

חשמל ומגנטיות - תרגיל 9

להגשה עד ה- 25.5.17 בשעה 3:00 בתאריך - שלוש לפנות בוקר בלילה שבין חמישי לשישי

0.

כהקדמה לתרגיל ניתן שאלה לדוגמה עם פתרון. נדון למשל בפתרון עבור קבל לוחות בשטח A ומרחק d . בצמוד ללוח התחתון ועד גובה $h < d$ מונחת שכבת חומר דיאלקטרי ϵ_1 . נחשב את קיבול הקבל.

פתרון-

נציב על הלוח התחתון מטען Q ועל העליון $-Q$ ונרצה לחשב את הפרש המתחים בין הלוחות. כלומר נצטרך למצוא את השדה החשמלי. הקושי נעוץ בעובדה שמעבר למטען שהנחנו - המטען החופשי, מושרה בחומר הדיאלקטרי מטען קשור שאיננו יודעים מהוא, עקב הקיטוב. החומר הדיאלקטרי מתקטב עקב השדה הכולל שבתוכו לפי הקשר $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}$ (הקשור) עלינו לפתור בעיה סלף קונסיסטנטית - מהוא שדה הקיטוב המושרה \vec{P} כך שהשדה הכולל \vec{E} - זה עקב המטען החופשי על הלוחות + זה הנתרם משדה הקיטוב עצמו \vec{P} - משרה שדה קיטוב שכזה. באופן כללי זו עלולה להיות בעיה מסובכת שמצריכה ניחושים. כיוון שהתפלגות המטען הקשור היא חלק מהנעלמים בבעיה, לעתים פותרים בעיה כזו בעזרת שיטת המראות - מנחשים מטעני מראה פשוטים שיתנו את השדה הרצוי. אולם בבעיות עם גאומטריה פשוטה כמו זו שלנו, ניתן להיעזר בשדה ההעתק \vec{D} . המשוואה -

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

קושרת את שדה ההעתק ישירות למטענים החופשיים (הידועים) בבעיה, ונראה שניתן לחלץ ממנה ישירות את שדה ההעתק - וכך למצוא את יתר השדות.

באופן כללי זה לא נכון, ואנו מביאים כאן את האזהרה מהתרגול -

!!!!!!אזהרה חמורה!!!!!!



Hermann von Helmholtz 1821-1894

הקשר בין שדה ההעתק למטענים החופשיים נראה כמו הקשר הרגיל של חוק גאוס, שקושר את השדה חשמלי והמטען בבעיה "רגילה" (ללא קיטוב).
אבל - זה לא אומר ששדה המעתק בנוכחות התפלגות מטען חופשי ρ_f יהיה שווה לשדה החשמלי שהיה בבעיה שבה אותה צפיפות מטען $\rho = \rho_f$.
ההסבר נעוץ בעובדה שהמשוואה עבור שדה ההעתק נותנת לנו מידע רק עבור הדיורגנץ שלו.
עבור שדה חשמלי זה הספיק בכדי לקבוע ביחידות את השדה במרחב, כיוון שהרוטור שלו היה זהותית אפס במרחב $\nabla \times E = 0$.
למעשה, הסתמכנו במובלע בתכונה זו כדי לחלץ את השדה החשמלי מתוך חוק גאוס.
הרוטור של שדה ההעתק, אינו בהכרח אפס, $\nabla \times D = \nabla \times P \neq 0$

ולכן הוא אינו נקבע ביחידות ע"י המשוואה הדיורגנטית שניסחנו! הסיבה לכך נעוצה ב -

משפט הפירוק של הלמהולץ (1867) - בהנתן הדיורגנץ וגם הרוטור של שדה וקטורי במרחב, השדה נקבע ביחידות, עד כדי קבוע. (במידה והדיורגנץ והרוטור נתונים על תחום עם שפה, יש לפרט תנאי שפה מתאימים). יש צורך בשני סוגי המשוואות האלו כדי לקבוע את השדה ביחידות. למעשה המשפט אומר אף יותר מזה - כל שדה ניתן לכתיבה כסכום של שני שדות, לאחד דיורגנץ אפס (שדה סולנואידי), ולשני רוטור אפס (שדה אירוטציוני). כך שהמשוואה הדיורגנטית על שדה ההעתק קבעה רק את הרכיב האירוטציוני בפירוק, אבל לא את הרכיב הסולנואידי.

!!!!!!סוף אזהרה חמורה!!!!!!

כאמור, עבור בעיות עם גאומטריה פשוטה זו לא צריכה להיות בעיה, כיוון שלעיתים ניתן להסיק שהרוטור של שדה ההעתק יהיה אפס וזאת על סמך שיקולי סימטריה (בלי לחשבו במפורש).

