16 uždavinys

Suraskite $P1$ procedūros apatinį ir viršutinį asimptotinius įvertinimus.

```
int P1(int length, int k) {
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < length; i++)
    {
        sum += P2(i, k);
    }
    return sum;
}
int P2(int x, int a)
{
    if (x < a) return a;
    return P2(x / 2, a) + 1;
}
```

Sprendimas

Laikykime, kad parametrai $length$, k, x, a yra teigiami skaičiai, kitais atvejais procedūros gali būti nekorektiškos.

Abiejų procedūrų sudėtingumas priklauso nuo dviejų parametrų. Pažymėkime $P1$ procedūros sudėtingumas $T_1 = T_1(l, k)$, čia $l = length$, $P2$ procedūros sudėtingumas $T_2 = T_2(x, a)$, o c_1– priskyrimo laikas, c_2– `for` operatoriaus laikas, c_3– sudėties laikas, c_4– `return` operatoriaus darbo laikas, c_5– `if` operatoriaus darbo laikas, c_6– dalybos laikas.

	Laikas	Kartai
`int P1(int length, int k) {`	$T_1(l, k)$–	$P1$ procedūros sudėtingumas
`    int sum = 0;`	c_1	1
`    for (int i = 0; i < length; i++)`	c_2	$l + 1$
`    {`		

`        sum += P2(i, k);`	$\sum_{i=0}^{l-1}\left(c_3 + T_2(i,k)\right)$	
`    }`		
`    return sum;`	c_4	1
`}`		

Gauname, kad

$$T_1(l,k) = c_2 l + \sum_{i=0}^{l-1}\left(c_3 + T_2(i,k)\right) + c_1 + c_2 + c_4 = (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + c_1 + c_2 + c_4$$

`int P2(int x, int a)`	$T_2(x,a)$– $P2$ procedūros sudėtingumas	
`{`		
`    if (x < a) return a;`	$c_5 + (1-\chi)c_4$, čia $\chi = \begin{cases} 0, \text{kai } x < a, \\ 1, \text{kai } x \geq a \end{cases}$	
`    return P2(x / 2, a) + 1;`	$c_3 + c_6 + c_4 + T_2\left(\frac{x}{2}, a\right)$	χ
`}`		

Gauname, kad

$$T_2(x,a) = \begin{cases} c_4 + c_5, & \text{kai } x < a \\ T_2\left(\frac{x}{2}, a\right) + c_3 + c_4 + c_5 + c_6, & \text{kai } x \geq a \end{cases}$$

Randame T_2 sprendinį

$$T_2(x,a) = T_2\left(\frac{x}{2}, a\right) + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$

Šiuo atveju nesudėtinga spęsti tiek sudarant sprendinių medį, tiek taikant pagrindinę teoremą. Tai atliksime abiem būdais.

Pagrindinė teorema

Spęsime taikydami pagrindinę teoremą, nekreipdami dėmesio į sąlygą $x < a$, funkcija $T_2(x,a)$ tampa nepriklausoma nuo a: $\acute{a} = 1$, $b = 2$, $f(x,a) = (c_3 + c_4 + c_5 + c_6)x^0 = \Theta\left(x^{\log_b \acute{a}}\right) = \Theta\left(x^{\log_2 1}\right) = \Theta(x^0) = \Theta(1)$, t. y. $T_2(x,a) = \Theta(\log_2 x)$ remiantis antru atveju. Tačiau vertinant ir a įtaką, gaunasi kad

$$T_2(x,a) = O(\log_2 x),$$

nes bendru atveju rekursijos gylis mažesnis.

