הוכחות *

מתן לבינטוב

תקציר

זהו התרגול הראשון בקורס תאוריה כלכלית מיקרו אשר נועד לספק בסיס להוכחות פורמליות, דבר שלא ממש פגשת עד עכשיו בתואר הראשון. לא כל הגדרה במסמך הזה תהיה מוגדרת בצורה המדויקת ביותר מתוך אילוצי זמן. כל האי דיוקים במסמך זה נעשו מתוך כוונה לפשט את הרעיונות שמוצגים כאן.

*התרגילים והגדרות נלקחו מתוך Hammack, R (2013). Book of Proof

תוכן העניינים

1 הגדרות

1.1 Theorem

משפט / טענה אשר נכון והוכח שהוא נכון, לדוגמה :

משפט

תהי f גזירה ב (a,b) וניקח $c \in (a,b)$ כך ש $f(c)$ הוא מקסימום או מינימום של הפונקציה בקטע (a,b) אזי $f'(c)=0$.

1.2 Proposition

משפט נכון בדיוק כמו Theorem, הבדל נובע בדרך כלל בחשיבות

1.3 Lemma

טענת עזר, משפט שמשמש להוכיח משפט אחר גדול יותר / חשוב יותר.

1.4 Corollary

משפט שנובע מיידית מתוצאות / משפטים קודמים.

2 קבוצות וקבוצות המספרים

2.1 המספרים הטבעיים

מסומנים $\mathbb{N}$, וכוללים את כל המספרים החיוביים חוץ מ0,

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\} = \mathbb{N}$$

2.2 המספרים השלמים

מסומנים $\mathbb{Z}$, וכוללים את כל המספרים השלמים כולל 0,

$$\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{Z}$$

או לחילופין ניתן גם להגדיר אותם כך,

$$\mathbb{Z} = \{n|n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-n|n \in \mathbb{N}\}$$

2.3 המספרים הרציונליים

מסומנים ב-$\mathbb{Q}$, וכוללים את כל המספרים המתקבלים כמנה של שני מספרים שלמים, לדוגמה $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$ וכו'. פורמלית,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

2.4 הממשיים

מסומנים ב-$\mathbb{R}$, והם כל המספרים בציר המספרים, כולל את הרציונלים וגם את הלא רציונלים, ניתן להגדיר אותם פורמלית בעזרת סדרה מתכנסת של $\mathbb{Q}$ אך לא נעשה זאת פה, מוזמנים לבדוק באינטרנט את הגדרה הפורמלית. כן ניתן דוגמאות למספרים ממשיים,

$$e, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 2, 1, 0, -1, -2, -\pi, -e \in \mathbb{R}$$

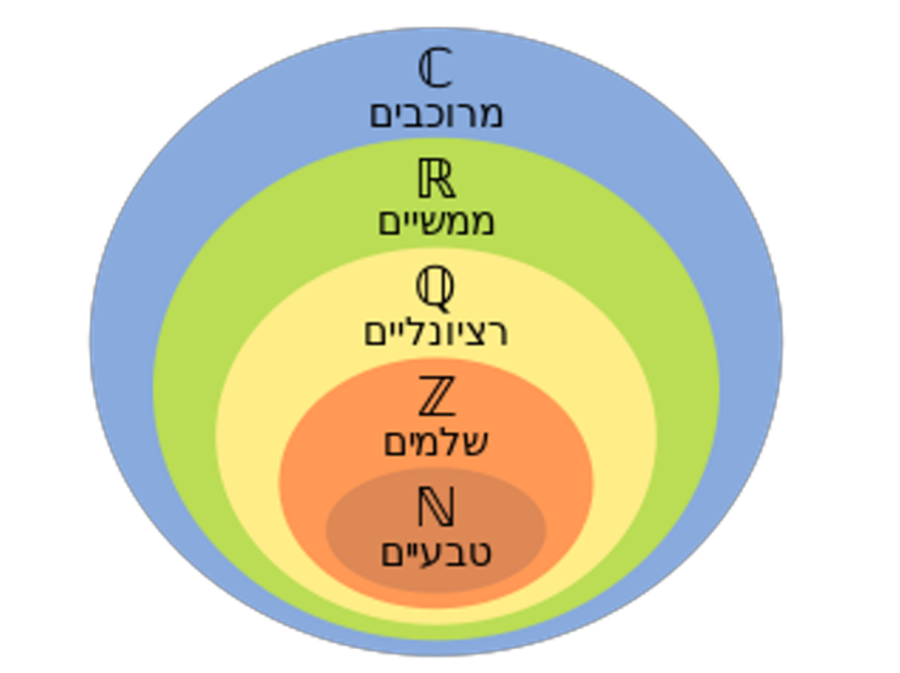
נשים לב שאפשר לבנות את קבוצת כל המספרים הלא רציונלים על ידי לקיחת $\mathbb{R}$ ומחיקה של $\mathbb{Q}$ ממנו, נסמן את הקבוצה הזו ב-$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

