17 uždavinys

Suraskite $A1$ procedūros apatinį ir viršutinį asimptotinius įvertinimus.

```
int A1(int length, int k)
{
    int sum = 0;
    for (int i = 0; i < length; i++)
    {
        sum += A2(i, k);
    }
    return sum;
}
int A2(int x, int a)
{
    if (x < a) return a;
    return A2(x - 2, a) + 1;
}
```

Sprendimas

Laikykime, kad parametrai $length$, k, x, a yra teigiami skaičiai, kitais atvejais procedūros gali būti nekorektiškos.

Abiejų procedūrų sudėtingumas priklauso nuo dviejų parametrų. Pažymėkime $A1$ procedūros sudėtingumas $T_1 = T_1(l, k)$, čia $l = length$, $A2$ procedūros sudėtingumas $T_2 = T_2(x, a)$, o c_1– priskyrimo laikas, c_2– `for` operatoriaus laikas, c_3– sudėties/atimties laikas, c_4– `return` operatoriaus darbo laikas, c_5– `if` operatoriaus darbo laikas.

	Laikas	Kartai
`int A1(int length, int k) {`	$T_1(l, k)$– $A1$ procedūros sudėtingumas	
`    int sum = 0;`	c_1	1
`    for (int i = 0; i < length; i++)`	c_2	$l + 1$
`    {`		

`        sum += A2(i, k);`	$\sum_{i=0}^{l-1}\left(c_3 + T_2(i,k)\right)$	
`    }`		
`    return sum;`	c_4	1
`}`		

Gaunamė, kad

$$T_1(l,k) = c_2 l + \sum_{i=0}^{l-1}\left(c_3 + T_2(i,k)\right) + c_1 + c_2 + c_4 = (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + c_1 + c_2 + c_4$$

`int A2(int x, int a)`	$T_2(x,a)$– $A2$ procedūros sudėtingumas	
`{`		
`    if (x < a) return a;`	$c_5 + (1-\chi)c_4$, čia $\chi = \begin{cases} 0, \text{kai } x < a, \\ 1, \text{kai } x \geq a \end{cases}$	
`    return P2(x - 2, a) + 1;`	$2c_3 + c_4 + T_2(x-2,a)$	χ
`}`		

Gaunamė, kad

$$T_2(x,a) = \begin{cases} c_4 + c_5, & \text{kai } x < a \\ T_2(x-2,a) + 2c_3 + c_4 + c_5, & \text{kai } x \geq a \end{cases}$$

Randame T_2 sprendinį

$$T_2(x,a) = T_2(x-2,a) + 2c_3 + c_4 + c_5$$

Šiuo atveju reikia spęsti sudarant sprendinių medį, kuris turi tik vieną šaką ($2c_3 + c_4 + c_5 = d$)

$$d \to d \to d \to \cdots d \to (c_4 + c_5)$$

Medžio aukštis h randamas

$$x - 2h < a \Rightarrow h = \left\lfloor \frac{x-a}{2} + 1 \right\rfloor$$

Tokiu atveju

$$T_2(x,a) = \begin{cases} c_4 + c_5, & \text{kai } x < a \\ (2c_3 + c_4 + c_5)\left\lfloor \frac{x-a}{2} + 1 \right\rfloor + (c_4 + c_5), & \text{kai } x \geq a \end{cases}$$

Pažymėkime: $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = c$, $c_1 + c_2 + c_4 = e$. Dabar įvertinsime T_1 , kai $l < k$. Šiuo atveju visada $i < k$ ir

$$T_1(l,k) = (c_2 + c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1}(c_4 + c_5) + c_1 + c_2 + c_4 = cl + e = \Theta(cl)$$

Kitu atveju $T_1(l,k)$ reiškinyje suma skyla į dvi dalis:

$$
\begin{aligned}
T_1(l,k) &= (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{l-1} T_2(i,k) + e \\
&= (c_2+c_3)l + \sum_{i=0}^{k-1}(c_4+c_5) + \sum_{i=k}^{l-1}\left(d\left\lfloor\frac{i-k}{2}+1\right\rfloor + (c_4+c_5)\right) + e \\
&= cl + d\sum_{i=k}^{l-1}\left\lfloor\frac{i-k}{2}+1\right\rfloor + e \le cl + d\sum_{i=k}^{l-1}\left(\frac{i-k}{2}+1\right) + e \\
&= \ cl + \frac{1}{2}d\left((2-k)(l-k) + \sum_{i=k}^{l-1} i\right) + e \\
&= cl + \frac{1}{2}d\left((2-k)(l-k) + \frac{1}{2}(l+k-1)(l-k)\right) + e \\
&= cl + \frac{1}{2}d\left((l-k)\left(2-k+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}k-1\right)\right) + e \\
&= cl + \frac{1}{2}d\left((l-k)\left(\frac{1}{2}(l-k)+1\right)\right) + e = cl + \frac{1}{4}d(l-k)^2 + \frac{1}{2}d(l-k) + e
\end{aligned}
$$

Ats.:

$T_1(l,k) = \Omega(cl)$,

$T_1(l,k) = O\left(cl + \frac{1}{4}d\,(l-k)^2 + \frac{1}{2}d(l-k)\right)$,

čia $c = c_2 + c_3 + c_4 + c_5$, $d = 2c_3 + c_4 + c_5$.

Pastaba: Nors

$$\lim_{l\to\infty}\frac{(l-k)^2}{l} = \lim_{l\to\infty}\left(l - 2k + \frac{k^2}{l}\right) = \infty$$

tačiau kai $k \approx l$ tai pirmas dėmuo tampa reikšmingu ir suprastinti reiškinio negalima.