Paprastųjų diferencialinių lygčių skaitinis sprendimas: *pradinių reikšmių uždaviniai*

Temoje aiškinama:

- **Paprastųjų diferencialinių lygčių (PDL) apibrėžimas ir pavyzdžiai;**
- **PDL sprendimas skaitiniu integravimu. Eulerio metodas;**
- **Skaitinio integravimo metodo tikslumo eilė ir stabilumo intervalas;**
- **Aukštesniųjų tikslumo eilių skaitinio integravimo metodai;**
- **Prognozės ir korekcijos metodai. IV eilės Rungės ir Kutos metodo skaitinė schema;**
- **IV eilės Rungės ir Kutos metodo tikslumo eilė ir stabilumo intervalas;**
- **Apibendrinimai. MATLAB funkcija ODE45 skaitiniam integravimui IV eilės Rungės ir Kutos metodu**

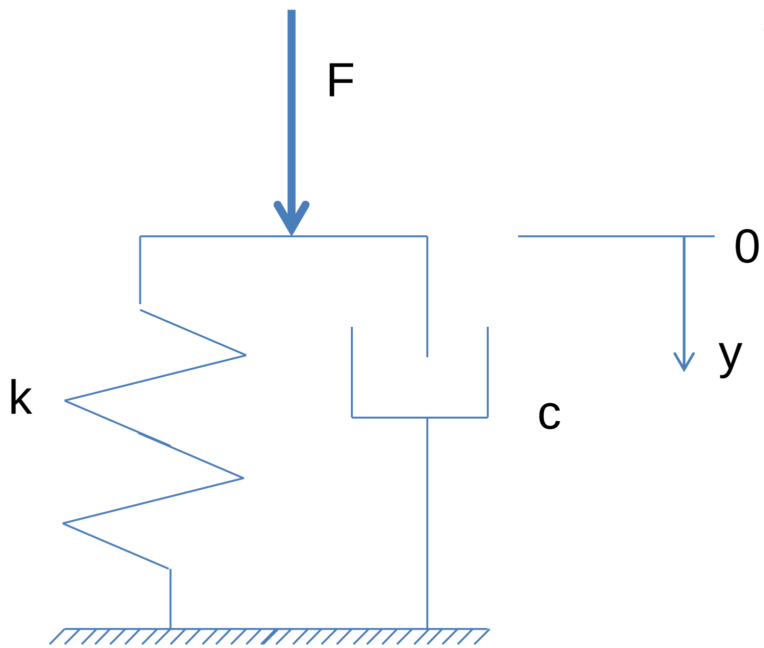
Paprastųjų diferencialinių lygčių (PDL) apibrėžimas ir pavyzdžiai

Paprastosios diferencialinės lygtys (PDL).
Apibrėžimas ir pavyzdžiai

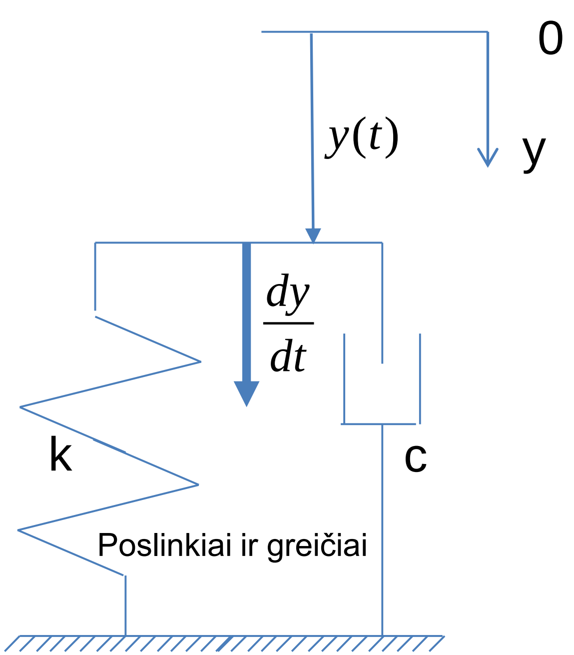
- Paprastoji diferencialinė lygtis(PDL) matematine išraiška susieja funkciją ir vieną ar kelias jos išvestines to paties argumento atžvilgiu;
- PDL sprendinys yra funkcija, kurios išraiškoje yra viena ar kelios *integravimo konstantos* ;
- Kai integravimo konstantos nustatomos pagal žinomas pradines funkcijos reikšmes, turime *pradinių reikšmių (Koši) uždavinį*

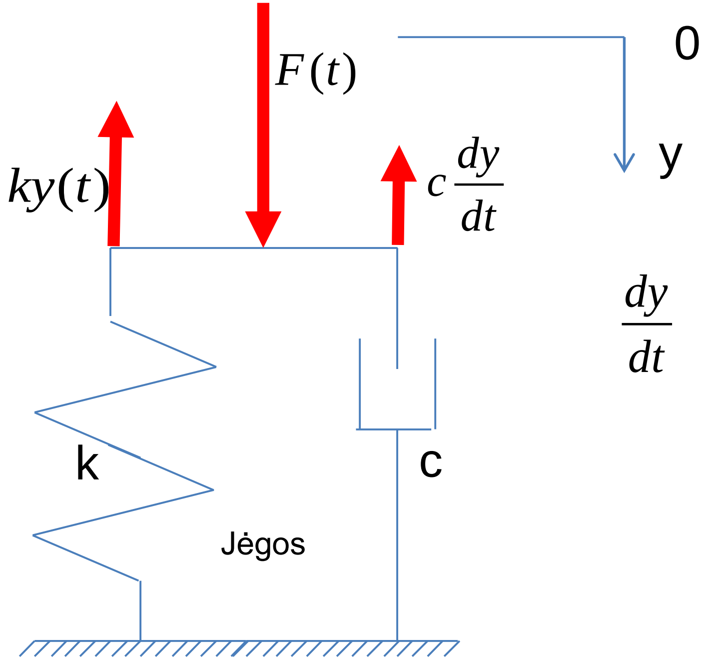
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Daugelis PDL aprašo realias fizikines, biologines, ekonomines, socialines sistemas. Svarbus PDL bruožas yra, kad jomis galima aprašyti ***judėjimą arba būsenos kitimą, laikui bėgant***;
- Kaip priešingybė, algebrinėmis lygtimis aprašytume tik sistemų stacionarias pusiausvyros būsenas;
- Kaip sudaroma sistemos judesio PDL, iliustruosime pavyzdžiu:



y(t) nusako, kaip laikui bėgant judės platformėlė, veikiant ją išorine jėga F (inercijos nevertiname, t.y. taikysime I Niutono dėsnį)





1) Pasirenkame koordinačių sistemą, tegul Oy bus nukreipta vertikaliai žemyn;

2) Vektorius vaizduojame pasirinktu laiko momentu, kai poslinkis ir greitis abu yra teigiami. T.y. kūnas jau pasislinkęs ir dar juda žemyn, pagal Oy kryptį (kairinis paveikslas);

3) Šiuo pasirinktu momentu vaizduojame platformėlę veikiančias jėgas. Jos trys - duotoji jėga, kurios teigiama kryptis yra žemyn, bei spyruoklės ir slopintuvo išvystomos jėgos dėl poslinkio ir greičio. Pastarosios visuomet nukreiptos priešingomis kryptimis poslinkiui ir greičiui. Pasirinktu momentu, kai greitis ir poslinkis abu teigiami (žemyn), šios jėgos nukreiptos aukštyn (dešinys paveikslas);

4) Rašome diferencialinę lygtį pagal I Niutono dėsnį : taškas yra pusiausvyroje, kai visų veikiančių jėgų suma lygi 0. Ši lygtis rašoma piešinyje pavaizduotų vektorių projekcijomis į Oy ašį, todėl jėgų ženklai abu neigiami, žr. pirmąją formulę;

5) Algebriškai pertvarkome lygtį į standartinį pavidalą, o kaip pradinę sąlygą parenkame nulinį pradinį platformėlės poslinkį

$$-c\frac{dy}{dt} - ky + F(t) = 0, \qquad y(0) = 0;$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{c}y + \frac{1}{c}F(t), \qquad y(0) = 0;$$

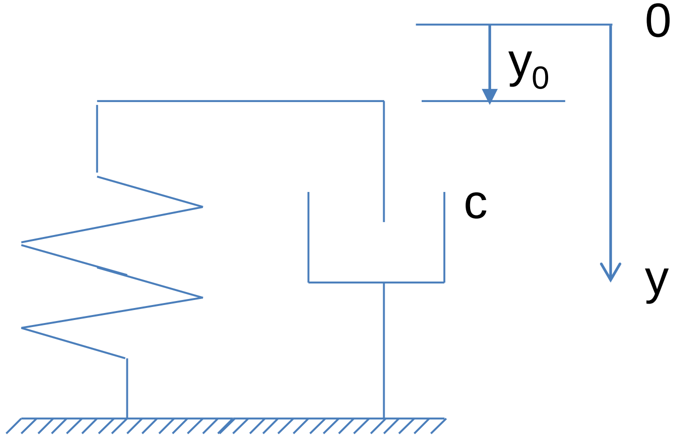
Standartinis pirmos eilės PDL pavidalas:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y); \qquad y(0) = y_0$$

Homogeninė PDL

y(t) nusako, kaip laikui bėgant kinta platformėlės padėtis, leidžiant jai laisvai judėti nuo tam tikros pradinės padėties y_0:

$$c\frac{dy}{dt}+ky=0, \qquad y(0)=y_0;$$



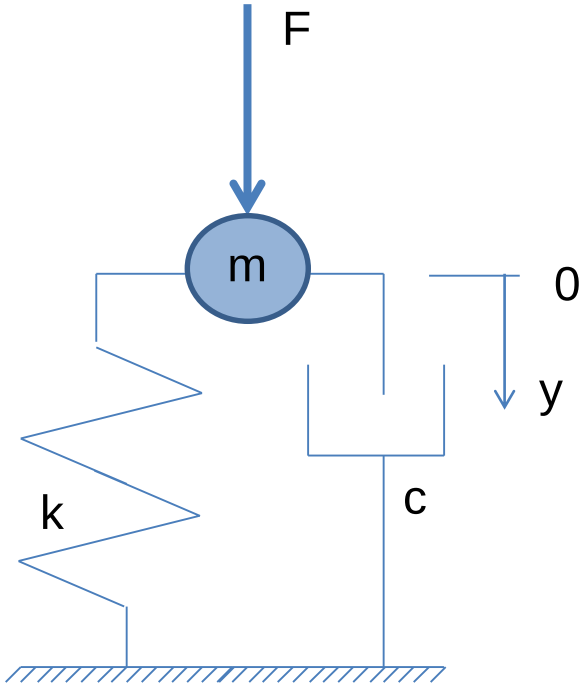
PDL, kurios dešinė pusė nulinė, vadinama *homogenine PDL .* Fiziškai tai reiškia, kad judėdama sistema nepatiria išorinių poveikių, t.y. jos elgseną sąlygoja tik vidinės jėgos.