הערה

נשים לב שיש קשר בין כל הקבוצות שציינו, לפי הסדר שציינו אותם, כל קבוצה מוכלת בקבוצה אשר באה אחריה. בצורה פורמלית אפשר לכתוב זאת ככה,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

וכמובן שיש גם איור יפה שמראה את הקשרים הללו.



איור 1: קבוצות המספרים

3 הוכחות

נעבור על השיטות המרכזיות להוכחת משפטים, ונציג כמה דוגמאות לכל סוג של הוכחה. אך קודם עלינו להגדיר 2 הגדרות אשר נשתמש בהם בהוכחות.

הגדרה

מספר זוגי. מספר n הוא זוגי אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = 2k$.

הגדרה

מספר אי-זוגי. מספר n הוא אי-זוגי אם קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש $n = 2k+1$.

3.1 הוכחה ישירה

אם א' אז ב' או לחלופין $Q \implies P$. מה שזה אומר זה שאם P נכון / מתקיים אז הוא גורר / מקיים גם את Q. בהוכחה ישירה מהסוג הזה של טענות נניח ש P נכון / מתקיים ונוכיח שגם Q נכון / מתקיים.

משפט

אם x אי-זוגי אזי x^2 אי-זוגי.

הוכחה

נניח ש x הוא אי-זוגי, לפי הגדרה של מספר אי-זוגי,

$$x = 2k+1$$

ל - k מסוים ב $\mathbb{Z}$. לכן ,

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 = 2m+1$$

כאשר $m = 2k^2 + 2k$ הוא מספר שלם, ולכן x^2 אי-זוגי. ■

3.2 הוכחה בעזרת Contrapositive

בלוגיקה, המשפט $Q \implies P$ שקול לוגית למשפט $\sim P \implies \sim Q$. כלומר המשפט א' גורר ב' זהה למשפט לא ב' גורר לא א'. ניתן להוכיח את השקילות הזאת על ידי טבלת אמת אך לא נעשה זאת כאן ונקבל את השקילות כנכונה בלי הוכחה. בדומה להוכחה הישירה, על מנת להוכיח משפט בשיטה הזו, נניח שלא Q נכון ונוכיח שלא P נכון.

משפט

לכל $x \in \mathbb{Z}$ אם $x^2 - 6x + 5$ זוגי, אזי x אי-זוגי.

