Skaitinis funkcijos išvestinių apskaičiavimas

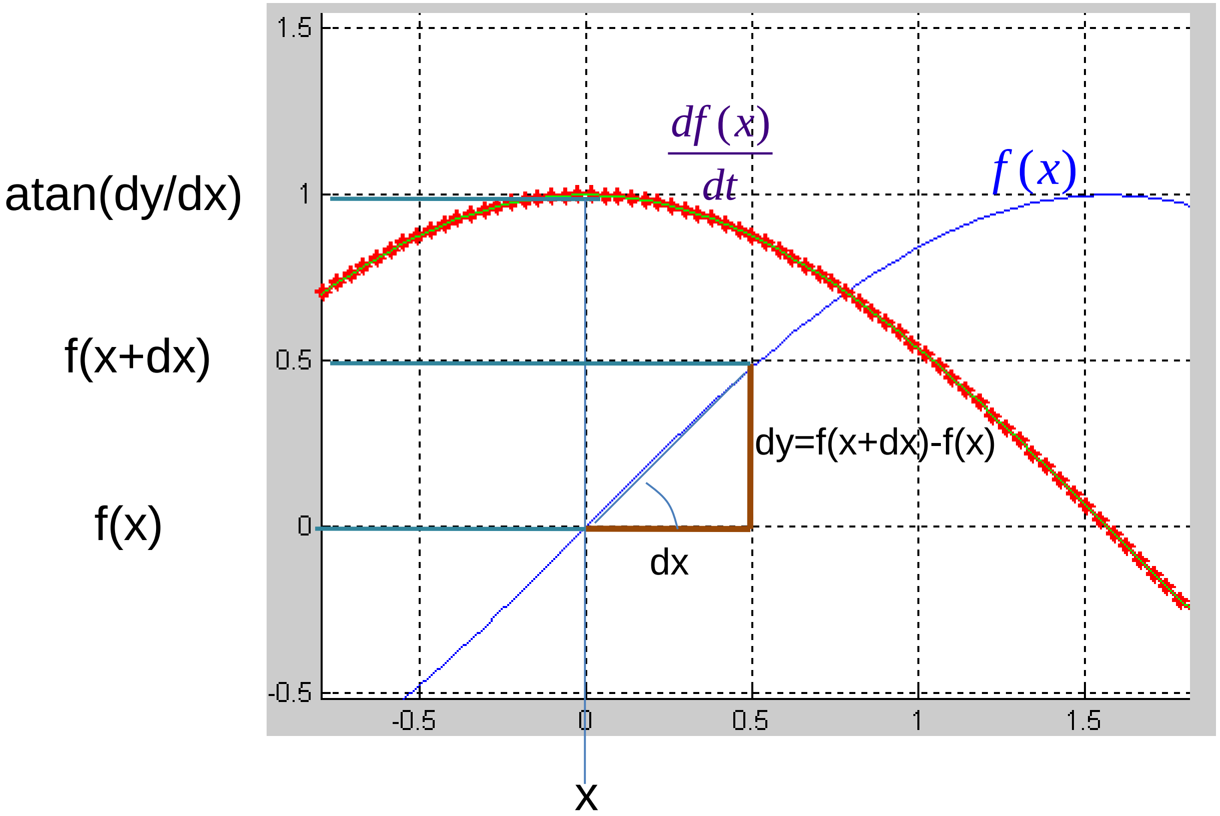
Temoje aiškinama:

- **Skaitinio išvestinės apskaičiavimo (skaitinio diferencijavimo) uždavinio apibūdinimas;**
- **Išvestinės skaitinio apskaičiavimo formulės koeficientų radimas pagal Lagranžo daugianarių išvestines;**
- **Pirmyneigė, centrinė ir atgalinė skaitinio išvestinės apskaičiavimo formulės**

Skaitinio išvestinės apskaičiavimo (skaitinio diferencijavimo) uždavinio apibūdinimas

