline{C}}' \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix}$$

Sachant que $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{I}}_2$ alors $\underline{\underline{\tilde{C}}} = \underline{\underline{W}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\tilde{C}}}^{-1} = \underline{\underline{W}}^{-1}$ et cette dernière matrice a déjà été exprimée à l'équation (19).

De là, il vient :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{u}}_0 &= \frac{1}{2Z_0} \begin{bmatrix} Z_0 & 1 \\ -Z_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/Z_0 & -1/Z_0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow \underline{\tilde{u}} &= \frac{1}{2Z_0} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ R \end{Bmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \tilde{u}_0^+ = 1/Z_0 \\ \tilde{u}_0^- = R/Z_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Approximation des caractéristiques Le dernier bloc manquant désormais est l'expression des caractéristique en fonction des fonctions de forme associées à la formulation FEM.

En réutilisant le vecteur des pressions à chaque extrémité du premier élément (tel qu'introduit à la section a)) il est possible d'écrire la pression en $x = 0$ en faisant usage des fonctions de forme, ainsi :

$$p(0) = \varphi_1 \mathbb{P}_0 + \varphi_2 \mathbb{P}_1$$

En utilisant l'équation d'Euler, il est ensuite possible de passer à la valeur de la vitesse en $x = 0$:

$$j\omega\rho v(0) = -\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow v(0) = \frac{-1}{j\omega\rho} (\varphi'_1 \mathbb{P}_0 + \varphi'_2 \mathbb{P}_1)$$

De là, on peut ré-écrire le vecteur \underline{u}_0 utilisé pour l'écriture des conditions en fonction des fonctions de forme :

$$\begin{Bmatrix} v(0) \\ p(0) \end{Bmatrix} = \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} -\varphi'_1/j\omega\rho & -\varphi'_2/j\omega\rho \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbb{P}_0 \\ \mathbb{P}_1 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

TO BE CONTINUED

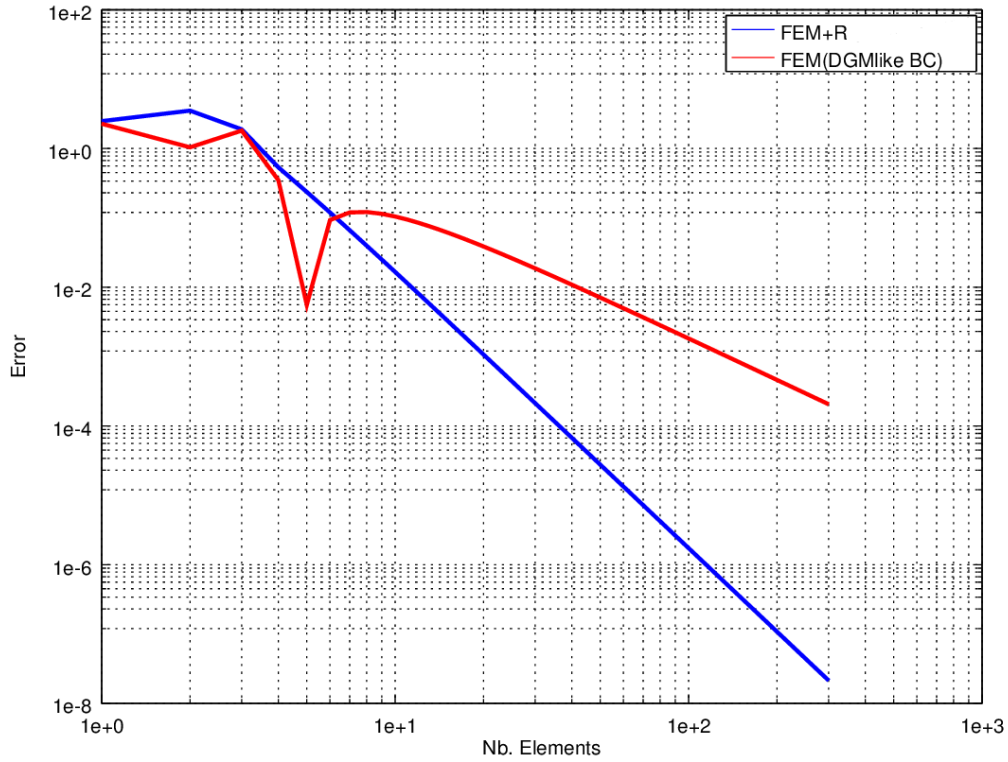


FIGURE 6 – Comparaison de l'erreur commise en fonction du nombre de points pour une méthode FEM+R en bleu et FEM+formulation DGM en rouge.

Conclusion

Bibliographie

- [GGH11] G. Gabard, P. Gamallo, and T. Huttunen. A comparison of wave-based discontinuous galerkin, ultra-weak and least-square methods for wave problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(3) :380–402, 2011.
- [GO] G. Gabard and Dazel O. A discontinuous galerkin method with plane waves for sound absorbing material.