# Funkcijų aproksimavimas: *Furje metodas*

# Temoje aiškinama:

- **Periodinės taškų sekos aproksimavimo uždavinys;**
- **Trigonometrinės bazinės funkcijos ir jų ortogonalumas;**
- **Diskrečiosios Furje aproksimacijos (DFT) koeficientų apskaičiavimas;**
- **Signalo atkūrimas pagal Furje harmonikas ir jo filtravimas pagal amplitudę ir/arba dažnį;**
- **DFT apibendrinimai;**
- **MATLAB ir Python funkcijos DFT apskaičiavimui sparčiuoju (FFT) algoritmu**

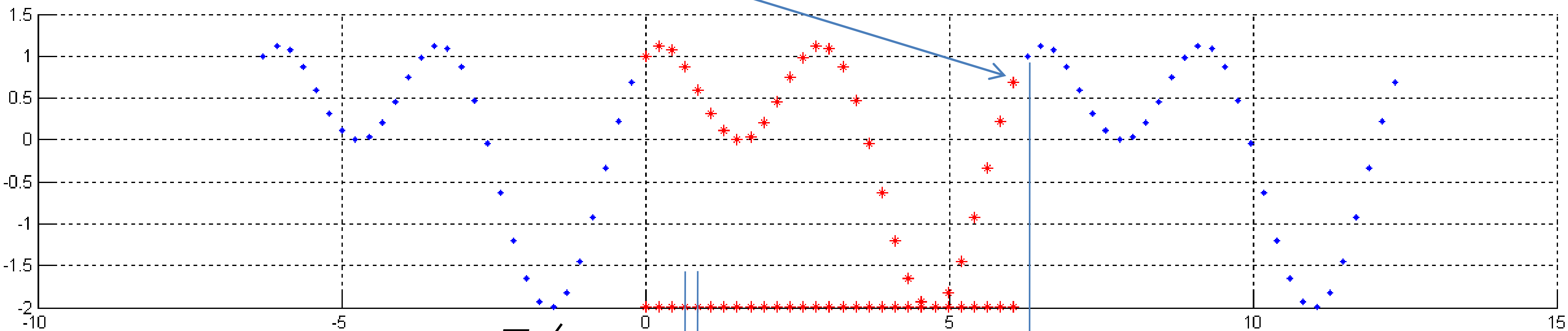
# Periodinės taškų sekos aproksimavimo uždavinys

# Aproksimavimas trigonometriniais daugianariais

## *Diskrečioji Furje aproksimacija*

- **Taškų seka, kurią reikia aproksimuoti, yra periodinė;**
- **Intervalai tarp taškų yra vienodi,**
- **Paskutinis duotas periodo taškas yra per vieną intervalą nuo periodo pabaigos**

**!**




$$dt = {}^{T}\!/_{n}$$

$T$

*n* – duotų taškų ir tuo pačiu periodo dalijimo intervalų skaičius

$$(t_i, y_i)\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

# Trigonometrinės bazinės funkcijos ir jų ortogonalumas

# Trigonometrinės bazinės funkcijos

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

**Aukščiausias dažnis yra parenkamas laisvai. Nuo jo bendruoju atveju priklauso aproksimavimo tikslumas, tačiau didžiausią galimą reikšmę riboja duotų taškų skaičius:**

$$2(m-1)+1 \le n; \qquad m \le \frac{n+1}{2}$$

**Funkcija aproksimuojama trigonometriniu daugianariu**

$$y(t) = \left[1 \quad \cos\frac{2\pi t}{T} \quad \cos 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \cos(m-1)\frac{2\pi t}{T} \quad \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \sin 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \sin\left(m-1\right)\frac{2\pi t}{T}\right] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{Bmatrix}$$

**Bazinės funkcijos**

**koeficientai**

| | | |
|---|---|---|
| $T$ | $[s]$ | Periodas |
| $2\pi/T$ | $[rad/s]$ | Kampinis dažnis |
| $1/T$ | $[1/s] \equiv [Hz]$ | Dažnis |

