20 uždavinys

Suraskite D1 procedūros apatinį ir viršutinį asimptotinius įvertinimus.

```
int D1(int length, int k)
{
    int sum = 0;
    for (int i = length; i <= k; i++)
    {
        sum += D2(i, k);
    }
    return sum;
}
int D2(int x, int a)
{
    if (x < a) return a;
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < x; i++)
    {
        sum += 1;
    }
    return D2(x / 5, a) + D2(x / 5, a) + sum;
}
```

Sprendimas

Laikykime, kad parametrai $length, k, x, a$ yra neneigiami skaičiai, kitais atvejais procedūros gali būti nekorektiškos.

Pažymėkime $D1$ procedūros sudėtingumas (darbo laikas) $T_1 = T_1(l, k)$, čia $l = length$, o $D2$ procedūros sudėtingumas (darbo laikas) $T_2 = T_2(x, a)$. Abiejų procedūrų sudėtingumas priklauso nuo dviejų parametrų. Pažymėkime: c_1– priskyrimo laikas, c_2– `if` operatoriaus darbo laikas, c_3– sudėties laikas, c_4– `return` operatoriaus darbo laikas, c_5– dalybos laikas.

Kodas	Laikas	Kartai
`int D1(int length, int k) {`	$T_1(l,k)$- $D1$ procedūros sudėtingumas	
`    int sum = 0;`	c_1	1
`    for (int i = length; i <= k; i++)`	$c_1 + c_2(k-l+2) + c_3(k-l+1)$, kai $l \le k$ arba $c_1 + c_2$, kai $l > k$	
`    {`		
`        sum += D2(i, k);`	$\sum_{i=l}^{k}\left(c_3 + T_2(i,k)\right)$, kai $l \le k$ arba 0, kai $l > k$	
`    }`		
`    return sum;`	c_4	1
`}`		

Susumavus, gauname T_1:

$$T_1(l,k) = \begin{cases} 2c_1 + c_2 + c_4, \text{kai } l > k \\ (c_2 + 2c_3)(k-l+1) + \sum_{i=l}^{k} T_2(i,k) + 2c_1 + c_2 + c_4, \text{kai } l \le k \end{cases}$$

Kodas	Laikas	Kartai
`int D2(int x, int a)`	$T_2(x,a)$- $D2$ procedūros sudėtingumas	
`{`		
`    if (x < a) return a;`	$c_2 + (1-\chi)c_4$, čia $\chi = \begin{cases} 0, \text{kai } x < a, \\ 1, \text{kai } x \ge a \end{cases}$	
`    int sum = 0;`	c_1	χ
`    for (int i = 0; i < x; i++)`	$\chi \times (c_1 + c_2(x+1) + c_3 x)$	
`    {`		
`        sum += 1;`	c_3	$\chi \times x$
`    }`		
`    return S2(x / 5, a) + S2(x / 5, a) + sum;`	$2c_3 + c_4 + 2c_5 + 2\,T_2\left(\frac{x}{5}, a\right)$	χ
`}`		

Gauname, kad

$$T_2(x,a) = \begin{cases} c_2 + c_4, & \text{kai } x < a \\ 2T_2\left(\frac{x}{5}, a\right) + (c_2 + 2c_3)x + 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 + 2c_5, & \text{kai } x \geq a \end{cases}$$

Pažymėkime: $c_2 + c_4 = d_1$; $c_2 + 2c_3 = d_2$; $2c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4 + 2c_5 = d_3$; $(c_2 + 2c_3) = d_4$; $2c_1 + c_2 + c_4 = d_5$.

Kadangi reikia įvertinti T_1 tai mums pakanka atvejo kai $x < a$, nes kitų atvejų nėra sumuojant $T_2(l,k)$, išskyrus kai $l = k$.

$$T_1(l,k) = \begin{cases} d_5, \text{kai } l > k \\ d_2(k - l + 1) + T_2(k,k) + d_1(k - l) + d_5, \text{kai } l \leq k \end{cases}$$

$$T_1(l,k) = \begin{cases} d_5, \text{kai } l > k \\ (d_1 + d_2)(k - l) + T_2(k,k) + d_2 + d_5, \text{kai } l \leq k \end{cases}$$

Tačiau, kai $T_2(k,k)$ sprendinių medžio aukštis $h = 1$, nes $T_1(k,k) = 2T_2\left(\frac{k}{5}, k\right) + d_2k + d_3$

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "T_2(k,k)"'] & \\
 & d_2k + d_3 \arrow[dl, "T_2\left(\frac{k}{5}, k\right)"'] \arrow[dr, "T_2\left(\frac{k}{5}, k\right)"] & \\
d_5 & & d_5
\end{tikzcd}$$

ir $T_2(k,k) = d_2k + d_3 + 2d_5$, todėl

$$T_1(l,k) = \begin{cases} d_5, \text{kai } l > k \\ (d_1 + d_2)(k - l) + d_2k + d_2 + d_3 + 3d_5, \text{kai } l \leq k \end{cases}$$

Ats.:

$T_1(l,k) = \Theta(1)$, kai $l < k$

$T_1(l,k) = \Theta\big((d_1 + d_2)(k - l) + d_2k\big)$, kai $l \geq k$

arba

$T_1(l,k) = \Omega(1)$ ir $T_1(l,k) = O(k)$.