חשמל ומגנטיות - תרגול 2

שדה חשמלי

בשבוע שעבר דיברנו על הכח שפועל על מטען בוחן q בהשפעת מטען נקודתי אחר או מערכת של מספר מטענים, בדידה או רציפה. הכח הפועל על מטען הבוחן הוא סכום וקטורי של הכח שמפעיל כל מטען נקודתי או אלמנט מטען על מטען הבוחן.

מערכת המורכבת מ-N מטענים נקודתיים Q_i במיקומים $\bar{r}_i$ מפעילה על מטען q הנמצא במיקום $\bar{r}$ כח:

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{KqQ_i}{|\bar{r}-\bar{r}_i|^3}(\bar{r}-\bar{r}_i)$$

לעתים קרובות, למשל אם מערכת המטענים Q_i היא קבועה ואנו רוצים לדעת את הכח שיפעל בנקודות שונות במרחב, מגדירים **שדה חשמלי:**

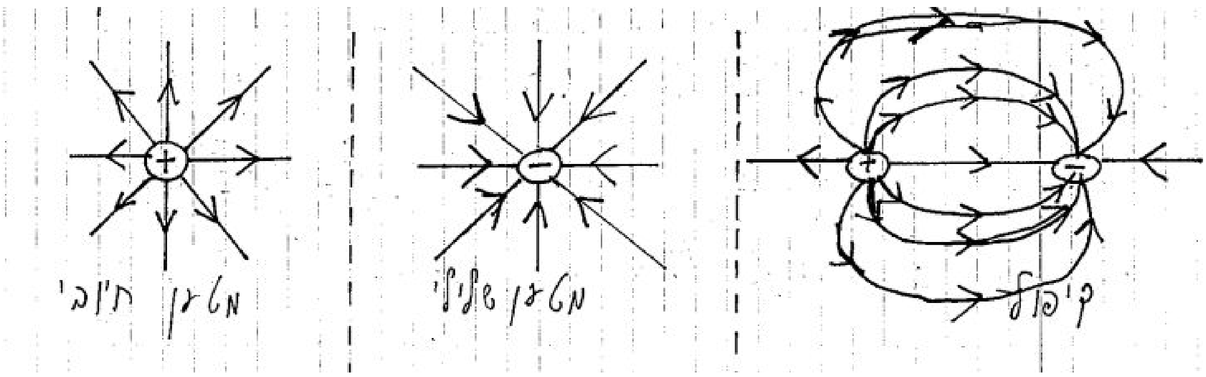
$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{KQ_i}{|\bar{r}-\bar{r}_i|^3}(\bar{r}-\bar{r}_i)$$

זו פונקציה וקטורית של המרחב. כעת, הכח שיפעל על מטען q במיקום $\bar{r}$ הינו:

$$\bar{F} = q\bar{E}(\bar{r})$$

היחידות של השדה הינן כח חלקי מטען.

נוח לתאר את השדה החשמלי באופן ויזואלי ע"י **קווי שדה:** קווים המקבילים לשדה, מצביעים ממטענים חיוביים ואל מטענים שליליים, כך שניתן לומר שמטענים חיוביים הינם מקורות לשדה (כמו ברז) בעוד מטענים שליליים מהווים ניקוז, כמו פתח הניקוז בכיור. צפיפות הקווים מעידה על עוצמת השדה.



דוגמא פשוטה לחישוב שדה (מטענים בדידים)

מטען בגודל Q נמצא בראשית. ב- $y=a$ נמצא מטען q וב- $y=-a$ גם נמצא מטען q.

1. חשבו את השדה החשמלי במישור xy.
2. מהו,בקירוב, השדה בנקודות רחוקות מאוד מהראשית (ביחס ל-a)? (מצאו את שני הסדרים המובילים ב- $a/\sqrt{x^2+y^2}$)
3. מה קורה אם Q=-2q ?