# Trigonometrinių bazinių funkcijų ortogonalumas sumavimo atžvilgiu:

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\left[1 \quad \cos\frac{2\pi t}{T} \quad \cos 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \cos\left(m-1\right)\frac{2\pi t}{T} \quad \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \sin 2\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \quad \sin\left(m-1\right)\frac{2\pi t}{T}\right]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\cos\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sin\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\sin\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right)\sin\left(l\frac{2\pi t_i}{T}\right) = 0;$$

$$k,l = 0:m-1, \qquad k \neq l$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right) = \frac{n}{2};$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sin^2\left(k\frac{2\pi t_i}{T}\right) = \frac{n}{2};$$

$$k = 1:m-1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(0\frac{2\pi t_i}{T}\right) = n;$$

**Lygybės galioja, esant bet kokiam vieno funkcijos periodo intervale duotų taškų skaičiui *n***

# Diskrečiosios Furje aproksimacijos koeficientų apskaičiavimas

# Mažiausių kvadratų metodo lygčių sistemos matrica

$$(t_i, y_i)\,, \qquad i = 0,1,\dots,n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\}$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 1 & \cos 2\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 0 & \sin\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ 0 & 2\pi t_1 & \dots & \sin 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \sin(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \cos\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} & \sin\frac{2\pi t_1}{T} & \sin 2\frac{2\pi t_1}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_1}{T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \cos\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \sin\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \sin 2\frac{2\pi t_{n-1}}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t_{n-1}}{T} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{n/2} & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times(2m-1)}$$

**Bazinės funkcijos yra ortogonalios sumavimo atžvilgiu, todėl sistemos matrica gaunama <u>įstrižaininė</u>**

# Mažiausių kvadratų metodo lygčių sistemos laisvųjų narių vektorius

$$(t_i, y_i)\,, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}]\{\mathbf{c}\} = [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\}$$

$$[\mathbf{G}]^T[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}_{(2m-1)\times(2m-1)} ; \quad [\mathbf{G}]^T\{\mathbf{y}\} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos 2\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \cos(m-1)\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin 2\frac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-1} \sin(m-1)\frac{2\pi t_i}{T} y_i \end{Bmatrix}_{(2m-1)\times 1}$$

# Diskrečiosios Furje aproksimacijos koeficientai

$$\left(t_i, y_i\right), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$[\mathbf{G}]^T [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}]^T \{\mathbf{y}\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos 2\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos(m-1)\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sin\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sin 2\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \\ \vdots \\ \dfrac{2}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \sin(m-1)\dfrac{2\pi t_i}{T} y_i \end{Bmatrix}$$

# Signalo atkūrimas pagal Furje harmonikas ir jo filtravimas pagal amplitudę ir/arba dažnį

# Aproksimuotos funkcijos atkūrimas pagal Furje bazines funkcijas (harmonikas)

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \cos\frac{2\pi t}{T} & \cos 2\frac{2\pi t}{T} & \dots & \cos(m-1)\frac{2\pi t}{T} & \sin\frac{2\pi t}{T} & \sin 2\frac{2\pi t}{T} & \dots & \sin(m-1)\frac{2\pi t}{T} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \end{Bmatrix} =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k \cos\left(k\frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

pastovi dedamoji (nulinės harmonikos amplitudė)

$$A_k = \sqrt{a_k{}^2 + b_k{}^2}; \quad \sin\varphi_k = b_k;\ \cos\varphi_k = a_k; \quad \varphi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

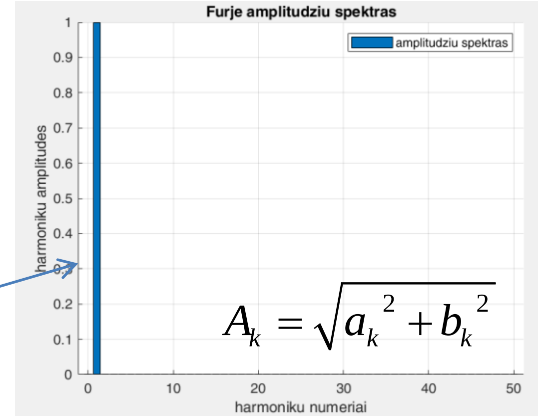
$$\varphi_k = \operatorname{atan2}\left(b_k, a_k\right)$$