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k}{c}y, \qquad y(0)=y_0;$$

Standartinis pirmos eilės homogeninės PDL pavidalas:

$$\frac{dy}{dt}=f(y); \qquad y(0)=y_0$$

Antros eilės PDL



y(t) nusako, kaip laikui bėgant virpės masė, veikiant ją išorine jėga F . Čia įvertiname inercijos jėgas, t.y. taikome II Niutono dėsnį:

$$-c\frac{dy}{dt}-ky+F(t)=m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad y(0)=0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0;$$

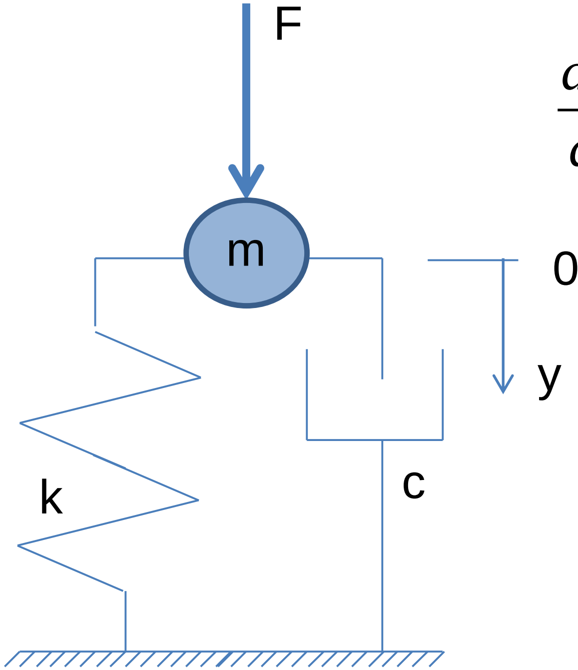
$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+ky=F(t), \qquad y(0)=0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{c}{m}\frac{dy}{dt}-\frac{k}{m}y+\frac{1}{m}F(t), \qquad y(0)=0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0;$$

Standartinis antros eilės PDL pavidalas:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=f\left(t,y,\frac{dy}{dt}\right); \quad y(0)=y_0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=v_0$$

Antros eilės PDL gali būti pakeista į pirmos eilės PDL sistemą:



$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{c}{m}\frac{dy}{dt} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}F(t), \qquad y(0)=0; \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0;$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = v; \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{c}{m}v - \dfrac{k}{m}y + \dfrac{1}{m}F(t); \end{cases} \qquad y(0)=0; \; v(0)=0;$$

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} y \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ -\dfrac{c}{m}v - \dfrac{k}{m}y + \dfrac{1}{m}F(t) \end{Bmatrix}; \qquad \begin{Bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{Bmatrix} = 0;$$

Standartinis pirmos eilės PDL sistemos pavidalas:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}\right); \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$$

Sistemos elgsena žinoma, jeigu pagal jos būvį aprašančius kintamuosius ***y*** ir poveikius sistemai esant kiekvienai argumento *t* reikšmei, galime apskaičiuoti kintamųjų ***y*** *išvestinių skaitines reikšmes*

- Aukštesniosios eilės PDL visuomet gali būti pakeista į pirmos eilės PDL sistemą;

- Skaitinio PDL sprendimo algoritmai dažniausiai formuluojami pirmos eilės PDL;

- Algoritmai atskiros PDL sprendimui analogiški PDL sistemos sprendimo algoritmams. PDL sistemos atveju tie patys veiksmai atliekami su kiekviena lygtimi;

- Toliau kalbėsime tik apie standartinio pavidalo PDL <u>pradinių reikšmių</u> uždavinį:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

PDL sprendimas skaitiniu integravimu. Eulerio metodas

Paprastosios diferencialinės lygtys (PDL).
Skaitinio sprendimo metodai

- ***Skaitiškai išspręsti PDL*** **reiškia apytiksliai apskaičiuoti sprendinio reikšmes diskrečiuose taškuose, keičiant argumento reikšmes tam tikru žingsniu;**
- **Dažnai PDL skaitinį sprendimą vadiname** ***PDL skaitiniu integravimu*** **(nereikia painioti su** ***skaitiniu apibrėžtinio integralo apskaičiavimu*****)**
- **Remiantis PDL išraiška, sudaroma** ***skaitinio integravimo formulė*****, kurios pagalba pagal jau žinomą sprendinio reikšmę ties esama argumento reikšme randame sprendinio reikšmę ties sekančia artimiausia argumento reikšme;**
- **Bendruoju atveju argumento žingsniai gali būti skirtingi;**
- **Pradinių reikšmių uždavinio skaitinio sprendimo metodai paremti** ***atkirsta Teiloro eilute,*** **užrašyta taško, kurį jau esame apskaičiavę, aplinkoje;**

Norėdami sulyginti gautus skaitinius sprendinius su tiksliais, PDL pavyzdžiu imsime

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + f, \qquad y(0) = y_0;$$

Šią lygtį galima išspręsti analitiškai:

$$y = \left(y_0 + \frac{f}{\alpha} \right) e^{\alpha x} - \frac{f}{\alpha}$$

$$y = z - \frac{f}{\alpha};$$

$$\frac{dz}{dx} = \alpha z;$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \alpha dx + \ln C;$$

$$\ln z = \alpha x + \ln C;$$

$$z = Ce^{\alpha x};$$

$$y = Ce^{\alpha x} - \frac{f}{\alpha};$$

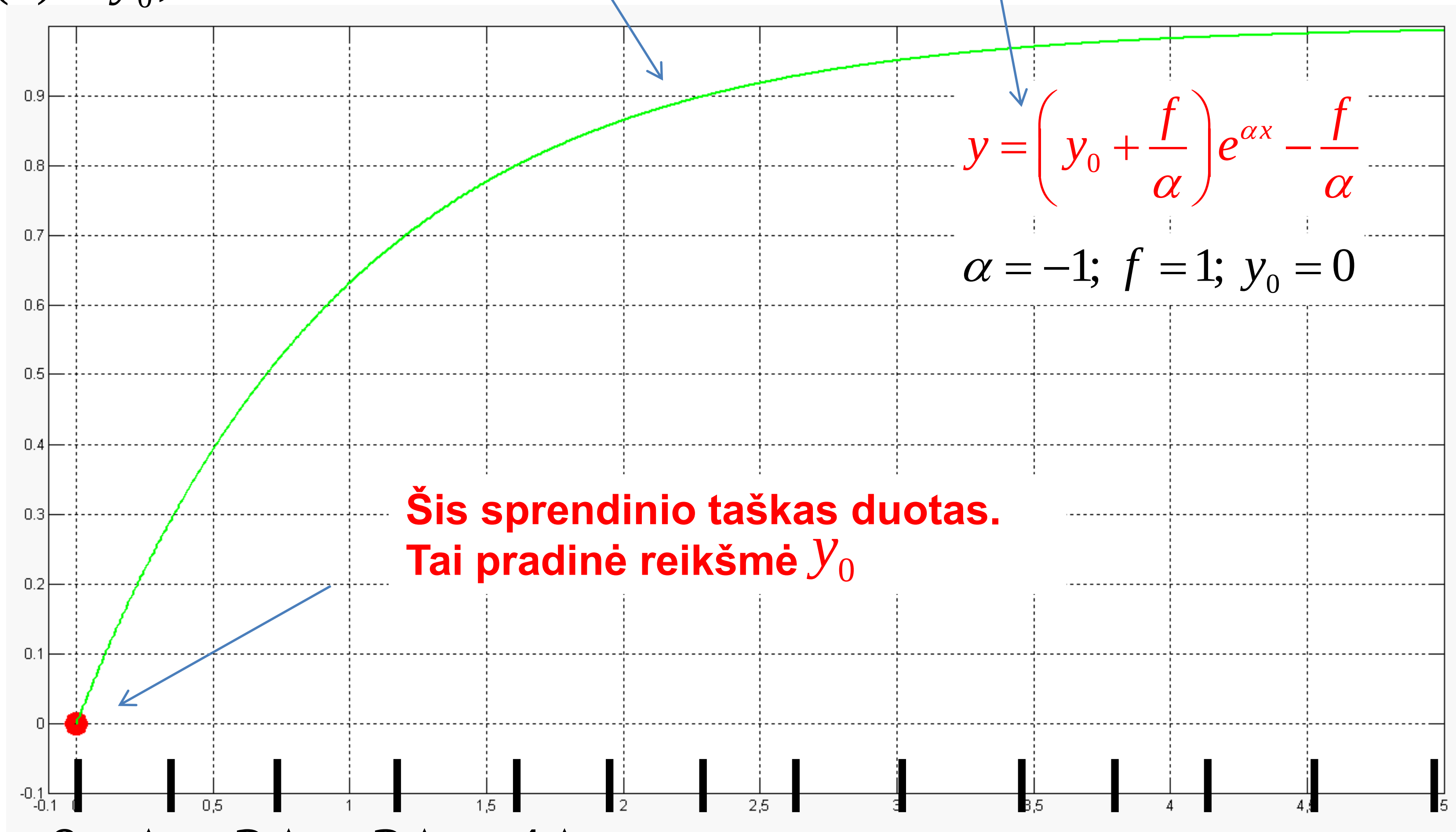
$$y(0) = y_0 \;\Rightarrow\; y_0 = C - \frac{f}{\alpha} \;\Rightarrow\; C = y_0 + \frac{f}{\alpha};$$

$$y = \left(y_0 + \frac{f}{\alpha} \right) e^{\alpha x} - \frac{f}{\alpha};$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y + f,$$

$$y(0) = y_0;$$

Šios kreivės (tai analitinis sprendinys) “nežinome”. Ją apytiksliai turime rasti, skaitiškai spręsdami PDL

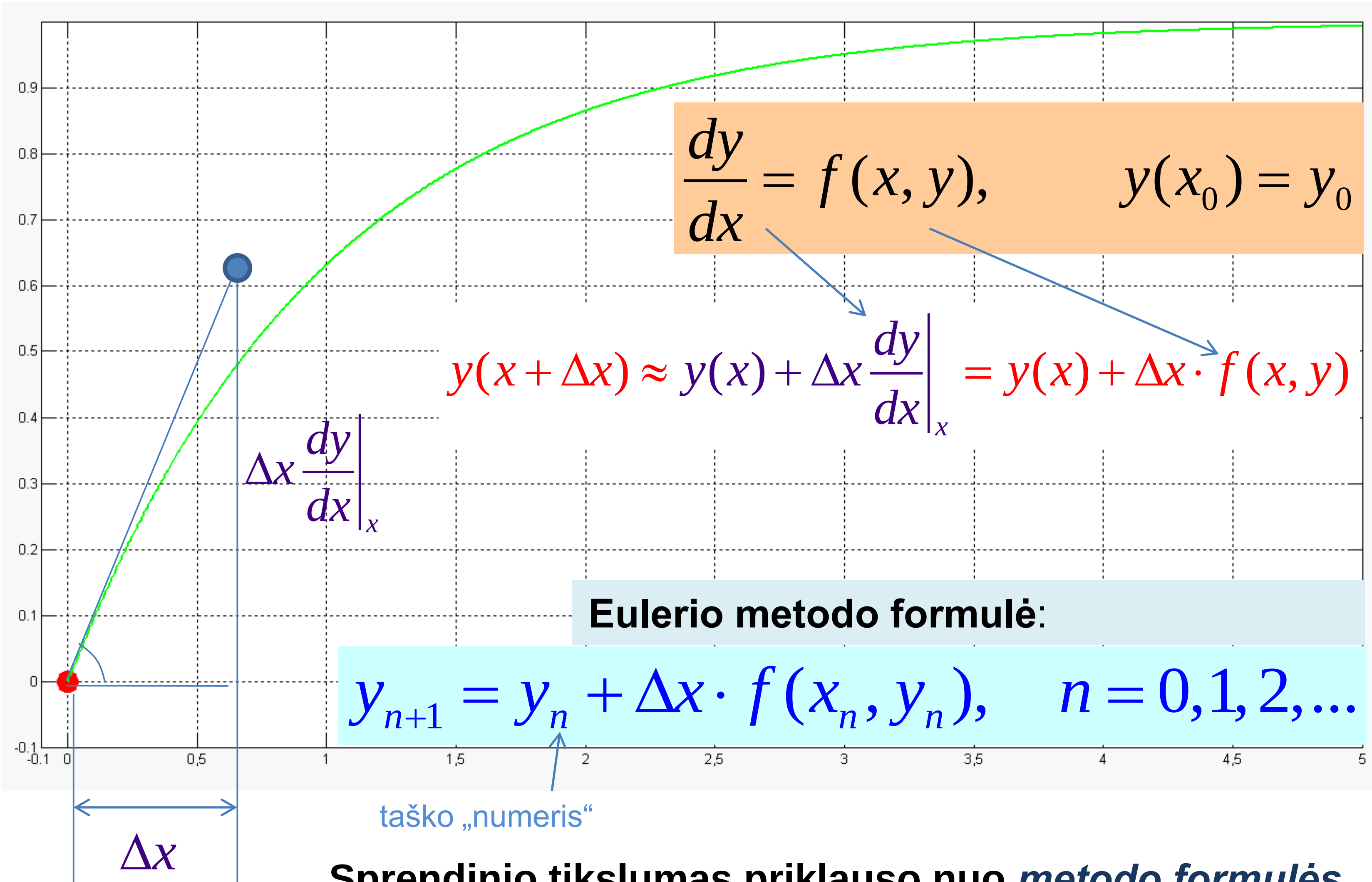


$$0 \quad \Delta x \quad 2\Delta x \quad 3\Delta x \quad 4\Delta x \quad \cdots$$

Sprendinį apskaičiuosime diskrečiuose taškuose, parinkę tam tikrą *argumento žingsnį* Δx

Eulerio metodas skaitiniam PDL sprendimui.

