Exo 3

$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous la contrainte d'égalité } h(x) = 0 \end{cases}$

si le minimum est atteint en x_0

$\forall x \in \mathcal{S} \quad f(x) \geq f(x_0)$

$f : \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n, h(x) = 0\}$ telle que $\gamma(0) = x_0$

$\nabla_x L(x, \lambda) = 0_p$

$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1} h_i(x) \lambda_i$

$h(x) = (h_1(x) (\ldots) h_p(x))$

<u>CN de 1er ordre</u>

$f \circ \gamma =]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$

$h \circ \gamma =]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^p$

Pour $f \circ \gamma$ — par composition de fonction

$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = (\nabla_x f)(\gamma(t))\, \gamma'(t)$ et de plus en $t = 0$ on a :

$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = (\nabla_x f)(x_0) . \gamma'(0)$

f atteint son min en x_0 donc $f \circ \gamma$ atteint son min en 0

Donc par la condition nécessaire d'une fonction de $]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$ d'avoir un minimum, on a $\frac{df}{dt}(f \circ \gamma)(0) = 0$

Ainsi pour toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x_0$ on a $(\nabla_x f)(x_0) . \gamma'(0) = 0$

Ainsi $\nabla f(x_0) \perp T_{x_0}\mathcal{S}$. Or x_0 est un point régulier de h

$\nabla h(x_0) = \left| \nabla h_1(x_0) \right| \ldots \left| \nabla h_p(x_0) \right|$

famille de point régulier.

D'où $\nabla f(x_0) \in \text{Vect}\{\nabla h_1(x_0), \ldots, \nabla h_p(x_0)\}$

Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}^2$. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tel que $\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla h_i(x_0) = 0$

unicité car $\nabla h_i(x_0)$ sont libres.

$\Rightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla_x L(x_0, \lambda) = 0$

<u>CN du 2nd ordre</u>

Rappel

Soit $y \in T_{x_0}\mathcal{S}$. Il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{S}$, telle que $\gamma \in \mathcal{C}^2$ $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = y$. On calcule $\frac{d^2}{dt^2}(\cancel{f \circ \gamma})(t) = \frac{d}{dt}\left(\nabla_x f(\gamma(t))^T \gamma'(t) \right)$

vecteur ligne — vecteur colonne

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = \nabla^2_{x_x} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\gamma'^T(t) + \nabla_x f(\gamma(t))\,\gamma''(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t) = \nabla^2_{xx} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)^T\gamma'(t) + \nabla_x f(\gamma(t))^T.\gamma''(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(0) = y^T\nabla^2_x f(x_0)\,y + \nabla_x f(x_0)^T.\gamma''(0)$$

$f\circ\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}$ et atteint son min en 0

Donc $(f\circ\gamma)''(0) \geq 0$ (CN pour être un minimum

$$y^T\nabla^2_x f(x_0)\,y + \nabla_x f(x_0)^T.\gamma''(0) \geq 0 \quad (L_1)$$

Puis $h\circ\gamma$

$\forall t\in]-\varepsilon,\varepsilon[\ \ h\circ\gamma(t) = 0_{\mathbb{R}^p}$

$\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathcal{S}$

$\mathcal{S} = \{x\in\mathbb{R}^n,\ h(x)=0\}$

Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ $h=(h_1,\dots,h_p)$

$$\frac{d(h_i\circ\gamma)(t)}{dt} = \nabla_x h_i(\gamma(t)).\gamma'(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(h_i\circ\gamma)(t) = \gamma'(t)^T\nabla^2_x h_i(\gamma(t))\,\gamma'(t) + \nabla_x h_i(\gamma(t)).\gamma''(t)$$

Donc en $t=0$

$$\frac{d^2}{dt^2}(h_i\circ\gamma)(0) = y^T\nabla^2_x h_i(x_0)\,y + \nabla_x h_i(x_0)^T\gamma''(0) = 0 \quad (L_2)$$

Pour le $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ de la condition du 1^a ordre.

