

## תרגיל 6

1. אורי ורוני משחקים משחק קלפים. כל אחד מהם קיבל 3 קלפים.  
 אורי קיבל את הקלפים "1", "2" ו "4" ורוני קיבלה את הקלפים "2", "3" ו "3".  
 כעת על כל אחד מהם לבחור קלף באקראי מ 3 קלפיו. הילד לו יצא הקלף הנמוך יותר,  
 יעביר לשני מספר קלפים כהפרש הערכים על שני הקלפים שיבחרו (ערך גבוה פחות ערך  
 נמוך). אם לשני הילדים יצא אותו קלף, כל ילד ימסור את הקלף שלו לקופה.  
 נגדיר
- $X$  – מספר הקלפים בידי אורי בסוף המשחק,  
 $Y$  – מספר הקלפים בידי רוני בסוף המשחק.
- א. מהי ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו  $Y$  ?  
 ב. האם  $X$  ו  $Y$  תלויים?  
 ג. חשב את התפלגות  $Y | X = 2$ .  
 ד. מהי תוחלת היחס בין מספר הקלפים של אורי בסוף המשחק לזה של רוני, כלומר
- $$E\left(\frac{X}{Y}\right) ?$$
2. מתוך קבוצת הילדים {אבי, אבנר, אורי, בני, ברוך, גדי, גל, דן, הרצל} בוחרים באקראי 5 ילדים.  
 נגדיר
- $X$  – מספר הילדים שנבחרו ששמו מתחיל באות 'א',  
 $Y$  – מספר הילדים שנבחרו ששמו מתחיל באות 'ב'.
- א. מהי ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו  $Y$  ?  
 ב. זהה את ההתפלגויות השוליות של  $X$  ו  $Y$  כהתפלגויות מיוחדות שלמדנו.  
 ג. חשב תוחלת ל  $X$  ול  $Y$ .  
 ד. האם  $X$  ו  $Y$  תלויים?  
 ה. חשב את ההסתברות שיבחר ילד יחיד ששמו מתחיל באות 'ב' אם ידוע שנבחר ילד יחיד  
 ששמו מתחיל באות 'א'.

3. מטילים קוביה שוב ושוב באופן בלתי תלוי.  
נגדיר

$X$  - מספר ההטלות עד שמתקבל לראשונה 6,

$Y$  - מספר ההטלות עד שמתקבל לראשונה מספר זוגי קטן מ 6.

א. מצא נוסחה ל  $P(X = k, Y = l)$  פעם עבור  $k < l$ , פעם עבור  $k > l$  ופעם עבור  $k, l = 1, 2, 3, \dots$

$$k = l$$

ב. מהי התפלגות  $W = \min(X, Y)$ ? חשבו  $E(W)$ .

4. יהיו  $X, Y \sim B(n, p)$  ב"ת.

חשב את  $P(X = k | X + Y = m)$  עבור  $m = 0, \dots, 2n$  ועבור

$k = \max(0, m - n), \dots, \min(n, m)$  והראה ש  $X | X + Y = m$  מתפלג היפרגאומטרית.

5. ידוע כי מספר הפונים לשירות לקוחות מתפלג פואסונית ושבמשך 8 שעות משמרת מגיעות בממוצע 200 פניות.

א. מהי ההסתברות שב 12 הדקות הראשונות במשמרת הייתה לפחות פנייה אחת?

ב. 1. יהיו  $X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2)$  ב"ת.

חשב את  $P(X_1 + X_2 = k)$  והסק מכך ש  $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$   $k = 0, 1, 2, \dots$

2. הוכח באינדוקציה שאם נתונים  $X_i \sim P(\lambda_i), i = 1, \dots, m$  ב"ת

אז  $\sum_{i=1}^m X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)$  כלומר שההתפלגות הפואסונית היא אדיטיבית.

ג. יהיו  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$  ב"ת.

חשב את  $P(X = k | X + Y = m)$  עבור  $m = 0, 1, 2, \dots$  ועבור  $k = 0, \dots, m$

והראה ש  $X | X + Y = m$  מתפלגת בינומית.

ד. אם ידוע שבשעתיים הראשונות למשמרת היו 75 פניות, מה הסיכוי שבשעה הראשונה היו 50 פניות?

6. טבח מתבקש לאפות עוגה אחת עם חמש ביצים. הוא שובר את הביצים, אחת אחת, אל קערה. בכל שלב, אם ביצה מקולקלת הוכנסה לקערה, הוא שופך את כל הביצים שבקערה, מפסיק את האפייה ופונה לבישול יתר המנות. כל ביצה עולה 30 אגורות. ההסתברות שביצה מקולקלת היא 0.05. מהי התפלגות ההפסד בשיטה זו ומהו ההפסד הצפוי בשיטה זו? (אין כל הפסד אם כל חמש הביצים בסדר והעוגה נאפית).