Tai paprasčiausias metodas



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + \Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right|_x = y(x) + \Delta x \cdot f(x, y)$$

$$\Delta x \left.\frac{dy}{dx}\right|_x$$

Eulerio metodo formulė:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \cdot f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

taško „numeris“

Δx

Sprendinio tikslumas priklauso nuo *metodo formulės* ir nuo *žingsnio dydžio*

Pvz_SMA_10_01_Eulerio_svarbiausios_savokos

Skaitinio integravimo metodo tikslumo eilė ir stabilumo intervalas

Matematiškai ***metodo tikslumo eilė*** nustatoma, tiriant ***tiesinės homogeninės PDL sprendinį*** vieno žingsnio metu, gautą ***analiziniu*** ir ***skaitiniu*** būdais

Analizinis sprendinys

Analizinio sprendinio reikšmė pirmo žingsnio pabaigoje Δx

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y; \quad y(0) = y_0;$$

Analizinio sprendinio skleidinys Teiloro eilute taško x=0 aplinkoje

$$\tilde{y} = y_0 e^{\alpha x};$$

$$\tilde{y}(\Delta x) = y_0 e^{\alpha \Delta x} = y_0 + \alpha \Delta x y_0 + \frac{(\alpha \Delta x)^2}{2} y_0 + \frac{(\alpha \Delta x)^3}{6} y_0 + \frac{(\alpha \Delta x)^4}{24} y_0 + \ldots$$

$$y(\Delta x) = y_0 + \Delta x \left(\alpha y_0 \right)$$

Skaitinio sprendinio, apskaičiuoto pagal Eulerio metodo formulę, reikšmė pirmo žingsnio pabaigoje, t.y. kai $x=\Delta x$

- **Taikant Eulerio metodą, skaitinis ir analitinis sprendiniai po vieno žingsnio sutampa iki Teiloro eilutės nario su 1 eilės išvestine. Todėl *Eulerio metodas yra 1 tikslumo eilės;***

- **Tai reiškia, kad kiekvieno žingsnio (t.y. *lokalioji*) paklaida yra proporcinga žingsnio dydžiui antruoju laipsniu;**

Ar gauto sprendinio tikslumas pakankamas, galima patikrinti, sulyginus sprendinius, gautus esant tam tikram ir 2 kartus mažesniam žingsniui

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y;$$

Atliekame vieną skaitinio integravimo žingsnį

$$y(\Delta x) = y_0 + \Delta x\left(\alpha y_0\right)$$

Atliekame du skaitinio integravimo žingsnius iš eilės, kai žingsnio reikšmė du kartus mažesnė

$$y\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\alpha y_0$$

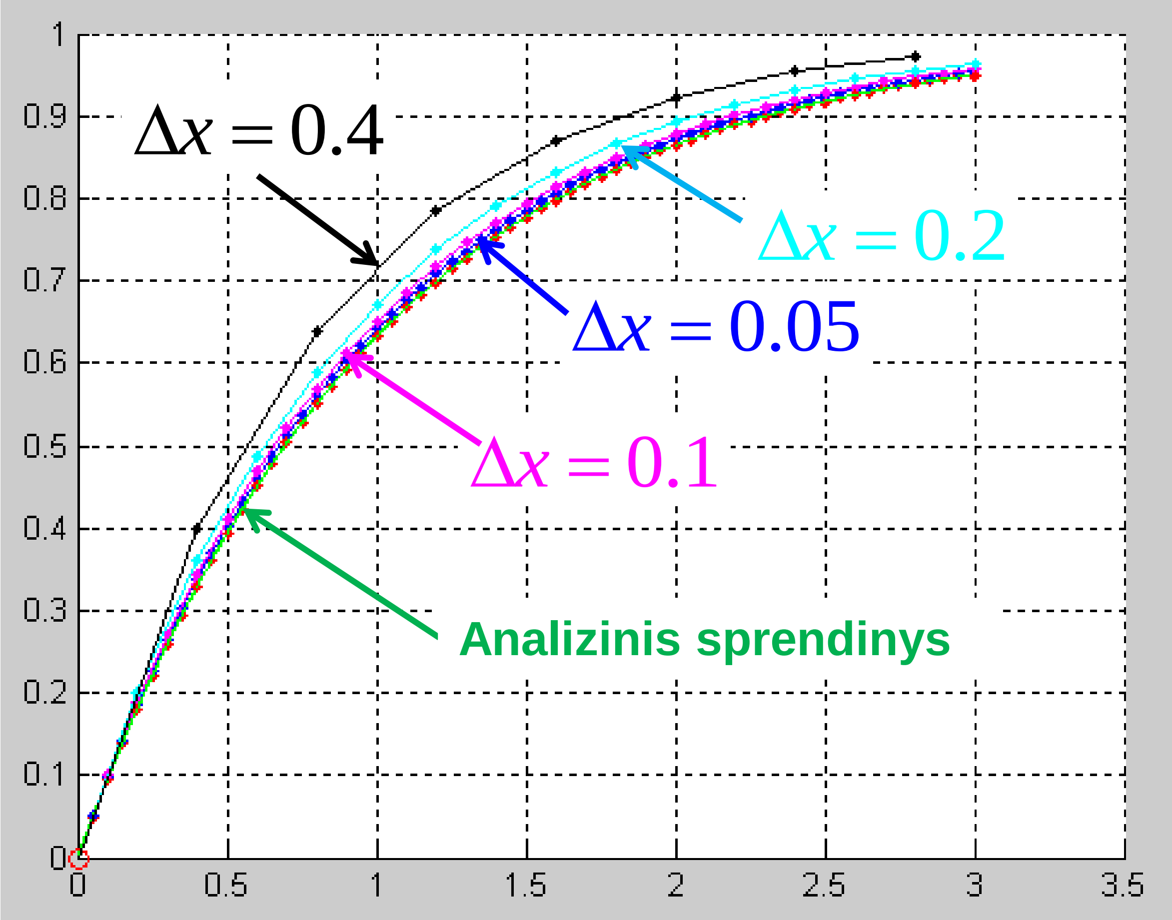
$$y(\Delta x) = y\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + {}^{\Delta x}\!/_{2}\left(\alpha y\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\alpha y_0 + \frac{\Delta x}{2}\left(\alpha y_0 + \frac{\Delta x}{2}\alpha y_0\right) =$$

$$= y_0 + \Delta x\left(\alpha y_0\right) + \frac{\Delta x^2}{4}\alpha y_0$$

Jei sprendiniai prie abiejų žingsnių labai panašūs, šis narys yra nereikšmingo dydžio. Jo eilė tokia pati, kokia būtų ir sekančio Teiloro eilutės nario. Todėl netgi antros eilės metodo panaudojimas rezultato ženkliai nepagerintų. Reiškia, gauto sprendinio tikslumas priimtinas.

Eulerio metodo tikslumo tyrimas

$$\frac{dy}{dx} = -y + 1, \qquad y(0) = 0;$$



- Sprendžiant realų uždavinį, kaip taisyklė, nebūna galimybės palyginti gautą skaitinį sprendinį su analiziniu;
- Gauto sprendinio tikslumas laikomas patenkinamu, jeigu sprendinių prie parinkto ir prie 2 kartus mažesnio žingsnio skirtumas ***neviršija inžineriškai priimtinos paklaidos***

Matematiškai *metodo stabilumo* savybė nustatoma, tiriant tiesinės homogeninės PDL sprendinį po daugelio žingsnių, gautą *skaitiniu* būdu

$$y(\Delta x) = y_0 + \Delta x\left(\alpha y_0\right)$$

$$y(\Delta x) = y_1 = y_0\left(1+\alpha\Delta x\right);$$

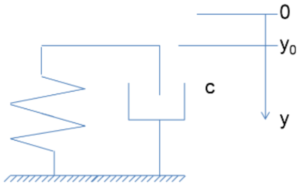
$$y(2\Delta x) = y_2 = y_1\left(1+\alpha\Delta x\right) = y_0\left(1+\alpha\Delta x\right)^2;$$

$$\vdots$$

$$y(n\Delta x) = y_n = y_0\left(1+\alpha\Delta x\right)^n;$$

$$E = \left|1+\alpha\Delta x\right|$$

Metodo vieno žingsnio ***skaitinis* *"stiprinimo koeficientas"***



Kai E > 1, metodas ***nestabilus***. Kiekviename žingsnyje padaryta metodui būdinga paklaida tolydžio didėja, atliekant vis naujus skaitinio integravimo žingsnius.

$$\left|1+\alpha\Delta x\right| < 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 1+\alpha\Delta x < 1, & 1+\alpha\Delta x > 0; \\ -1-\alpha\Delta x < 1, & 1+\alpha\Delta x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1+\alpha\Delta x < 1; \\ 0 < -1-\alpha\Delta x < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < \alpha\Delta x < 0$$

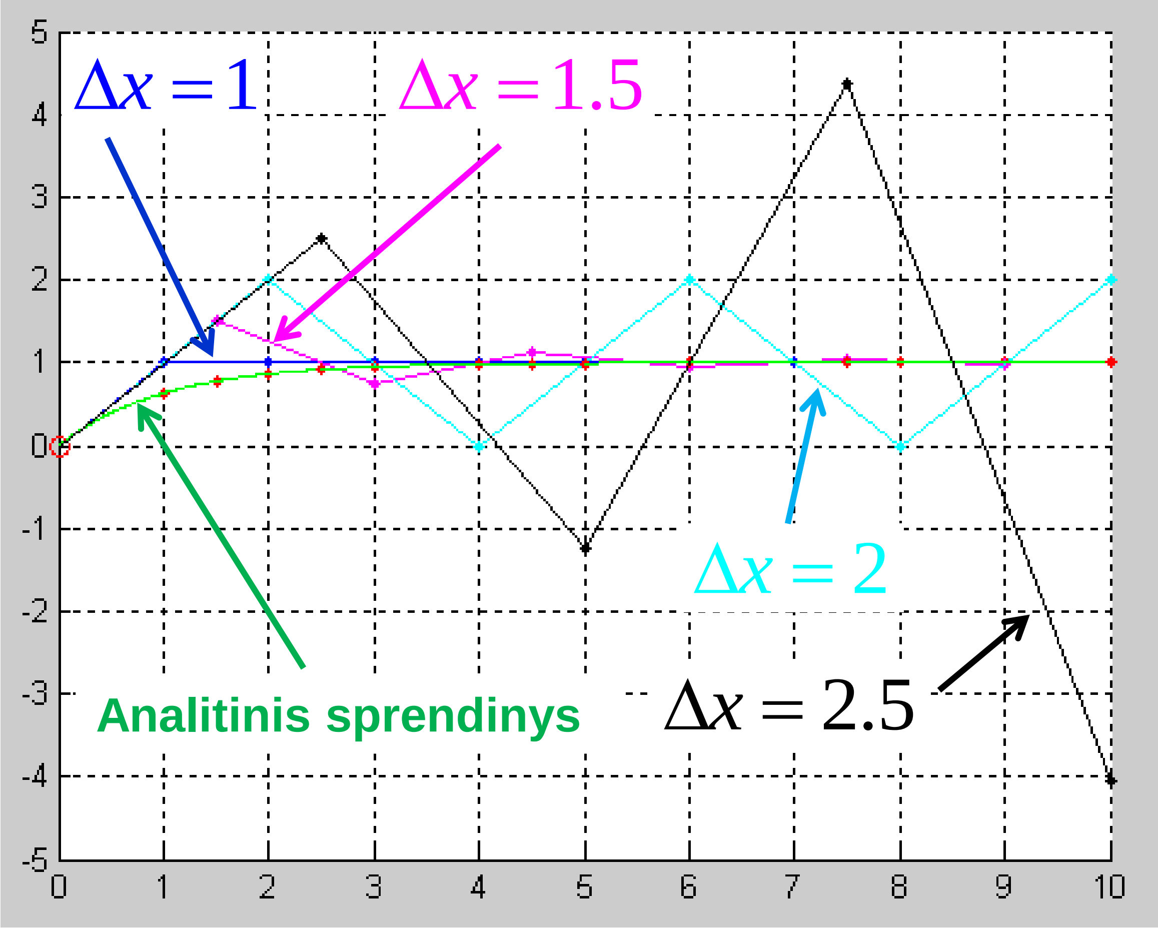
Eulerio metodo stabilumo sąlyga:
(sakome, kad metodas yra *sąlygiškai stabilus*)

$$\alpha < 0, \qquad \Delta x < \frac{2}{|\alpha|}$$

Eulerio metodo stabilumo tyrimas

$$\frac{dy}{dx} = -y + 1, \qquad y(0) = 0;$$

Stabilumo sąlyga: $\Delta x < \dfrac{2}{|\alpha|}$



- **Kai Δx>2, skaitinis sprendinys nesiliauja "švytavęs" apie analitinį sprendinį augančia amplitude;**
- **Jeigu sprendinys *stabilus*, tai nereiškia, kad jis pakankamai *tikslus*. Jis tik "neisišvytuoja" ir nesukelia aritmetinio perpildymo**

