1) נקרא לאלגוריתם שנכתוב path(G,S,t), שמתבסס על BFS,
ומקבל את הגרף ואת הקודקודים מהם נרצה למצוא את המסלול.
בנוסף נגדיר אלגוריתם עזר שידפיס את המסלול, Print_Path(A,s,t).

```
path(G,s,t)
  for every vertex x in V
      parents[x] = Null
  parents[s] = -1
  enqueue(s,Q)
  While (not empty(Q))
      X = dequeue(Q)
      for every neighbor y of x
          if parents[y] = Null
              parents[y] = x
              enqueue(y,Q)
  print_Path(parents, s, t)
```

```
print_path(A, s, t)
    print t
    if A[t] = s
        print s
        return ()
    return print_path(A, s, A[t])
```

נסביר נכונות: האלגוריתם שומר עבור כל קודקוד את הקודקוד הראשון ממנו הגענו אליו במערך parents.
לאחר מכן נדפיס את המסלול מ-t ועד ל-s לפי רצף ההורים.
בגלל שהשתמשנו ב- BFS, מובטח לנו שנמצא את המסלול הקצר ביותר.

זמן ריצה: לפי זמן הריצה של BFS, שהוא $O(n+m)$ ועוד זמן הריצה של האלגוריתם print-path שהוא $O(n)$ נקבל זמן ריצה כולל $O(n+m)$.

2) א.

(1) לא נכון.

נמצא גרף עבורו זמן הריצה של BFS יהיה $\Theta(n^{5/4})$.

זמן ריצה של BFS כללי הוא $\Theta(n+m)$.

לכן, נצטרך גרף בו קיימות $n^{5/4}$ קשתות.

מס' הקשתות המקסימלי בגרף עם $n$ קודקודים הוא כ- $n^2$.

לכן, נצטרך גרף עם לפחות $n^{\frac{2.5}{4}}$ קודקודים כדי לקבל את זמן הריצה $\Theta(n^{5/4})$.

כדי שלכל קודקוד בגרף זמן הריצה יהיה $\Theta(n^{5/4})$, אז כל אחד מרכיבי הקשירות

צריך להכיל לפחות $n^{2.5/4}$ קודקודים.

אבל כדי שיהיו $n^{3/4}$ רכיבי קשירות עם $n^{2.5/4}$ קודקודים נצטרך סה"כ

$n^{3/4} \cdot n^{2.5/4}$ שזה $n^{5.5/4}$ קודקודים, וזה יותר ממה שנתון לנו.

(2) נכונה.

ניתן דוגמה לגרף כזה: יהיו 2 רכיבי קשירות, 1 עם $\sqrt{n}$ קודקודים

והשני עם $n-\sqrt{n}$ קודקודים, ובכל אחד מרכיבי הקשירות ניקח את מספר הקשתות

המקסימלי. בתת הגרף עם $\sqrt{n}$ קודקודים, מס' הקשתות הוא $n = (\sqrt{n})^2 = m$, ולכן, זמן

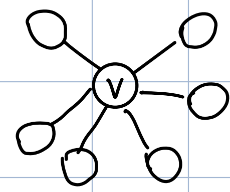
הריצה של כל קודקוד בתת הגרף $T_{BFS} = \Theta(\sqrt{n}+m) = \Theta(n)$

בתת הגרף עם $n-\sqrt{n}$ קודקודים, מס' הקשתות הוא

$m = (n-\sqrt{n})^2 = n^2 - 2n\sqrt{n} + n$ וזמן הריצה של כל קודקוד בתת הגרף הוא

$T_{BFS} = \Theta(n-\sqrt{n}+m) = \Theta(n^2)$

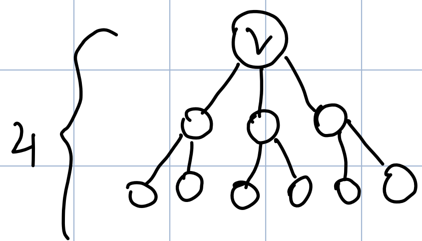
ב.(1) קיים. ניתן דוגמה עבור $n=7$, תקפה לכל $n$ באותה דרך.



כמות הקשתות: $6 = n-1 < 2n$

המספר המקסימלי של איברים בתור: $6=n-1<n-2$

(2) קיים. נתאר את הגרף שיהיה בצורת עץ. $v$ יהיה השורש, ממנו יצאו 3 ילדים ולכל ילד שני ילדים וכך הלאה. דוגמה לשרטוט:

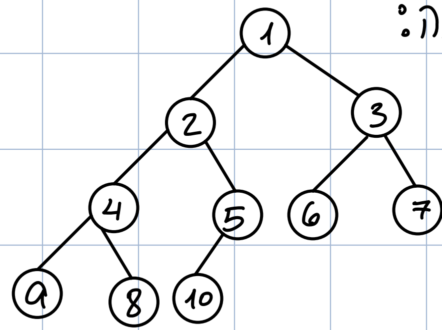



הדרגה המקסימלית כך היא אכן 3, ובשלב מסוים באלגוריתם, כל העלים יהיו בתוך התור. מספר העלים $> \frac{n}{2}$.

