מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2022ב **מועד אחרון להגשה:** 3.6.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $\left(f_n(x)\right)$ סדרת פונקציות המוגדרות ב- $\mathbb{R}$ על-ידי $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

א. בדקו כי $\left(f_n\right)$ מתכנסת נקודתית ב- $\mathbb{R}$.

ב. האם $\left(f_n\right)$ מתכנסת במידה שווה ב- $\mathbb{R}$? נמקו!

ג. האם מתקיים השוויון $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx$? נמקו!

שאלה 2 (20 נקודות)

נניח כי סדרת הפולינומים $\left(p_n(x)\right)$ מתכנסת לפונקציה $f(x)$ במידה שווה ב- $\mathbb{R}$.

א. הראו שקיים N כך שלכל $m > n \ge N$ ההפרש $p_n(x) - p_m(x)$ הוא פונקציה קבועה ב- $\mathbb{R}$.

הדרכה: שימו לב שהפרש שני פולינומים הוא תמיד פולינום והוכיחו את הטענה בדרך השלילה בעזרת משפט קושי 6.6.

ב. הסיקו מתוצאת סעיף א ש- $f(x)$ פולינום.

הדרכה: מסעיף א נובע שהחל מ- N , כל הפולינומים שונים זה מזה בקבוע בלבד, כלומר, $p_n(x) = p_N(x) + c_n$ לכל $n > N$.

הערה: מעניין שאם נדון בקטע סופי במקום $\mathbb{R}$, התוצאה תשתנה באופן דראסטי: לכל פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ קיימת סדרת פולינומים שמתכנסת לפונקציה זו במידה שווה ב- $[a,b]$ (זהו תוכן של משפט הקירוב של ויירשטראס, שהוכחתו חורגת ממסגרת הקורס שלנו).

שאלה 3 (25 נקודות)

עבור כל אחד מהטורים הבאים בדקו אם הוא מתכנס במ"ש בתחום הנתון.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x\ln x\right)^{n}$ ב- $(0,1]$.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\left((n+1)\ln\frac{n^2+x^2}{n^2}-n\ln\frac{(n-1)^2+x^2}{(n-1)^2}\right)$ ב- $\mathbb{R}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}kn^k\right)x^n$ בתחום התכנסותו, כאשר m מספר טבעי קבוע.

שאלה 4 (20 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. הפונקציה $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^3x)}{2^n}$ בעלת נגזרת רציפה ב- $\mathbb{R}$.

ב. $\int_0^3\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n\cdot 9^n}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^2}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$, ולכל x בתחום זה חשבו את סכום הטור.

שאלת רשות

סדרת הפונקציות $\left(f_n(x)\right)$ מוגדרת לכל $x\geq 0$ ולכל n טבעי על-ידי $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{\sqrt{n+x^3}}$.

בדקו אם מתקיים השוויון $\int_0^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)dx$.

שימו לב שמדובר באינטגרל מוכלל, ולכן לא ניתן להשתמש ישירות במשפט 6.8.