חשמל ומגנטיות - תרגול 3

חוק גאוס

הגדרת השטף החשמלי

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

חוק גאוס האינטגרלי

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \iiint \frac{\rho_{in}}{\varepsilon_0} = 4\pi k Q_{in}$$

האינטגרל הוא על פני משטח סגור וכיוון השטח של אלמנט השטח יוצא החוצה מהמשטח.

משפט הדיברגנס מאפשר לעבור מאיטגרציה משטחית של שדה ווקטורי לאינטגרציה נפחית (על הנפח המוכל במשטח) של דיברגנס של אותו שדה.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint \nabla \cdot \vec{E} dV$$

חוק גאוס הדיפרנציאלי

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{in}}{\varepsilon_0}$$

כאשר ρ הינה צפיפות המטען הנפחית. בחוק זה נדון בשבוע הבא.

נ

דוגמא 1: שדה חשמלי וחוק גאוס האינטגרלי

כדור טעון במטען Q ורדיוס R, שצפיפותו $\rho = \rho_0 (\frac{r}{r_0})^n$ כאשר $n > -3$.

מהו השדה החשמלי בכל המרחב?

פתרון

ברור מהסימטריה של הבעיה שהשדה יכול להיות רק רדיאלי. נבחר מעטפת גאוס כדורית על מנת למצוא את השדה. מעטפת כזו ברדיוס r תיצור שטף $\Phi = 4\pi r^2 E(r)$.

נציב את התוצאה בחוק גאוס ונקבל $E(r) = \frac{kQ_{in}(r)}{r^2}$

המטען בתוך המעטפת הינו

$$Q_{in}(r) = 4\pi \frac{\rho_0}{r_0{}^n} \int_0^{min(R,r)} r^2 r^n dr = 4\pi \frac{\rho_0}{r_0{}^n} \frac{1}{n+3} (min(r,R))^{n+3}$$

פתרון האינטגרל נכון עבור התנאי שהגדרנו $n > -3$.

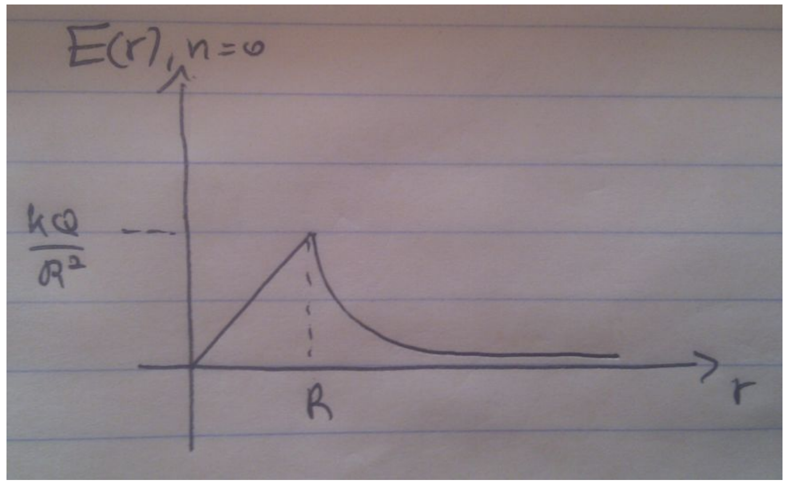
נבטא את צפיפות המטען באמצעות הנתונים

$$Q = Q_{in}(R) = 4\pi \frac{\rho_0}{r_0{}^n} \frac{1}{n+3} (R)^{n+3} \rightarrow Q_{in}(r) = Q \cdot \frac{(min(r,R))^{n+3}}{R^{n+3}}$$

