COUPLAGE FEM/DGM

Analyse des méthodes et proposition de couplage

Mathieu Gaborit

Année 2014-2015

Université du Maine

- Méthodes numériques : enjeu majeur pour la simulation de systèmes complexes
- Grande diversité dans les méthodes disponibles
- Fortes spécificités pour chaque méthode
- Méthodes classiques : FEM, DGM, etc...

- Méthodes numériques : enjeu majeur pour la simulation de systèmes complexes
- Grande diversité dans les méthodes disponibles
- Fortes spécificités pour chaque méthode
- Méthodes classiques : FEM, DGM, etc...

Comment combiner deux méthodes pour profiter d'un maximum d'avantages ?

Problème de référence

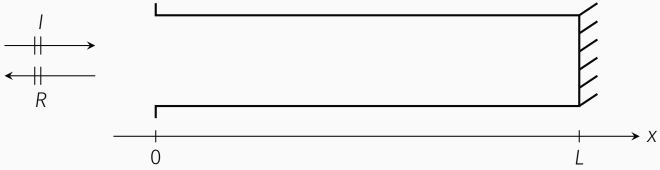
Méthodes

Couplage

Amélioration de la convergence

Et ensuite ?

PROBLÈME DE RÉFÉRENCE



Hypothèses

- Propagation 1D
- Convention temporelle $e^{j\omega t}$
- Paroi en $x = L$ infiniment rigide
- Entrée excitée par une onde plane d'amplitude unitaire
- Effets visco-thermiques négligés
- $err = {\left|\arg(R) - \arg(\hat{R})\right|^2}/{|\arg(R)|^2}$

MÉTHODES

$$\left(k^2[M] - [K]\right)\mathbb{P} = \int_{\partial\Omega} v\nabla p \,\mathrm{d}\Gamma$$

Généralités

- Formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation d'un maillage non-structuré
- Bonne modélisation de systèmes détaillés

$$\left(k^2[M] - [K]\right)\mathbb{P} = \int_{\partial\Omega} v \nabla p \,\mathrm{d}\Gamma$$

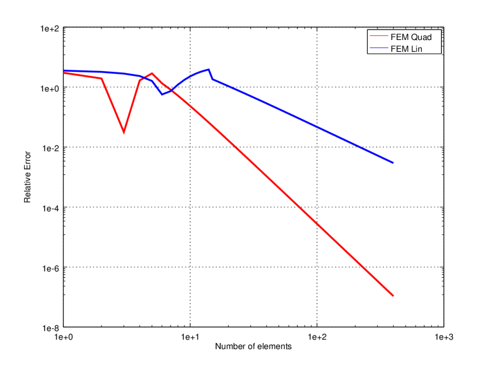
Généralités

- Formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation d'un maillage non-structuré
- Bonne modélisation de systèmes détaillés

Limites

- Augmentation du temps de calcul avec le nombre d'éléments
- Nécessité d'au moins 2 éléments par longueur d'onde

Influence du type d'éléments



$$\int_{\Omega} \vec{v}^T \left(j\omega + A\nabla\right) \vec{u} \mathrm{d}\Gamma = 0$$

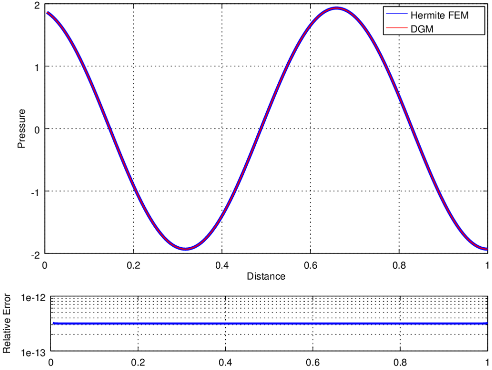
Généralités

- Basée sur la formulation variationnelle de l'équation d'Helmholtz
- Utilisation des caractéristiques de l'EDP comme champ de test (Gabard/Dazel'15)
- Possibilité d'utiliser de grands éléments

Limites

- Quasi-insensible aux petits détails
- Incompatibles avec (ou mal adaptés à) certains problèmes

Solution exacte en 1D...



COUPLAGE

Classiquement

- R comme une inconnue
- Vecteurs et matrices étendues
- Traduction exacte des équations de continuité

Classiquement

- R comme une inconnue
- Vecteurs et matrices étendues
- Traduction exacte des équations de continuité

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & -jk \\ & & & & 0 \\ & & \underline{\underline{K}} - k^2 \underline{\underline{M}} & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{c} \mathbb{P} \\ \hline R \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} -jk \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right\}$$

Caractéristiquement...

- Utilisation des caractéristiques pour exprimer la condition
- Besoin des fonctions de forme pour exprimer les champs
- Nécessité de dériver les fonctions de forme...