3) קיימת. ניתן דוגמה:

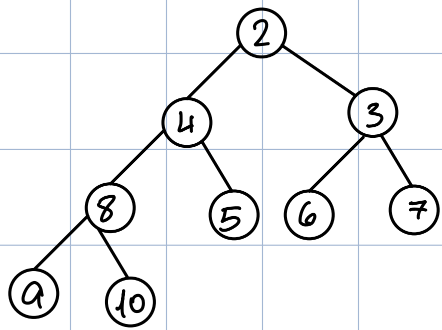
א. (1)

P:




$P.T[P.Size] = 10 = x$

P':

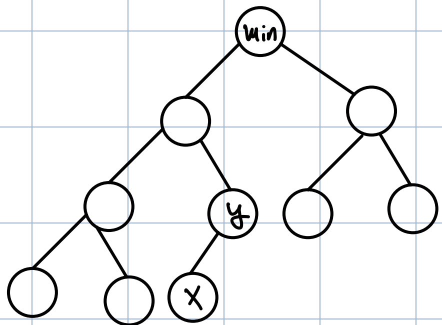



$P'.T[P'.Size] = 10 = x$

(2) לא קיימת. נסביר: נניח בשלילה שזה אפשרי.

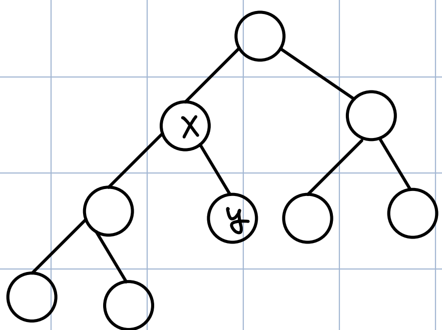
P תהיה מהצורה הנ"ל. בפרט ברור

ש- $y<x$ (הילד שלו בערימה).




לאחר מחיקת המינימום העץ ייראה כך:

(כי הנחנו שאפשרי ש- $P'.T[2]=x$).

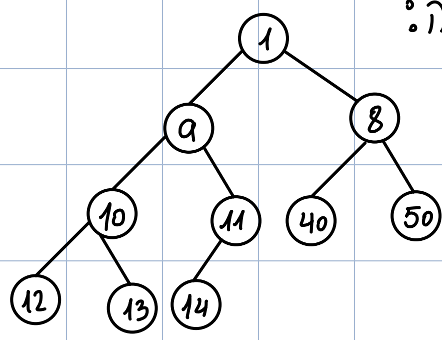



מתכונות הערימה, x קטן מכל צאצאיו

ובפרט מ-y. אבל ידוע לנו ש- $y<x$ והגענו לסתירה.

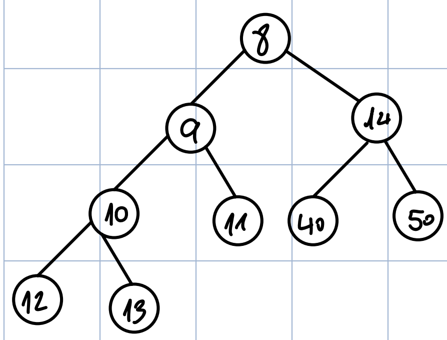
(3) קיימת. ניתן דוגמה:

P:



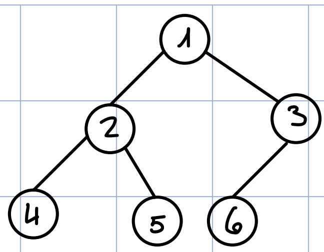

$P.T[P.Size] = 14 = x$

P':



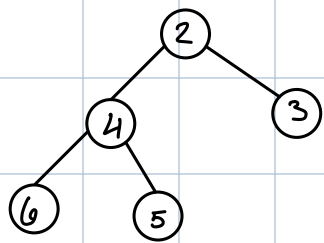

$P'.T[3] = 14 = x$

ב. ניתן דוגמה נגדית: $P.size = 6$

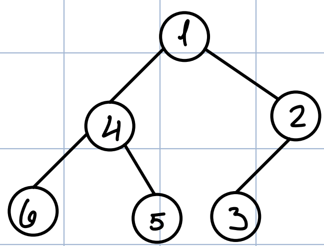



לאחר $Deletemin(P)$ העץ ייראה כך:

$X = 1$




לאחר $Insert(X,P)$ העץ ייראה כך:




בשונה מהעץ המקורי.

