Skaitinis apibrėžtinio integralo apskaičiavimas:

Niutono ir Koteso formulės

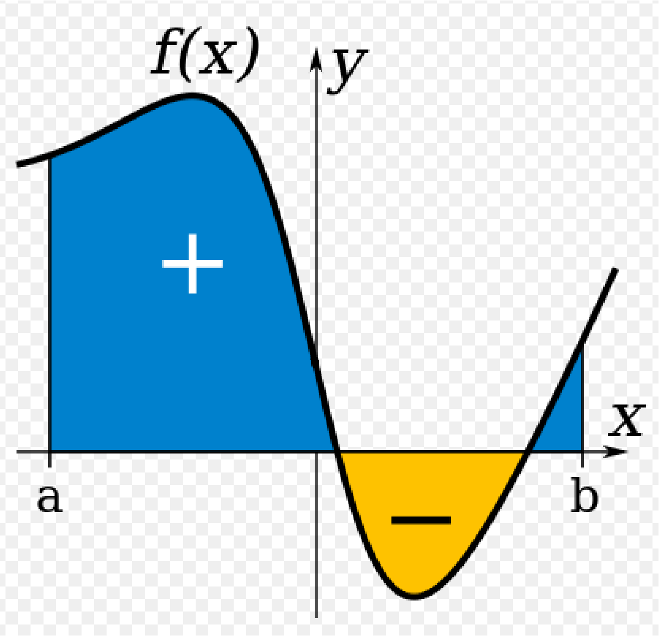
Temoje aiškinama:

- **Apibrėžtinio integralo geometrinė prasmė. Integralo reikšmės skaitinio apskaičiavimo uždavinio formuluotė;**
- **Hemingo būdas Niutono ir Koteso formulių koeficientams apskaičiuoti;**
- **Koeficientų apskaičiavimas pagal Lagranžo daugianarius;**
- **Skaitinis integralo reikšmės apskaičiavimas, skaidant integravimo intervalą į keleto žingsnių ilgio dalis;**
- **Niutono ir Koteso formulių tikslumo eilė;**
- **Apskaičiuotų reikšmių patikslinimas, panaudojant Ričardsono ekstrapoliavimo formulę**
- **Apskaičiuotų reikšmių patikslinimas, panaudojant Rombergo metodą**

Apibrėžtinio integralo geometrinė prasmė. Integralo reikšmės skaitinio apskaičiavimo uždavinio formuluotė

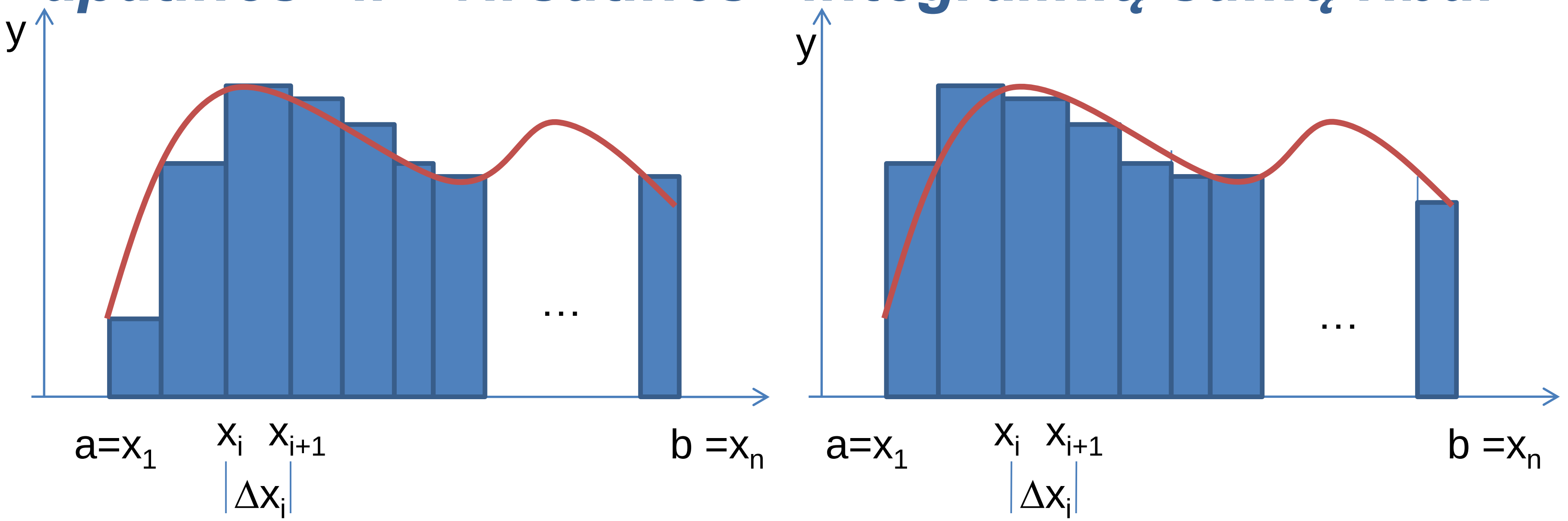
Apibrėžtinis integralas. *Apibrėžimas ir geometrinė prasmė*