$$\nabla^2_x L(x,\lambda) = \nabla^2_x f(x) + \nabla^2_x h(x).\lambda$$

$$\text{Par } (L_1) + \sum_{i=1}^p \lambda_i (L_2) : \quad y^T\nabla^2_x\Big(f + \sum \lambda_i h_i(x_0)\Big)y + \nabla_x f(x_0)^T + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x_0)^T y \geq 0$$

$$= \underbrace{\nabla_x L(x_0,\lambda_0)^T}_{=\,0} y$$

par la condition du 1er ordre

D'où la CN du second ordre :

Pour la CS du 2nd ordre il faut que

$$\forall y\in T_{x_0}\mathcal{S},\ y^T\nabla^2_x L(x_0,\lambda)\,y > 0$$

Exo 4

$\begin{cases} \text{Minimiser / Maximiser } f(x) \\ \text{sous la contrainte } h(x)=0 \text{ où } h = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \end{cases}$ 2 contraintes

$h(x) = Ax + b$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

D'où $P = \{x \in \mathbb{R}^4, h(x)=0\}$ est un espace affine de dimension $4-2=2$ donc un plan.

1e Méthode : Multiplicateurs de Lagrange.

On pose $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda h(x)$ $\quad \lambda_1, \lambda_2$

$\nabla_x L(x,\lambda) = 0$

$(+ h(x) = 0)$

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 2 - 4x_2 - \lambda_2 \\ -10x_2 - 2\lambda_1 \\ -2x_3 + \lambda_2 \\ 4 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

D'où le système

$$\begin{cases} 2 - 4x_1 - \lambda_2 = 0 & L_1 \\ -10x_1 - 2\lambda_1 = 0 & L_2 \\ -2x_3 + 4 + \lambda_2 = 0 & L_3 \\ 4 + \lambda_1 = 0 & L_4 \\ -2x_2 + x_4 - 2 = 0 & L_5 \\ x_1 - x_3 + 1 = 0 & L_6 \end{cases}$$

Par (L_4) $\lambda_1 = -4$

Par (L_2) $x_2 = \frac{1}{10} \times 8 = \frac{4}{5}$

Par (L_5) : $x_4 = 2 + 2x_2 = \frac{18}{5}$

Il reste

$$\begin{cases} 4x_1 + \lambda_2 = 2 & L_1 \\ 2x_3 - \lambda_2 = 4 & L_2 \\ x_1 - x_3 = -1 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 6 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ 2x_3 - \lambda_2 = 4 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 = 4 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ 2x_3 - \lambda_2 = 4 \\ x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Puis $x_3 = \frac{5}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$

On a donc l'unique point candidat $(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{3}, \frac{18}{3}, -4, -\frac{2}{3}\right)$

Condition Necessaire du 2nd ordre

$$\nabla_x^2 L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace tangent:

$$\nabla h(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^T$$

famille libre donc $\hat{x}$ est un point regulier

Donc f atteint son minimum en $\hat{x}$ local

Methode de substi

On veut paramétriser, donc de determiner $g : \mathbb{R}^2 \to P$ bijection.

On prend $g(s,t) = (s, t, 1+s, 2+2t)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4$

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 \\ x_4 = 2 + 2x_2 \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_2+1, 2+2x_2)$$

$g(s_1, t_1) = g(s_2, t_2) \overset{?}{\Rightarrow} (s_1, t_1) = (s_2, t_2)$

Optimiser $(f \circ g)(s,t)$ sur $\mathbb{R}^2$

$(f \circ g)(s,t) = 2s - 2s^2 - 5t^2 - (1+s)^2 + 4(1+s) + 4(2+2t)$

1re étape Determination des points critique

$(f \circ g)(s,t) = -3s^2 + 4s - 5t^2 + 8t + 11$

$$\nabla_{(s,t)}(f \circ g)(s,t) = \begin{pmatrix} -6s + 4 \\ -10t + 8 \end{pmatrix}$$

$\nabla_{(s,t)}(f \circ g)(s,t) = 0 \Rightarrow s = \frac{2}{3} \; ; \; t = \frac{4}{5}$

D'où le point $p = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$

Calcul de la hessienne.

$$\text{Hess}(f \circ g)(s,t) = \nabla^2 f \circ g(s,t) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$\text{Sp}(\text{Hess}(f \circ g)) \subset \mathbb{R}^*_-$

Donc $f \circ g$ atteint un maximum local en $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{5}\right)$

* $g\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) = \vec{x}$ déterminer ou pouvant.