Aukštesniųjų tikslumo eilių skaitinio integravimo metodai

Aukštesniųjų tikslumo eilių metodai

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0$$

$$y_{n+1}=y_n+\Delta x\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_n+\frac{\Delta x^2}{2}\cdot\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_n+\frac{\Delta x^3}{6}\cdot\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_n+\cdots,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

1 tikslumo eilės(Eulerio) metodas

2 tikslumo eilės metodas

3 tikslumo eilės metodas

$$\frac{dy}{dx}=f\ (x,y);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ f;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ f\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ f\right)}{\partial y}\ f=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ f+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ f+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ f\bullet f+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}\ f=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\ f+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ f\right)f+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ f\right);$$

- **Taikome *sudėtinių* funkcijų diferencijavimo taisykles;**
- **Išvestines galima apskaičiuoti, taikant MATLAB arba Python analizinių veiksmų programines funkcijas**

.

```
% Aukstesniuju tikslumo eiliu skaitinio integravimo algoritmai
% funkcijos ir daliniu isvestiniu simbolines israiskos:
syms xp yp
f=-yp+sqrt(xp+1)-3;

% pilnuju isvestiniu simbolines israiskos
dyp(1)=f;
for i=2:eile, dyp(i)=diff(dyp(i-1),xp)+diff(dyp(i-1),yp)*dyp(1); end

x=0;y=0; % pradines reiksmes
dx=0.7;  % integravimo zingsnis

xmax=10; % sprendimo intervalo pabaiga
nsteps=xmax/dx; % zingsniu skaicius

for i=1:nsteps
 sum=0; for j=1:eile
sum=sum+eval(subs(subs(dyp(j),sym(xp),sym('x')),sym(yp),sym('y')))*dx^j/factorial(j)
        end
    y=y+sum; % ekstrapoliacija pagal T.e. narius:
    x=x+dx; % argumento prieaugis per 1 zingsni
end
```

$$y' = f\ (x,y);$$

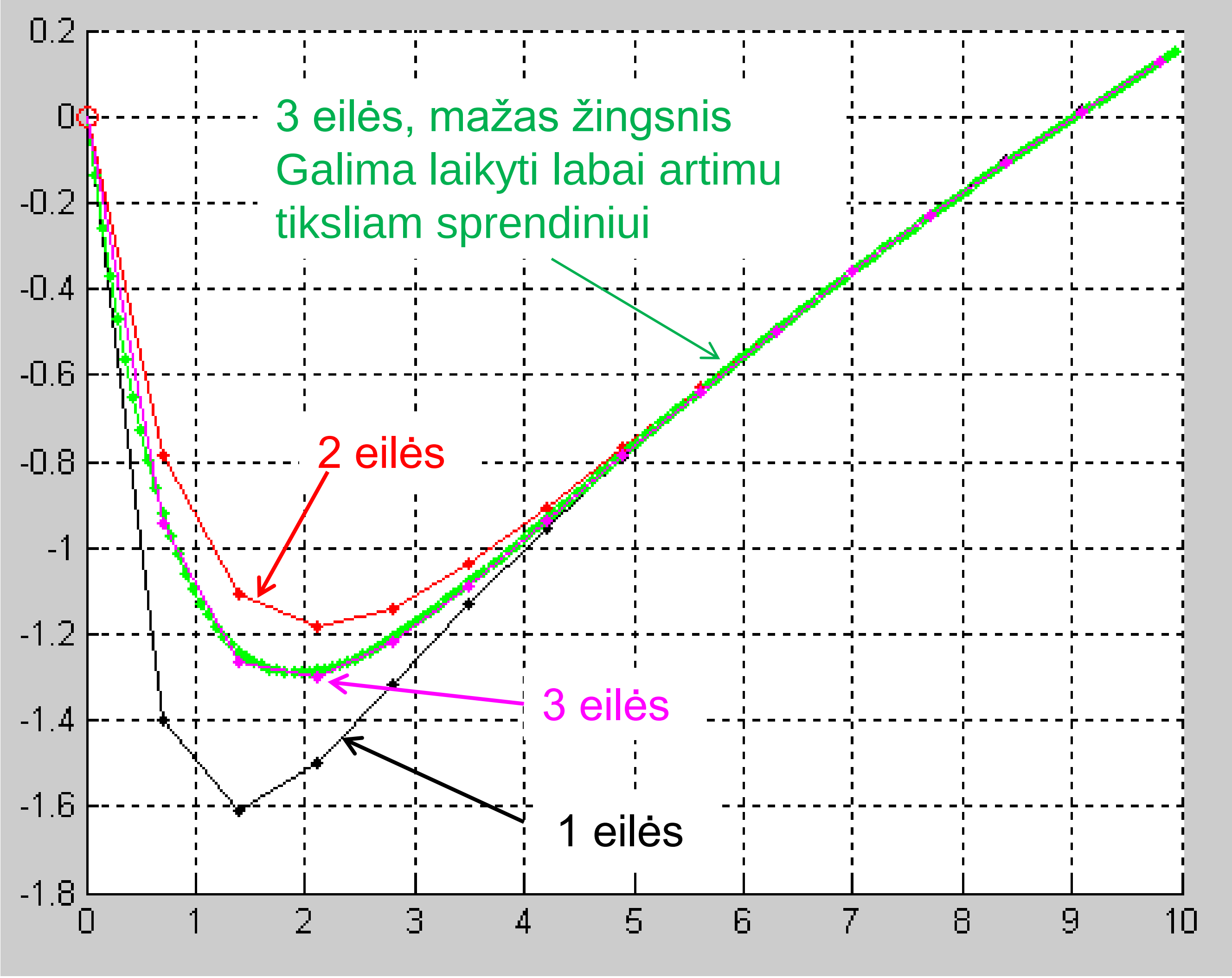
$$y'' = \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y}\ f\ ;$$

$$y''' = \frac{\partial y''}{\partial x} + \frac{\partial y''}{\partial y}\ f$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x \cdot f_n + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_n + \frac{\Delta x^3}{2} \cdot \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_n + \cdots$$

Pvz_SMA_10_02_Aukstesniu_eiliu_metodai

Aukštesniųjų eilių metodų tikslumo tyrimas



$$\frac{dy}{dx} = -y + \sqrt{x+1} - 3$$

$$y(0) = 0$$

Pvz_SMA_10_02_Aukstesniu_eiliu_metodai

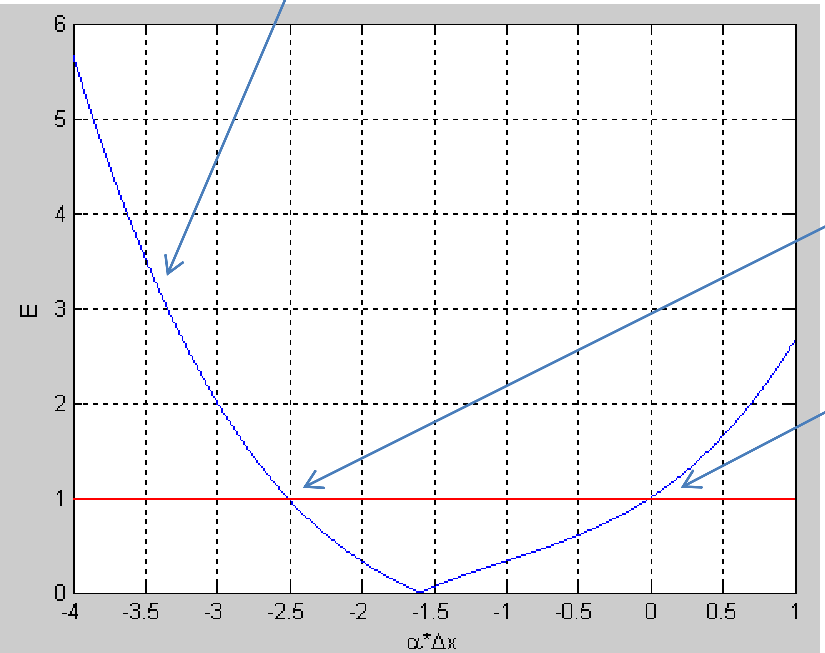
Pvz_SMA_10_03_Aukstesniu_eiliu_metodai_stabilumo_tyrimas

3-ia tikslumo eilė

$$\frac{dy}{dx}=\alpha y;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\alpha\frac{dy}{dx}=\alpha^2 y;\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\alpha\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha^3 y;$$

$$y(\Delta x)=y_0+\Delta x\left(\alpha y_0\right)+\frac{\Delta x^2}{2}\alpha^2 y_0+\frac{\Delta x^3}{6}\alpha^3 y_0=y_0\left(1+\alpha\Delta x+\frac{\alpha^2\Delta x^2}{2}+\frac{\alpha^3\Delta x^3}{6}\right)$$

$$E=\left|1+\alpha\Delta x+\frac{\alpha^2\Delta x^2}{2}+\frac{\alpha^3\Delta x^3}{6}\right|<1$$



$$-2.5127<\alpha\Delta x<0$$

$$\alpha<0$$

$$\Delta x<\frac{2.5127}{|\alpha|}$$

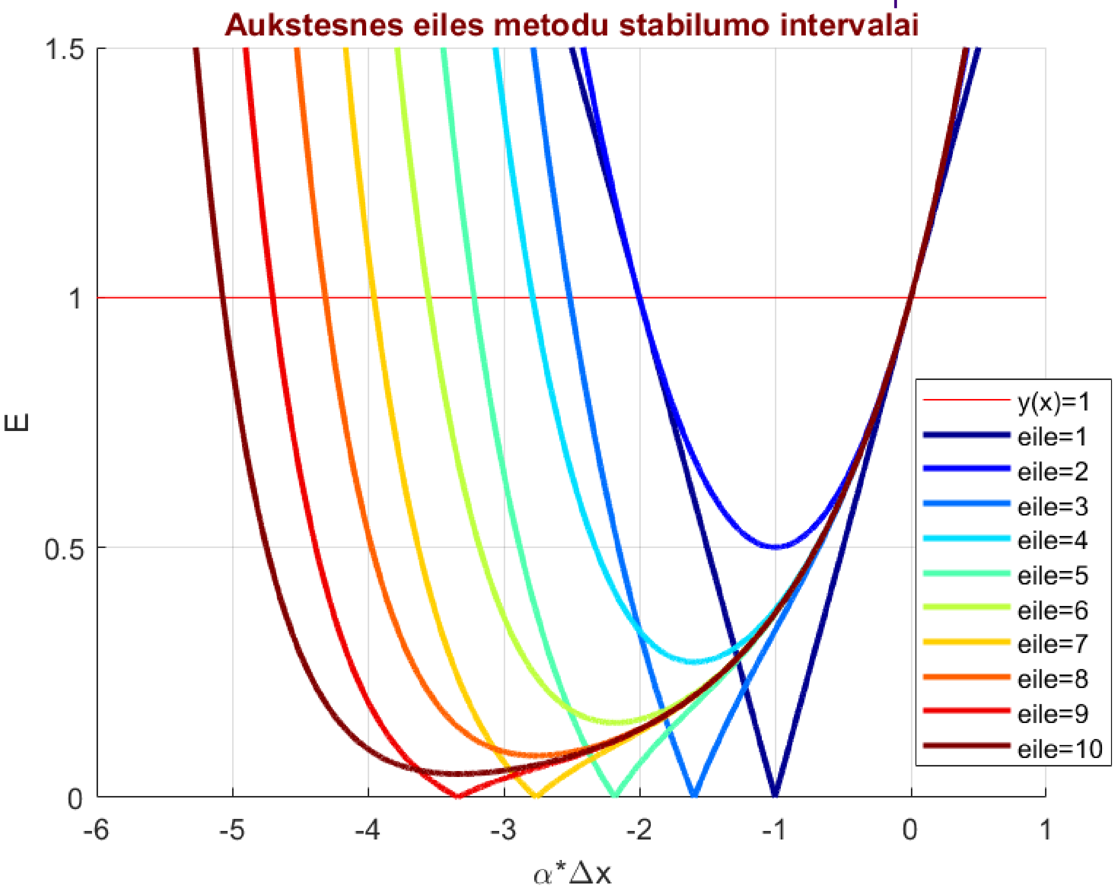
Sąlyginis stabilumas

Pvz_SMA_10_03_Aukstesniu_eiliu_metodai_stabilumo_tyrimas

n tikslumo eilė

$$y(\Delta x) = y_0 \left(1 + \alpha \Delta x + \frac{\alpha^2 \Delta x^2}{2} + \ldots + \frac{\alpha^n \Delta x^n}{n!} \right)$$

$$E = \left| 1 + \alpha \Delta x + \frac{\alpha^2 \Delta x^2}{2} + \ldots + \frac{\alpha^n \Delta x^n}{n!} \right| < 1$$



