

תרגול 9 - צמיחה א' - סולו

מתן לבינטוב

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

17 בדצמבר 2023

1 מודל סולו

2 פונקצית היצור

3 משוואת התנועה

4 מצב יציב - S.S - State Steady

5 נגזרות

6 סטיות ויציאה מש"מ

מודל סולו הוא מודל קלאסי אשר מתאר שיווי משקל דינאמי של צד היצע של כלכלה

- בטווח האורך ניתן לראות שהתוצר, כמות העובדים, מלאי ההון, הצריכה והחסכון צומחים בקצב קבוע והגדלים הריאליים נותרים ללא שינוי, למצב כזה אנו קוראים State Steady
- בטווח הקצר ניתן לראות שהתוצר, כמות העובדים, כמות מלאי ההון, הצריכה והחסכון צומחות בקצב משתנה מתקופה לתקופה והגדלים הריאליים תוצר לעובד, מלאי ההון לעובד, צריכה לעובד וחסכון לעובד משתנים גם הם. למצב הזה נקרא התכנסות לשיווי משקל דינאמי.

חשוב

בגדלים ריאליים הכוונה ל - תוצר לעובד, מלאי ההון לעובד, צריכה לעובד וחסכון לעובד

סימונים מקובלים

$$y = x = \frac{Y}{L} \quad \text{תוצר לעובד}$$

$$k = \frac{K}{L} \quad \text{מלאי הון לעובד}$$

$$\frac{D}{L} = dk \quad \text{פחת לעובד}$$

$$s = \frac{sY}{L} = s \cdot y \quad \text{חיסכון לעובד}$$

$$c = \frac{(1-s)Y}{L} = (1-s) \cdot y \quad \text{צריכה לעובד}$$

$$\hat{L} = \frac{\dot{L}}{L} = n \quad \text{שיעור הריבוי}$$

$$I_g = S \quad \text{השקעה גולמית}$$

$$\dot{K} = I_n = I_g - D \quad \text{השקעה נקייה}$$

$$MPK = i_c = r + d \quad \text{מחיר ההון}$$

Cobb-Douglas

במודל נבחר פונקציית יצור מסוג קוב - דאגלס אשר מקיימת תק"ל

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

אם נעבור לדבר במונחים של תוצר לעובד

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{AK^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha = Ak^\alpha$$

משוואת התנועה

$$\dot{k} = sy - (n + d) \cdot k$$

מתוך המשוואה הזאת אנו מקבלים 3 אפשרויות

$$\dot{k} > 0 \iff sy > (n + d) \cdot k \quad ①$$

ההון לעובד ולכן מלאי ההון לעובד גדל. צבירה חיובית של הון לעובד

$$\dot{k} < 0 \iff sy < (n + d) \cdot k \quad ②$$

ההון לעובד ולכן מלאי ההון לעובד קטן. צבירה שלילית של הון לעובד

$$\dot{k} = 0 \iff sy = (n + d) \cdot k \quad ③$$

לעובד ולכן מלאי ההון לעובד לא משתנה.

מצב יציב

$$k_{ss} = \left(\frac{sA}{n+d} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (1)$$

$$y_{ss} = A \cdot k_{ss}^\alpha \quad (2)$$

הערות

- 1 המשוואה השנייה היא פשוט המשוואה הרגילה אבל עם הצבה של k_{ss}
- 2 כפי שניתן לראות ש"מ ישתנה רק אם יהיה שינוי ב A, d, n, s
- 3 מדינות עם נתוני משק זהים התכנסו לאותו ש"מ

במצב עמיד ישנה צמיחה מאוזנת

$$\hat{k} = 0 \implies \hat{K} = \widehat{(k \cdot L)} = \hat{k} + \hat{L} = \underbrace{\hat{k}}_{\hat{k}=0} + n = n$$

$$\hat{y} = 0 \implies \hat{Y} = \widehat{(y \cdot L)} = \hat{y} + \hat{L} = \underbrace{\hat{y}}_{\hat{y}=0} + n = n$$

במצב לא עמיד אין צמיחה מאוזנת

$$\hat{k} \neq 0 \implies \hat{K} = n + \hat{k} \neq n$$

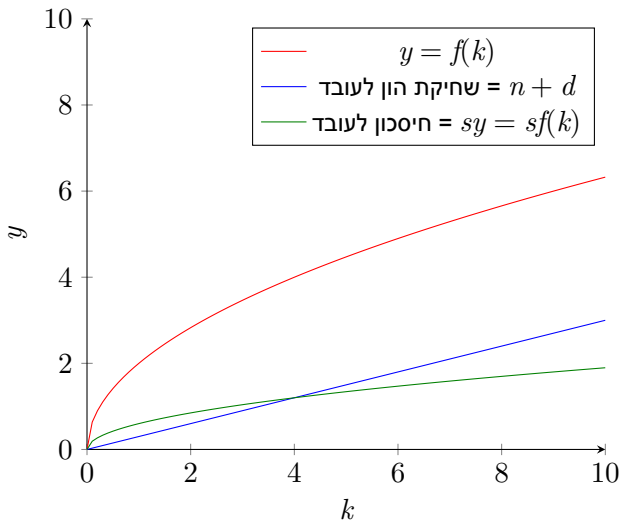
$$\hat{y} \neq 0 \implies \hat{Y} = n + \hat{y} \neq n$$

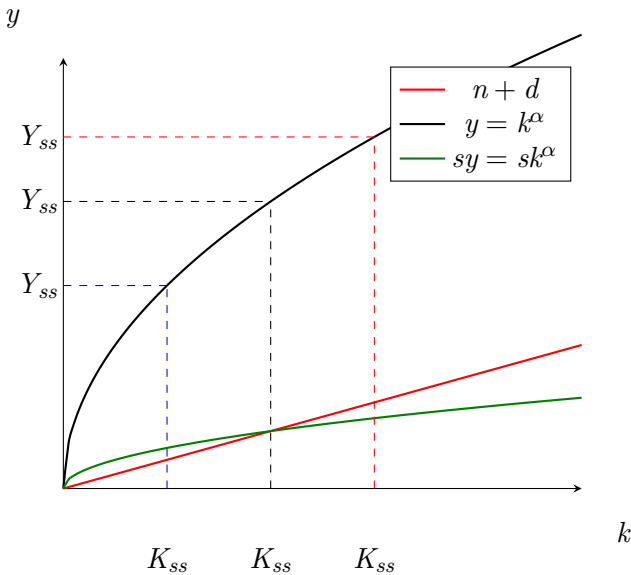
הערה לגבי נגזרת

בשביל לגזור תוצר לעובד לפי זמן, יש להשתמש בכלל שרשרת.
זאת משום שהתוצר לעובד לא תלוי ישירות בזמן, אלא הוא תלוי בהון לעובד k שתלוי בזמן

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial t} = mpk \cdot \dot{k}$$

$$\implies \hat{y} = \frac{mpk \cdot k}{y}$$





הצבר הון שלילי

כאשר אנחנו ב k גבוהה יותר מ k_{ss} ולכן השקעה הנדרשת היא גבוהה יותר מההשקעה בפועל

$$k < 0 \quad \hat{y} < 0 \quad \hat{Y} < n$$

הצבר הון חיובי

כאשר אנחנו ב k שהוא נמוך יותר מ k_{ss} לכן השקעה בפועל היא גדולה יותר מההשקעה הנדרשת

$$k > 0 \quad \hat{y} > 0 \quad \hat{Y} > n$$