סמסטר ב' 2023/24

מבני נתונים ואלגוריתמים

תרגיל בית מספר 3

שאלה 1

כתבו פסאודו קוד המבוסס על אלגוריתם BFS כך שיפתור את הבעיה הבאה –
הקלט הוא גרף קשיר לא מכוון $G=(V,E)$ כאשר $V = \{1,2,\dots,n\}$, המיוצג על ידי רשימת שכנויות של קדקודיו.
בנוסף ניתנים כקלט 2 קדקודים s ו- t שנמצאים בגרף G.
הפלט הוא הדפסה של רשימת קדקודים במסלול קצר ביותר מ- s ל- t (אם יש יותר ממסלול אחד קצר ביותר אז הפלט הוא אחד ממסלולים אלו).
אין צורך להוכיח נכונות אלא רק להסביר בקיצור.
מה זמן הריצה של האלגוריתם?

הנחיה: התבססו על אלגוריתם BFS והוסיפו מערך עזר שישמור עבור כל קדקוד y שנבקר בו את שם הקדקוד x דרכו הגענו ל y (כלומר, x הוא שכן של y, ולאחר שהוצאנו את x מהתור ביקרנו ב y כאשר עברנו על רשימת השכנים של x). השתמשו במערך העזר על מנת להדפיס את המסלול המבוקש (בפרט, ניתן לעשות זאת ברקורסיה). ניתן להשתמש בפסאודו-קוד הדומה למה שראינו בכיתה כדוגמת שורת הפסאודו-קוד: for every neighbor y of x.

שאלה 2

א. ציינו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה או לא נכונה, והסבירו את תשובתכם

(1) עבור כל n מספיק גדול (ניתן להניח ש $n^{1/4}$ הוא מספר שלם), קיים גרף G עם n קודקודים ולפחות $n^{3/4}$ רכיבי קשירות, כך שזמן הריצה של BFS **עבור כל** קודקוד התחלה v ב-G הוא $\Theta(n^{5/4})$.
(2) עבור כל n מספיק גדול, קיים גרף G עם n קודקודים כך שזמן הריצה של BFS עבור חלק מקודקודי ההתחלה הוא $\Theta(n)$ ועבור כל האחרים הוא $\Theta(n^2)$.

ב. נגדיר את **סיבוכיות התור** של אלגוריתם BFS עבור גרף נתון G וקדקוד התחלה v להיות המספר **המקסימלי** של איברים הנמצאים בתור במהלך ריצת האלגוריתם.
רשמו עבור כל אחת מהטענות הבאות אם היא נכונה או לא נכונה, ונמקו תשובתכם. אם תשובתכם חיובית עליכם לתאר דוגמא לגרף הרצוי ולקדקוד התחלה מתאים, ואם תשובתכם שלילית עליכם להסביר מדוע לא קיים גרף כזה וקדקוד התחלה מתאים (כאשר אתם יכולים להשתמש במה שנלמד בכיתה).

(1) קיים גרף G על $n\geq 7$ קדקודים בעל לכל היותר 2n קשתות, וקדקוד v בגרף, כך שאם נריץ BFS על הגרף G עם קדקוד התחלה v סיבוכיות התור תהיה לפחות n-2.
(2) קיים גרף G על $n\geq 7$ קודקודים בעל **דרגה מקסימלית** 3, וקדקוד v בגרף, כך שאם נריץ BFS על הגרף G עם קדקוד התחלה v סיבוכיות התור תהיה לפחות n/2. זכרו כי הדרגה של קדקוד הינה מספר הקשתות שסמוכות אליו, והדרגה המקסימלית של גרף G היא הדרגה המקסימלית של קדקוד כלשהו ב G.

שאלה 3

א. תהי P ערימת מינימום המכילה מספרים <u>השונים זה מזה</u>, ויהי x = P.T[P.Size]. נסמן ב P' את הערימה המתקבלת לאחר ביצוע DeleteMin(P).
על כל אחת מהטענות הבאות כתבו האם היא נכונה או לא. במידה והטענה נכונה, עליכם לצייר את העץ הבינארי הסדור חלקית שמתאים ל P ואת זה שמתאים ל P'. במידה והטענה אינה נכונה, נמקו מדוע.

(1) קיימת P עבורה P.Size = 10 כך ש P'.T[P'.Size] = x.
(2) קיימת P עבורה P.Size = 10 כך ש P'.T[2] = x.
(3) קיימת P עבורה P.Size = 10 כך ש P'.T[3] = x.

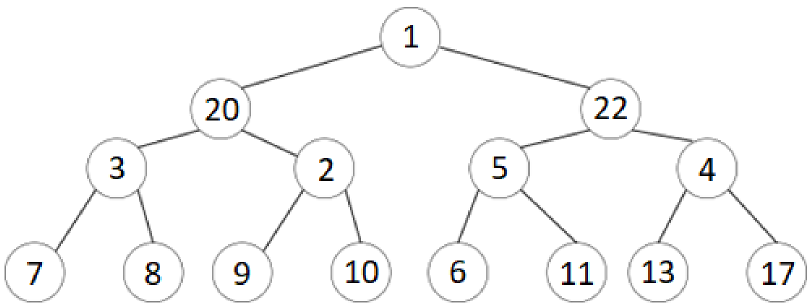
ב. תהי P ערימת מינימום המכילה מספרים <u>השונים זה מזה</u>, ונתון P.Size>5. נניח שקוראים ל DeleteMin(P) לקבלת הערך המינימלי, שנסמנו ב x, ואז נקרא ל Insert(x,P). האם P.T יראה בהכרח אותו דבר כפי שהיה לפני ביצוע שתי פעולות אלו?
אם תשובתכם חיובית, אז עליכם להסביר מדוע. אם תשובתכם שלילית אז עליכם לתאר במדויק דוגמה נגדית, כלומר, לרשום מהו המערך P.T לפני ביצוע שתי הפעולות, ולאחר כל אחת מהן.