- **Kuo aukštesnė metodo tikslumo eilė, tuo platesnis metodo stabilumo intervalas;**
- **Vis dėlto, nei vienas iš nagrinėjamų metodų *nėra besąlygiškai stabilus***

Prognozės ir korekcijos metodai.
IV eilės Rungės ir Kutos metodo skaitinė schema

Prognozės ir korekcijos metodai

- **Nors aukštesniųjų tikslumo eilių metodais galima sukurti labai aukšto tikslumo skaitinio integravimo formules, jie nėra dažnai naudojami;**
- **Metodai nėra universalūs. Jų nepavyksta pritaikyti, kai PDL funkcija *f(x,y)* yra nediferencijuojama;**
- **Metodai nėra ekonomiški skaičiavimų apimties požiūriu. Aukštų eilių pilnųjų išvestinių išraiškos gali būti labai sudėtingos;**
- **Aukštos tikslumo eilės skaitinio integravimo formules galima gauti ir neatliekant analitinio diferencijavimo. Tam skirti *prognozės ir korekcijos metodai.* Kiekvieno žingsnio metu PDL funkcija *f(x,y)* apskaičiuojama keletą kartų, imant skirtingas x ir y reikšmes**

IV eilės Rungės ir Kutos metodo skaitinė schema

Kiekvienas skaitinio integravimo žingsnis susideda iš 4 etapų (požingsnių):

1. **Prognozuojame, taikydami Eulerio metodą žingsniu dx/2**

$$y^{*}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2} f\ (x_n, y_n)$$

PDL funkcija apskaičiuojama kelis kartus

2. **Koreguojame, taikydami atgalinį Eulerio metodą žingsniu dx/2**

$$y^{**}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2}\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

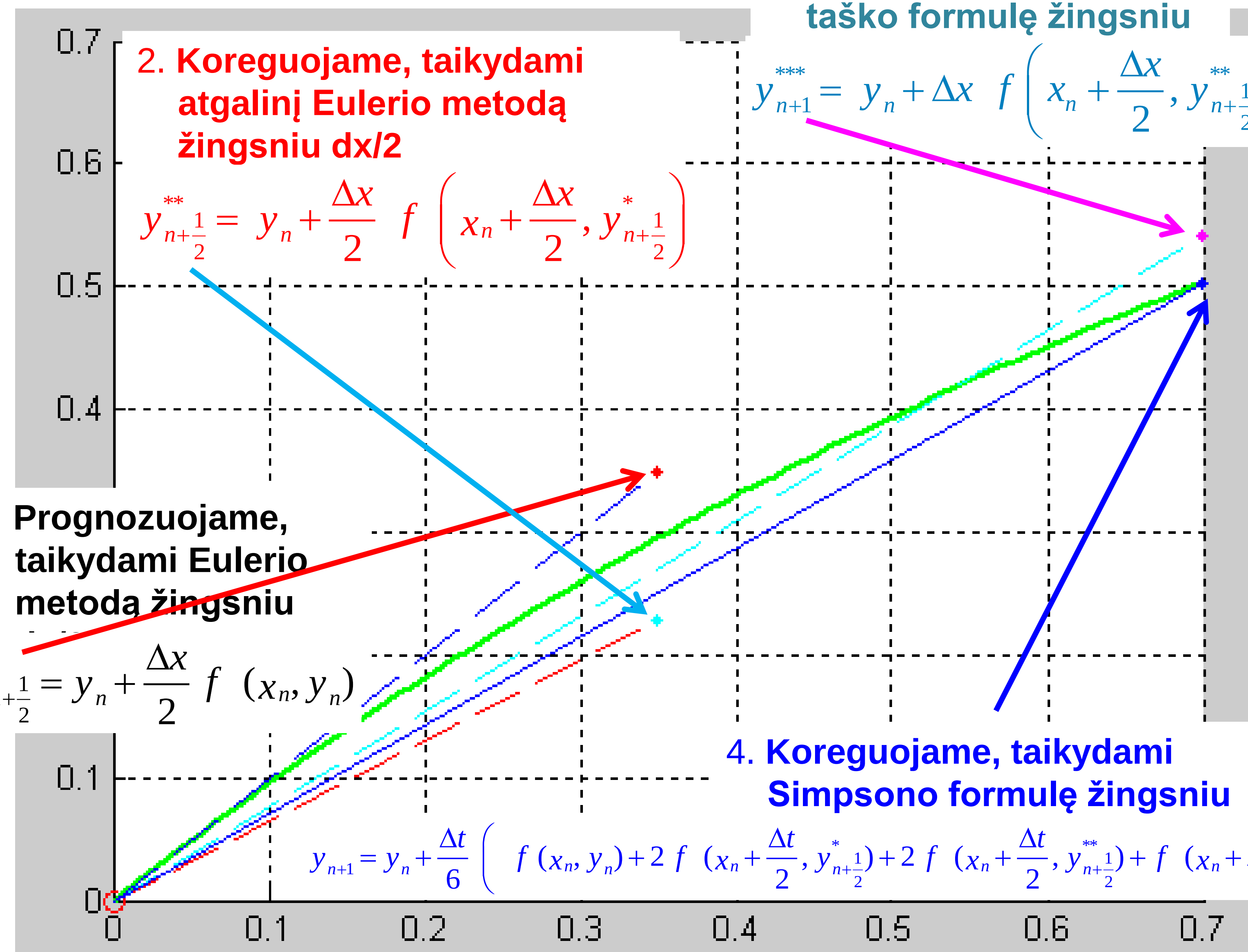
3. **Prognozuojame, taikydami vidurinio taško formulę žingsniu dx**

$$y^{***}_{n+1} = y_n + \Delta x\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

4. **Koreguojame, taikydami Simpsono koreguojančią formulę žingsniu dx**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta x}{6}\left(f\ (x_n, y_n) + 2\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}}\right) + 2\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}}\right) + f\ \left(x_n + \Delta t,\ y^{***}_{n+1}\right)\right)$$

IV eilės Rungės ir Kutos metodas



1. Prognozuojame, taikydami Eulerio metodą žingsniu

$$y^{*}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2} f\ (x_n, y_n)$$

2. Koreguojame, taikydami atgalinį Eulerio metodą žingsniu dx/2

$$y^{**}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2}\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

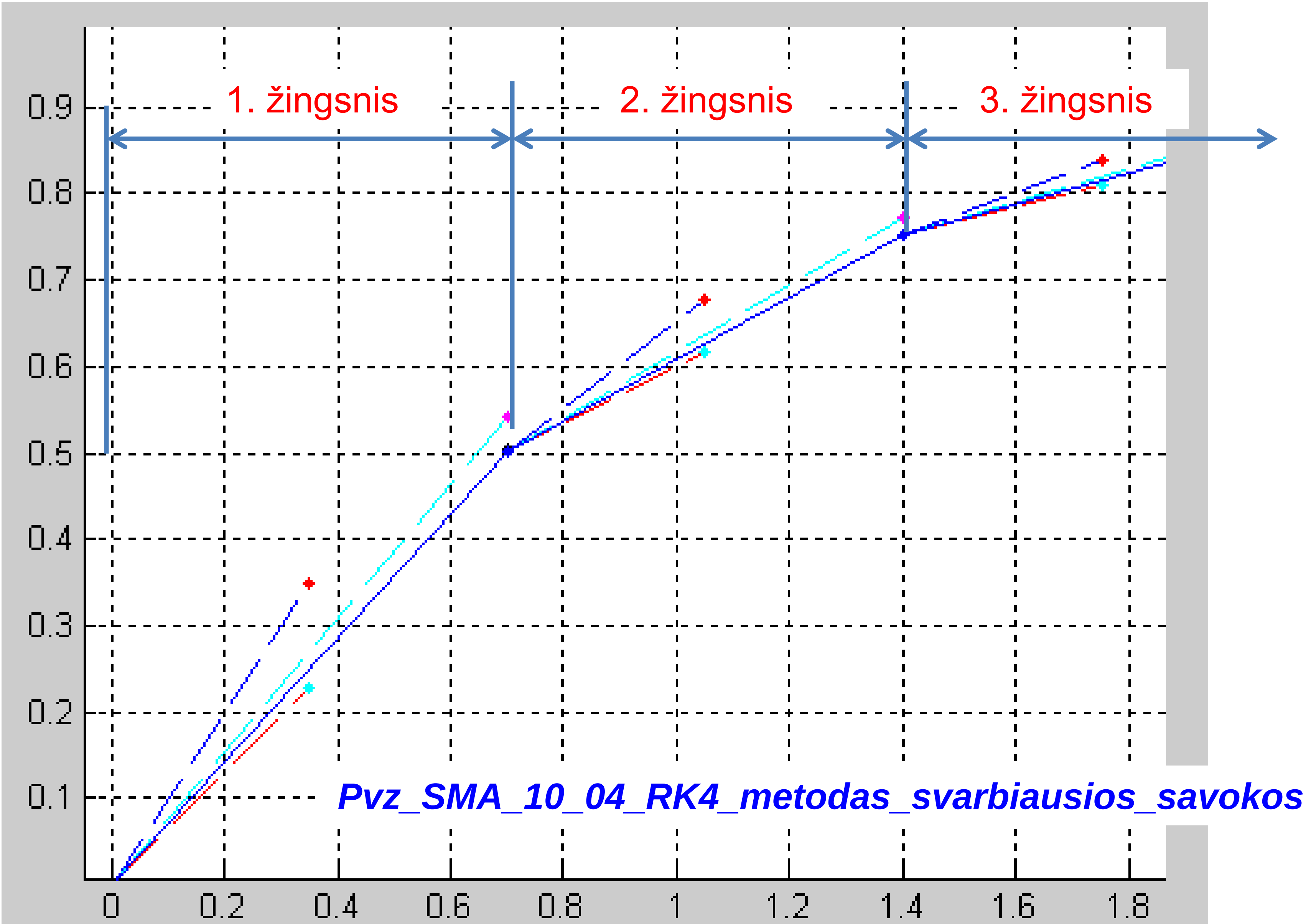
3. Prognozuojame, taikydami vidurinio taško formulę žingsniu

$$y^{***}_{n+1} = y_n + \Delta x\ f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

4. Koreguojame, taikydami Simpsono formulę žingsniu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}\left(f\ (x_n, y_n) + 2\ f\ (x_n + \frac{\Delta t}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}}) + 2\ f\ (x_n + \frac{\Delta t}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}}) + f\ (x_n + \Delta t,\ y^{***}_{n+1}\right)$$

IV eilės RK metodo skaičiavimų eigos grafinis pavaizdavimas :