Skaitinis funkcijos išvestinių apskaičiavimas

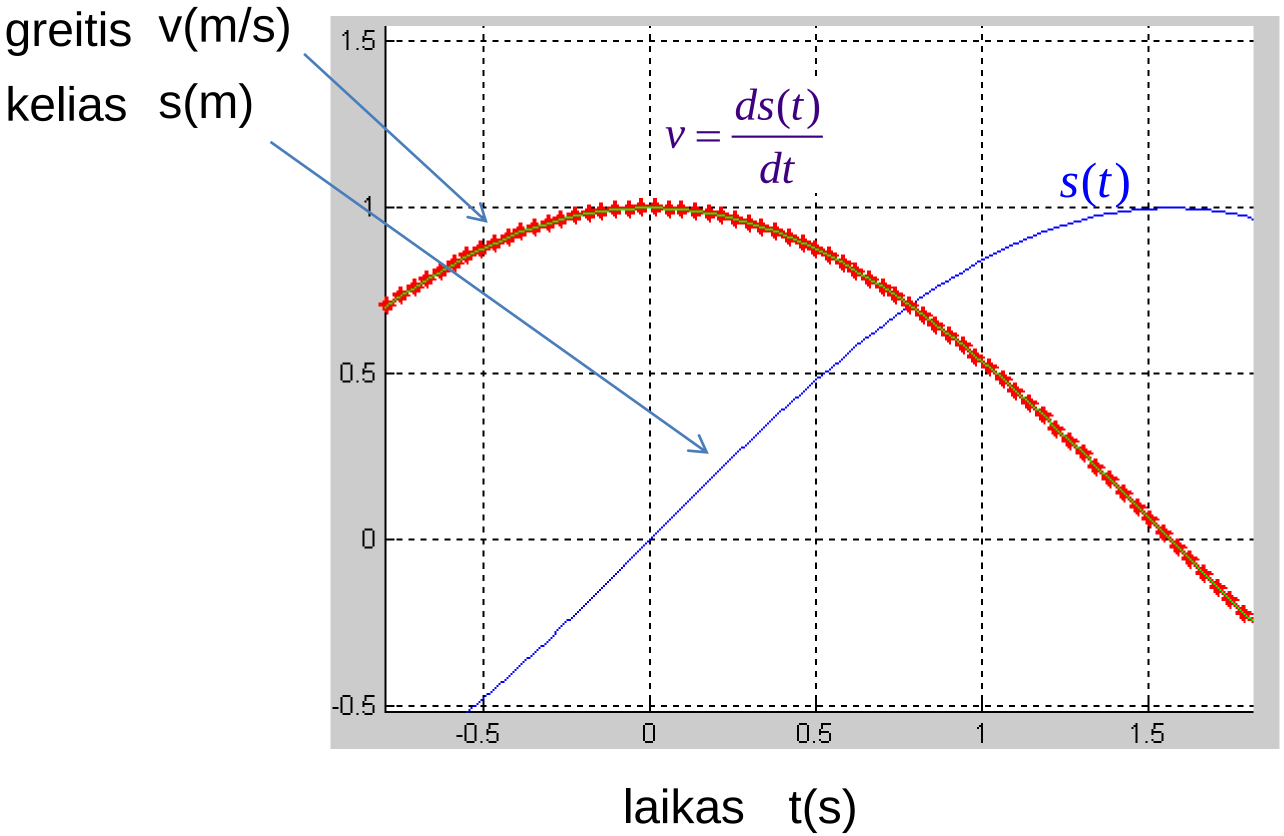
Funkcijos f(x) išvestinė yra funkcija, **kurios reikšmė kiekviename taške x yra kampo, kurį taške x sudaro funkcija f(x) su Ox ašimi, tangentas**



$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx};$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

- ***Funkcijos išvestinė nusako funkcijos reikšmės kitimo spartą kiekviename taške;***
- ***Funkciją ir jos išvestinę patogu vaizduoti tose pačiose ašyse. Tačiau funkcijos ir jos išvestinės reikšmes <u>tiesiogiai lyginti tarpusavyje būtų neteisinga</u>. Jos matuojamos skirtingais vienetais***



Funkcijos išvestinę skaitiškai apskaičiuoti būtų galima, remiantis jos apytikslės reikšmės apibrėžimu:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Tačiau:

- **Kiekvienai išvestinės reikšmei reiktų 2 kartus apskaičiuoti funkcijos reikšmę –** ***neracionalu*****;**
- **Jeigu funkcija duota tik diskrečiuose taškuose, nėra galimybės tiksliai apskaičiuoti funkcijos reikšmę, suteikus labai mažą argumento prieaugį –** ***menkas tikslumas***

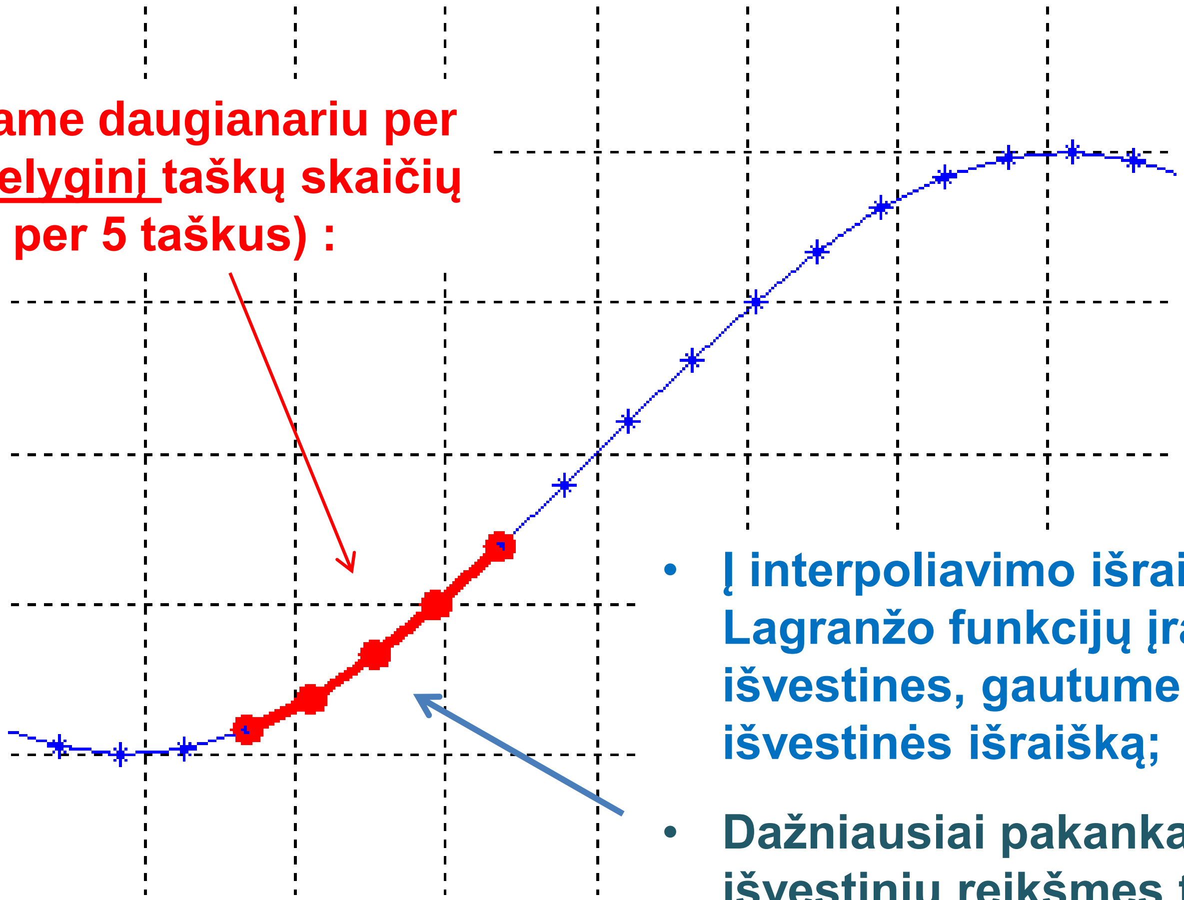
Išvestinės skaitinio apskaičiavimo formulės koeficientų radimas pagal Lagranžo daugianarių išvestines

