# חשמל ומגנטיות - תרגול 1

## קצת נהלים

הגשת תרגילים: במודל, קבצי pdf בלבד. שעת ההגשה תהיה 3:00 בלילה בין חמישי לשישי, בשבוע לאחר שהתרגיל פורסם. כל תרגיל תורם נקודה לציון הסופי, כאשר ללא התרגילים ניתן להגיע עד 90. יהיו כנראה 12-14 תרגילים. שווה להגיש כמה שיותר תרגילים. אין חובת הגשה. אם אתם רוצים באמת להבין את הקורס ולהצליח בבחינה, פתרו את התרגילים בעצמכם! זה אפשרי...

בחנים: במהלך הסמסטר יהיו שלושה בחנים: בוחן ראשון אחרי כ-4 שבועות (בזמן תרגול), בוחן אמצע ביום שישי 19.5, ובוחן נוסף בסביבות שבוע 12. ציוני הבחנים יהוו מגן (יחשבו בציון רק אם ישפרו את הציון). משקל בוחן האמצע (אם ישפר) יהיה 10% ומשקל הבחנים האחרים (אם ישפרו) יהיה 5% כל אחד.

בנוסף, יהיה תרגיל בונוס, כנראה תרגיל נומרי, בשלב מסויים בקורס.

## I. הקדמה ורקע היסטורי:

כבר במאה השישית לפנה"ס היה ידוע שאם משפשפים ענבר בצמר, אז גופים קלים וקטנים נדבקים אליו. אם ניקח שני בלונים ונשפשף אותם בצמר הם יידבקו לתקרה. מצד שני, נקודות השפשוף יידחו זו את זו, והנקודות ההפוכות גם הן יידחו זו את זו, בעוד נקודת שפשוף בבלון אחד תמשוך את הנקודה ההפכית בבלון השני. המסקנה מכך היא שיש שני סוגי מטענים, כאשר מטענים זהים דוחים זה את זה ומטענים מנוגדים מושכים זה את זה.

על פני כדור הארץ ניתן למצוא 92 יסודות שונים. במעבדה הצליחו ליצור עוד כ- 15 יסודות נוספים. אבל מהו יסוד? כיום ידוע שהחומרים עשויים מאטומים, והם החלקים הקטנים ביותר ששומרים על תכונות מסוימות של החומר, כמו צבע ותכונות אינטראקציה עם חומרים אחרים. אולי מפתיע לגלות שכל החומרים בנויים בצורה זהה: יש להם גרעין חיובי מסיבי אבל קטן בגודלו, שמורכב מפרוטונים ונויטרונים, ומסביבו מסתובבים אלקטרונים בעלי מסה קטנה וגודל דומה לפרוטונים, והם מסתובבים במרחק עצום לעומת גודל הגרעין. סוג החומר נקבע לפי מספר הפרוטונים בגרעין.

### נתונים מספריים:

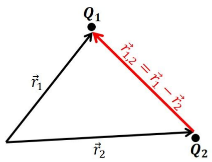
מסת האלקטרון $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} kg$ ומסת הפרוטון והנויטרון שווים בערך זה לזה וערכם $m_p \approx m_n \approx 1.67 \times 10^{-27} kg$. רדיוס האטום הקטן ביותר (מימן) הוא בערך $0.53\ Å$ ורדיוס האטום הגדול ביותר הוא בערך $2.67\ Å$ כאשר אנגסטרום אחד הוא $1\ Å = 10^{-10} m$. רדיוס הגרעין לעומת זאת הוא בערך $10^{-15} m$ לכל האטומים.

