7 uždavinys

a) Suprastinti funkcionalą: $O\left(n^2\log_2 n + \left(\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^2\right)\right)$.

Susumuokime (1147 psl.):

$\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}(n-1)}{6} = \frac{n}{12}\left(2(n+1)(2n+1) - \left(\frac{n}{2}-1\right)(n-1)\right) = \frac{n}{12}\left(4n^2+6n+2-\left(\frac{n^2}{2}-\frac{3}{2}n+1\right)\right) = \frac{n}{12}\left(\frac{7}{2}n^2+\frac{15}{2}n+1\right) = \frac{7}{24}n^3 + \frac{15}{24}n^2 + 12n = O(n^3)$

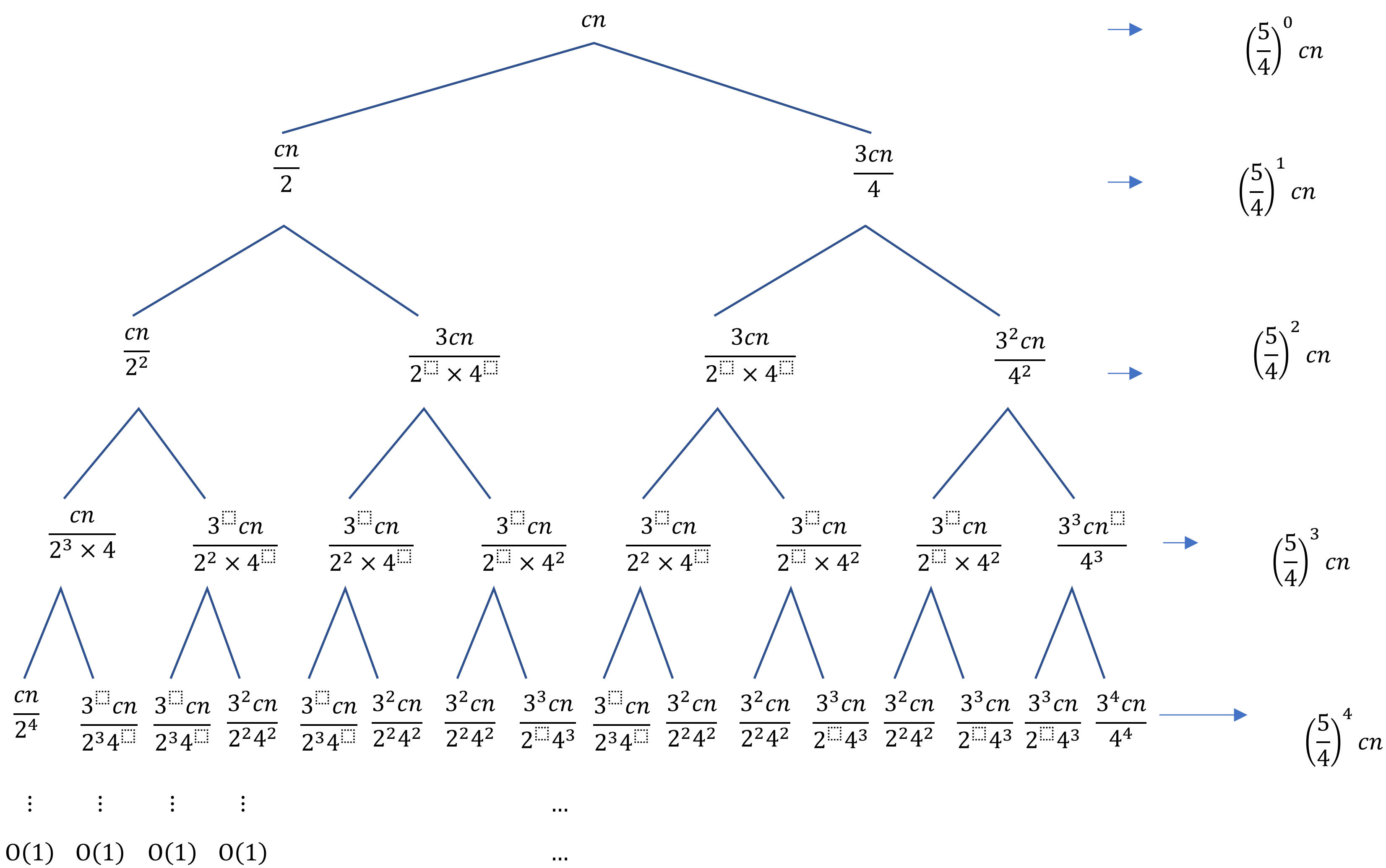
Beliko palyginti greičiausiai augantį narį n^3 su $n^2\log_2 n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\log_2 n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log_2 n)'}{n'} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Ats.: $O(n^3)$

b) Išspręsti rekurentinę lygtį: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + cn$

Sudarykime sprendinių medį:



cn
$\frac{cn}{2}$
$\frac{3cn}{4}$
$\frac{cn}{2^2}$
$\frac{3cn}{2^{\square} \times 4^{\square}}$
$\frac{3cn}{2^{\square} \times 4^{\square}}$
$\frac{3^2cn}{4^2}$
$\frac{cn}{2^3 \times 4}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^2 \times 4^{\square}}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^2 \times 4^{\square}}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^{\square} \times 4^2}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^2 \times 4^{\square}}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^{\square} \times 4^2}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^{\square} \times 4^2}$
$\frac{3^3cn^{\square}}{4^3}$
$\frac{cn}{2^4}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^3 4^{\square}}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^3 4^{\square}}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^3 4^{\square}}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^3cn}{2^{\square} 4^3}$
$\frac{3^{\square}cn}{2^3 4^{\square}}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^3cn}{2^{\square} 4^3}$
$\frac{3^2cn}{2^2 4^2}$
$\frac{3^3cn}{2^{\square} 4^3}$
$\frac{3^3cn}{2^{\square} 4^3}$
$\frac{3^4cn}{4^4}$
$\left(\frac{5}{4}\right)^0 cn$
$\left(\frac{5}{4}\right)^1 cn$
$\left(\frac{5}{4}\right)^2 cn$
$\left(\frac{5}{4}\right)^3 cn$
$\left(\frac{5}{4}\right)^4 cn$
$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ ...
O(1) O(1) O(1) O(1) ...

$$T(n)=\sum_{i=0}^{h}\left(\frac{5}{4}\right)^{i}cn=cn\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{h+1}-1}{\frac{5}{4}-1}=4cn\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{h+1}-1\right)$$

Sprendinių medžio aukštis h

$$\lfloor\log_2 n\rfloor\le h\le\left\lfloor\log_{\frac{4}{3}} n\right\rfloor$$

$$T(n)\ge\ 4cn\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\lfloor\log_2 n\rfloor+1}-1\right)\ge 4cn\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_2 n}-1\right)=4cn\times n^{\log_2\frac{5}{4}}-4cn=\Omega\left(n^{1+\log_2 5-2}\right)$$
$$=\Omega\left(n^{\log_2 5-1}\right)$$

$$T(n)\le\ 4cn\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\left\lfloor\log_{\frac{4}{3}} n\right\rfloor+1}-1\right)\le 4cn\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} n}=5cn\times n^{\log_{\frac{4}{3}}\frac{5}{4}}=O\left(n^{1+\log_{\frac{4}{3}}\frac{5}{4}}\right)$$

Ats.: $T(n)=\Omega\left(n^{\log_2 5-1}\right)=\Omega(n^{1{,}3219\dots})$, $T(n)=O\left(n^{1+\log_{\frac{4}{3}}\frac{5}{4}}\right)=O(n^{1{,}77566\dots})$