Skaitinio diferencijavimo formulės

- **Tobulesni skaitinio išvestinės apskaičiavimo *(skaitinio diferencijavimo)* algoritmai yra paremti *interpoliavimu daugianariais*, kai funkcija duota tolygiai intervale išdėstytuose taškuose;**
- **Interpoliuojama ne per visus duotus funkcijos taškus, tačiau pasirenkant *nedideliu taškų skaičiumi aprašomus intervalus***

Aukštesniųjų eilių skaitinio diferencijavimo formulių išvedimas, panaudojant skaičiavimą simboliais

Interpoliuojame daugianariu per pasirinktą <u>nelyginį</u> taškų skaičių (pavyzdžiui, per 5 taškus) :



- **Į interpoliavimo išraišką vietoje Lagranžo funkcijų įrašę jų išvestines, gautume funkcijos išvestinės išraišką;**
- **Dažniausiai pakanka apskaičiuoti <u>išvestinių reikšmes tik tuose taškuose, kuriuose duotos funkcijos reikšmės</u>**

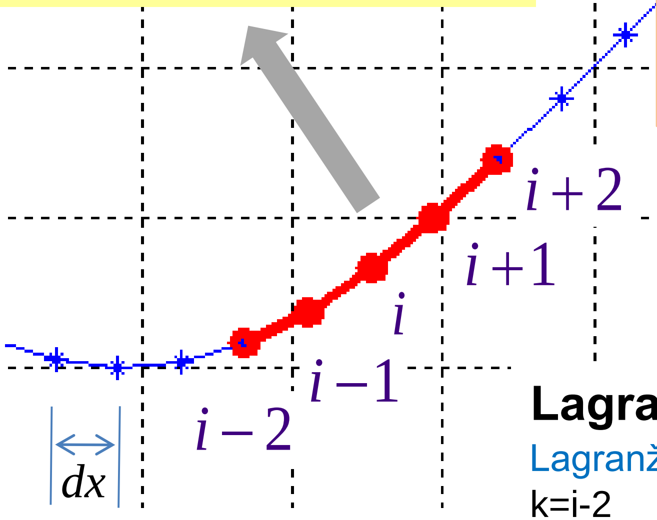
Pvz_SMA_13_1_Differentiation_symbolic.m

$$f(x)=\sum_{k=i-2}^{i+2} L_k(x) f(x_k);$$

$$\frac{df(x)}{dx}=\sum_{k=i-2}^{i+2} \frac{dL_k(x)}{dx} f(x_k)$$

```
for j=1:N
      % Lagranzo daugianaris:
      xx=[0:dx:(i-1)*dx]  % taskai
      L=1;
      for k=1:N, if k ~= j, L=L*(x-xx(k))/(xx(j)-xx(k)); end, end
      dL(j)=diff(L,x);    % Lagranzo funkcijos išvestine
end
for j=1:N,
% Isvestiniu formuliu koeficientai,
% eiluteje DL(j,:) yra visų Lagranžo funkcijų išvestinių reikšmės taške j
DL(j,1:N)=subs(dL,x,a+(j-1)*dx);
 end
```