IV eilės Rungės ir Kutos metodo tikslumo eilė ir stabilumo intervalas

IV RK metodo *tikslumo eilės* apskaičiavimas

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y; \quad y(0) = y_0$$

$$y^{*}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2} f\ (x_n, y_n)$$

$$y^{**}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{\Delta x}{2} f\ x_n \left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$y^{***}_{n+1} = y_n + \Delta x\ f \left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} \left(\begin{array}{l} f\ (x_n, y_n) + \\ +2\ f\ (x_n + \frac{\Delta t}{2}, y^{*}_{n+\frac{1}{2}}) + \\ +2\ f\ (x_n + \frac{\Delta t}{2}, y^{**}_{n+\frac{1}{2}}) + \\ + f\ (x_n + \Delta t,\ y^{***}_{n+1} \end{array} \right)$$

$$y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = y_0 + \frac{\Delta x}{2}(\alpha y_0);$$

$$y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = y_0 + \frac{\Delta x}{2}\left(\alpha y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right);$$

$$y^{***}(\Delta x) = y_0 + \Delta x\left(\alpha y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right);$$

$$y_1 = y_0 + \frac{\Delta x}{6}\left(\alpha y_0 + 2\alpha y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + 2\alpha y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \alpha y^{***}(\Delta x)\right);$$

IV RK metodo *tikslumo eilės* apskaičiavimas taikant simbolinius skaičiavimus MATLAB

$$y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)=y_0+\frac{\Delta x}{2}\left(\alpha y_0\right);$$

$$y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)=y_0+\frac{\Delta x}{2}\left(\alpha y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right);$$

$$y^{***}\left(\Delta x\right)=y_0+\Delta x\left(\alpha y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\right);$$

$$y_1=y_0+\frac{\Delta x}{6}\left(\alpha y_0+2\alpha y^{*}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)+2\alpha y^{**}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)+\alpha y^{***}\left(\Delta x\right)\right);$$

```
syms y0 x a dt

f0=a*y0;
yz=y0+dt/2*f0;  %Eulerio per puse zingsnio, prognoze
fz=a*yz;
yzz=y0+dt/2*fz; % Atgal.Eul.per puse zingsnio, korekcija
fzz=a*yzz;
yzzz=y0+dt*fzz; % Vidurinio tasko per 1 zingsni, prognoze
fzzz=a*yzzz;
y1=y0+dt/6*(f0+2*fz+2*fzz+fzzz); % Simpsono, korekcija
expand(y1)
```

(yn*a^4*dt^4)/24 + (yn*a^3*dt^3)/6 + (yn*a^2*dt^2)/2 + yn*a*dt + yn

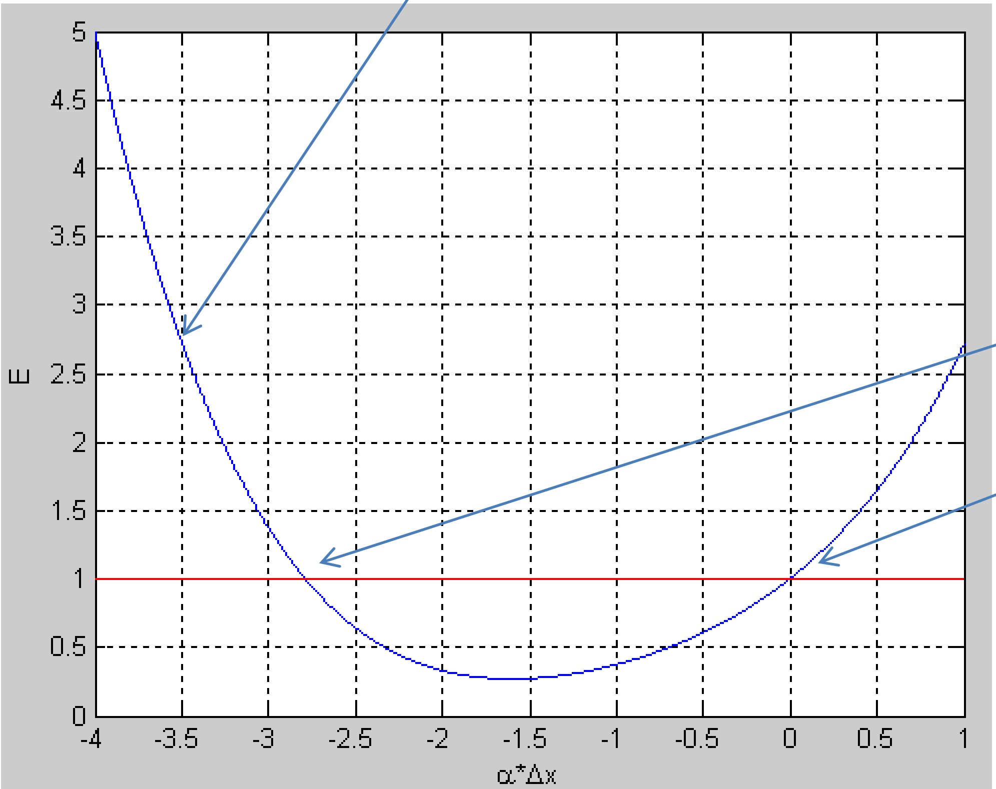
Gauta išraiška sutampa su analitinio sprendinio Teiloro eilutės skleidiniu iki nario su 4 išvestine. Todėl *IV RK metodas yra 4 tikslumo eilės*

Pvz_SMA_10_05_analitinis_RK4_tikslumo_tyrimas

IV RK metodo *stabilumo intervalo* apskaičiavimas

Pvz_SMA_10_03_Aukstesniu_eiliu_metodai_stabilumo_tyrimas

$$E = \left| 1 + \alpha\Delta x + \frac{\alpha^2 \Delta x^2}{2} + \frac{\alpha^3 \Delta x^3}{6} + \frac{\alpha^4 \Delta x^4}{24} \right| < 1$$



$$-2.7853 < \alpha\Delta x < 0$$

$$\alpha < 0$$

$$\Delta x < \frac{2.7853}{|\alpha|}$$

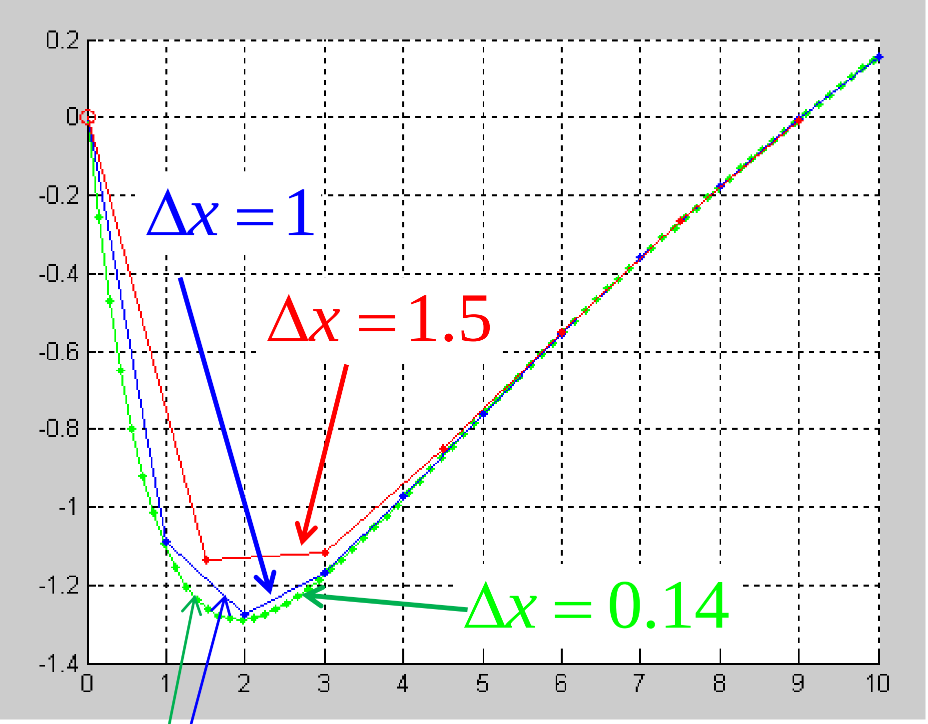
Sąlyginis stabilumas

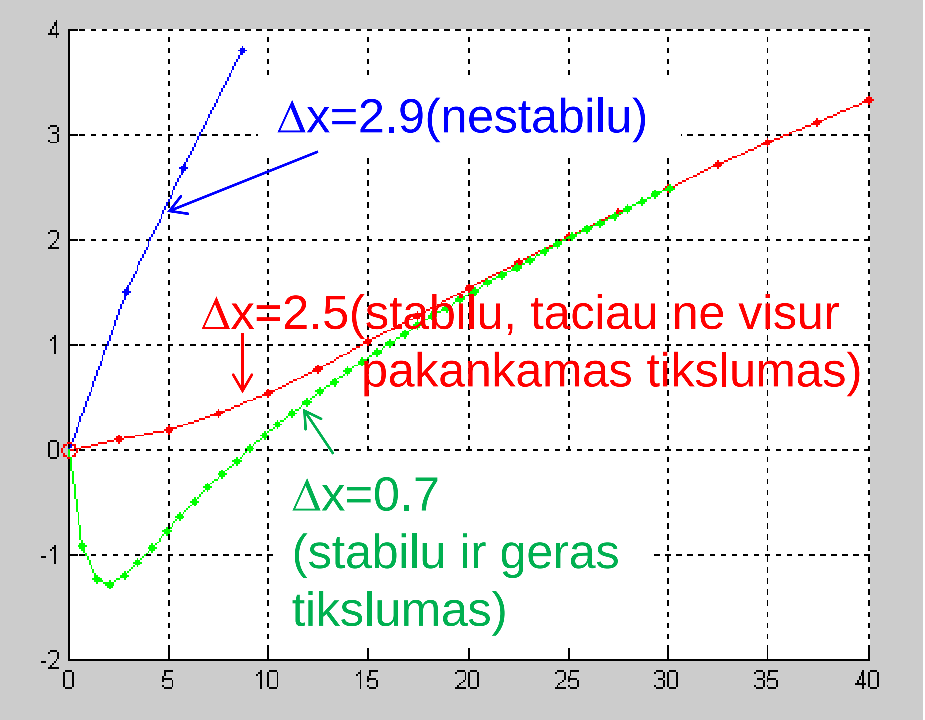
IV RK metodo taikymo pavyzdys

$$\frac{dy}{dx} = -y + \sqrt{x+1} - 3$$

$$y(0) = 0$$

Stabilumo sąlyga: $\Delta x < \dfrac{2.7853}{|\alpha|}$





Šie abu sprendiniai yra labai artimi tiksliam(!).
"Grubi" laužtė lūžių (t.y. integravimo žingsnių) taškuose yra artima tiksliam sprendiniui. Tarpuose tarp lūžių jos reikšmių neskaičiuojame. Tiesios linijos tik sujungia apskaičiuotus taškus.

