9 uždavinys

a) Palyginti funkcijas: $f(n) = \frac{n}{\ln{(n+1)}}$, $g(n) = \frac{n+5}{\ln\ \mathrm{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{\ln{(n+1)}}}{\frac{n+5}{\ln\ \mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+5} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} \times \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(n+1)}} = 1 \times \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ats.: $\frac{n}{\ln{(n+1)}} = \Theta\left(\frac{n+5}{\ln\ \mathrm{n}}\right)$

b) Išspręsti rekurentinę lygtį $T(m) = 2T\left(\frac{m}{3}\right) + \log_3 m^3$. Lygtį išspęskite taikydami pagrindinę teoremą.

Taikome pagrindinės teoremos 1 atvejį:

$a = 2$, $b = 3$, $f(m) = 3\log_3 m$

Jei $\forall\ m \geq m_0\ \exists\epsilon > 0$, kad $f(m) = O\left(m^{\log_b a-\epsilon}\right)$ tai sprendinys $T(m) = \Theta\left(m^{\log_b a}\right)$.

Kad patikrinti apibrėžtą sąlygą $f(m) = 3\log_3 m = O\left(m^{\log_3 2-\epsilon}\right)$ spręsime lygtį $\lim_{m\to\infty} \frac{m^{\log_3 2-\epsilon}}{3\log_3 m} = \infty$ rasdami ϵ reikšmę.

$\lim_{m\to\infty} \frac{m^{\log_3 2-\epsilon}}{3\log_3 m} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{1}{3}\lim_{m\to\infty} \frac{\left(m^{\log_3 2-\epsilon}\right)\prime}{(\log_3 m)\prime} = \frac{\log_3 2-\epsilon}{3} \lim_{m\to\infty} \frac{m^{\log_3 2-\epsilon-1}}{\frac{1}{m\ln 3}} = \frac{\ln 3(\log_3 2-\epsilon)}{3} \lim_{m\to\infty} m^{\log_3 2-\epsilon} = \infty$, kai $\log_3 2 - \epsilon > 0$ arba $\epsilon < \log_3 2$.

Ats.: Kadangi egzistuoja teigiamas ϵ, tada lygties $T(m) = 2T\left(\frac{m}{3}\right) + \log_3 m^3$ sprendinys $T(m) = \Theta\left(m^{\log_3 2}\right)$