השדה החשמלי הינו

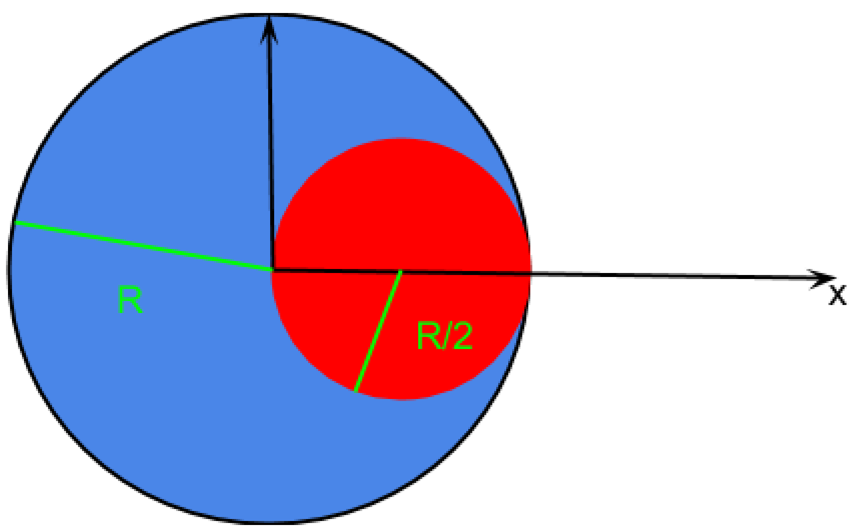
$$r \le R: \quad E(r) = \frac{kQr^{n+1}}{R^{n+3}}$$
$$r > R: \quad E(r) = \frac{kQ}{r^2}$$

עבור המקרה שראיתם בכתה בו הצפיפות אחידה n=0 מתקבל



דוגמא 2: סופרפוזיציה ככלי עזר

מכדור ברדיוס R המלא בצפיפות מטען נפחית ρ הוציאו כדור ברדיוס $\frac{R}{2}$ המשיק לשפת הכדור. מהו השדה החשמלי בכל המרחב?



<u>פתרון</u>

נסמן שמרכז הכדור הגדול הוא בראשית הצירים ומרכז הכדור החסר ב $\frac{R}{2}\hat{x}$.

הכדור טעון בצפיפות מטען אחידה ולכן $\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$.

ניתן להתייחס לכדור עם החלק החסר כאל סופרפוזיציה של כדור מלא בצפיפות מטען ρ (מטען כולל Q) וכדור נוסף במקום בו חסר חלק אך בצפיפות מטען הפוכה $-\rho$ (מטען כולל $\frac{Q}{8}$).

פתרנו את הבעיה עבור כדור מלא בצפיפות אחידה בדוגמא הקודמת עבור n=0. קיבלנו ביטוי שונה בתוך ומחוץ לכדור. אם כך בשאלה זו אנו צריכים להפריד ל 3 מקרים:

1. מחוץ לשני הכדורים

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^3}\vec{r} - \frac{k\frac{Q}{8}}{|\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x}|^3}(\vec{r} - \tfrac{R}{2}\hat{x})$$

2. בתוך הכדור הגדול ומחוץ לכדור הקטן

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ\vec{r}}{R^3} - \frac{k\frac{Q}{8}}{|\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x}|^3}(\vec{r} - \tfrac{R}{2}\hat{x})$$

3. בתוך שני הכדורים (בתוך הכדור הקטן)

$$\vec{E}(r) = \frac{kQ\vec{r}}{R^3} - \frac{k\frac{Q}{8}(\vec{r}-\frac{R}{2}\hat{x})}{(\frac{R}{2})^3} = \frac{kQ}{2R^2}\hat{x}$$

קיבלנו שהשדה באיזור החלול קבוע והינו בכיוון $\hat{x}$.

זה נראה מפתיע במבט ראשון מכיוון שהצורה נראית מורכבת. נסו לחשוב מדוע זה נכון!

בצורה דומה לדוגמא זו, כאשר מקבלים צפיפות מטען כלשהי במרחב $\rho(\vec{r})$ אשר אפשר ליצור על ידי סופרפוזיציה של צפיפויות מטען שונות שאנו יודעים את השדה שהן יוצרות במרחב $\rho(\vec{r}) = \rho_1(\vec{r}) + \rho_2(\vec{r}) + ...$.