k harmonikos amplitudė

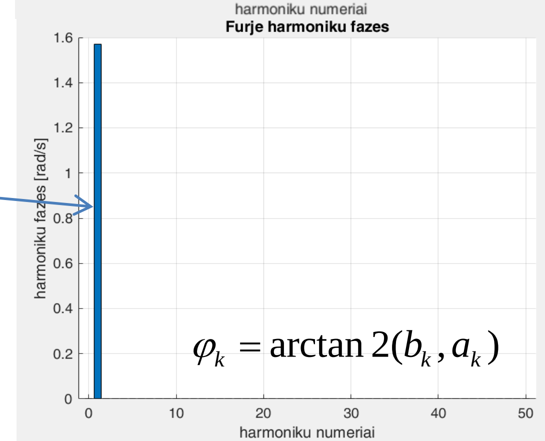
k harmonikos fazė

# Pvz_SMA_9_2_diskrecioji _Fourier_aproksimacija.m

## Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės ir fazės, m=11

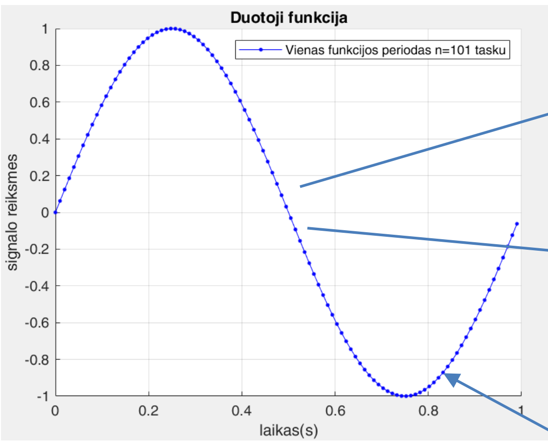



$$A_k = \sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}}$$

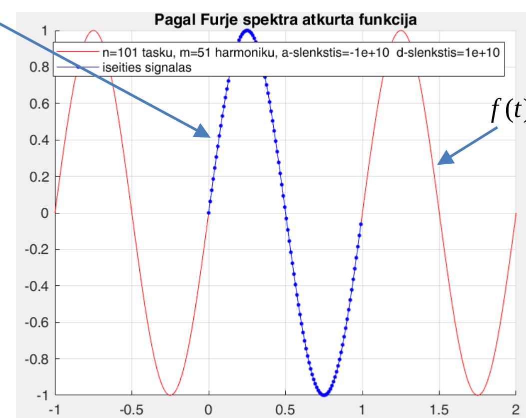



$$\varphi_k = \arctan 2(b_k, a_k)$$

## Duota taškų seka, vienas periodas, n=100



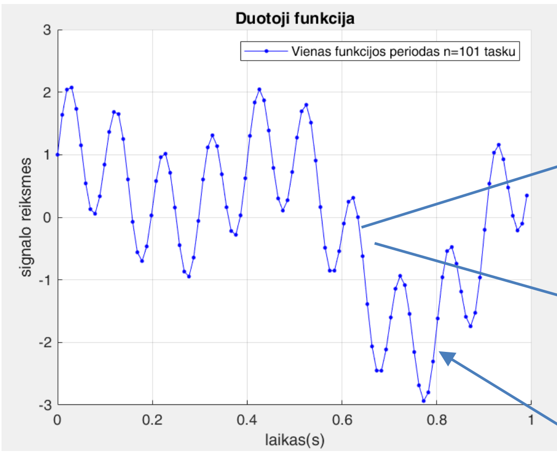

## Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=11



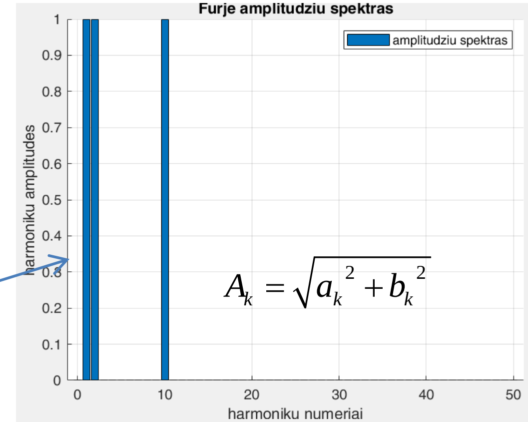

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k \cos\left(k\frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)
return
end
```

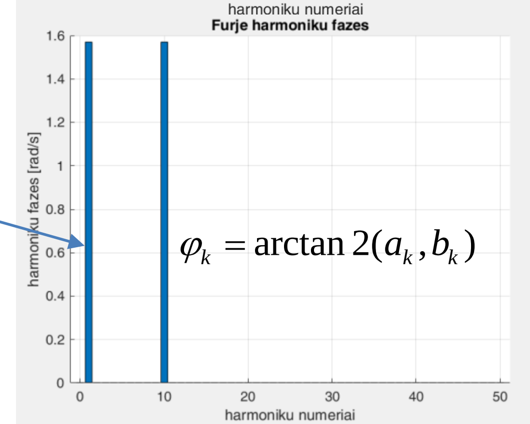
# Duota taškų seka, vienas periodas, n=100




# Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės ir fazės, m=11

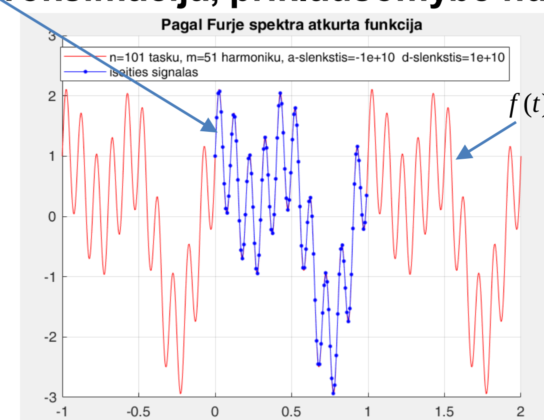



$$A_k = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}$$




$$\varphi_k = \arctan 2(a_k, b_k)$$

# Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=11

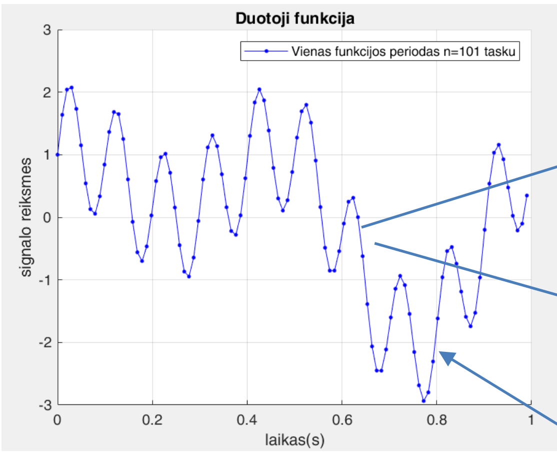



$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k \cos\left(k\frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

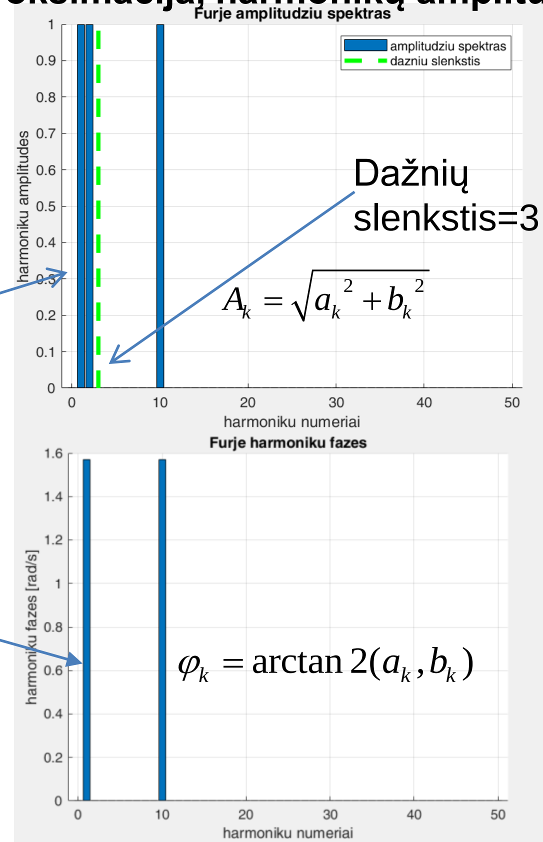
```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)+...
             cos(2*pi*2*t/T)+...
             cos(2*pi*10*t/T);
return
end
```

# Signalas nufiltruotas, atmetant harmonines dedamąsias pagal dažnio slenksčio reikšmę

**Duota taškų seka, vienas periodas, n=100**



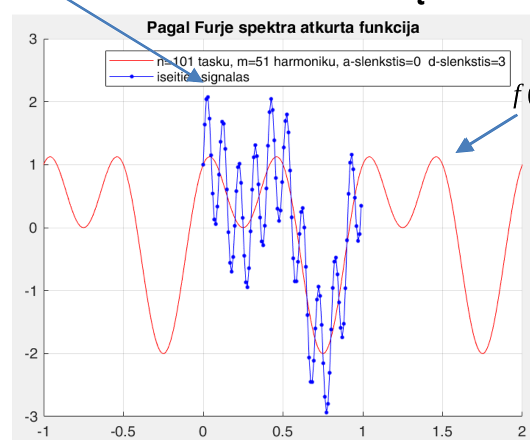

**Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės ir fazės, m=11**




$$A_k = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}$$

$$\varphi_k = \arctan 2(a_k, b_k)$$

**Atkuriant naudojamos tik harmonikos, kurių dažnio *numeris* mažesnis už slenkstinį:**

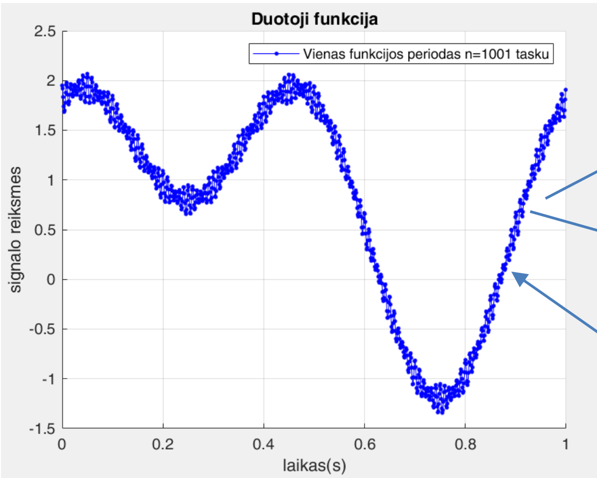



$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k \cos\left(k\frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