הכוח שמחזיק את האלקטרונים בתנועה הסיבובית סביב הגרעין הוא כוח המשיכה שבין המטענים שוני הסימן, ולכן ברור שמטען האלקטרונים ומטען הגרעין הפוך. החליטו לקרוא למטען האלקטרון שלילי ולמטען הפרוטון חיובי. מסתבר שלנויטרון אין מטען (הוא ניטרלי – באנגלית neutral, ומכאן שמו). מטען פרוטון ומטען אלקטרון זהה לחלוטין, כי אחרת היו כוחות אדירים שפועלים בין כל שני גופים ביקום. מטען הפרוטון

הוא $q_p \simeq 1.6 \times 10^{-19}C$, ונמדד ביחידות של קולון, שהן יחידות מטען ב- M.K.S. מטען האלקטרון מקיים $q_e = -q_p$. לפעמים נסמן את מטען הפרוטון באות $e$ (מקור האות הוא באלקטרון דווקא…)

## II. חוק קולון:

רק לקראת סוף המאה ה- 18, ב- 1785, עשה קולון מדידות נסיוניות כדי לקבל את חוק קולון המתאר את הכוחות הפועלים בין שני מטענים. הכוח הפועל על מטען $Q_1$ הנמצא בנקודה $\vec{r}_1$ בעקבות נוכחות מטען $Q_2$ בנקודה $\vec{r}_2$ הוא:




$$\vec{F} = \frac{KQ_1Q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{KQ_1Q_2}{r^2_{1,2}}\hat{r}_{1,2}$$

כאשר סימנו את הוקטור היוצא מהנקודה $\vec{r}_2$ אל הנקודה $\vec{r}_1$ בתור $\vec{r}_{1,2}$.

שמים לב שמטענים שווי סימן דוחים זה את זה, כי אם $Q_1Q_2 > 0$ אז כיוון הכוח על $Q_1$ הוא בכיוון הפוך מ- $Q_2$. לעומת זאת, בין מטענים הפוכים בסימנם, המקיימים $Q_1Q_2 < 0$, יש כוח משיכה שכן במקרה זה כיוון הכוח שפועל על $Q_1$ הוא לכיוון $Q_2$.

כאמור, ביחידות MKS מודדים מטען חשמלי ביחידות שנקראות 'קולון', או Coulomb באנגלית (נחשו על שם מי…). מכאן ניתן לקבל את היחידות של קבוע הפרופורציה K, הנקראה קבוע קולון:

$$[K] = \frac{[F]}{\left[Q^2/R^2\right]} = \frac{N \cdot m^2}{C^2} = \frac{kg \cdot m^3}{sec^2 \cdot C^2}$$

ביחידות אלו, ערכו המספרי הוא $K \simeq 9 \times 10^9$. כלומר, בין שני מטענים של $Q = 1C$ המרוחקים מרחק של 1m פועל כוח דחייה שעוצמתו $|F| \simeq 9 \times 10^9 N$.

לעיתים קרובות מסמנים $K \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ כאשר $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K} \simeq 8.84 \times 10^{-12}\left[\frac{C^2}{N \cdot m^2}\right]$ נקרא המקדם הדיאלקטרי של הריק (או באנגלית the vacuum permittivity או the permittivity of free space). מקור השם יתברר בהמשך הקורס, בעוד חודש וחצי בערך. אנחנו נרשה לעצמנו לעבור באופן חופשי בין שני הסימונים: K ו- $\varepsilon_0$.

### השוואה לכוח הגרביטציה

להזכירכם, כוח הגרביטציה הפועל על מסה $m$ הנמצא בנקודה $\vec{r}_1$ בעקבות נוכחות מסה $m$ בנקודה $\vec{r}_2$ הוא:

$$\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2_{1,2}}\hat{r}_{1,2}$$

שימו לב שבכוח הגרביטציה יש סימן '-' לעומת הכוח החשמלי, מה שגורם לכך ששתי מסות שוות סימן (הרי אין מסות שליליות…) מושכות זו את זו, ולעומת זאת שני מטענים חשמליים שווי סימן דוחים זה את זה.

להזכירכם, ביחידות MKS ערכו של קבוע הגרביטציה G הינו: $G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right]$ ההבדל העצום בין שני המספרים הללו, הניתנים באותה שיטת יחידות MKS, מעיד על כך שעוצמת הכוח החשמלי גדול בהרבה מאד בין עוצמת הכוח הגרביטציה.

**שאלה:** אם ניקח שני גופים שמסת כל אחד מהם היא $M = 1kg$ ומטען כל אחד מהם הוא $Q = 1C$, מהו היחס בין עוצמת כוח הדחייה החשמלי הפועל ביניהם לבין עוצמת כוח המשיכה הגרביטציוני?