וכך לקבל בקלות את הפתרון לשדה בבעיה.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}) + ...$$

<u>הערה על רציפות השדה החשמלי</u>

את השדה החשמלי של התפלגות מטען כלשהי ניתן לכתוב בעזרת חוק קולון וסופרפוזיציה:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint dV \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')$$

כל עוד צפיפות המטען סופית בכל מקום, גם השדה יהיה סופי בכל מקום משום שקרוב ל $\vec{r}$, אלמנט הנפח הולך כמו $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 dr$. כל עוד אין נקודות בהן הצפיפות מטען הנפחית מתבדרת השדה החשמלי יהיה רציף. במקרים כמו מטען נקודתי, תיל טעון או משטח

טעון השדה החשמלי לא יהיה רציף, במעבר מצד לצד של כל אחד מאלו תהיה קפיצה בשדה החשמלי.

<u>דוגמא: משטח אינסופי</u>

בכתה ראיתם כי השדה החשמלי הנוצר ע״י משטח טעון בצפיפות משטחית σ במאונך לציר z הינו

$$\vec{E} = sign(z) \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

במעבר מצד לצד של המשטח ישנה קפיצה של $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{z}$.

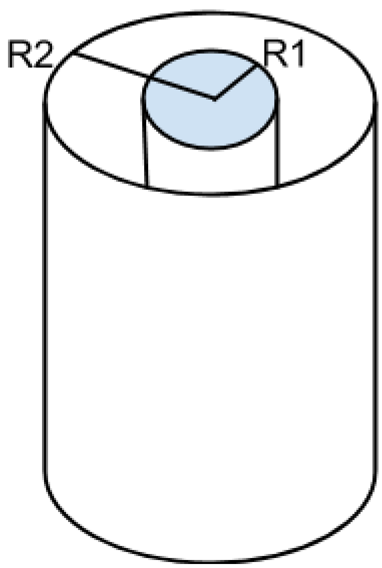
<u>דוגמא: קפיצת השדה בקליפה כדורית טעונה בצפיפות מטען</u> σ

בקליפה כדורית השדה בפנים מתאפס והשדה בחוץ הוא $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = \frac{k\cdot 4\pi R^2\sigma}{r^2}\hat{r}$

לכן הקפיצה בשדה הינה

$$\vec{E}_{out}(r) - \vec{E}_{in}(r) = 4\pi k\sigma\hat{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

<u>דוגמא: כבל קואקסיאלי</u>



נתון גליל מלא אינסופי ברדיוס R_1 בצפיפות מטען אחידה ρ_0

ומעטפת של גליל ברדיוס $R_2 > R_1$ בצפיפות מטען

$\sigma_0 = -\rho_0 \cdot \frac{R_1^{\ 2}}{2R_2}$.

א. מהו השדה החשמלי במרחב?

ב. איך ישתנה השדה רחוק מאוד מהגליל והמעטפת אם נזיז את המעטפת כך שמרכזה יזוז הצידה למרחק קצר $d \ll r$?

פתחו עד סדר ראשון שלא מתאפס לפי הגודל $\delta = \frac{d}{r}$

<u>פתרון</u>

א. מהסימטריה של הבעיה, השדה רדיאלי.