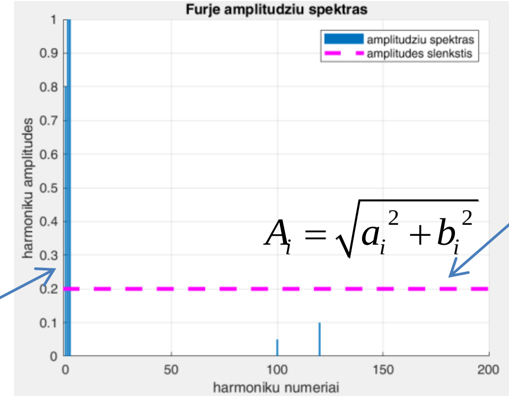
```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)+...
             cos(2*pi*2*t/T)+...
             cos(2*pi*10*t/T);
return
end
```

## Signalas nufiltruotas, atmetant harmonines dedamąsias pagal **amplitudžių** slenksčio reikšmę

## Signalas su “triukšmais”, n=1000

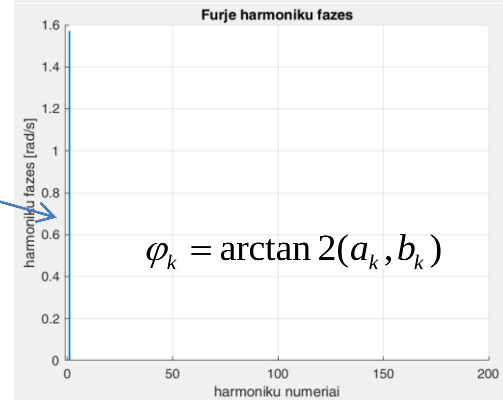



## Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=200



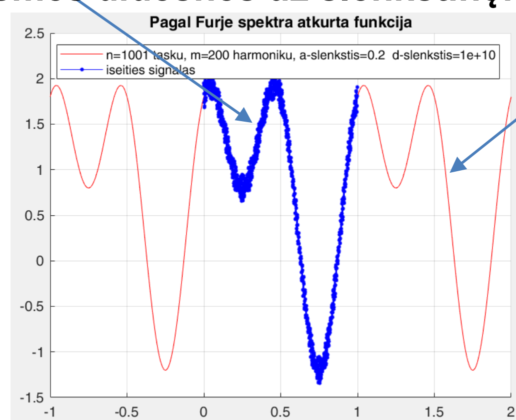

$$A_i = \sqrt{a_i^{\,2} + b_i^{\,2}}$$

Amplitudžių slenkstis=0.2




$$\varphi_k = \arctan 2(a_k, b_k)$$

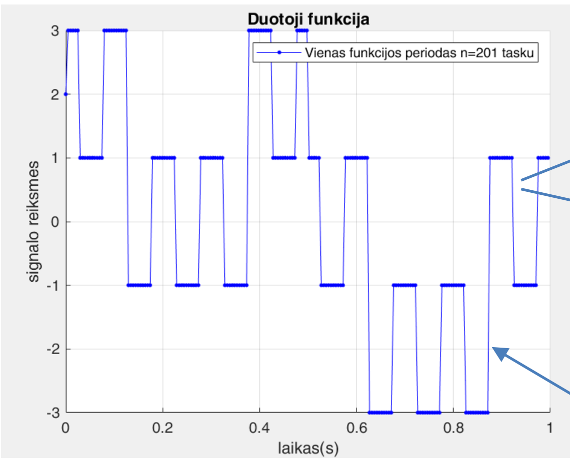
**Atkuriant naudojamos tik harmonikos, kurių amplitudžių reikšmės didesnės už slenkstinę:**



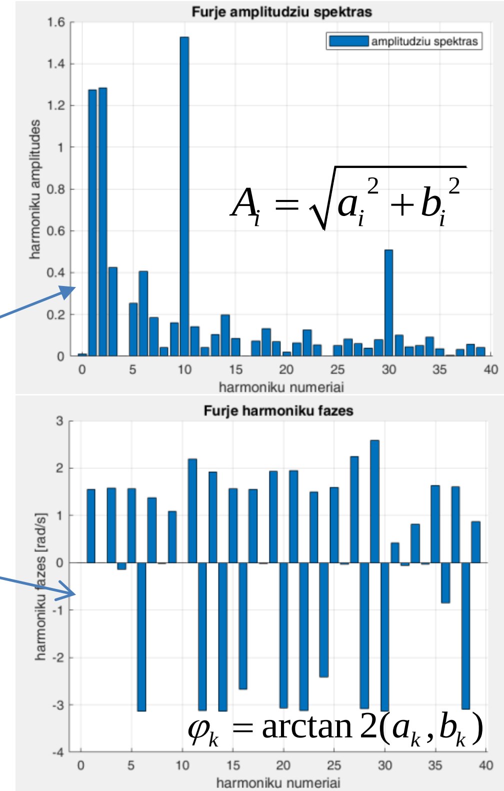

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{2} A_k \cos\left(k\frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sin(2*pi*t/T)+...
              cos(2*pi*2*t/T)+...
          0.1*cos(2*pi*100*t/T)+...
         0.05*cos(2*pi*120*t/T);
return
end
```