Bet kurio taškų penketo koeficientai yra tokie patys



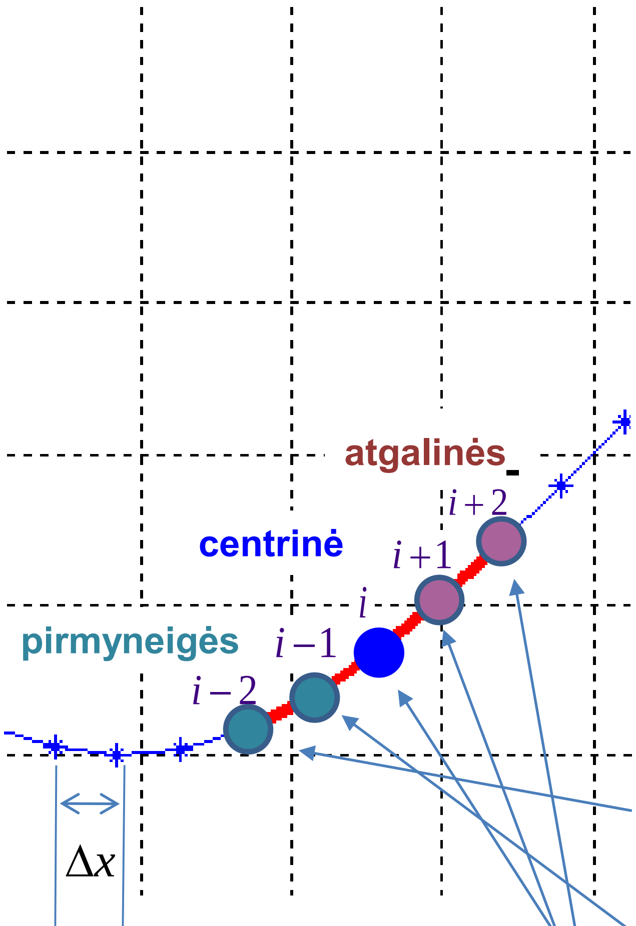
Lagranžo funkcijų reikšmių lentelė

Lagranžo funkcijų numeriai

Lagranžo funkcijų reikšmės skirtinguose taškuose

	k=i-2	k=i-1	k=i	k=i+1	k=i+2	
$\frac{dL_k(x_{i-2})}{dx}=$	[-25/3,	16,	-12,	16/3,	-1	]/(4*dx)
$\frac{dL_k(x_{i-1})}{dx}=$	[-1,	-10/3,	6,	-2,	1/3	]/(4*dx)
$\frac{dL_k(x_{i})}{dx}=$	[1/3,	-8/3,	0,	8/3,	-1/3	]/(4*dx)
$\frac{dL_k(x_{i+1})}{dx}=$	[-1/3,	2,	-6,	10/3,	1	]/(4*dx)
$\frac{dL_k(x_{i+2})}{dx}=$	[1,	-16/3,	12,	-16,	25/3	]/(4*dx)

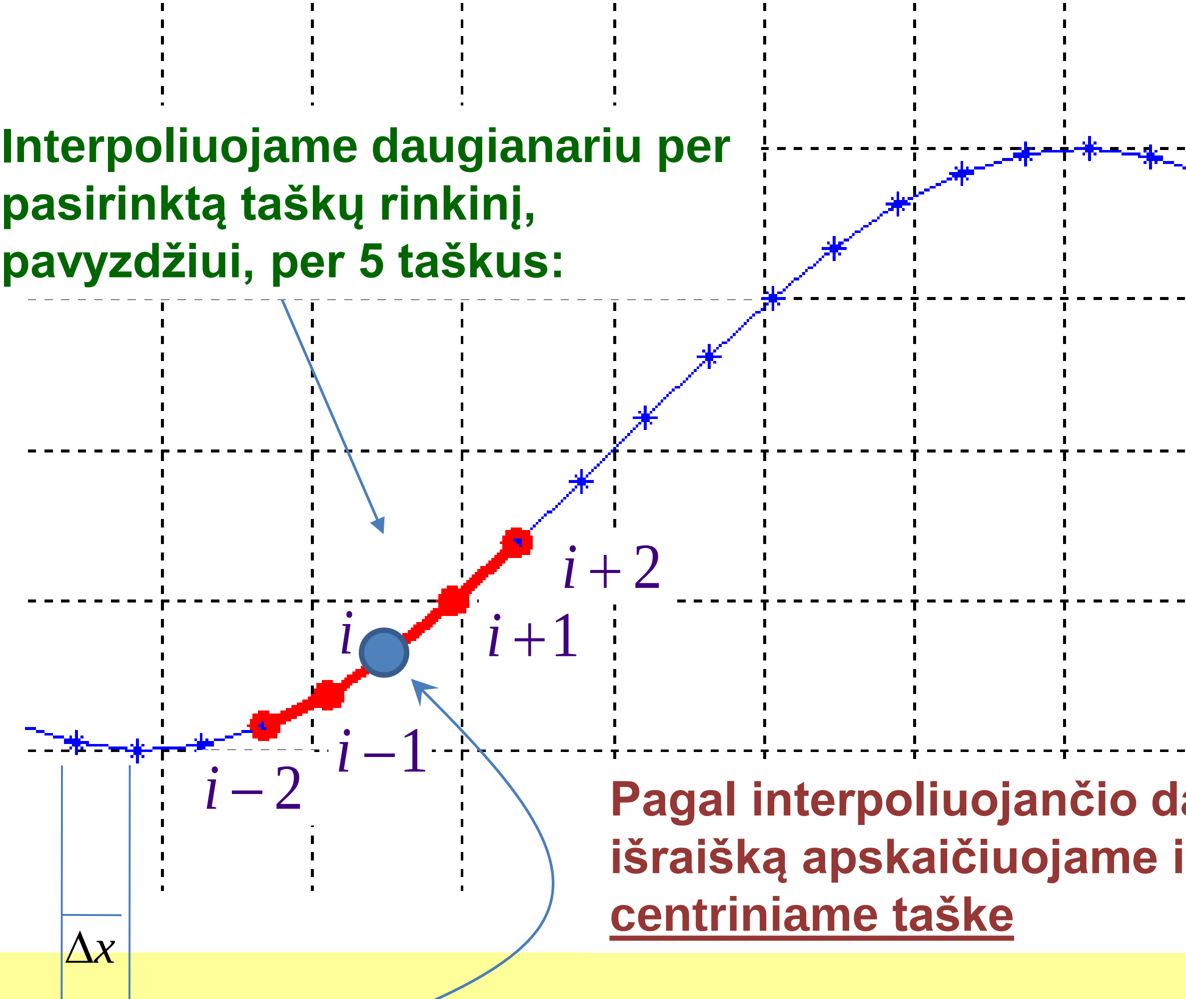
Pirmyneigė, centrinė ir atgalinė skaitinio išvestinės apskaičiavimo formulės