$\Leftarrow \frac{|F_E|}{|F_G|} = \frac{K}{G}\frac{Q^2}{M^2} \simeq 1.35 \times 10^{20}$. שימו לב שיחס זה לא תלוי במרחק בין המסות.

צורה נוספת לחשוב על זה היא שמטען של קולון זה מטען עצום! תראו לכך דוגמאות נוספות בתרגיל הבית.

## III. מספר טורי טיילור שימושיים (ובדיקות שפיות לתוצאות של תרגילים):

במהלך בקורס, כאשר אתם פותרים שאלות מורכבות על מערכות שונות ומשונות של מטענים, אתם תגיעו לעיתים קרובות לאחר חישוב ארוך וסבוך לתשובה פרמטרית (כלומר עם אותיות, לא מספרים) שאין לכם מושג אם היא נכונה או לא. כפיזיקאים, יש לכם שתי "בדיקות שפיות" (sanity checks) שחובה עליכם לבצע מיד!!

הראשונה היא **בדיקת מימדים**. ברגע שתקבלו לשובה פרמטרית אתם חייבים לבדוק האם היחידות של הביטוי שקיבלתם תואמות את היחידות של הגודל הפיזיקלי אותו אתם מחפשים. **מי שבתרגילי הבית או במבחן ירשום תשובה סופית עם יחידות לא נכונות יאבד נקודות רבות על השאלה, גם אם הדרך שלו או שלה היתה נכונה.**

השנייה היא **בדיקת גבולות**. לעיתים קרובות יהיה פרמטר כלשהו בבעיה שניתן לבחון את התנהגות הביטוי שקיבלתם כאשר פרמטר זה מאד גדול או מאד קטן. נראה לכך מספר דוגמאות בהמשך התרגול הזה ובאופן כללי במהלך הקורס. לשם כך, נשתמש **המון** בטורי טיילור, ולכן נביא כאן תזכורת קטנה של מספר טורי טיילור שימושיים (את ההוכחות ניתן למצוא בקורס במת"פ מסמסטר א').

עבור $x << 1$ מתקיים, עד סדר שלישי ב- x:

$$\exp(x) = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + O(x^4)$$
$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^5)$$
$$\cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$
$$(1+x)^n = 1 + nx + \tfrac{1}{2}n(n-1)x^2 + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)x^3 + O(x^4)$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + O(x^4)$$
$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$$
$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + O(x^4)$$
$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + O(x^4)$$

## IV. שאלות ודוגמאות

### דוגמא 1:

מטען Q ומטען 4Q מרוחקים זה מזה מרחק L. נתון כי $Q > 0$.

a. האם ניתן להניח מטען q>0 כך ששקול הכוחות עליו יהיה אפס? אם כן, היכן נמצאת נקודת שיוויי המשקל?
b. האם נקודת שיווי המשקל מסעיף א' יציבה?
c. מה לגבי מטען שלילי q<0?

## פתרון:

a. בסה"כ יהיו בבעיה שלושה מטענים: Q, 4Q, q. שלוש נקודות מגדירות מישור, ולכן נוכל להניח שכל המטענים הם באותו מישור ונקרא למישור זה מישור xy. נציין ב- (0,0) את מיקום המטען Q וב- (L,0) את מיקום המטען 4Q. בשלב הראשון נניח כי q ממוקם בנקודה (x,y) כלשה, ונחשב את סכום הכוחות הפועלים עליו משני המטענים הנתונים.

$$F_{4Q}=\frac{4KQq}{\left((x-L)^2+y^2\right)^{3/2}}((x-L)\hat{x}+y\hat{y})\qquad F_Q=\frac{KQq}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x\hat{x}+y\hat{y})$$

קל לראות כי בכיוון y, הכוח הפועל משני המטענים זהה בכיווינו, לכן הפתרון היחיד עבור $F_Q+F_{4Q}=0$ יתקבל ב- **y=0**.

בנוסף, אנחנו רואים כי אם x<0 או x>L אז התרומה של שני רכיבי ה- x תהיה באותו בכיוון ולא קיימת נקודה שסכום הכוחות מתאפס. לכן נסיק כי נקודת שיווי המשקל נמצאת בתחום $0<x<L$ .