פתרון:

1. נחשב את השדה בנקודה כללית $\bar{r}=(x,y)$. התרומה של המטען Q:

$$\bar{E}_1(\bar{r}) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

התרומה של המטען הנמצא ב-y=a:

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \frac{Kq}{(x^2+(y-a)^2)^{3/2}}(x\hat{x} + (y-a)\hat{y})$$

התרומה של המטען הנמצא ב-y=-a:

$$\bar{E}_3(\bar{r}) = \frac{Kq}{(x^2+(y+a)^2)^{3/2}}(x\hat{x} + (y+a)\hat{y})$$

השדה הכולל בנקודה $\bar{r}$ הינו:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_1(\bar{r}) + \bar{E}_2(\bar{r}) + \bar{E}_3(\bar{r})$$

2. כעת נניח כי $r = \sqrt{x^2+y^2} >> a$. נפתח את $\bar{E}_2(\bar{r})$ לסדר שני ב-$\varepsilon \equiv a/r$:

תחילה, נראה איך מפתחים לסדר שני פונקציה מהצורההבאה:

$$f(x) = \frac{1}{(1+bx+x^2)^{3/2}} \approx 1 - 3/2(bx+x^2) + 15/8(bx+x^2)^2 \approx 1 - (3/2)bx + ((15/8)b^2 - 3/2)x^2 + O(x^3)$$

מה שחשוב, הוא שאספנו את כל התרומות על סדר ריבועי ב-x. נציין שהאיבר אחרי השוויון השני מכיל איברים גם מסדר שלישי ורביעי, אבל לא את כל האיברים האלה - אם נרצה פיתוח עד סדר שלישי או רביעי נאלץ להוסיף עוד איברים.

כעת, נציב בביטוי שלנו לשדות: $b = \pm 2y/R$ ו- $\varepsilon = a/R$

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{1}{(1-\frac{2ay}{x^2+y^2}+\frac{a^2}{x^2+y^2})^{3/2}}(x\hat{x} + (y-a)\hat{y}) \simeq \frac{Kq}{r^3}\left[1 + 3\frac{y}{r}\varepsilon + \left(\frac{15}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \frac{3}{2}\right)\varepsilon^2\right](x\hat{x} + (y-a)\hat{y}) =$$

$$\bar{E}_2(\bar{r}) = \frac{Kq}{r^2}\left[\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right) + \left(-\hat{y} + 3\frac{xy}{r^2}\hat{x} + 3\frac{y^2}{r^2}\hat{y}\right)\varepsilon + \left\{-3\frac{y}{r}\hat{y} + \frac{3}{2}\left(5\left(\frac{y}{r}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right)\right\}\varepsilon^2\right]$$

ובאותו אופן:

$$\bar{E}_3(\bar{r}) = \frac{Kq}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{1}{(1+\frac{2ay}{x^2+y^2}+\frac{a^2}{x^2+y^2})^{3/2}}(x\hat{x} + (y+a)\hat{y}) \simeq \frac{Kq}{r^3}\left[1 - 3\frac{y}{r}\varepsilon + \left(\frac{15}{2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \frac{3}{2}\right)\varepsilon^2\right](x\hat{x} + (y+a)\hat{y}) =$$

$$\bar{E}_3(\bar{r}) = \frac{Kq}{r^2}\left[\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right) + \left(\hat{y} - 3\frac{xy}{r^2}\hat{x} - 3\frac{y^2}{r^2}\hat{y}\right)\varepsilon + \left\{-3\frac{y}{r}\hat{y} + \frac{3}{2}\left(5\left(\frac{y}{r}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y}\right)\right\}\varepsilon^2\right]$$

נשים לב שכאשר מחברים את $\bar{E}_2(\bar{r})$ עם $\bar{E}_3(\bar{r})$, האיבר שפרופורציונאלי ל- ε מתאפס! כלומר בביטוי הכולל, ישנו איבר שהוא סדר אפס ב- ε ואיבר שהינו סדר שני ב- ε, אבל אין איבר שהוא סדר ראשון ב- ε.

השדה המתקבל בפיתוח עד סדר שני:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_1(\bar{r}) + \frac{2Kq}{r^3}(x\hat{x} + y\hat{y} - \frac{3a^2y}{r^2}\hat{y} + \frac{3}{2}\left(5\left(\frac{y}{r}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2(x\hat{x} + y\hat{y})) =$$

$$= \left(\frac{KQ}{r^2} + \frac{2Kq}{r^2}\right)\hat{r} + 3(5sin^2(\theta) - 1)\frac{Kqa^2}{r^4}cos(\theta)\hat{x} + (15sin^2(\theta) - 9)\frac{Kqa^2}{r^4}sin(\theta)\hat{y}$$

θ כאן היא הזווית של קואורדינטות פולריות.