Pvz_SMA_10_06_RK4_metodas_netiesine_PDL

Apibendrinimai. MATLAB funkcija ODE45 skaitiniam integravimui IV eilės Rungės ir Kutos metodu

- ***IV eilės RK metodu*** **gautas sprendinys būtų labai artimas anksčiau nagrinėtu *aukštesniųjų eilių metodu* gautam sprendiniui, kai imamas IV eilės metodas.**
- ***Visiškas sprendinių sutapimas galimas tik sprendžiant tiesinę lygtį, kurios pagrindu nustatomas metodo tikslumas ir stabilumas.***
- **Bendruoju atveju du skirtingi tos pačios eilės metodai generuoja skirtingas paklaidas dėl netiksliai įvertinamų aukštos eilės narių (šiuo atveju, 5-os eilės ir aukštesnių);**

- **IV RK metodo privalumas prieš kitus aukštesniosios eilės metodus toks, kad nereikia analitiškai apskaičiuoti aukštesniųjų eilių išvestinių. Pakanka tik paties ieškomo sprendinio *y* ir jo pirmosios išvestinės *f(x,y)* reikšmių;**
- **IV RK metodas yra ne vienintelis Rungės ir Kutos metodų šeimoje. Jų gali būti įvairių tikslumo eilių, su tikslumo kontrole ir dėl to automatiškai keičiamu žingsniu, bei tam tikriems specialiems lygčių atvejams skirtų variantų**

MATLAB funkcijos ode45 taikymas

ordinary differential equation, IV RK scheme

[TT,YY] = ode45 (@fnk, ttt, y0);

Laiko momentų, kuriuose apskaičiuotas sprendinys, vektorius. Gali sutapti su **ttt.** Vaizduojant sprendinį, argumento reikšmes reikia imti iš **TT**, o ne iš **ttt**

Sprendinio matrica, eilučių tiek, koks **TT** ilgis. Kiekvienoje eilutėje yra visų lygties kintamųjų reikšmės atitinkamu laiko momentu

Dešinės pusės funkcija (vektorius)

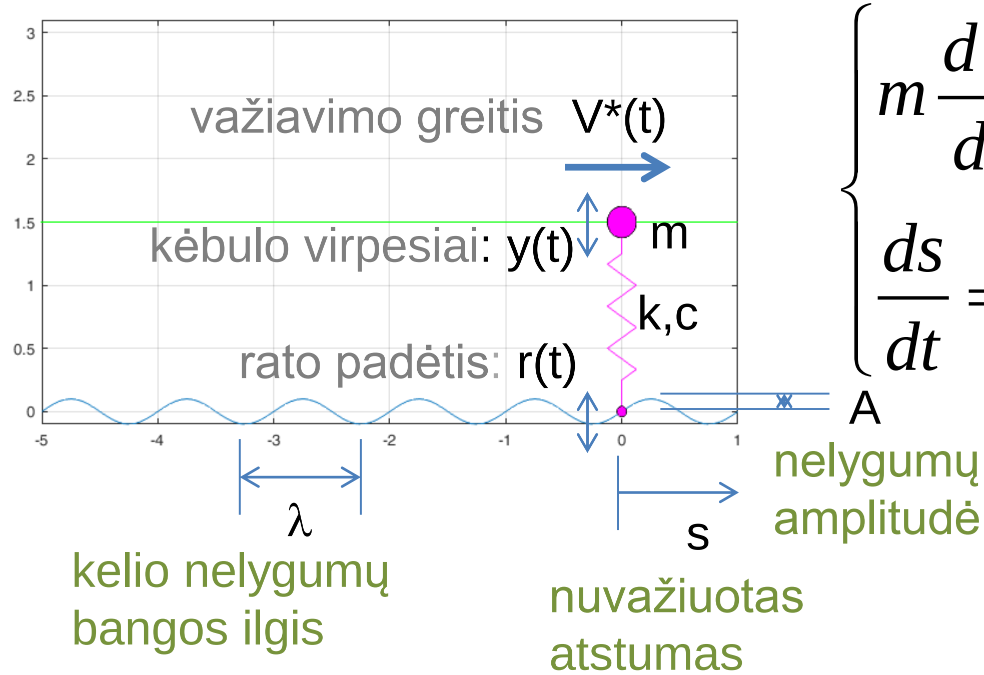
Laiko intervalas. Jeigu duotas pavidale [tmin,tmax], ***integravimo žingsnį sistema pasirenka pati.*** Jeigu duotas laiko reikšmių vektorius, visuose duotuose taškuose išėjime bus grąžintos sprendinio reikšmės

Pradinės reikšmės (vektorius)

Taikant *ode* funkciją, sudėtinga animuoti sprendinį sprendimo metu. Todėl pradžioje suskaičiuojama, o vėliau animuojama pagal TT ir YY saugomas reikšmes

Pvz_SMA_10_08_RK4_metodas_virpanti_sistema_ODE45.m

Diferencialinės lygties pavyzdys: Transporto priemonės virpesiai, važiuojant nelygiu keliu



spyruoklės pailgėjimas

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -c\left(\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dr}{dt}\right) - k(\overbrace{y - r}); \\ \dfrac{ds}{dt} = V^* \end{cases}$$

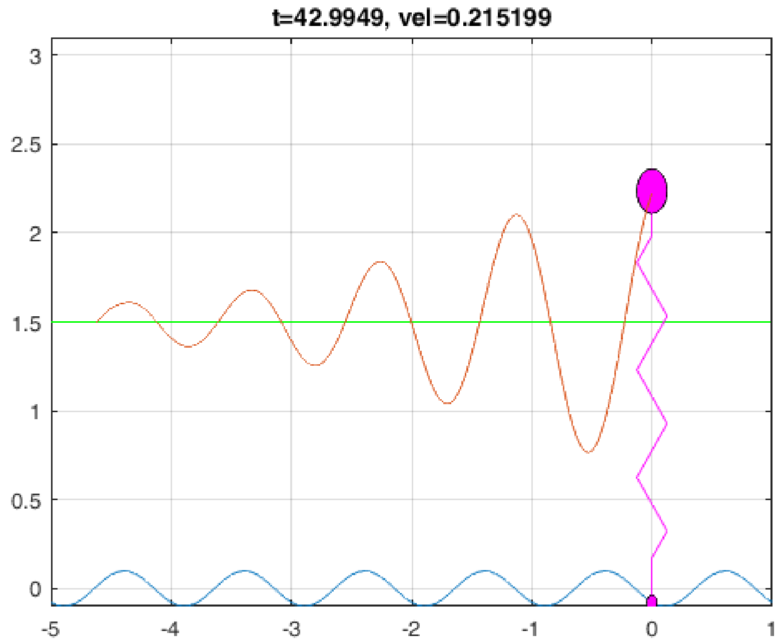
$$r = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right);$$

$$\frac{dr}{dt} = A\frac{2\pi}{\lambda}V^*\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}s\right)$$

Sistemos ir kelio parametrai m, A, λ duoti. Ištirkite:

- **Kuo būdingi kėbulo virpesiai, kai duotas pastovus greitis. Kokią įtaką turi greičio ir pakabos standumo k reikšmės, kaip ir kada pasireiškia rezonansas;**
- **Kuo būdingi kėbulo virpesiai, kai greitis didinamas nuo 0 duotu dėsniu;**
- **Savo nuožiūra priėmę k reikšmę, parinkite slopinimo koeficientą, kad važiuojant kėbulas virpėtų mažiausiai**

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt} = v; \\[2ex]
\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{c}{m}\left(v - A\dfrac{2\pi}{\lambda} sV^* \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda} s\right)\right) - \dfrac{k}{m}\left(y - A\sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda} s\right)\right); \\[2ex]
\dfrac{ds}{dt} = V^*
\end{cases}
$$

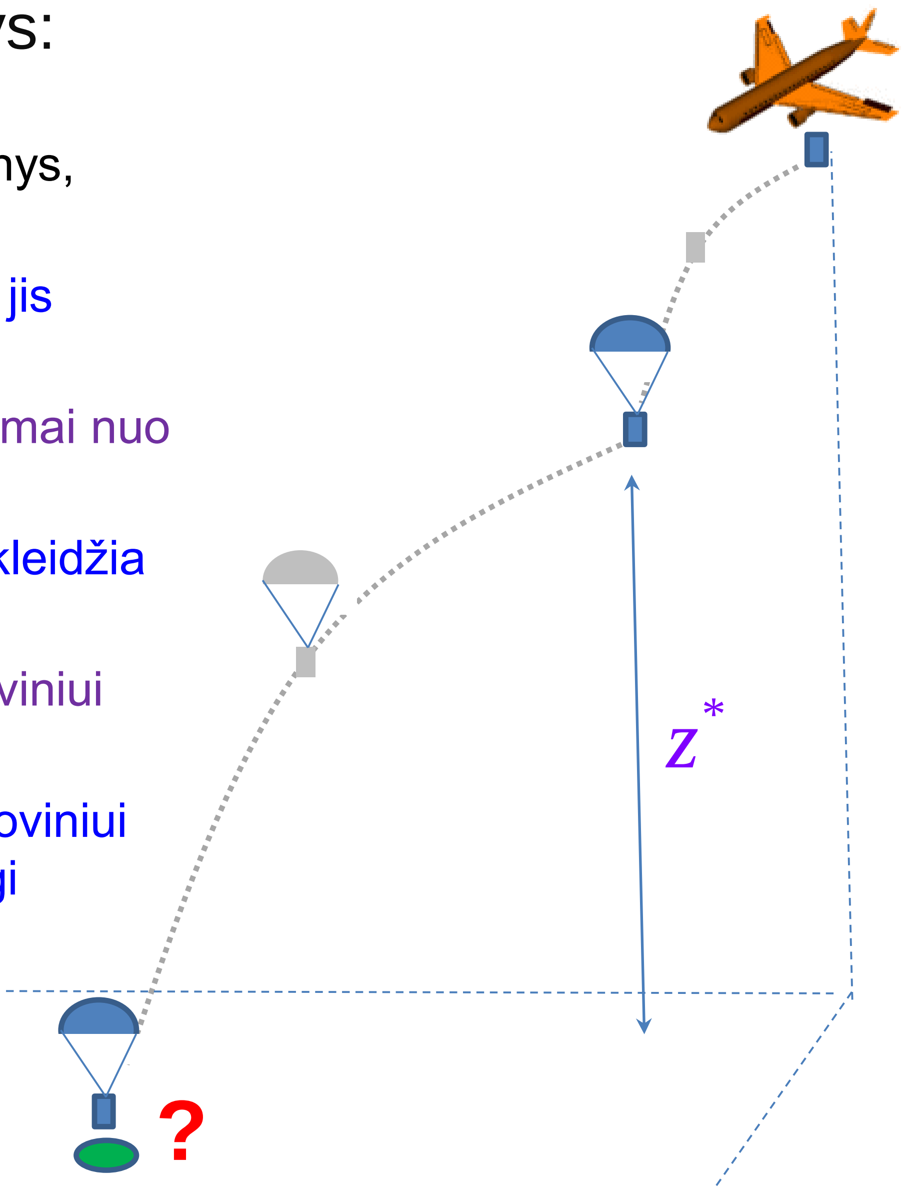


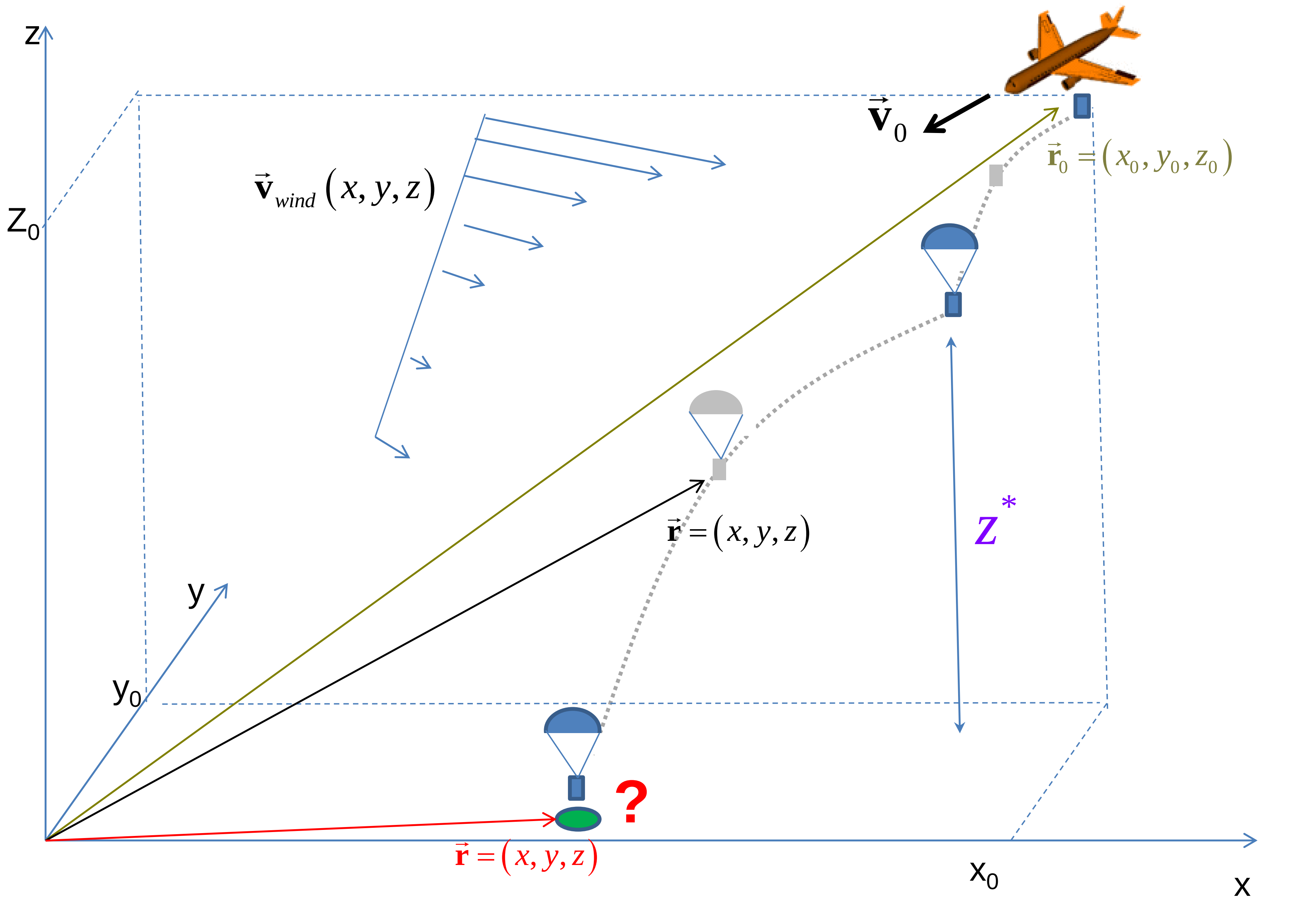
Pvz_SMA_10_07_RK4_metodas_virpanti_sistema.m