Duotos *funkcijos f(x) apibrėžtinis integralas intervale [a,b]* – tai suminė reikšmė su ženklu imamo ploto, kurį apriboja funkcijos kreivė, Ox ašis ir vertikalios atkarpos, išvestos taškuose x=a ir x=b nuo Ox ašies iki funkcijos kreivės



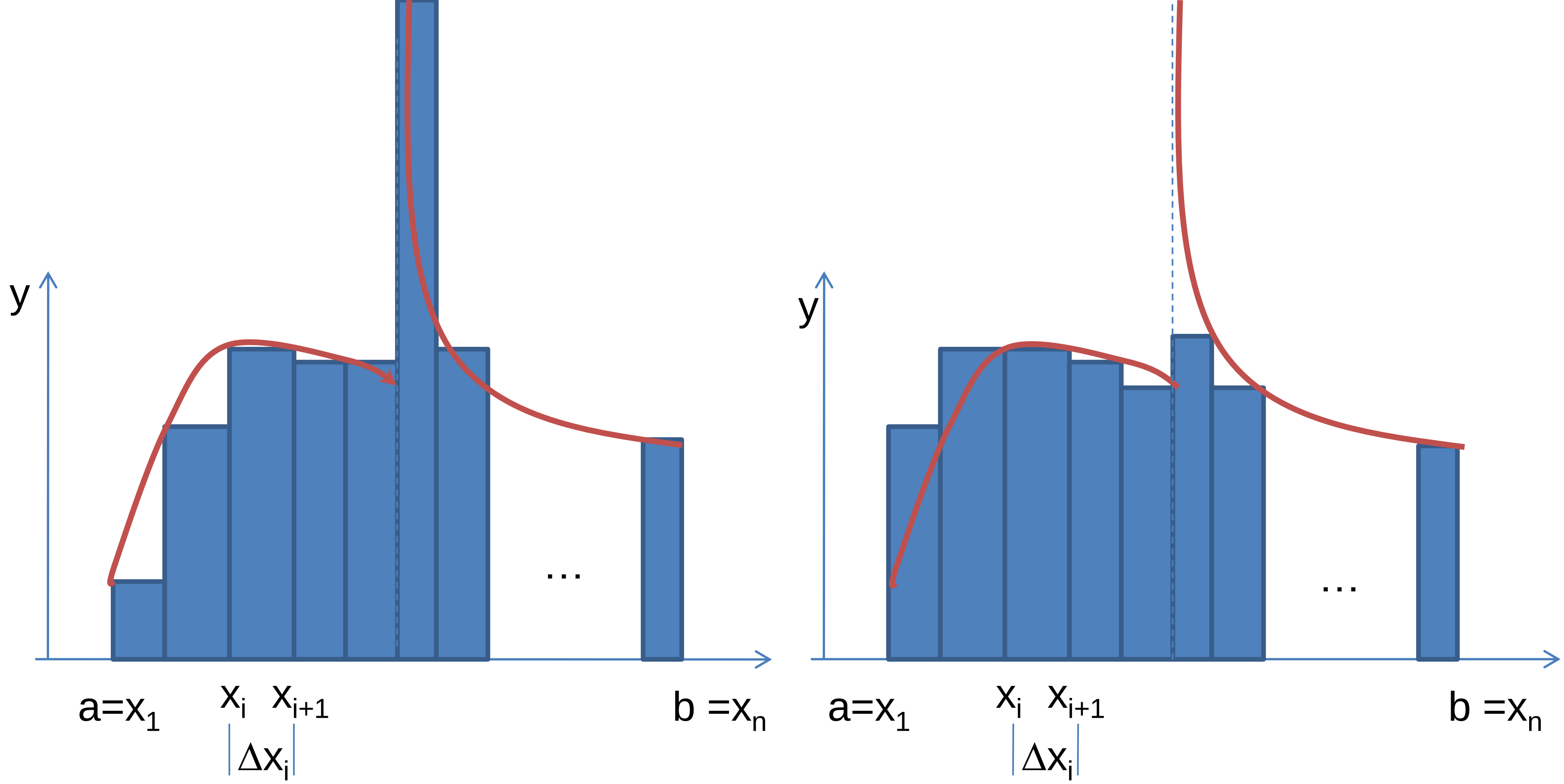
Tai *neformalus* apibrėžimas, paremtas *geometrine interpretacija*