- **Gavome formules išvestinių reikšmėms visuose pasirinktuose interpoliavimo taškuose apskaičiuoti, t.y. pirmyneiges, centrinę ir atgalines ;**
- **Jeigu įmanoma, visada naudojama tik centrinė formulė. Ji paremta funkcijos reikšmėmis, esančiomis tiek prieš, tiek ir po nagrinėjamo taško,todėl geriausiai atspindi funkcijos kitimo pobūdį;**
- **Pirmyneigės ir atgalinės formulės taikomos tik tuomet, kai neįmanoma pritaikyti centrinės formulės, t.y. tik viso tiriamojo intervalo pradžioje ir pabaigoje**

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_{i-2})}{dx} \\ \dfrac{df(x_{i-1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_{i})}{dx} \\ \dfrac{df(x_{i+1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_{i+2})}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \\ 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2 & -6 & 10 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_{i}) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

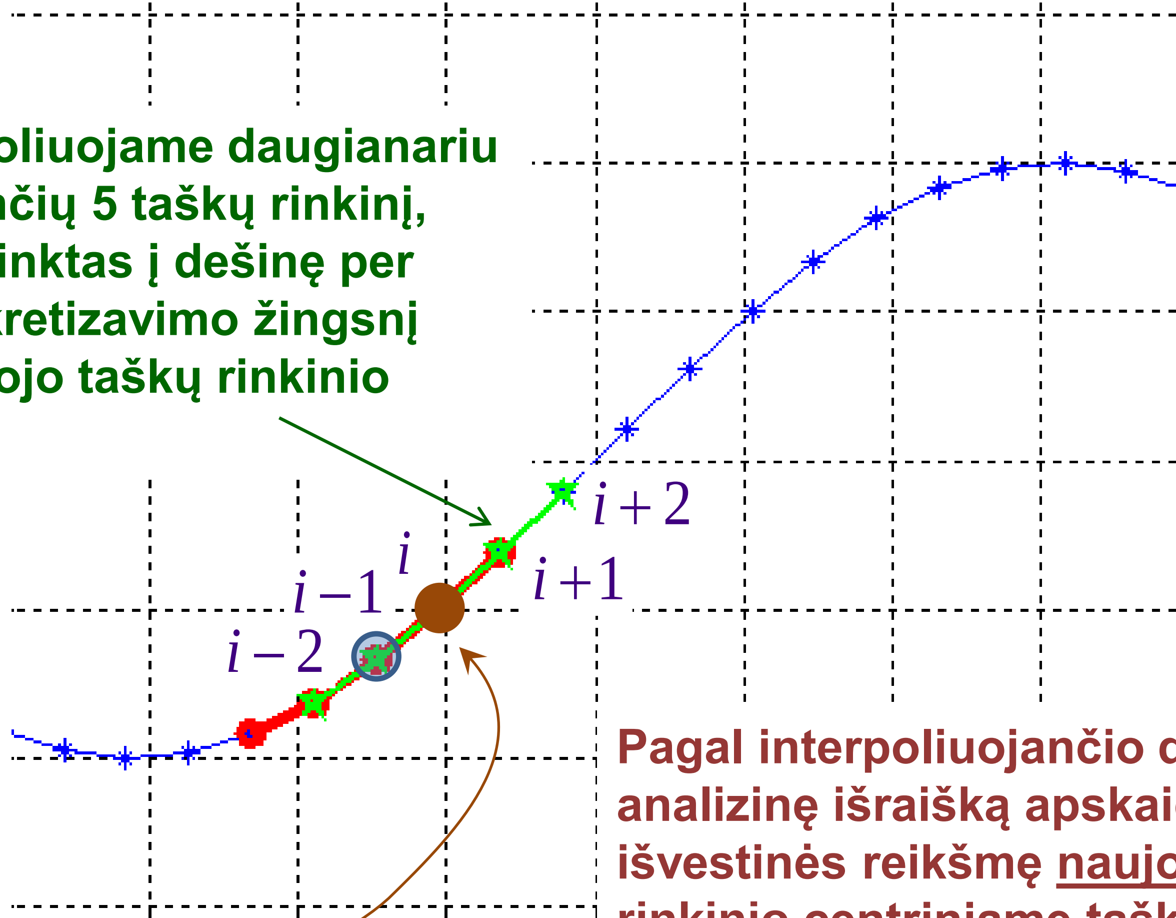
Interpoliuojame daugianariu per pasirinktą taškų rinkinį, pavyzdžiui, per 5 taškus:



Pagal interpoliuojančio daugianario analizinę išraišką apskaičiuojame išvestinės reikšmę <u>centriniame taške</u>

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \sum_{k=i-2}^{i+2} \frac{dL_k(x_i)}{dx} f(x_k) = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