הוכחה

נניח ש x הוא לא אי-זוגי, כלומר x זוגי. לפי הגדרה של מספר זוגי,

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = 2k$$

לכן,

$$x^2 - 6x + 5 = (2k)^2 - 6(2k) + 5 = 4k^2 - 12k + 5 = 2(2k^2 - 6k) + 5 = 2m + 5$$

אפשר לראות שאנחנו מאוד קרובים אבל זאת לא בדיוק הגדרה של מספר אי-זוגי, מה שאפשר לעשות זה לפרק את 5 ל $4+1$. נחזור לשוויון האמצעי,

$$4k^2 - 12k + 4 + 1 = 2(2k^2 - 6k + 2) + 1 = 2a + 1$$

כאשר $a = 2k^2 - 6k + 2$ הוא מספר שלם, ולכן $x^2 - 6x + 5$ אי-זוגי לפי הגדרה. ■

3.3 הוכחה בשלילה

הוכחה בשלילה הולכת ככה, תהי טענה P, אם כתוצאה מהנחה $\sim P \implies C \wedge \sim C$, כלומר, הנחנו שהטענה לא נכונה וקיבלנו שטענה C היא גם נכונה וגם לא נכונה באותו הזמן, כלומר סתירה לוגית. מכך הנחה שלנו ש $\sim P$ היא לא נכונה ולכן P נכונה. גם פה ניתן לנתח את השקילות הלוגית של השיטה הזו על ידי טבלת אמת אך נקבל את השקילות כנכונה בלי הוכחה.

הערה

בהוכחות מהסוג של הוכחה בשלילה מקובל להתחיל את ההוכחה ב "נניח בשלילה ש...."
(Assume for the sake of contradiction that... / Assume towards a contradiction that...).

בשביל הדוגמה שלנו לסוג ההוכחה הזה נצטרך עוד הגדרה,

הגדרה

מספר x הוא רציונלי (כלומר $x \in \mathbb{Q}$) אם קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = \frac{m}{n}$ ו $n \neq 0$. מספר x הוא לא רציונלי אם לא קיימים m, n כאלו.

משפט

$\sqrt{2}$ אינו רציונלי. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

הוכחה

נניח בשלילה ש - $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, כלומר $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ונוסיף לכך ש - $\sqrt{2}$ מוצג בגרסה המצומצמת ביותר שלו. מכאן,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \tag{1}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \tag{2}$$

$$2n^2 = m^2 \tag{3}$$

נשים לב שקיבלנו ש m^2 הוא מספר זוגי לפי הגדרה. ניזכר שקודם לכן הוכחנו את הטענה שאם x הוא אי-זוגי אזי x^2 הוא גם אי-זוגי, ללא עבודה והוכחה נוספת ניתן להפוך את המשפט (Counterpositive) ולקבל את הטענה הבאה שהיא שקולה לוגית ואין צורך להוכיח אותה כי כבר עשינו זאת.
אם x^2 זוגי אזי x זוגי. מכך נובע ש m זוגי, כלומר קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך שניתן לכתוב את m בצורה הבאה $m = 2k$. נציב את זה במשוואה מספר 3,

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \tag{4}$$

$$n^2 = 2k^2 \tag{5}$$

עם טיעון זהה למה שטענו מקודם קיבלנו שגם n זוגי, אבל אם המונה וגם המכנה זוגיים אז קיים מכנה משותף שניתן לצמצם בו את המנה (2) וזאת סתירה להנחה ש $\sqrt{2}$ מוצג בגרסה המצומצמת שלו. $\Longleftarrow \Longrightarrow$

■

3.4 טענות מסוג אם ורק אם / if and only if (iff)

במהלך הקורס תפגשו טענות מהסוג הבא,

$$P \iff Q$$

בפועל זה אומר ששני הטענות הבאות נכונות,

1. $P \implies Q$
2. $Q \implies P$

כלומר, יש פה טענה מאוד חזקה, אם P נכון אז גם Q ואם Q נכון אז גם P. איך מוכיחים טענות כאלו? מאוד פשוט, מתייחסים אליהם כאל 2 טענות נפרדות ומוכיחים כל כיוון בנפרד, פעם אחת מניחים P ומוכיחים שממנו נובע Q ופעם השנייה מניחים ש Q נכון ומוכיחים שממנו נובע P.

הערה

בדרך כלל בהוכחות מסוג אם ורק אם נהוג לסמן כל כיוון בסימון $\Longrightarrow$ ו $\Longleftarrow$.