בביטוי שקיבלנו ישנו איבר הנראה כמו השדה של המטען הכולל, אילו היה מרוכז בראשית. איבר זה דועך עם המרחק מהראשית כמו $\frac{1}{r^2}$. בנוסף, ישנם איברים שנופלים מהר בהרבה, כמו $\frac{1}{r^4}$. כל עוד המטען הכולל שונה מאפס, איברים אלה אכן זניחים ביחס לאיבר הראשון במרחק גדול מהראשית. אבל כל זה משתנה כאשר המטען הכולל מתאפס, כמו בסעיף הבא.

3. אם Q=-2q האיבר הראשון מתאפס, ונשארים רק האיברים שנופלים כמו המרחק בחזקה רביעית. שדה כזה נקרא **שדה קוואדרופול**. שימו לב שהוא נופל מהר יותר משדה דיפולי, שהינו פרופורציונאלי ל- $\frac{1}{r^3}$. אנו ניפגוש מושגים אלו שוב בהמשך הקורס.

דוגמא: טבעת עם פיסה חסרה

נתונה טבעת דקה טעונה בצפיפות אורכית אחידה λ, ורדיוסה R. מורידים מהטבעת פיסה באורך s. חשב את השדה בנקודה הנמצאת על ציר הסימטריה של הטבעת, כאשר נתון ש- $s << R$.

פתרון: בשעור ראיתם את חישוב השדה עקב טבעת טעונה לאורך ציר הסימטריה שלה, ע"י אינטגרציה של השדות הנתרמים ע"י אלמנטי אורך של הטבעת:

$$\bar{E}(z) = \frac{KQz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \ , \ Q = 2\pi R\lambda$$

כדי למצוא את השדה במקרה שלנו, ניתן להשתמש בתוצאה זו, ובעקרון הסופרפוזיציה: השדה של טבעת עם פיסה חסרה זהה לשדה של טבעת מלאה+שדה של **פיסה עם סימן הפוך** הממוקמת בדיוק במקום הפיסה החסרה.

בקירוב בו אנו עובדים, ניתן להתייחס לפיסה כנקודתית, ונבחר מערכת צירים כך שהפיסה השלילית נמצאת בחיתוך החיובי של הטבעת עם ציר x. השדה הוא אם כן:

$$\bar{E}(z) = \bar{E}_{whole\ ring} + \bar{E}_{negative\ piece} = \frac{KQz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \quad - \frac{K\lambda s}{(R^2+z^2)^{3/2}}(-R\hat{x}+z\hat{z})$$

בדיקה: על חלקיק שנציב ב- $z = 0$ יפעל כח בכיוון החיובי של ציר x, לעבר הפיסה החסרה.

שדה בתוך קליפה כדורית טעונה

תרגיל: הראו שהשדה בתוך קליפה כדורית טעונה בצפיפות מטען אחידה הינו אפס בכל מקום.

פתרון: תחילה נגדיר מושג חשוב: **זווית מרחבית**

באופן דומה לעובדה שבמעגל ישנו יחס לניארי בין זווית פנימית בין שני רדיוסים לבין אורך הקשת עליה הזווית נשענת (אורך הקשת $s = \theta R$ כאשר R הוא רדיוס המעגל) היינו רוצים להגדיר זווית מרחבית בתלת מימד.

נחשוב על כדור בעל רדיוס R, ונבחר שטח חלקי שלו בגודל A. הזווית המרחבית המתאימה לשטח החלקי הזה מוגדרת כך: $\Omega \equiv A/R^2$ או $A = \Omega R^2$. Ω נעה בין 0 (נקודה על הכדור) ל- 4π (הכדור כולו).