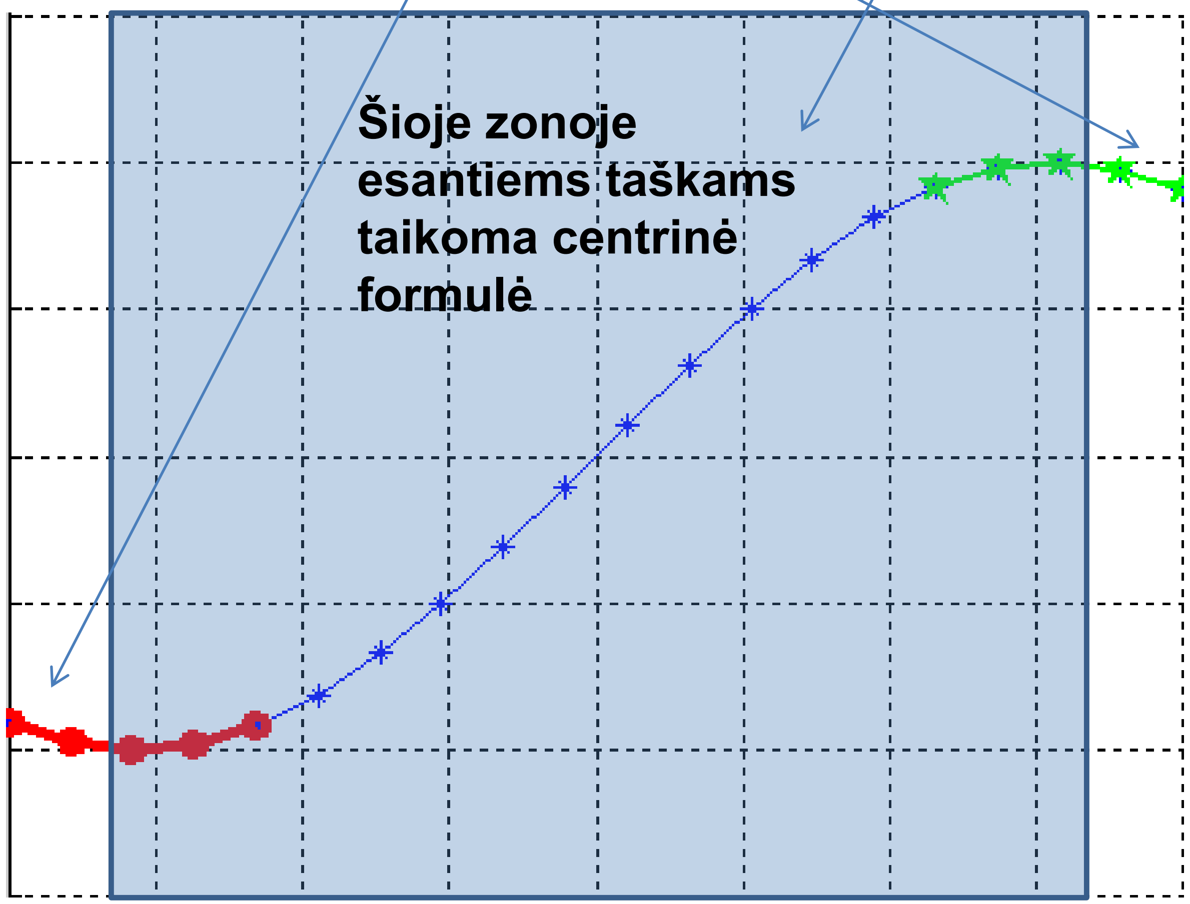
Vėl interpoliuojame daugianariu per sekančių 5 taškų rinkinį, kuris paslinktas į dešinę per vieną diskretizavimo žingsnį ankstesniojo taškų rinkinio atžvilgiu:



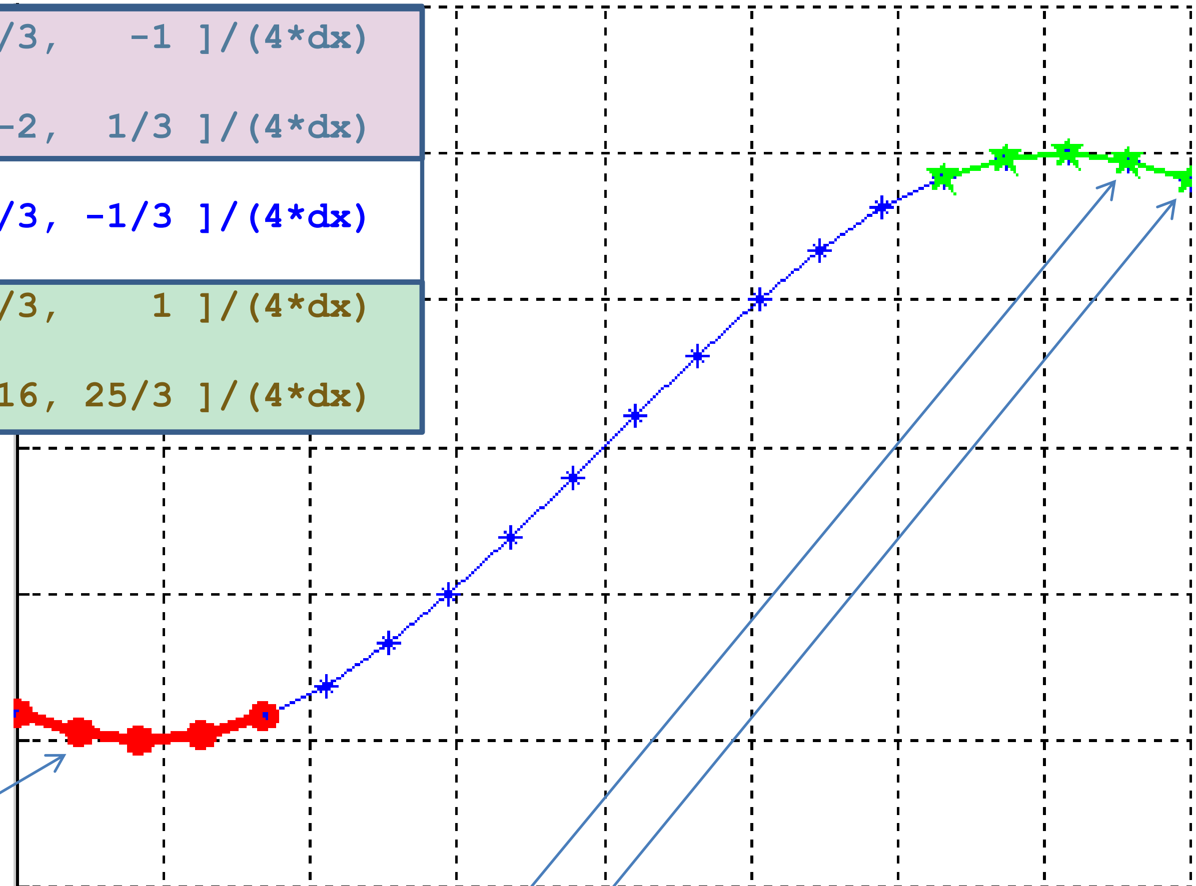
Pagal interpoliuojančio daugianario analizinę išraišką apskaičiuojame išvestinės reikšmę <u>naujojo taškų rinkinio</u> centriniame taške