משפט

המספר x הוא אי זוגי אם ורק אם x^2 אי זוגי.

הוכחה

$\Leftarrow$

נניח ש x הוא אי זוגי, כלומר, לכן ניתן לכתוב אותו כך $x = 2k+1$ עבור $k \in \mathbb{Z}$. נציב את זה ב x^2,

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1 \quad (6)$$

ולכן x^2 אי זוגי.

$\Longrightarrow$

להניח ש x^2 הוא אי זוגי ולהוכיח שזה גורר x הוא גם אי-זוגי נשמע לא נוח, לכן נוכיח את ה Counterpositive שלה, כלומר נוכיח את המשפט הבא : אם x הוא זוגי אז x^2 גם זוגי. נניח ש x הוא זוגי, כלומר $x = 2k$ עבור $k \in \mathbb{Z}$, נציב את זה ב x^2,

$$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

מכך נובע ש x^2 זוגי ולכן נקבל את הטענה המקורית כנכונה. ■

3.5 הפרכה / Disproving

לא כל הטענות שתפגשו הן נכונות ולכן נצטרך להפריך אותן, כעת נראה איך עושים זאת.

השערה

לכל מספר $n \in \mathbb{Z}$ המספר $f(n) = n^2 - n + 11$ הוא מספר ראשוני.

אם נתחיל להציב מספרים בשביל להבין את הבעיה נתחיל לחשוב שהטענה נכונה אבל נשים לב שב - $n = 11$ המספר שמתקבל הינו $f(11) = 11^2 - 11 + 11 = 121$. כלומר מצאנו מספר שאינו ראשוני ולכן הטענה לא נכונה.

הערה

נשים לב שזה היה יחסית פשוט, הטענה השתמשה בכמת "לכל" ולכן על מנת להפריך אותה מספיק מאיתנו למצוא דוגמה נגדית אחת. אך מה קורה אם במקום שהטענה תדרוש "לכל" מספר היא תדרוש ש"קיים" מספר? איך מפריכים טענה כזאת?

השערה

קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $x^4 < x < x^2$.

עם קצת משחקי הצבה ואפילו קצת הצבות חכמות אנחנו מבינים מאוד מהר שיש פה בעיה ואולי הטענה לא נכונה. על מנת להוכיח שהטענה לא נכונה, אפשר להוכיח שהופכי שלה הוא נכון. מה ההופכי של הטענה?

משפט

לכל $x \in \mathbb{R}$ לא מתקיים $x^4 < x < x^2$.

הוכחה

נניח בשלילה שכן מתקיים x כך ש $x^4 < x < x^2$. קל לראות שבגלל החיוביות של x^4 והעובדה שמדובר באי-שיוויונות חזקים x חייב להיות מספר חיובי ממש ($x > 0$). לכן ניתן לחלק את כל החלקים ב - x,

$$x^3 < 1 < x$$
$$(x-1)\left(x^2+x+1\right) < 0 < x-1$$
$$x^2+x+1 < 0 < 1$$

נשים לב לכמה דברים, קודם כל חילוק כל החלקים ב - $x-1$ בין השורה השנייה לשלישית לא גורר היפוך של הא"ש בגלל שהא"ש הימיני של שורה 2 אומר ש $x-1>0$. עכשיו שימו לב לתוצאה המעניינת שקיבלנו קודם לכן הגענו למסקנה ש $x>0$ אבל אם נסתכל על הא"ש האחרון אנחנו קיבלנו שסכום של 3 איברים חיובים $(x^2, x, 1)$ הוא מספר שלילי ממש (קטן מ0) וזאת סתירה. $\Longleftarrow \Longrightarrow$
לכן **לכל** $x \in \mathbb{R}$ לא מתקיים $x^4 < x < x^2$. ■

היות והצלחנו להוכיח את השלילה של השערה שלנו, ההשערה לא נכונה.