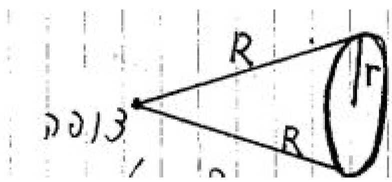
בקואורדינטות כדוריות, **אלמנט זווית מרחבית** המכיל את הזוויות בטווחים $[\theta, \theta + d\theta]$, $[\phi, \phi + d\phi]$ הינו

$$d\Omega = sin(\theta)d\theta d\phi$$

והזווית המרחבית של התחום $[\theta_1, \theta_2]$, $[\phi_1, \phi_2]$ הינה:

$$\Omega = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} sin(\theta)d\theta d\phi$$

דוגמא: מהי הזווית המרחבית אותה תופסת דיסקה בעלת רדיוס r, עבור צופה הנמצא במרחק R מקצוות הדיסקה, על ציר הסימטריה שלה?



פתרון: נדמיין כדור בעל רדיוס R שמרכזו מתלכד עם הצופה. הדיסקה מסתירה פיסה בצורת כיפה, שהזווית המרחבית שנשענת עליה היא הזווית המרחבית שאנו מחפשים.

מחצית זווית הפתיחה של החרוט שבציור הינה $\theta_0 = sin^{-1}(r/R)$. ניעזר בקואורדינטות כדוריות, כאשר ציר z מתלכד עם ציר הסימטריה של הדיסקה:

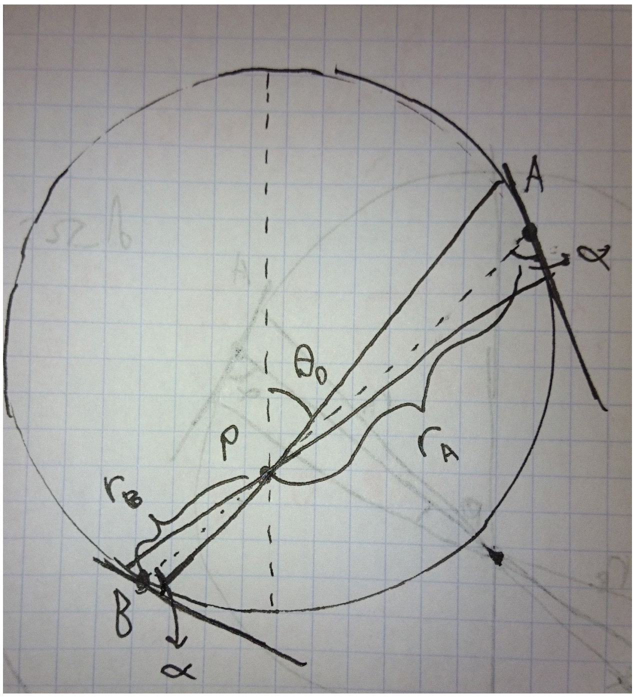
$$\Omega = \int_0^{\theta_0}\int_0^{2\pi} sin(\theta)d\theta d\phi = 2\pi(1 - cos(\theta_0)) = 2\pi(1 - \sqrt{1 - sin^2(\theta_0)}) = 2\pi(1 - \sqrt{1 - (r/R)^2})$$

כלומר, $0 \le \Omega \le 2\pi$, ככל שהצופה מתקרב לדיסקה, הדיסקה מתקרבת לכסות מחצית משדה הראיה שלו. ככל שהוא מתרחק, היא תופסת חלק קטן יותר משדה הראיה.

נחזור לעניין הקליפה הכדורית הטעונה.

נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס R, טעונה בצפיפות משטחית קבועה σ . הראו שהשדה מתאפס בכל נקודה בתוכה.

הוכחה: נבחר נקודה כלשהי בתוך הקליפה, נסמנה p. נסובב את הקליפה כך ש-p תימצא על ציר z (או לחילופין, נגדיר את ציר z כך שיעבור ב-p).



נבחר זווית θ_0 כלשהי, ונעביר מיתר דרך הנקודה p שיוצר זווית θ_0 עם ציר z. נסמן את נקודות המפגש שלו עם הקליפה ב-A,B. נסמן גם את הזוית בין המיתר שהעברנו למשיקים בנקודות A,B (שוות לפי משפט מגיאומטריה אוקלידית) ב-α. המרחקים בין p לבין A,B הם r_A, r_B . סביב המיתר נפתח שני חרוטים צרים מאוד (כלומר, בעלי זווית פתיחה קטנה מאוד). החיתוך של החרוטים עם הקליפה הכדורית מגדיר שני משטחים קטנים $dS_A,\ dS_B$.