* $f \circ g$ est une fonction concave pour (x) donc le maximum est global.

* $(f \circ g)$ est une forme quadratique $\Rightarrow$ unicité du max

Exercice 5

Par les multiplicateurs de Lagrange.

EXERCICE 5 Résoudre le problème d'optimisation suivant par la méthode de substitution et la méthode des multiplicateurs de Lagrange :

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \text{Optimiser}\left(f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \\ \\ \text{sous la contrainte:} \quad \left\{ x_1 + x_2^2 = 1 \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{On optimiser } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \\ \text{sous la contrainte } h(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{où} \quad h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 - 1 \end{cases}$$

On pose $L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = L(x, \lambda) = f(x) + \lambda h(x)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ car 1 seul contrainte.

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + \lambda \\ 2x_2 + 2\lambda x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ x_2(1+\lambda) = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$

1er : $\lambda = -1$

Par (L_3) $x_3 = 0$, par (L_1) : $x_1 = \frac{1}{2}$

Par (L_4) $x_2^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où les deux points :

$P_1 : \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -1\right)$, et $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0, -1\right) = P_2$

2ème cas : $\lambda \neq -1$

Par $L_2 : x_2 = 0$ par $(L_3) : x_3 = 0$

Par $L_4 : x_1 = 1$ et par $L_1 : \lambda = -2$

D'où le point $(1, 0, 0, -2) = P_3$

Condition du 2nd ordre

$$\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En P_1 plan tangent.

$$\nabla h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{D'où } \nabla h\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où le plan tangent

$$T_{P_1} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \cancel{1} \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc si $\vec{u} \in T_{P_1}$ et $\vec{u} \neq 0$ alors il existe $(a,b) \neq (0,0)$ tel que $\vec{u} = a\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}^T \nabla_x^2 L(P_1)\vec{u} = (-\sqrt{2}a, a, b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 4a^2 + 2b^2$$

> 0 pour tout $(a,b) \neq (0,0)$

Donc f atteint un min en $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

ΣP_2 : idem

$$\nabla h(0,0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{P_3} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\vec{u} \in T_{P_3}$; $\exists (a,b) \neq (0,0)$ tq $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$

$$\vec{u}\, \nabla_x^2 L(1,0,0,-2)\, \vec{u} = (0, a, b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= -2a^2 + b^2$$

Ni un min, ni un max ($\sim$ point selle)

Méthode de substitution.

$$h(x) = 0 = x_1 + x_2^2 - 1$$

$\star$ x_2 en fonction de x_1

$$x_2^2 = 1 - x_1 \rightsquigarrow x_2 = +\sqrt{1-x_1} \text{ ou } = -\sqrt{1-x_1} \;?$$

(choix)

$\star$ x_1 en fonction de x_2

$$x_1 = 1 - x_2^2$$

$$g(x_2, x_3) = f(1 - x_2^2, x_2, x_3)$$

Rappel

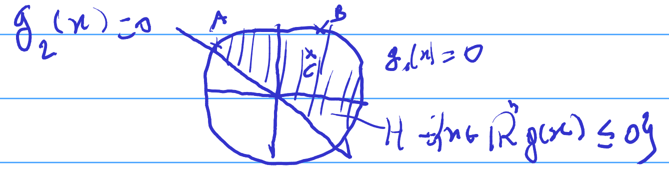
Problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{sous la contrainte } g(x) \leq 0 \end{cases}$$

CN d'un 1er ordre (de Kuhn-Tucker)