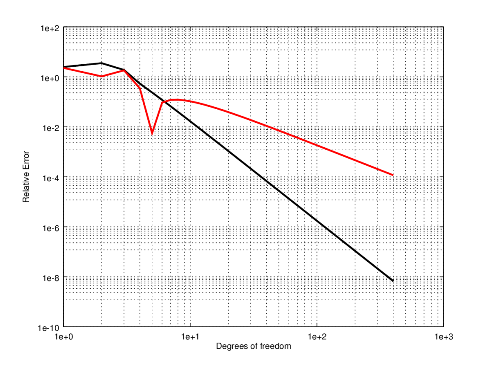
Caractéristiquement...

- Utilisation des caractéristiques pour exprimer la condition
- Besoin des fonctions de forme pour exprimer les champs
- Nécessité de dériver les fonctions de forme...

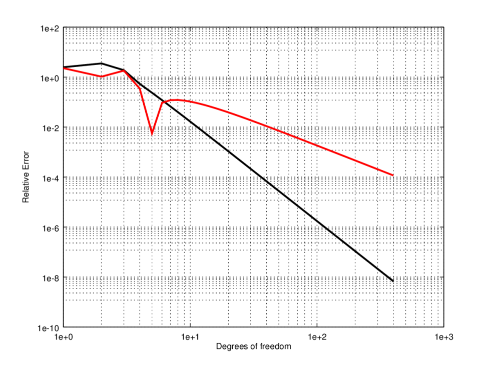
$$\nabla p\Big|_0 = -jk - \frac{jk}{2}\left[\left(\varphi_1(0) + \frac{\varphi_1'(0)}{jk}\right)\mathbb{P}_1 + \left(\varphi_2(0) + \frac{\varphi_2'(0)}{jk}\right)\mathbb{P}_2\right]$$

Dérivation des fonctions de forme :
perte d'un ordre de convergence ?

Malheureusement... oui.



Malheureusement... oui.



Comment éviter ce (gros) désagrément ?

AMÉLIORATION DE LA CONVERGENCE

DÉRIVATION «NATURELLE» ?

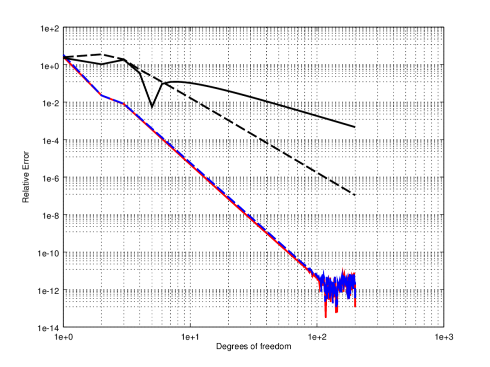
Question : Existe-t-il une méthode d'interpolation donnant directement accès à la dérivée du champ ?

Question : Existe-t-il une méthode d'interpolation donnant directement accès à la dérivée du champ ?

Réponse : Oui ! L'interpolation par splines d'Hermite !

$$p_e(x) = \left[\tilde{h}_{00}(x) \middle| \tilde{h}_{10}(x) \middle| \tilde{h}_{01}(x) \middle| \tilde{h}_{11}(x) \right] \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_1' \\ p_2 \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

Words are good... show me the curve !

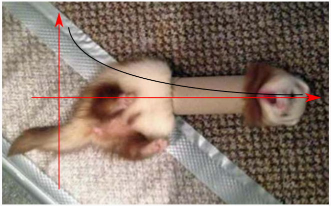


Ça converge !

- Pas de perte d’un ordre
- Converge mieux que les éléments quadratiques quelque soit la méthodes choisie

Ça converge !

- Pas de perte d'un ordre
- Converge mieux que les éléments quadratiques quelque soit la méthodes choisie



ET ENSUITE ?

PISTES POUR LA SUITE

- Coupler plusieurs éléments DGM et FEM ensemble
- Analyser le comportement du couplage en 2D
- Appliquer la méthode à de vrais problèmes
- Analyser l'évolution du temps de calcul
- Auto-sélection de la méthode la plus adaptés à certains groupes d'éléments sur un maillage quelconque
- etc...

CONCLUSION

- Prise en main et analyse de 2 méthodes de calcul
- Introduction aux possibilités de couplage ente méthodes
- Travail sur un sujet de recherche intéressant
- Possibilités de poursuite du projet

- **A discontinuous Galerkin Method with Plane Waves for Sound Absorbing Materials**, *Int. J. Numer. Engng*, G. Gabard, O. Dazel
- **A comparison of wave-based discontinuous Galerkin, ultra-week and least-square method for wave problems**, *Int. J. Numer. Engng*, G. Gabard, P. Gamallo, T. Huttunen
- **Analyse Numérique : une approche mathématique**, M. Schatzman

Merci !

Des questions ?

mathieu@matael.org