מכיוון שהמשטחים קטנים מאוד, השדות שהם יוצרים ב-p הם כמו של מטענים נקודתיים בקירוב:

$$\bar{E}_A = \frac{K\sigma dS_A}{r_A^2}\hat{r}_A\ ,\ \bar{E}_B = \frac{K\sigma dS_B}{r_B^2}\hat{r}_B$$

לפי בניית החרוטים מתקיים $\hat{r}_A = -\hat{r}_B$. סכום השדות הללו:

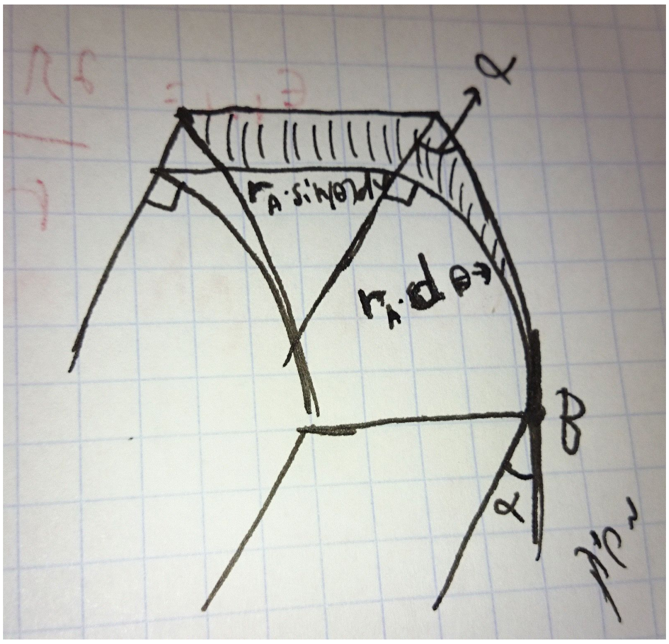
$$\bar{E}_A + \bar{E}_B = K\sigma\left(\frac{dS_A}{r_A^2} - \frac{dS_B}{r_B^2}\right)\hat{r}_A$$

נותר להראות ש $\frac{dS_A}{r_A^2} = \frac{dS_B}{r_B^2}$.כדי לעשות זאת נחשב את ds_A .

תחילה, נסמן את הזווית המרחבית של החרוט (זהה גם לשני) $d\Omega = sin(\theta_0)d\theta d\phi$.

נחשוב על כדור דמיוני בעל רדיוס r_A שמרכזו ב-p. בכדור כזה, אלמנט הזווית המרחבית היה נשען על אלמנט שטח $(r_A d\theta)(r_A sin(\theta_0)d\phi) = r_A^2 d\Omega$ (זה קירוב של השטח הקטן ע"י שטח של מלבן למעשה). אצלנו, לעומת זאת, לא מדובר בכדור כזה, והשטח בו אנו מעוניינים הוא גדול יותר: בקירוב ע"י מלבן הצלע המאוזנת ארוכה יותר (ראו ציור, החלק בו אנו מעוניינים הוא החלק המקווקו):

$$dS_A = ((r_A/sin(\alpha))d\theta)(r_A sin(\theta_0)d\phi) = r_A^2 d\Omega/sin(\alpha)$$



באופן זהה מקבלים ש- $dS_B = r_B{}^2 d\Omega/sin(\alpha)$, ומכאן שמתקיים:

$$\bar{E}_A + \bar{E}_B = K\sigma(\frac{dS_A}{r_A{}^2} - \frac{dS_B}{r_B{}^2})\hat{r}_A = K\sigma(\ \ d\Omega/sin(\alpha) - \ \ d\Omega/sin(\alpha))\hat{r}_A = 0$$

בכך למעשה הוכחנו את הטענה: הבחירה של הנקודה p הייתה שרירותית, ולכל מיתר שנעביר דרכה נקבל שאלמנטי המטען שנמצאים בקצוותיו יוצרים שדות שמבטלים זה את זה ב-p. מכאן, שהשדה הכולל בכל נקודה בתוך הכדור הינו אפס.