Soit $\hat{x}$ un point qualifié : si $\hat{x}$ est solution du problème alors $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que
- Il faut que $\nabla_x L(x,\lambda) = 0 \rightsquigarrow L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x)$
- $g(x) \leq 0$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $\lambda_i g_i(x) = 0$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ $\lambda_i \geq 0$

Point qualifié (ou point régulier)



$I(\hat{x}) = \{ i \in \{1, \dots, p\}, g_i(\hat{x}) = 0 \}$ Dans ce cas on dit que la contrainte saturée (active)

$\hat{x} \in H$ est qualifié si :

$\nabla g_i(\hat{x})$ pour $i \in I(\hat{x})$ forme une famille libre

$I(A) = \{1, 2\}$

$I(B) = \{1\}$; $I(C) = \emptyset$

Cone tangent $\mathcal{C}(\hat{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^n, \nabla g_i(\hat{x}) \cdot y \leq 0 \quad \forall i \in I(\hat{x}) \}$

En B $\mathcal{C}(B) = \{ y \in \mathbb{R}^n, \nabla g_1(B) \cdot y \leq 0 \}$

$g_1(\hat{x}) = g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

$g_1(x) \leq 0 \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$\nabla g_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

CN du 2e ordre

Si $\hat{x}$ est un minimal local et $\hat{x}$ est qualifié alors $\exists ! \lambda \in \mathbb{R}^p$
- $\nabla_x L(\hat{x}, \lambda) = 0$
- $g(\hat{x}) \leq 0$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0$
- $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda_i \geq 0$
- $\forall y \in T(S^+(\hat{x}))$; $y^T \nabla_x^2 L(\hat{x}, \lambda) y \geq 0$ où $S^+(\hat{x}) = \{ x \in \mathbb{R}^n, g_i(x) = 0 \ \forall i \in I^+(\hat{x}) \}$ point

CS du 2nd ordre

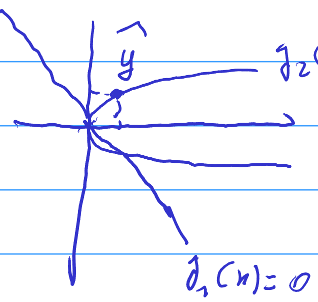
Soit $\hat{x} \in H$, Alors s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tq :

- $\nabla_x L(\hat{x},\lambda) = 0$
- $g(\hat{x}) \leq 0$
- $\forall i \in \{1,\dots,p\}, \lambda_i g_i(\hat{x}) = 0$
- $\forall i \in \{1,\dots,p\}, \lambda_i \geq 0$
- $\forall y \in T(S^+(\hat{x}))$ $y^T \nabla_x^2 L(\hat{x},\lambda)\, y > 0$ $y \neq 0$

⚠ Convention
- min
(si max $f \Leftrightarrow \min(-f)$)
- il y a un + dans le lagrangien
- les contraintes d'inégalité : ≤ 0

Exo 3 Examen 22

$g_1(x_1,x_2) = -x_1 x_2$; $g_2(x_1,x_2) = x_2^2 - x_1$ $K = \{x \in \mathbb{R}^2 ; g_1(x) \leq 0, g_2 \leq 0\}$



1) $\hat{y} \in K$

$g_1(\hat{y}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

$g_2(\hat{y}) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} = 0$

en $\hat{y}$, g_2 est saturée mais pas g_1

$I(\hat{y}) = \{2\}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$

$\nabla g_2(\hat{y}) = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

famille libre car $\neq 0$ donc $\hat{y}$ est un point qualifié.

2) Cône tangent

$C(\hat{y}) = \{z \in \mathbb{R}^2, \nabla_x \nabla g_2(\hat{y}) \cdot z \leq 0$

$= \{z \in \mathbb{R}^2, -z_1 + \sqrt{2} z_2 \leq 0\}$ $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

3) $\hat{y}$ est un point qualifié.