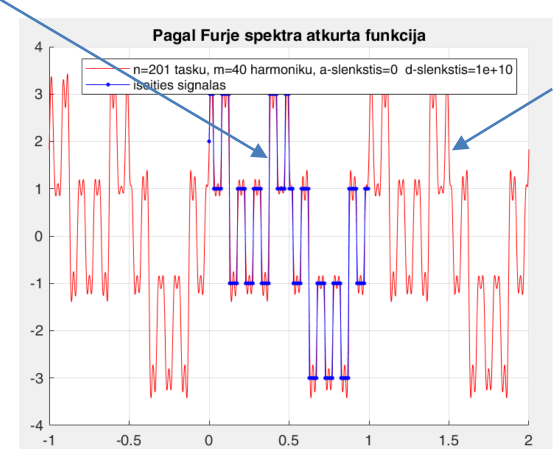
# Duota taškų seka, vienas periodas, n=200




## Furje aproksimacija, harmonikų amplitudės, m=40




## Furje aproksimacija, priklausomybė nuo laiko, m=40




$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k \cos\left(k \frac{2\pi t}{T} - \varphi_k\right)$$

```
function rez=fnk(T,t)
         rez=sign(sin(2*pi*t/T))+...
             sign(cos(2*pi*2*t/T))+...
             sign(cos(2*pi*10*t/T));
return
end
```