Sudėtingesnis PDL pavyzdys:

Kur nusileis iš lėktuvo išmestas krovinys, jeigu žinome:

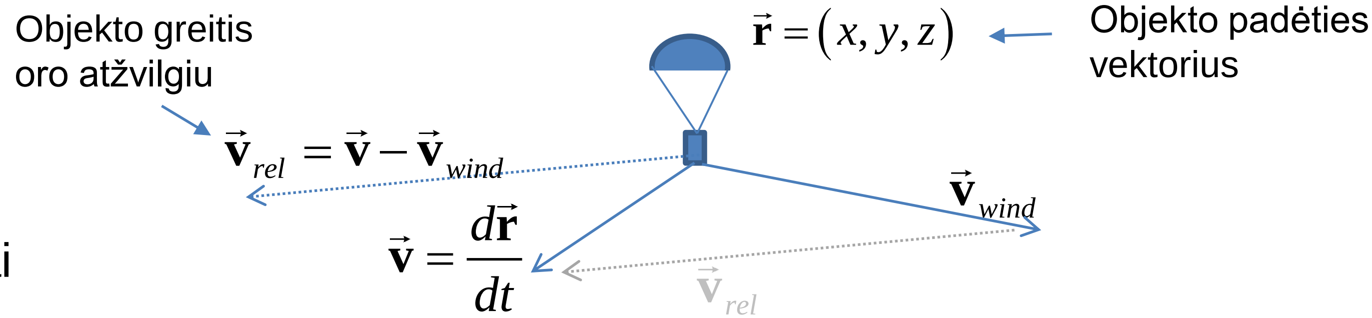
- lėktuvo padėtį, greitį ir kryptį, kuria jis skrido prieš išmesdamas krovinį;
- vėjo greičio dydį ir kryptį, priklausomai nuo aukščio;
- Aukštį, kuriame automatiškai išsiskleidžia parašiutas;
- oro pasipriešinimo koeficientą, kroviniui krentant be parašiuto;
- oro pasipriešinimo koeficientus, kroviniui leidžiantis su parašiutu. Jie skirtingi horizontalia ir vertikalia kryptimis



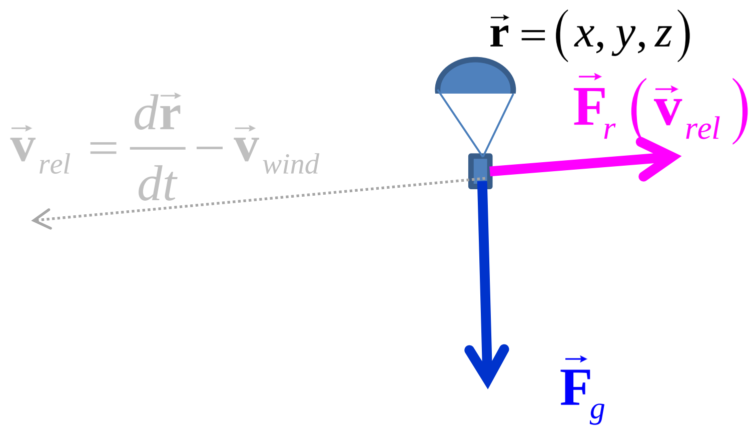


z
Z_0
$\vec{v}_{wind}(x, y, z)$
$\vec{v}_0$
$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$
$\vec{r} = (x, y, z)$
Z^*
y
y_0
?
$\vec{r} = (x, y, z)$
x_0
x

Greičių vektoriai



Jėgų vektoriai



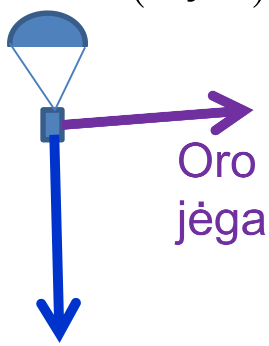
Oro pasipriešinimo jėga. Jeigu pasipriešinimo koeficientas vienodas visomis kryptimis, jėgos kryptis visada priešinga greičio krypčiai. Priešingu atveju, jėgos projekcijų kryptį įtakoja pasipriešinimo koeficientų reikšmės

Svorio jėga, visada vertikaliai žemyn

Diferencialinė lygtis užrašoma, remiantis II Niutono dėsniu

$$m\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{F}}_g + \vec{\mathbf{F}}_r$$

$$\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$$



Oro pasipriešinimo jėga

$$\vec{\mathbf{F}}_r = \begin{cases} if \quad z > z^*, & -\alpha_r v_{rel}^2 \dfrac{\vec{\mathbf{v}}_{rel}}{v_{rel}} = -\alpha_r v_{rel} \vec{\mathbf{v}}_{rel} \\ if \quad z \le z^*, & -\begin{pmatrix} \alpha_{rh} \left| v_{relxy} \right| \vec{\mathbf{v}}_{relxy} \\ \alpha_{rv} \left| v_{relz} \right| v_{relz} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Svorio jėga

$$\vec{\mathbf{F}}_g = (0, 0, -mg)$$

z^*

- Aukštis, kuriame išsiskleidžia parašiutas;

α_r

- Pasipriešinimo koeficientas be parašiuto, vienodas visomis kryptimis;

α_{rh}, α_{rv}

- Pasipriešinimo koeficientai su parašiutu, skirtingi horizontalia ir vertikalia kryptimis

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_{rx}; \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_{ry}; \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g + \dfrac{1}{m}F_{rz}; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_{rx} \\ F_{ry} \\ F_{rz} \end{pmatrix} = \begin{cases} if \quad z > z^*, & -\alpha_r \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt} - v_{windx}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt} - v_{windy}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt} - v_{windz}\right)^2} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} - v_{windx} \\ \dfrac{dy}{dt} - v_{windy} \\ \dfrac{dz}{dt} - v_{windz} \end{pmatrix}; \\ if \quad z \le z^*, & -\begin{pmatrix} \alpha_{rh} \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt} - v_{windx}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt} - v_{windy}\right)^2} \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} - v_{windx} \\ \dfrac{dy}{dt} - v_{windy} \end{pmatrix} \\ \alpha_{rv} \left| \dfrac{dz}{dt} - v_{windz} \right| \left(\dfrac{dz}{dt} - v_{windz} \right) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \qquad \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = f\left(\mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}, t\right), \qquad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \qquad \left.\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

Gavome antros eilės diferencialinių lygčių sistemą

Pakeičiame į pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą:

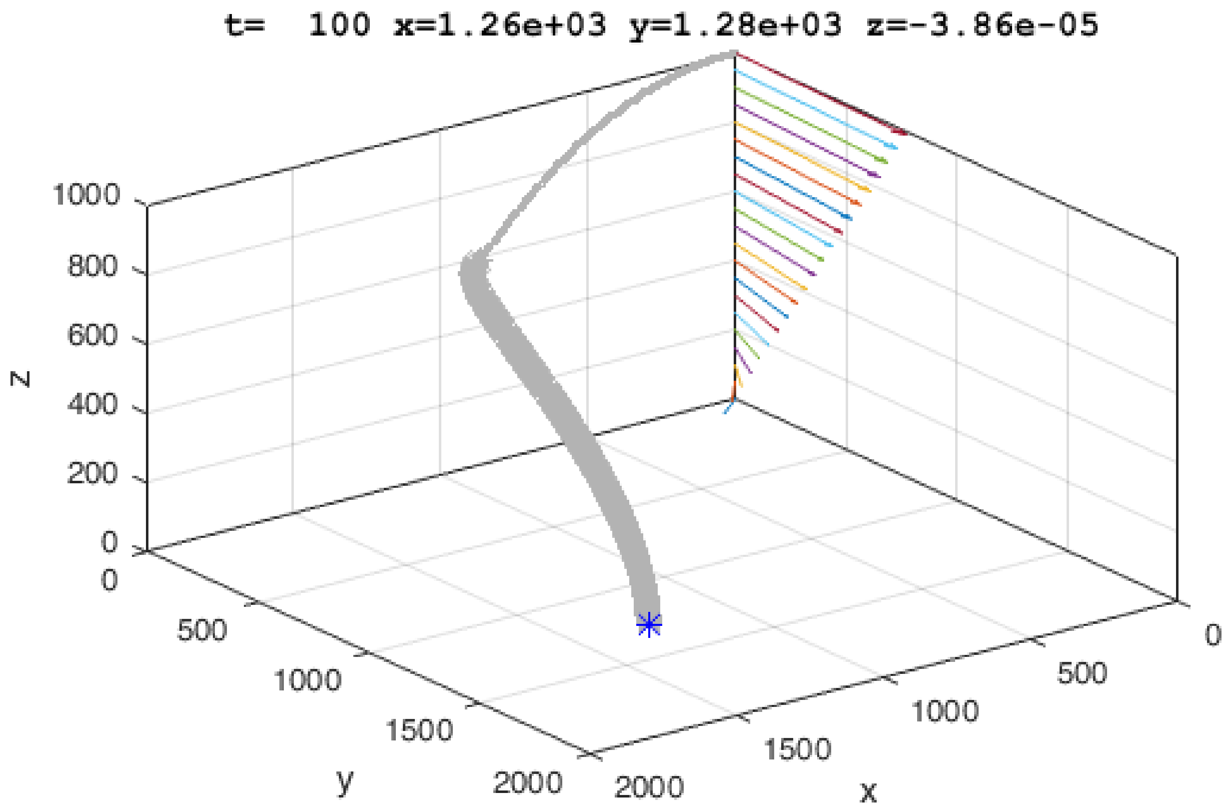
$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \qquad \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = f(\mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}, t), \qquad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \qquad \left.\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{Bmatrix}; \qquad \begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{X}}{dt} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \mathbf{V}(t_0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix}, \qquad \frac{d\mathbf{Y}}{dt} = f(\mathbf{Y}, t), \qquad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0$$



Pvz_SMA_10_09_RK4_metodas_parasiutas_ODE45.m

SMA_10_Klausimai savikontrolei (1):

1.Kas yra paprastoji diferencialinė lygtis (PDL) ir jos pradinių reikšmių uždavinys. Kam naudojamos PDL pradinės sąlygos;

2.Kaip aukštesnės eilės PDL pakeičiama pirmos eilės PDL sistema;

3.Kokia lygtis dažniausiai sprendžiama, siekiant sulyginti tarpusavyje analitinį ir skaitinį sprendinius;

4.Kuo skiriasi PDL skaitinio integravimo ir apibrėžtinio integralo skaitinio apskaičiavimo uždaviniai;

5.Paaiškinkite Eulerio metodą. Kaip nustatoma jo tikslumo eilė ir stabilumo sąlyga;

6.Paaiškinkite, kaip sudaromos aukštesniųjų eilių PDL skaitinio sprendimo formulės;

7.Kaip nustatoma aukštesniųjų eilių PDL skaitinio sprendimo metodų tikslumo eilė ir stabilumo sąlyga;

SMA_10_ Klausimai savikontrolei (2):

8. Koks yra prognozės ir korekcijos metodų veikimo principas, kuo jie skiriasi nuo aukštesniosios eilės išvestinių panaudojimu paremtų metodų;
9. Kokie veiksmai atliekami kiekvieno žingsnio metu, taikant IV eilės Rungės ir Kutos metodą;
10. Kaip nustatoma IV eilės Rungės ir Kutos metodo tikslumo eilė ir stabilumo sąlyga