Il faut vérifier que :

- $\nabla_x L(\hat{y}, \lambda) = 0$ $\qquad L(x,\lambda) = f(x) + g(x)\lambda$
- $g(\hat{y}) \leq 0$ ← déjà fait
- $\forall i \in \{1, 2\}$, $\lambda_i \cdot g(\hat{y}) = 0$ $\qquad (L_3)$
- $\lambda_1 . \lambda_2 \geq 0$ $\qquad (L_4)$

$$L(x,\lambda) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 + \lambda_1(-x_1 - x_2) + \lambda_2(x_2^2 - x_1)$$

$$\nabla L(\hat{y}, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ \\ -4x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 x_2 \end{pmatrix}$$

Puis déterminer λ_1 et λ_2 tq $\nabla_x L(\hat{y}, y_1 . \lambda_2) = 0$

$$\nabla_x L(\hat{y}, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} 1 + 1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda_1 + 2\lambda_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 + 2 = 0 \\ -2\sqrt{2} - \lambda_1 + \lambda_2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \sqrt{2}L_1 + L_2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2$$

Puis vérifier que les conditions L_3 et L_4 ok.

ok $\qquad \lambda_1 = 0, \ g_2(\hat{y}) = 0$

4) On cherche $T^+(\hat{y})$ espace tangent à $S^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \ g_2(x) = 0\}$

$I(\hat{y}) = \{2\}$ et $\lambda_2 \quad 0$

$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(\hat{y}) = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ← famille libre

d'où $\vec{T}(\hat{y}) = \mathrm{Im}\left(\nabla_g(\hat{y})\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

5) Condition du second ordre

$\hat{y}$ point qualifié

- $\nabla_x L(\hat{y}, \lambda) = 0$ de λ déjà déterminé.
- $g(\hat{y}) \leq 0$
- $\forall i$, $\lambda_i g_i(\hat{y}) = 0$
- $\forall i$, $\lambda_i \geq 0$
- $z^T \nabla^2 L(\hat{y}, \lambda) z > 0 \quad \forall z \in T^+(y)$ et $z \neq 0$

Soit $z \in T^+(y)$ et $z \neq (0,0)$ alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = a \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4-2\lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\nabla_x^2 L(\hat{y}, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$z^T \nabla_x^2 (\hat{y}\ \lambda_1, \lambda_2)\, z = 4a^2 > 0$

tant que $a \neq 0$ donc la condition du second ordre est satisfait.

6) Le problème (P_2) admet au moins une solution qui est un minimum local en $\hat{y}$

Exo3 2024

On définit.

$g_1(x) = x_4^2 + x_1 - 3$

$g_2(x) = x_3^2 - 2$

$\begin{cases} \text{minimiser } f(x) \\ \text{sous la contrainte } g(x) \leq 0 \end{cases}$ $K = \{x \in \mathbb{R}^4 ; g(x) \leq 0\}$

1) Puisque $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$ on a un problème de minimisation

2) Montrer que tous les points $x \in K$ sont réguliers.

Soit $x \in K$ Supposons que $g_1(x) < 0$ et $g_2(x) < 0$

Dans le cas $I(x) = \emptyset$

D'où dans ce cas x est point régulier

* Supposons : $g_1(x) = 0$ et $g_2(x) < 0$

$I(x) = \{1\}$, g_1 est la seule contrainte saturée.

et $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_4 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $\nabla g_1(x)$ forme une famille libre

* Supposons que $g_1(x) < 0$ et $g_2(x) = 0$

$I(x) = \{2\}$,

et $\nabla_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puisque $g_2(x) = 0 \Rightarrow x_3 = \pm\sqrt{2}$

Donc $\nabla g_2(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\nabla g(x)$ forme une famille libre

× Supposons $g_1(x) = g_2(x) = 0$ les deux contraintes sont saturées

$I(x) = \{1, 2\}$; $\nabla g(x) = \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2x_4 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2x_3 \\ 0 \end{matrix}\right)$

forme une famille libre car $x_3 \neq 0$

Donc tout les point $x \in K$ sont reguliers.