לכן נסיק:

$$F_{4Q}=-\frac{4KQq}{(L-x)^2}\hat{x}\qquad F_Q=\frac{KQq}{x^2}\hat{x}$$

נדרוש $F_Q+F_{4Q}=0$ ונקבל: $\frac{1}{x^2}=\frac{4}{(L-x)^2}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{2}{L-x}\Rightarrow L-x=2x\Rightarrow x=\frac{L}{3}$

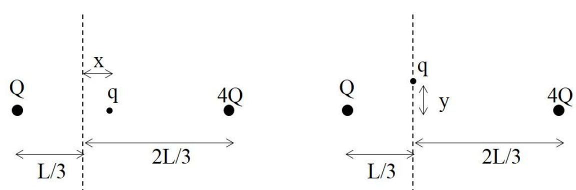
**<u>בדיקת שפיות</u>**

אם x=L/3 אז המרחק למטען 4Q הוא 2L/3 כלומר אנחנו מרוחקים פי 2 ממטען שגדול פי 4, ולכן הכוח זהה - סביר כי הכוח החשמלי הולך כמו $F\propto\frac{Q}{r^2}$ .

b. האם נקודת שיווי המקל יציבה?

נניח תחילה תנודה קטנה בכיוון x. כעת המטען q קרוב יותר לאחד משני המטענים הנתונים ונדחה ממנו ביתר עוצמה. זה יחזיר אותו חזרה לנקודה המקורית.

נניח כעת תנודה קטנה בכיוון y. כעת המטען נדחה משני המטענים ולכן הכוח פועל להגדיל את y




ומכאן **שהנקודה איננה יציבה!**

מצאנו אם כן שנקודת שיווי המשקל (L/3,0) אינה יציבה לתנודות קטנות בכיוון y.

c. נניח עכשיו q<0. שום דבר לא ישתנה במציאת נקודת שיווי המשקל ועדיין נקבל x=L/3 ו- y=0.

נבדוק האם הנקודה יציבה.

הפעם, סטייה קטנה ב- y תתוקן ע"י המטענים הנתונים כיוון שאלה ימשכו את q חזרה לכיוון y=0.

לעומת זאת, סטייה בציר x לא תתוקן, כי q יימשך חזק יותר למטען שהוא התקרב אליו, וכל מרחקו מ- L/3 רק יגדל.

כלומר גם עבור q<0, נקודת שיווי המשקל אינה יציבה!

אנחנו נלמד בהמשך הקורס כי תכונה זו היא כללית: לא ניתן למצוא נקודות שיווי משקל יציבות של הכוח החשמלי באיזור ללא מטענים.

## דוגמא 2:

נתון מוט טעון באורך 2L שמרכזו בראשית הצירים. צפיפות המטען האורכית של המוט הוא קבוע $\lambda$. במרחק D מראשית הצירים, בניצב לציר המוט, מונח מטען q.

a. מהו הכוח הפועל על q?
b. מהו הכוח בסדר מוביל כאשר המטען רחוק מאד מהתיל, כלומר $D >> L$. הסבירו את התוצאה אינטואיטיבית.
c. מהו הכוח בסדר מוביל כאשר המטען קרוב מאד לתיל, כלומר $D << L$?

## <u>פתרון:</u>

a. נגדיר את ציר ה- $\hat{z}$ להיות ציר המוט, ונקבע שהמטען q נמצא על ציר ה- $\hat{x}$ בנקודה $(x,y,z)=(D,0,0)$. כדי לחשב את הכוח שפועל על המטען הנקודתי בעקבות התפלגות המטען הרציפה של המוט, נפרק את המוט הרציף להרבה קטעים קטנים, ברוחב dz כל אחד, כאשר $-L\le z\le L$. לכל קטע כזה ניתן להתייחס בתור מטען נקודתי הממוקם בנקודה $(x,y,z)=(0,0,z)$, שהמטען שלו הינו $dq(z)=\lambda(z)dz=\lambda dz$. הכוח הכולל הפועל על המטען q הוא סכום הכוחות שמפעילים כל אחד "מהמטענים הנקודתיים" הנ"ל, כלומר:

$$\vec{F}=\sum_{z=-L}^{L}\frac{Kqdq(z)}{(D^2+z^2)^{3/2}}(D\hat{x}-z\hat{z})\Rightarrow\int_{-L}^{L}\frac{Kq\lambda}{(D^2+z^2)^{3/2}}dz\;(D\hat{x}-z\hat{z})=\;Kq\lambda D\int_{-L}^{L}\frac{1}{(D^2+z^2)^{3/2}}dz\;\hat{x}$$

$$\Rightarrow\vec{F}=\frac{Kq\lambda}{D}\int_{-L/D}^{L/D}\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}du\;\hat{x}$$

שימו לב שהאינטגרל בכיוון $\hat{z}$ התאפס כי זה אינטגרל על פונקצייה אי-זוגית $\frac{z}{(D^2+z^2)^{3/2}}$ על קטע סימטרי $-L\le z\le L$. זה גם מאד הגיוני מהסימטריה של הבעיה: אנו לא מצפים שעל המטען q יפעל כוח במקביל לציר המוט, שכן יש את אותה התפלגות מטען מימין ומשמאל (לפי הציור) ולכן שקול הכוחות במקביל לציר המוט יתאפס, ונישאר רק עם כוח בניצב לציר המוט, כפי שקיבלנו. בשיוויון האחרון ביצענו החלפת משתנה $u=z/D$ על מנת להישאר בתוך האינטגרל רק עם גדלים חסרי יחידות (שיטה כללית שמאוד מומלץ לכם לאמץ אותה!).

כדי לפתור את אינטגרל, נבצע החלפת משתנה $u=\sinh(\theta)$ ולכן $du=\cosh(\theta)d\theta$ וגם $1+u^2=1+\sinh^2(\theta)=\cosh^2(\theta)$. נציב זאת באינטגרל ונקבל:

$$\Rightarrow\vec{F}=\frac{Kq\lambda}{D}\int_{-arcsinh(L/D)}^{arcsinh(L/D)}\frac{d\theta}{\cosh^2(\theta)}\hat{x}=\frac{Kq\lambda}{D}2\tanh\left[arcsinh\left(L/D\right)\right]\hat{x}=\frac{2K\lambda q}{D}\frac{L/D}{\sqrt{1+(L/D)^2}}\hat{x}$$

כאשר השתמשנו בכך ש $\frac{d}{dx}\tanh(x)=\frac{1}{\cosh^2(x)}$ ובכך ש- $\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{\sinh(x)}{\sqrt{1+\sinh^2(x)}}$

<u>לסיכום:</u> הכוח על החלקיק הוא $\vec{F}=\frac{2K\lambda q}{D}\frac{L/D}{\sqrt{1+(L/D)^2}}\hat{x}$

b. כאשר החלקיק מאד רחוק מהתיל מתקיים $L/D<<1$ לכן, הביטוי לכוח ניתן בסדר מוביל בפרמטר הקטן $\varepsilon=L/D$ :

$$\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{-0.5}=\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

ולכן הקירוב המוביל הינו: $\vec{F}\simeq\frac{2K\lambda q}{D}\frac{L}{D}=\frac{K(2L\lambda)q}{D^2}=\frac{KQq}{D^2}$ כאשר $Q=\lambda\cdot 2L$ הוא המטען הכולל של המוט. כלומר, כאשר המטען מאד רחוק מהמוט, הוא מרגיש כוח של מטען נקודתי שנמצא בראשית (במרכז המוט) עם המטען הכולל של המוט. במרחקים גדולים, החלקיק לא מבחין בהתפלגות המטען של המוט,

ומרגיש רק את המטען הכולל. זה דומה לאפקט שכבר נתקלתם בו בגרביטציה, שבמרחקים גדולים ממסה כלשהי, ניתן להתייחס למסה כנקודתית כאשר מחשבים את הכוח הגרביטציוני שהוא מפעיל על גופים נוספים בסביבה.