שאלה 4

בשאלה זו נעסוק במבנה נתונים לו נקרא **ערימת מינמקס**. לערימת מינמקס P השדות הבאים:
- P.T – מערך בגודל MAXSIZE בו שמורים איברי הערימה. נניח בשאלה שכל האיברים הם מספרים שלמים <u>שונים זה מזה</u>.
- P.Size – מספר האיברים במערך P.T.

בדומה לערימה רגילה, המערך P.T מייצג עץ בינארי בו כל הרמות למעט האחרונה חייבות להיות מלאות, והרמה האחרונה מצופפת שמאלה (כך שהעלה האחרון ברמה האחרונה נמצא במקום P.Size במערך P.T). כמו כן, הילדים של P.T[i] נמצאים ב P.T[2i] ו P.T[2i+1], ושורש הערימה הינו P.T[1]. נגדיר **עומק** של קדקוד v בעץ הוא אורך המסלול (מספר הקשתות) מהשורש ל v. עומק השורש הוא 0, עומק הילדים של השורש הוא 1, עומק הנכדים 2, וכך הלאה. <u>בניגוד לערימה רגילה</u>, בערימת מינמקס מתקיימות התכונות הבאות לגבי הערכים של האברים:
- כל איבר שנמצא בעומק **זוגי** בעץ (בפרט השורש) **קטן** מכל האברים האחרים בתת העץ שלו.
- כל איבר שנמצא בעומק **אי זוגי** בעץ **גדול** מכל האיברים האחרים בתת העץ שלו.

דוגמא: P.T = [1,20,22,3,2,5,4,7,8,9,10,6,11,13,17], P.Size = 15, מייצגים את הערימה:



א. נניח שיש לפחות איבר אחד בערמה (כלומר, P.size>0), אך לא בהכרח נתון שיש יותר מאיבר יחיד. כתבו פסאודו-קוד לשתי פרוצדורות: הראשונה מקבלת כקלט ערימת מינמקס P ומחזירה את האיבר המינימלי בה, והשנייה מקבלת כקלט ערימת מינמקס P ומחזירה את האיבר המקסימלי בה. על שתי הפונקציות לרוץ בזמן $\Theta(1)$. שימו לב שיש להחזיר את ערכו של האיבר מבלי להוציא אותו מהערימה.

ב. נניח שהערימה כוללת לפחות 100 איברים.
(1) באילו אינדקסים במערך P.T יכול להיות האיבר השני הכי קטן בערימה? (האיבר השני במיון האיברים בערימה מקטן לגדול)
(2) באילו אינדקסים במערך P.T יכול להיות האיבר השלישי הכי גדול בערימה? (האיבר השלישי מהסוף במיון האיברים בערימה מקטן לגדול)

ג. הפרוצדורה Sorted-Array-to-minmax-Heap מקבלת כקלט מערך **ממוין** A בגודל n וכן ערימה ריקה P עם מערך P.T בגודל n, ומכניסה את הערכים שבמערך A לערימה P כך שתיווצר ערימת מינמקס חוקית.
הפונקציה משתמשת בפרוצדורת עזר depth, המקבלת כקלט ערך שלם i בין 1 ל-n, ומחזירה את העומק של הקדקוד המתאים ל P.T[i] בעץ הערימה (לדוגמא depth(2) = depth(3) = 1).
השלימו את הקוד:

```
Sorted-Array-to-minmax-Heap(A, P, n) {
    p1 := ____________________________________________
    p2 := ____________________________________________
    for ( i = 1 to n )  {
        if ( depth(i) mod 2 = 0 )  {
            P.T[i]=A[_________________]
            ___________________________________________
        }
        else  {
            P.T[i]=A[_________________]
            ___________________________________________
        }
    }
}
```

ד. נתונה ערימת מינמקס חוקית P ובה n>4 איברים. עקב תקלה התחלפו 2 איברים ברמה התחתונה של הערימה, האם הערימה החדשה היא בהכרח ערימת מינמקס חוקית? אם תשובתכם חיובית אז עליכם להסביר מדוע (על בסיס תכונות הערימה), ואם תשובתכם שלילית אז עליכם לתת דוגמה נגדית.

<u>שאלה 5</u>

שאלה זו עוסקת בקוד הופמן.
א. לאחר הרצת אלגוריתם קוד הופמן על ה-א"ב a,b,c,d,e,f, קיבלנו את הקוד C הבא:
C(a)=1, C(b)=01, C(c)=001, C(d)=0001, C(e)=00001, C(f)=00000.
רשמו ערכי שכיחויות (באחוזים) עבור כל אחת מהאותיות כך שהרצת האלגוריתם יכולה לתת קוד זה.

ב. יהי אלפבית המכיל 4 אותיות (כולן עם שכיחות חיובית). נניח שהרצנו את אלגוריתם הופמן למציאת קוד רישא בינארי אופטימלי על ה-א"ב A=(a,b,c,d), וקיבלנו את הקוד הבא: C(a)=00, C(b)=01, C(c)=10, C(d)=11.
עבור כל אחת מהטענות הבאות, ציינו האם היא בהכרח נכונה או לא בהכרח נכונה, והסבירו את תשובתכם.

(1) קיימת אות שהשכיחות שלה גדולה מחצי.
(2) קיימות לפחות 3 אותיות שהשכיחות של כל אחת מהן קטנה או שווה ל-1/3.