4) א. נסמן $Min(p)$. המינימום של ערימת מינמקס תמיד יהיה בשורש, כי השורש נמצא בעומק זוגי, וכל האיברים בתת העץ שלו גדולים ממנו. תת העץ של השורש הוא כל העץ.

```
Min(p):
    return(P.T[1])
```

נסמן $Max(p)$ ונבדיל בין 3 מקרים:

I) קיים איבר אחד בערימה. המקסימום יהיה השורש.

II) קיימים 2 איברים בערימה. המקסימום יהיה הבן השמאלי של השורש.

III) קיימים יותר מ-2 איברים בערימה. המקסימום יהיה המספר המקסימלי מבין שני הילדים של השורש, כי הם בעומק אי-זוגי וגדולים מכל האיברים בתתי העצים שלהם.

```
Max(p):
    if P.T[3] = null
        if P.T[2] = null
            return P.T[1]
        return P.T[2]
    return max(P.T[2], P.T[3])
```

ב. (1) באינדקסים 4,5,6,7 . מעליהם קיים מספר אחד קטן יותר (השורש).
מתחתיהם כל המספרים גדולים יותר.

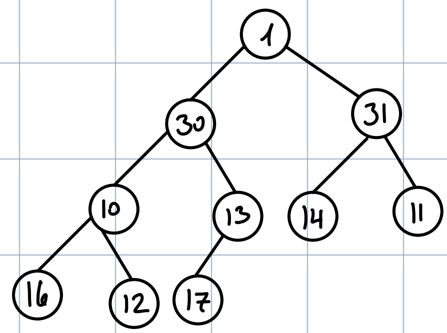
(2) באינדקסים 8,...,15 . מעליהם שני מספרים גדולים יותר.
מתחתיהם כל המספרים קטנים יותר.

ג.

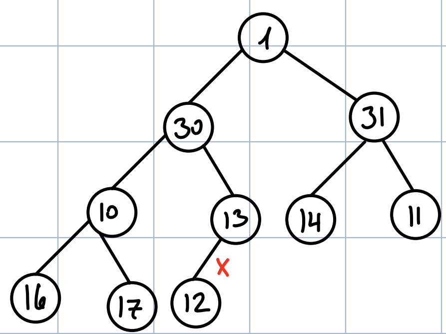
```
P1 := 1
P2 := n
for (i=1 to n)
    if (depth(i) mod 2 = 0)
        P.T[i] = A[P1]
        P1 := P1 + 1
    else
        P.T[i] = A[P2]
        P2 := P2 - 1
```

3. ניתן דוגמה נגדית: עבור $n=10$.

הערימה המקורית:

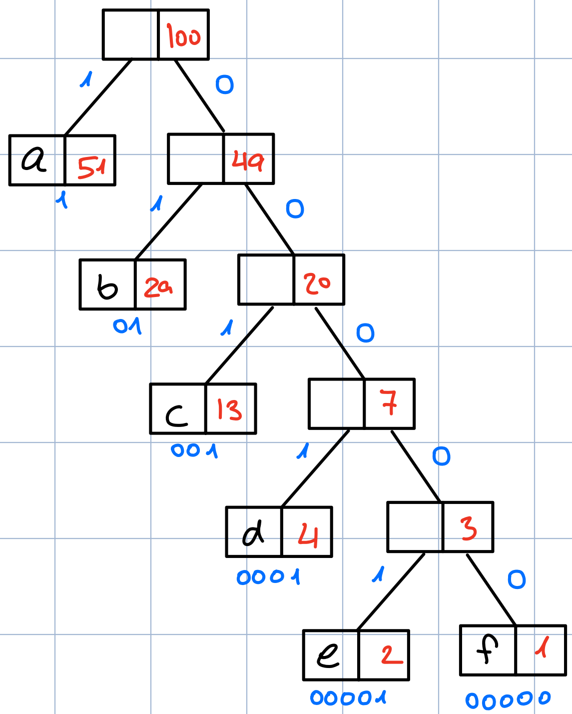



לאחר החלפת שני האיברים 17 ו-12, נקבל ערימה לא חוקית,
כי 12 קטן מ-13, וכל האיברים מתחת העץ של 13 צריכים להיות גדולים ממנו.



5) א.

| a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 29 | 13 | 4 | 2 | 1 |




ב. (1) לא בהכרח נכונה. ניתן טבלת שכיחות שמראה שזה לא חייב להתקיים:

| a | b | c | d |
|---|---|---|---|
| 24 | 27 | 23 | 26 |

(2) בהכרח נכונה. אם לא קיימות 3 אותיות שהשכיחות קטנה או שווה ל-$\frac{1}{3}$.
אז קיימות לפחות 2 אותיות שהשכיחות שלהן גדולה מ-$\frac{1}{3}$.
2 האותיות שנותרו יתחברו לפי קוד הופמן, וסכום המשקלים שלהן קטן מ-$\frac{1}{3}$
לכן, 2 האותיות יתחברו עם האות הקטנה מבין אלה שגדולות מ-$\frac{1}{3}$, ונקבל עץ שלא
מתאים לקוד בשאלה.