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

נקבל ש -

$$\nabla \times D = (\nabla \epsilon) \times E$$

אבל בבעיה שלנו המקדם הדיאלקטרי משתנה רק בכיוון הניצב ללוחות הקבל. בנוסף, מהגאומטריה של הבעיה ברור לנו (משיקולי סימטריה) שהשדה החשמלי מכוון רק בכיוון זה. כלומר המכפלה הוקטורית לעיל כן מתאפסת. כלומר בגאומטריה הנתונה שדה ההעתק הוא כן שדה משמר. ומכאן אנו מסיקים ששדה ההעתק בבעיה הוא בדיוק השדה החשמלי (עד כדי פקטור ϵ_0) שהיה נוצר מהמטענים החופשיים בלבד (שעל לוחות הקבל) ללא נוכחות החומר הדיאלקטרי. כלומר בבעיה שלנו:

$$\vec{D} = \sigma \hat{z} \text{ כאשר } \sigma = \frac{Q}{A}$$

ומכאן אנו מחלצים ישירות את השדה החשמלי בבעיה - מתוך הקשר $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ באזור שמעל החומר הדיאלקטרי נציב $\epsilon = \epsilon_0$ ובאזור שבתוך החומר הדיאלקטרי נציב $\epsilon = \epsilon_1$. כלומר יש קפיצה בערך השדה (שמתאימה בדיוק לצפיפות המטען המצטברת בשפת החומר המקוטב).

$$V = \frac{Q}{A} \left(\frac{h}{\epsilon_1} + \frac{d-h}{\epsilon_0} \right) \text{ - בין הלוחות}$$

ומכאן נחלץ את הקיבול -

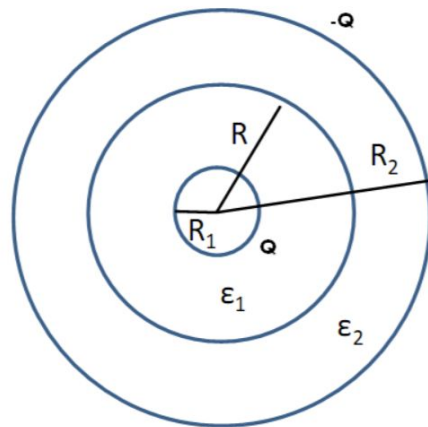
$$C = \frac{Q}{V} = \dots$$

1.

נתון קבל כדורי המורכב משתי קליפות כדוריות, כאשר התווך ביניהם מחולק לשניים, ובכל תחום מקדם דיאלקטרי שונה ϵ_1, ϵ_2 .

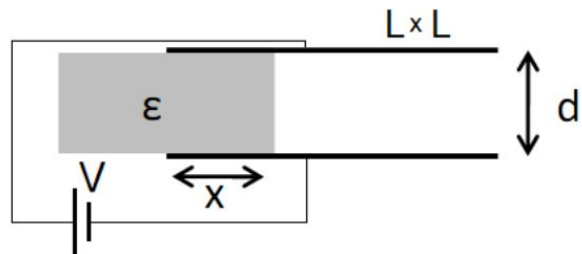
(א) מה קיבול הקבל?

(ב) מהו המטען המושרה על שפות החומרים הדיאלקטריים?



2.

קבל לוחות ריבועי, בעל אורך ורוחב L ומרחק d בין לוחותיו ($d \ll L$) מוחזק במתח קבוע V . אל החלל שבין לוחות הקבל מתחילים להשחיל פיסת חומר דיאלקטרי עם מקדם ϵ .



(א) מהו קיבול המערכת כפונקציה של x , העומק עד אליו מושחל החומר הדיאלקטרי?

(ב) מהי האנרגיה האצורה במערכת כפונקציה של x ?

(ג) מה גודלו וכיוונו של הכח החשמלי שפועל על פיסת החומר הדיאלקטרי? האם הקבל מושך את החומר פנימה או דוחף אותו החוצה?

3. נתון כדור בעל רדיוס R שמרכזו בראשית וצפיפות הדיפול הנפחית שלו נתונה ע"י:

$$P(\vec{r}) = \alpha(R - r)\hat{z}$$

כאשר r הוא המרחק ממרכז הכדור.

- a. מהי צפיפות המטען הקשור הנפחית בתוך הכדור, ומהי צפיפות המטען הקשור המשטחית על שפת הכדור?
- b. מה הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב?
- c. מהו השדה החשמלי בתוך הכדור? האם הוא רציף על שפת הכדור?

4.

נתון כדור ברדיוס R העשוי מחומר דיאלקטרי, עם מקדם דיאלקטרי ϵ . מטען נקודתי q מונח במרכז הכדור.

- a. מהו השדה החשמלי בכל המרחב?
- b. מהי צפיפות המטען המושרית בכל נקודה בנפח הכדור?
- c. מהו סך כל המטען המושרה על שפת הכדור?