שטף

עבור שדה וקטורי $\bar{F}$ (לדוגמא, שדה חשמלי) ניתן להגדיר את השטף של השדה דרך אלמנט שטח מכוון $d\bar{A}$ (וקטור שגודלו הוא גודל אלמנט השטח והכיוון הוא בניצב למשטח ובד"כ **החוצה** מהמשטח שהאלמנט הוא חלק ממנו) ע"י:

$$d\Phi = \bar{F} \cdot d\bar{A} = |\bar{F}| \cdot |d\bar{A}| cos(\theta)$$

לדוגמא, זרימה של נוזל דרך ממברנה מסויימת. כאן השדה הוקטורי הוא שדה מהירות הזרימה. השטף הינו מדד לכמות הנוזל העובר דרך הממברנה ביחידת זמן. המקסימום של נוזל ליחידת זמן יעבור אם הוקטורים מקבילים, ואפס שטף יעבור אם המשטח ניצב לזרם.

כדי לחשב את השטף הכולל של שדה $\bar{F}$ דרך משטח מסויים, יש לסכום את כל אלמנטי השטף ע"י אינטגרציה משטחית:

$$\bar{\Phi} = \iint \bar{F} \cdot d\bar{A}$$

עבור משטח סגור, אם אין בתוכו **מקורות** (נקודות מהן נובעים קווי שדה, ברז למשל) השטף הכולל דרכו יהיה אפס - כל מה שנכנס גם יוצא, ושום דבר לא נוסף.

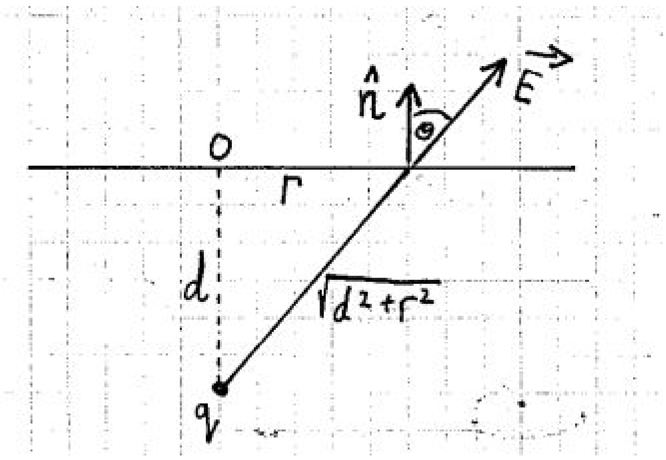
דוגמא לחישוב שטף:

נתון מטעו נקודתי q הנמצא במרחק d ממישור אינסופי. מהו שטף השדה החשמלי דרך המישור?

פתרון: השדה הוא

$$\bar{E} = \frac{Kq}{r^2}\hat{r}$$

נחלק את המישור לטבעות סביב הנקודה הקרובה ביותר למטען. כל הנקודות בטבעת נמצאות באותו מרחק מהמטען, ולכן גודל השדה עליהן אחיד.



נחשב את השטף דרך טבעת כזו, ברדיוס r:

$$d\Phi = \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{Kq}{(d^2+r^2)}2\pi r dr(\hat{r}\cdot\hat{n}) = \frac{Kq}{(d^2+r^2)}2\pi r\cdot cos(\theta)dr = \frac{Kqd}{(d^2+r^2)^{3/2}}2\pi r\, dr$$

כעת, השטף הכולל יהיה פשוט סכימה של השטפים על כל הטבעות:

$$\Phi = 2\pi Kqd\int_0^\infty \frac{rdr}{(d^2+r^2)^{3/2}} = \pi Kq\int_0^\infty \frac{2(r/d^2)dr}{(1+(r/d)^2)3/2} = \pi Kq\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{3/2}} =-2\pi Kq[(1+\infty)^{-1/2}-1] = 2\pi Kq$$

נשים לב ליחידות: לתוצאה שקיבלנו יש יחידות של שדה כפול מרחק בריבוע (אנחנו יודעים זאת מהצורה של שדה של מטען נקודתי), ואלה בדיוק היחידות של שטף חשמלי.

מושג השטף הוא הבסיס לחוק גאוס ונשתמש בו הרבה בהמשך.