נבנה מעטפת גאוס גליליות ברדיוס כללי ונקבל

$$2\pi rh \cdot E(r) = \frac{Q_{in}(r)}{\varepsilon_0}$$

נשים לב שסך המטען בכבל מתאפס

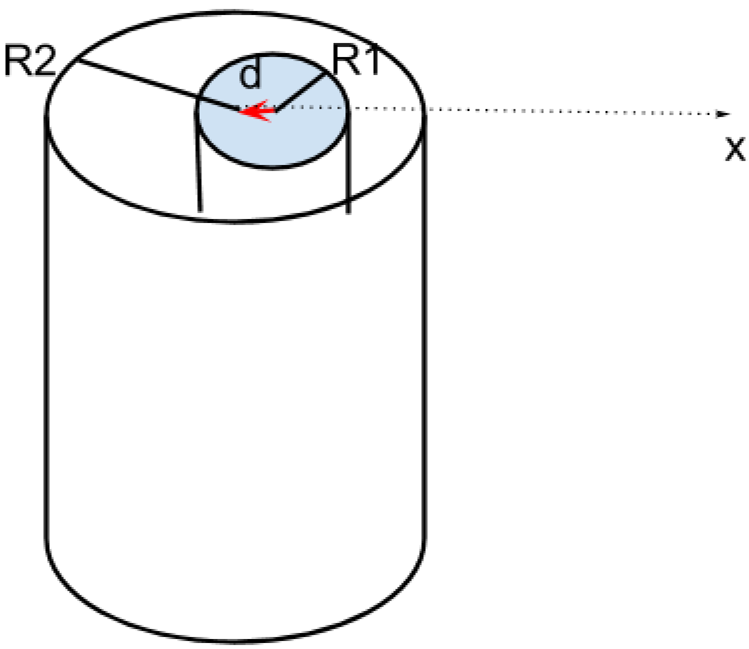
$$Q_{in} = 2\pi R_2 h\sigma_0 + \pi R_1^{\ 2} h\rho_0 = 0$$

נחשב את המטען בתוך המעטפת בשלושת התחומים ונקבל

$$Q_{in}(r) = \begin{cases} \pi r^2 h\rho_0 & r \le R_1 \\ \pi R_1^2 h\rho_0 & R_1 \le r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

מכאן נקבל שהשדה הינו

$$E(r) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{2\epsilon_0} & r \le R_1 \\ \frac{R_1^2\rho_0}{2r\epsilon_0} & R_1 \le r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$



ב. נצייר את ציר $\hat{x}$ בכיוון הגליל.
כפי שראינו המטען על הגליל ועל המעטפת הגלילית שווה אך הפוך בסימנו.
לפי חוק גאוס, מחוץ לגליל טעון בצורה אחידה, השדה שווה לשדה מתיל אינסופי. לכן ניתן לפשט את הבעיה ולהתבונן בשדה רחוק מאוד משני תיילים בעלי צפיפות מטען $\pm\lambda_0 = \pm\pi R_1{}^2\rho_0$ מרוחקים זה מזה במרחק d.

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} + \frac{-\lambda}{2\pi}\frac{(\vec{r}+d\hat{x})}{|\vec{r}+d\hat{x}|^2\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{|\vec{r}+d\hat{x}|^2} = \frac{1}{r^2(1+\frac{2\delta x}{r}+\delta^2)} \approx \frac{1}{r^2}(1-\frac{2\delta x}{r}-\delta^2)$$

$$\to \vec{E} \approx \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} + \frac{-\lambda}{2\pi}\frac{(\vec{r}+d\hat{x})}{r^2\varepsilon_0}(1-\frac{2\delta x}{r}-\delta^2) \approx$$

$$\approx \frac{-\lambda}{2\pi}[\frac{\vec{r}}{r^2\varepsilon_0}(-\frac{2\delta x}{r}-\delta^2) + \frac{+\delta\hat{x}}{r\,\varepsilon_0}(1-\frac{2\delta x}{r}-\delta^2)] = \frac{\lambda\delta}{2\pi r\varepsilon_0}(2\hat{r}\cos\theta - \hat{x}) + O(\delta^2)$$

$$\approx \frac{\lambda d}{2\pi r^2 \varepsilon_0}(2\hat{r}\cos\theta - \hat{x})$$

התרומה העיקרית (שגודלה הולך כמו $\frac{1}{r}$) מתבטלת חלקית מהשדות של התיל החיובי והשלילי ונשארת תרומה קטנה יותר בסדר גודל $\frac{1}{r^2}$.

לבדיקה, כאשר נתרחק בציר x בצד החיובי נקבל שדה חיובי בציר x בהתאם לכך שהתיל הקרוב יותר טעון חיובית.