3) CN 1er ordre

x est un point admissible $\in K$

- $\nabla_x L(x, \lambda) = 0$
- $g(x) \leq 0$
- $\forall i \in \{1, 2\}$, $\lambda_i g_i(x) = 0$
- $\forall i \in \{1, 2\}$ $\lambda_i \geq 0$

On determine les points stationnaires $\{ t_q \nabla_x L(x, \lambda) = 0 \}$

$L(x, \lambda) = 3x_1^2 - 22x_1 + x_2^2 - 12x_2 + 4x_3^2 - 8x_3 + x_4^2 + \lambda_1 (x_4^2 + x_1 - 3) + \lambda_2 (x_3^2 - 2)$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 22 + \lambda_1 \\ 2x_2 - 12 \\ 8x_3 - 8 + 2x_3\lambda_2 \\ 2x_4 + 2x_4\lambda_1 \end{pmatrix}$$

D'où le système d'inequation est :

$$\begin{cases} 6x_1 - 22 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 - 6 = 0 \\ 4x_3 + x_3\lambda_2 - 4 = 0 \\ x_4(1 + \lambda_1) = 0 \\ g_1(x) = x_4^2 + x_1 - 3 \leq 0 \\ g_2(x) = x_3^2 - 2 \leq 0 \\ \lambda_1 g_1(x) = \lambda_1(x_4^2 + x_1 - 3) = 0 \\ \lambda_2 g_2(x) = \lambda_2(x_3^2 - 2) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

4)

1er Cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Il reste

$$\begin{cases} 6x_1 - 22 = 0 \\ x_2 - 6 = 0 \\ 4x_3 - 4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \end{cases}$$

D'où le point $\left(\frac{11}{3}; 6; 1, 0\right)$; $g_1\left(\frac{11}{3}, 6, 1, 0\right) = \frac{2}{3} > 0$

Donc $\left(\frac{11}{3}, 6, 1, 0\right)$ n'appartient pas à notre ensemble de solution admissible

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow$ pas de solution

2^e Cas $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} 6x_2 - 22 = 0 \\ x_2 - 6 = 0 \\ 4x_3 - 4\lambda_2 x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_3^2 - 2 = 0 = g_2(x) \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \end{cases}$$

Contrainte saturée

$x_1 = \frac{11}{3}$; $x_2 = 6$, $x_3 = \pm\sqrt{2}$; $x_4 = 0$

$$\lambda_2 = \frac{4 - 4x_3}{x_3} = 4\left(\frac{1}{x_3} - 1\right)$$

$$= 4\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

On a toujours $g_1\left(\frac{11}{3}; 6, x_3, 0\right) > 0$ donc pas de solution

3^e Cas : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 6x_1 - 22 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 - 6 = 0 \\ 4x_3 - 4 = 0 \\ x_4(1 + \lambda_1) = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_1 - 3 = g_2(x) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g_1(x) \leq 0, \quad g_2(x) \leq 0$$

$x_2 = 6$; $x_3 = 1$; $x_4 = 0$; $x_1 = 3$

et donc $6 \cdot x_1 - 22 + \lambda_1 = 0 \Rightarrow 18 - 22 + \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 4 > 0$

Vérifier g_2

$g_2(3, 6, 1, 0) = 1^2 - 2 = -1 < 0$ donc

Donc $(3, 6, 1, 0)$ est un point stationnaire avec le multiplicateur de Lagrange $(4, 0)$

4^e Cas : $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

$$\begin{cases} 6x_1 - 22 + \lambda_1 = 0 \\ x_2 = 6 \\ x_4 = 0 \\ 4x_3 - 4 + \lambda_2 x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_1 - 3 = 0 \\ x_3^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_2 = 6$; $x_4 = 0$; $x_1 = 3$; $\lambda_1 = 4$

$x_3 = \pm\sqrt{2}$; $4x_3 - 4 - \lambda_2 x_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2} - 1\right) < 0$

donc impossible.

f est convexe et il y'a un unique point stationnaire.
Donc f atteint un minimum en $(3, 6, 1, 0)$

gen monet (CS du 2^{e} ordre) (ROLS sujet.

Photo 21/03/2025