$$\frac{df(x_i)}{dx}=\sum_{k=i-2}^{i+2}\frac{dL_k(x_i)}{dx}f(x_k)=\frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix}1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f(x_{i-2})\\ f(x_{i-1})\\ f(x_i)\\ f(x_{i+1})\\ f(x_{i+2})\end{Bmatrix}$$

- **Apskaičiuodami išvestinės reikšmes, vidinėje srities dalyje naudojame vieną ir tą pačią “centrinę” formulę;**
- **Centrinė formulė netinka tik keliuose taškuose intervalo pradžioje ir pabaigoje. Kiek tokių taškų yra, priklauso nuo taškų skaičiaus, per kuriuos interpoliuojame vienu daugianariu**



	L_{i-1}	L_{i-1}	L_i	L_{i+1}	L_{i+2}
x_{i-2}	[-25/3,	16,	-12,	16/3,	-1]/(4*dx)
x_{i-1}	[-1,	-10/3,	6,	-2,	1/3]/(4*dx)
x_i	**[1/3,**	**-8/3,**	**0,**	**8/3,**	**-1/3]/(4*dx)**
x_{i+1}	[-1/3,	2,	-6,	10/3,	1]/(4*dx)
x_{i+2}	[1,	-16/3,	12,	-16,	25/3]/(4*dx)



$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_1)}{dx} \\ \dfrac{df(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_{N-1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_N)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x} \begin{bmatrix} -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{N-4}) \\ f(x_{N-3}) \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

pirmyneigės formulės

atgalinės formulės

3 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-3, 4, -1]/(2*dx)
[-1, 0, 1]/(2*dx)
[1, -4, 3]/(2*dx)
```

pirmyneigė formulė
(pirmam taškui)

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{Bmatrix}$$

centrinė formulė
(vidiniams taškams)

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \end{Bmatrix}$$

atgalinė formulė
(galiniam taškui)

$$\frac{df(x_N)}{dx} = \frac{1}{2\Delta \mathrm{x}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

5 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-25/3 ,  16  ,-12 , 16/3,  -1 ]/(4*dx)
[  -1  , -10/3, 6  ,  -2 ,  1/3]/(4*dx)
[  1/3 , -8/3 , 0  , 8/3 , -1/3]/(4*dx)
[ -1/3 ,   2  , -6 , 10/3,  1  ]/(4*dx)
[   1  , -16/3, 12 , -16 , 25/3]/(4*dx))
```

pirmyneigė formulė
(1 ir 2 taškui)

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_1)}{dx} \\ \dfrac{df(x_2)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} -25/3 & 16 & -12 & 16/3 & -1 \\ -1 & -10/3 & 6 & -2 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{Bmatrix}$$

centrinė formulė
(vidiniams taškams)

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} 1/3 & -8/3 & 0 & 8/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{i-2}) \\ f(x_{i-1}) \\ f(x_i) \\ f(x_{i+1}) \\ f(x_{i+2}) \end{Bmatrix}$$

atgalinė formulė
(dviems paskutniams taškams)