c. כעת נניח כי החלקיק מאד קרוב למוט, כלומר $L/D >> 1$. זהו גם הגבול המתאים **<u>לתיל</u> <u>אינסופי</u>** שעוד ניתקל בו מספר פעמים במהלך הקורס. בגבול זה נרצה לפתח את הביטוי המלא לכוח לסדר המוביל בפרמטר הקטן $\varepsilon = D/L$ :

$$\frac{1/\varepsilon}{\sqrt{1+(1/\varepsilon)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1 + O(\varepsilon^2)$$

נקבל: $\vec{F} \simeq \frac{2K\lambda q}{D}\hat{x}$

שימו לב שקיבלנו תשובה שהיא לא תלוייה באורך התיל, $L$. זה הגיוני, כי אנחנו בגבול שבו אורך התיל אינסופי, ולכן אין משמעות לאורך התיל עצמו. בגבול זה, בהינתן צפיפות מטען קבועה $\lambda$ גם המטען הכולל אינסופי $Q = \lambda \cdot 2L \to \infty$. אבל, למרות זאת סה"כ הכוח הוא סופי, ותלוי רק בצפיפות המטען של התיל, קרי המטען ליחידת אורך על פני התיל.

## <u>אינטגרלים במספר מימדים:</u>

לעתים קרובות נעבוד בקורס במרחב דו או תלת מימדי ונרצה לבצע אינטגרלים במרחבים אלה. למשל: חישוב מטען כולל באזור מסויים או כח המופעל עקב התפלגות מטען רב מימדית, וכן חישוב **שטף**, גודל אותו נגדיר בהמשך הקורס.

## <u>דוגמא 3:</u>

נתונה תיבה שמרכזה בראשית הצירים, ומתוארת ע"י:

$$(x,y,z)|\{-a \le x \le a;\ \ -b \le y \le b;\ \ -c \le z \le c\}$$

התיבה טעונה בצפיפות מטען: $\rho(x) = \rho_0 x/L$ .

מהו המטען הכולל בתיבה?

פתרון:

תחילה אפשר לחשוב איך נראית התפלגות המטען - לכל פיסה ב-x מסויים יש פיסה זהה ב-(-x) עם צפיפות מטען הפוכה, ולכן סה"כ המטען מתאפס. נכתוב גם בצורה אינטגרלית:

$$Q = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz \rho(x) = \frac{\rho_0}{L} 4bc \int_{-a}^{a} x dx = 0$$

## <u>דוגמא 4:</u>

צפיפות מטען סביב הראשית במרחב אינסופי נתונה ע"י:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\lambda r}$$

כאשר r הינו המרחק מהראשית.

מהו המטען הכולל במרחב?

פתרון:

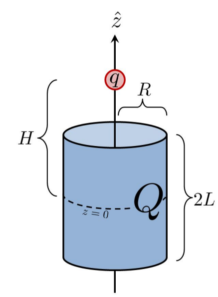
עקב התלות רק במרחק מהראשית (סימטריה כדורית), בחירת קואורדינטות טובה שתפשט את הפתרון תהיה קואורדינטות כדוריות. נזכיר שאלמנט הנפח האינפיניטסימלי בקואורדינטות כדוריות הוא $r^2 sin(\theta) dr d\theta d\varphi$ (זהו נפח של תיבה עם צלע dr, צלע $r d\theta$ וצלע $r sin(\theta) d\varphi$, אפשר לצייר ולהראות). המטען:

$$Q=\int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi r^2\, sin(\theta)\rho_0\, e^{-\lambda r}=4\pi\rho_0\int_0^\infty drr^2\, e^{-\lambda r}=4\pi\rho_0\int_0^\infty dr\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}e^{-\lambda r}=4\pi\rho_0\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}(\int_0^\infty dre^{-\lambda r})=$$
$$=4\pi\rho_0\frac{\partial^2}{\partial^2\lambda}(\tfrac{1}{\lambda})=8\pi\rho_0\ \lambda^{-3}$$

נשים לב שהיחידות מסתדרות!