Pažymėkime: $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = d_1$, $c_1 + c_2 + c_4 = d_2$. Dabar įvertinsime T_1 , kai $l < k$. Šiuo atveju visada $i < k$ ir rekursinių iškvietimų $P2$ procedūroje nėra:

$$T_1(l,k) = (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + e = (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1}(c_4+c_5) + d_2 = d_1 l + d_2 = \Theta(l)$$

Kai $l \geq k$ $P2$ iškvietimus $P1$ procedūroje galime įvertinti tokiu būdu: $T_2(i,k) = \begin{cases} c_4+c_5, \text{kai } i < k \\ c \log_2 i\,, \text{kai } i \geq k \end{cases}$

Tokiu atveju

$$T_1(l,k) = (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + d_2 = (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{k-1}(c_4+c_5) + \sum_{i=k}^{l-1} c \log_2 i + d_2$$

Susumuokime $\sum_{i=0}^{l-1} \log_2 i$ pasinaudodami formule

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

nes funkcija $f(x) = \log_2 x$ – monotoniškai didėjanti.

$$\sum_{i=m}^{n} \log_2 i \leq \int_{m}^{n+1} \log_2 x\, dx = xlog_2x|_m^{n-1} - \int_m^{n+1} x\, d\log_2 x = xlog_2x|_m^{n+1} - \frac{1}{\ln 2}$$
$$= (n+1)log_2(n+1) - m\log_2 m - \frac{1}{\ln 2}$$

Baigiame T_1 įvertinimą

$$T_1(l,k) \leq (c_2+c_3)l + (c_4+c_5)k + c\left(l\log_2 l - k\log_2 k - \frac{1}{\ln 2}\right) + d_2$$
$$= c(l\log_2 l - k\log_2 k) + (c_2+c_3)l + (c_4+c_5)k + d_2 - \frac{c}{\ln 2}$$

Sprendinių medžio metodas

Spręskime naudodami sprendinių medžio metodą rasime tikslesnį įvertinimą. Kadangi yra tik viena šaka tai $(c_3+c_4+c_5+c_6 = d,\ c_4+c_5 = e)$

$$d \to d \to d \to \cdots d \to e$$

Medžio aukštis h randamas

$$\frac{x}{2^h} < a \Rightarrow h = \left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} + 1 \right\rfloor$$

Tokiu atveju

$$T_2(x,a) = \begin{cases} e, & \text{kai } x < a \\ d\left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} + 1 \right\rfloor + e, & \text{kai } x \geq a \end{cases}$$

Pažymėkime: $c_2+c_3+c_4+c_5 = d_1$, $c_1+c_2+c_4 = d_2$. Dabar įvertinsime T_1 , kai $l < k$. Šiuo atveju visada $i < k$ ir

$$T_1(l,k) = (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1}(c_4 + c_5) + d_2 = d_1 l + d_2 = \Theta(l)$$

Kitu atveju $T_1(l,k)$ reiškinyje suma skyla į dvi dalis:

$$\begin{aligned}
T_1(l,k) &= (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + d_2 = (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{k-1} e + \sum_{i=k}^{l-1}\left(d\left\lfloor \log_2 \frac{i}{k} + 1\right\rfloor + e\right) + d_2 \\
&\le d_1 l + d\sum_{i=k}^{l-1}\left(\log_2 \frac{i}{k} + 1\right) + d_2 \le d_1 l + d\sum_{i=k}^{l-1}(\log_2 i - \log_2 k + 1) + d_2 \\
&= d_1 l + d\left((1 - \log_2 k)(l-k) + \sum_{i=k}^{l-1}\log_2 i\right) + d_2 \\
&\le d_1 l + d\left(l - k - l\log_2 k + \mathrm{k}\log_2 k + l\log_2 l - k\log_2 k - \frac{1}{\ln 2}\right) + d_2 \\
&= d(l\log_2 l - l\log_2 k + l - k) + d_1 l + d_2 - \frac{d}{\ln 2}
\end{aligned}$$

Ats.:

$T_1(l,k) = \Omega(l), T_1(l,k) = O\left(c(l\log_2 l - k\log_2 k) + (c_2 + c_3)l + (c_4 + c_5)k + c_1 + c_2 + c_4 - \frac{c}{\ln 2}\right)$
arba

$T_1(l,k) = \Omega(l), T_1(l,k) = O\Big((c_3 + c_4 + c_5 + c_6)(l\log_2 l - l\log_2 k + l - k) + (c_2 + c_3 + c_4 + c_5)l +$
$c_1 + c_2 + c_4 - \frac{c_3 + c_4 + c_5 + c_6}{\ln 2}\Big)$