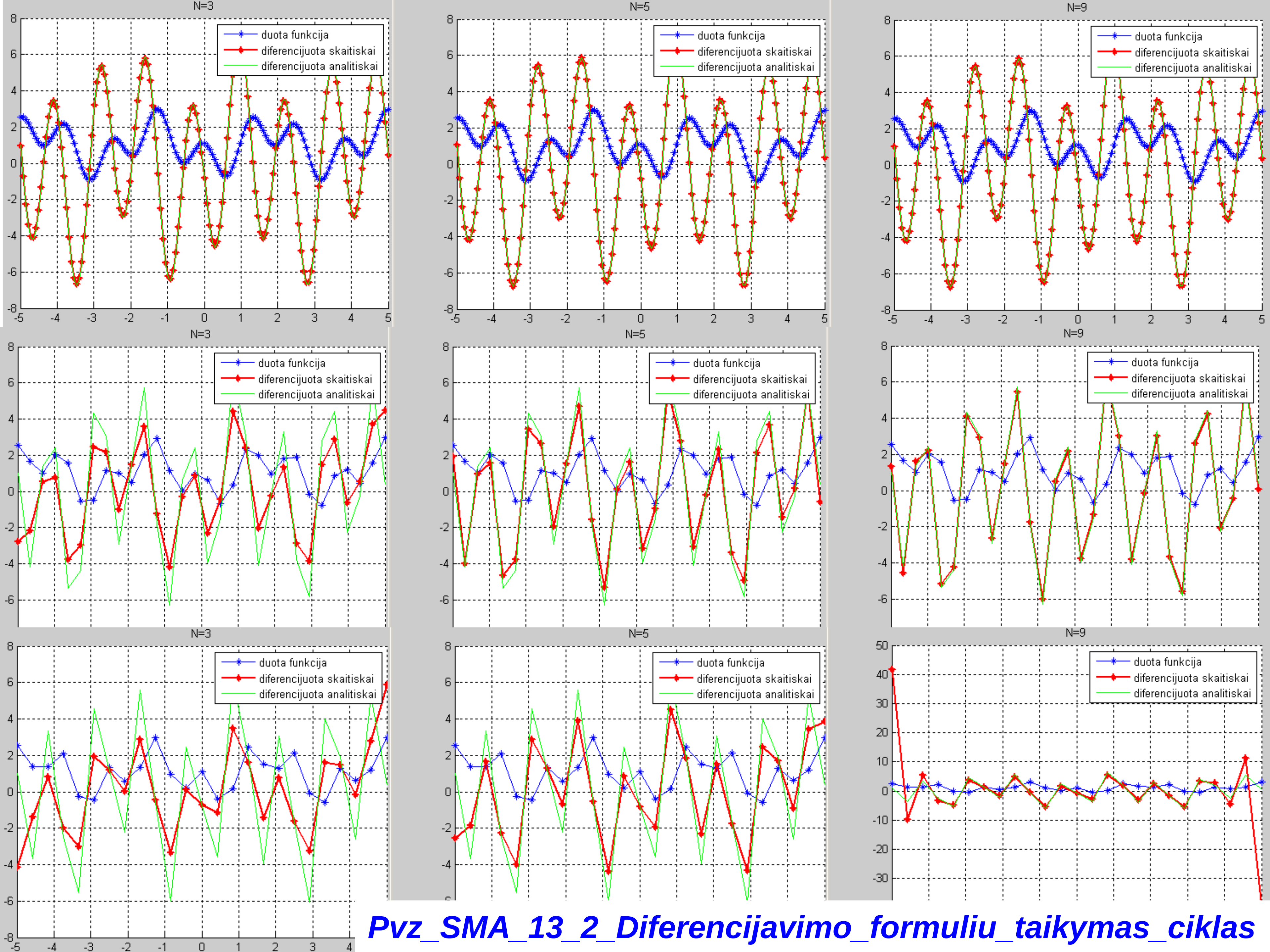
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{df(x_{N-1})}{dx} \\ \dfrac{df(x_N)}{dx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\Delta x}\begin{bmatrix} -1/3 & 2 & -6 & 10/3 & 1 \\ 1 & -16/3 & 12 & -16 & 25/3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(x_{N-4}) \\ f(x_{N-3}) \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{Bmatrix}$$

7 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-147/10,   36   , -45 ,  40,-45/2, 36/5,    -1  ]/(6*dx)
[   -1   , -77/10,  15 , -10,  5   , -3/2,  1/5  ]/(6*dx)
[   1/5  , -12/5 , -7/2,  8  , -3   ,  4/5, -1/10  ]/(6*dx)
[  -1/10,  9/10 , -9/2,  0  , 9/2 , -9/10, 1/10  ]/(6*dx)
[  1/10  , -4/5   ,   3 , -8  , 7/2 ,  12/5, -1/5  ]/(6*dx)
[  -1/5  ,  3/2   ,  -5 ,  10, -15 , 77/10,   1    ]/(6*dx)
[   1     , -36/5 , 45/2, -40,  45  ,  -36 , 147/10]/(6*dx)
```

9 taškų skaitinio diferencijavimo formulė

```
[-761/35,   64    , -112   , 448/3, -140, 448/5 , -112/3,  64/7,    -1   ]/(8*dx)
[   -1   , -446/35,   28   , -28   , 70/3,  -14   ,   28/5, -4/3 ,  1/7  ]/(8*dx)
[  1/7   , -16/7   , -38/5 ,  16   , -10 , 16/3   ,    -2 , 16/35, -1/21 ]/(8*dx)
[  -1/21,    4/7   ,    -4   , -18/5,  10 ,  -4    ,   4/3 , -2/7 , 1/35  ]/(8*dx)
[   1/35, -32/105,   8/5 , -32/5,    0  , 32/5   ,  -8/5 ,32/105, -1/35 ]/(8*dx)
[  -1/35,   2/7   ,  -4/3 ,     4  , -10 , 18/5   ,     4   , -4/7 , 1/21  ]/(8*dx)
[   1/21,  -16/35,    2    , -16/3,  10 ,  -16   ,  38/5 , 16/7 , -1/7  ]/(8*dx)
[   -1/7,     4/3 ,  -28/5,    14  , -70/3,  28   ,   -28 ,446/35,   1    ]/(8*dx)
[     1  ,   -64/7 , 112/3,-448/5,  140 ,-448/3,   112  , -64   , 761/35]/(8*dx)
```



Pvz_SMA_13_2_Diferencijavimo_formuliu_taikymas_ciklas

SMA_13_ Klausimai savikontrolei:

1.Kaip skaitiškai apskaičiuojamos funkcijos išvestinės;

2.Kas yra pirmyneigė, centrinė ir atgalinė skaitinio diferencijavimo formulės, kam jos naudojamos