## **דוגמא 5:**

נתון גליל חלול באורך 2L וברדיוס R. הגליל טעון במטען כולל Q. ציר הגליל מוגדר להיות ציר $\hat{z}$ ואמצע הגליל מוגדר להיות בגובה z = 0. מטען q מונח במרחק H לאורך ציר $\hat{z}$ (ראו איור)




מצאו את הכוח הכולל המופעל על המטען q.

a. מסימטריה, ברור שהכוח יפעל בכיוון $\hat{z}$ בלבד, ולכן נחשב מראש רק את רכיב הכוח בכיוון זה.
נגדיר את צפיפות המטען המשטחית של הגליל: $\sigma=\frac{Q}{2\pi R(2L)}$
כעת נדון בכוח שמופעל מאלמנט שטח קטן על גבי הגליל. נתבונן באלמנט השטח שבין הגבהים $[z,\ z+dz]$ ובין הזוויות $[\phi,\ \phi+d\phi]$. אלמנט זה מכסה שטח כולל של $dA=Rd\phi dz$. נגדיר את הזווית בין הקו שמחבר אלמנט זה (בגובה $z$) עם המטען שלנו (בגובה $H$) לבין קו רדיאלי שיוצא מהמטען שלנו בכיוון רדיאלי כלפי הגליל בתור $\theta$ (ראו איור). לפי הגדרה זו, $\theta>0$ אומר שהמטען נדחף כלפי מעלה, בכיוון $\hat{z}$, ואילו $\theta<0$ אומר שהמטען נדחף כלפי מטה, בכיוון $-\hat{z}$. עוד נשים לב שמתקיים $\tan(\theta)=\frac{H-z}{R}\Rightarrow z=H-R\tan(\theta)\Rightarrow dz=-\frac{Rd\theta}{\cos^2(\theta)}$
ולכן אלמנט השטח הינו $dA=-R^2\frac{1}{\cos^2(\theta)}d\theta d\phi$ והמטען של אלמנט זה הינו $dq=\sigma dA=-\frac{QR}{4\pi L\cos^2(\theta)}d\theta d\phi$. מרחקו של אלמנט זה מהמטען שלנו הינו $r=\sqrt{R^2+(H-z)^2}$ ולכן הכוח שהוא מפעיל בכיוון $\hat{z}$ הינו:

$$dF_z(\theta) = \frac{Kqdq}{r^3}(H-z) = -\frac{KqQR}{4\pi L\cos^2(\theta)\left(R^2+[R\tan(\theta)]^2\right)^{3/2}}R\tan(\theta)d\theta d\phi = -\frac{KqQ}{4\pi LR}\frac{\tan(\theta)}{\cos^2(\theta)\left(1+\tan^2(\theta)\right)^{3/2}}d\theta d\phi$$

$$= -\frac{KqQ}{4\pi LR}\frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)\left(\frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)^{3/2}}d\theta d\phi = -\frac{KqQ}{4\pi LR}\sin(\theta)d\theta d\phi$$

כעת עלינו לסכום על כל אלמנטי המטען $dq$ שמרכיבים את הגליל. הדבר כמובן שקול לביצוע אינטגרל לפי $\phi$ בתחום $[0,2\pi]$ ולפי $z$ בתחום $[-L,L]$ שזה שקול לתחום $\left[\arctan\left(\frac{L+H}{R}\right), -\arctan\left(\frac{L-H}{R}\right)\right]$ עבור $\theta$ (זיכרו ש- $\theta > 0$ עבור $z < H$ ולהיפך). לכן:

כלומר:

$$F_z = \sum dF_z(\theta) = \int_{\arctan(\frac{L+H}{R})}^{-\arctan(\frac{L-H}{R})}\int_0^{2\pi} -\frac{KqQ}{4\pi LR}\sin(\theta)d\theta d\phi = \frac{KqQ}{2LR}\left[\cos\left(\arctan\left(\frac{L-H}{R}\right)\right) - \cos\left(\arctan\left(\frac{L+H}{R}\right)\right)\right]$$

נשתמש בכך ש- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ונקבל:

$$F_z = \frac{KqQ}{2LR}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L-H}{R})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L+H}{R})^2}}\right] = 2\pi Kq\sigma\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L-H}{R})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{L+H}{R})^2}}\right]$$