# DFT apibendrinimai

- Diskrečioji Furje aproksimacja (dažnai vadinama *Diskrečiaja Furje transformacija, DFT*) yra vienas iš svarbiausių *signalų analizėje* taikomų metodų;
- DFT įgalina nustatyti, kokie *harmoninių virpesių dažniai ir amplitudės* sudaro signalą, kuris buvo išmatuotas ir pateiktas *priklausomybės nuo laiko pavidale*. Kartais sakoma, kad DFT pavaizduoja signalą *amplitudžių ir dažnių erdvėje*;
- Signalo vaizdavimas amplitudžių ir dažnių erdvėje ne tik palengvina jo fizikinį suvokimą , tačiau gali būti panaudotas *informacijai saugoti (archyvuoti) arba signalo požymiams rasti* . Amplitudžių ir dažnių saugojimui dažniausiai reikia žymiai mažiau atminties, nei saugant to paties signalo reikšmių priklausomybę nuo laiko

# MATLAB ir Python funkcijos DFT apskaičiavimui sparčiuoju (FFT) algoritmu

- **Dažniausiai aproksimuojančių harmonikų skaičius *m-1* parenkamas toks, kad duotų signalo taškų skaičius ir bendras aproksimuojančių funkcijų skaičius sutaptų, t.y., *n=2m-1*. Tai reiškia, kad sprendžiamas *interpoliavimo uždavinys*. Aproksimuojanti kreivė praeina per visus duotus signalo taškus, todėl prarandama mažiausiai informacijos;**
- **Mūsų aptartame DFT algoritme nereikia spręsti lygčių sistemos. Vis dėlto, koeficientų apskaičiavimui tenka atlikti apie ($2m^2$) daugybos ir sudėties veiksmų. Greitesnis, tačiau sudėtingesnis yra *sparčiosios Furje transformacijos (FFT)* algoritmas, kuris nagrinėjamas specializuotuose signalų analizės kursuose. Jis sumažina veiksmų skaičių iki ($m*\log_2 m$) , be to, gaunamos mažesnės apvalinimo paklaidos**

# MATLAB funkcijos *fft* taikymas diskrečiajai Furje aproksimacijai apskaičiuoti

Signalo reikšmės

Taškų skaičius

Harmoniku skaičius
m=floor((n+1)/2)

```
yyy=fft(fff)/n;
spektras=abs(2*yyy(1:m));        % harmoniku amplitudes
spektras(1)=spektras(1)/2;       % pastovi dedamoji

spektras_c0=real(yyy(1));        % pastovi dedamoji
spektras_c=real(2*yyy(2:m));     % cos amplitudes
spektras_s=-imag(2*yyy(2:m));    % sin amplitudes
```

***Pvz_SMA_9_4_fft.m***

***Pvz_SMA_9_5_fft_ginput.m***

# Python funkcijos *fft* taikymas diskrečiajai Furje aproksimacijai apskaičiuoti

Signalo reikšmės

Taškų skaičius

Harmoniku skaičius
m=floor((n+1)/2)

```
yyy=fft(fff)/n;

spektras=np.abs(2*yyy[0:m-1]); # harmoniku amplitudes
spektras[0]=spektras[0]/2;     # pastovi dedamoji

spektras_c0=np.real(yyy[0]);      # pastovi dedamoji
spektras_c=np.real(2*yyy[1:m-1]); # cos amplitudes
spektras_s=-np.imag(2*yyy[1:m-1]);# sin amplitudes
```

*Pvz_SMA_9_4_fft.py*

# **SMA_09_02** Klausimai savikontrolei:

1. Kas yra diskretusis Furje aproksimavimas(DFA), kokios bazinės funkcijos naudojamos;
2. Kas yra bazinių funkcjų ortogonalumas integruojant ir sumuojant diskrečiuose taškuose;
3. Kaip apskaičiuojami DFA koeficientai;
4. Paaiškinkite, kokią informaciją apie tiriamą signalą teikia Furje harmonikų amplitudės. Ar pagal sumines harmonikų amplitudes galima vienareikšmiškai atkurti išeities signalą;
5. Kaip filtruojamas signalas pagal dažnius;
6. Kaip filtruojamas signalas pagal amplitudžių reikšmes