Apibrėžiant matematiškai, ***funkcijos f(x) apibrėžtinis integralas intervale [a,b] yra "apatinės" ir "viršutinės" integralinių sumų riba:***



$$I = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right) \Delta x_i = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{i+1}\right) \Delta x_i$$

Integralas apibrėžtas ***Rymano (Rieman) prasme,*** **kai abiejų sumų ribos sutampa**



???

$$I=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)\Delta x_i=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{i+1}\right)\Delta x_i$$

- **Nagrinėsime tik Rymano prasme apibrėžtus integralus;**
- **Apsiribosime atvejais, kai funkcijos reikšmės yra *aprėžtos visame jos apibrėžimo intervale*, o integralo reikšmės kaip figūros ploto interpretacija yra akivaizdi ir vienareikšmė;**
- **Siekiama, kad *skaitiškai apskaičiuota integralo reikšmė* būtų kiek galima artimesnė *tiksliai jo reikšmei*;**
- **Realiuose uždaviniuose tikslios reikšmės apskaičiuoti dažniausiai negalime. Ar metodas pakankamai tikslus, nustatome:**

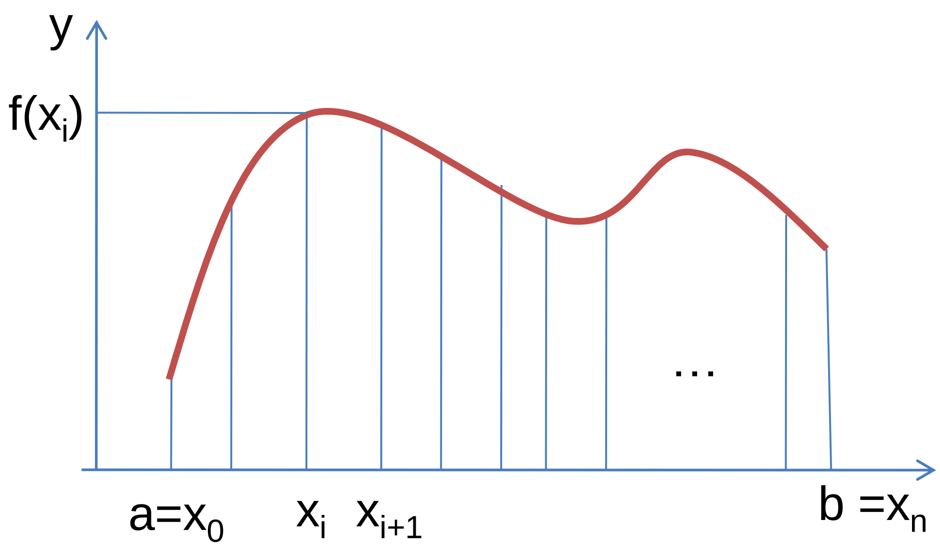
-**teoriškai analizuodami jo savybes;**

-**spręsdami pavydžius, kurių tikslūs sprendiniai žinomi**

Apibrėžtinio integralo *skaitinis apskaičiavimas*

- **Apibrėžtinis integralas skaitiškai apskaičiuojamas, pakeičiant jį baigtinio funkcijos reikšmių skaičiaus su svorio koeficientais suma:**

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),\ \ a \le x_i \le b$$

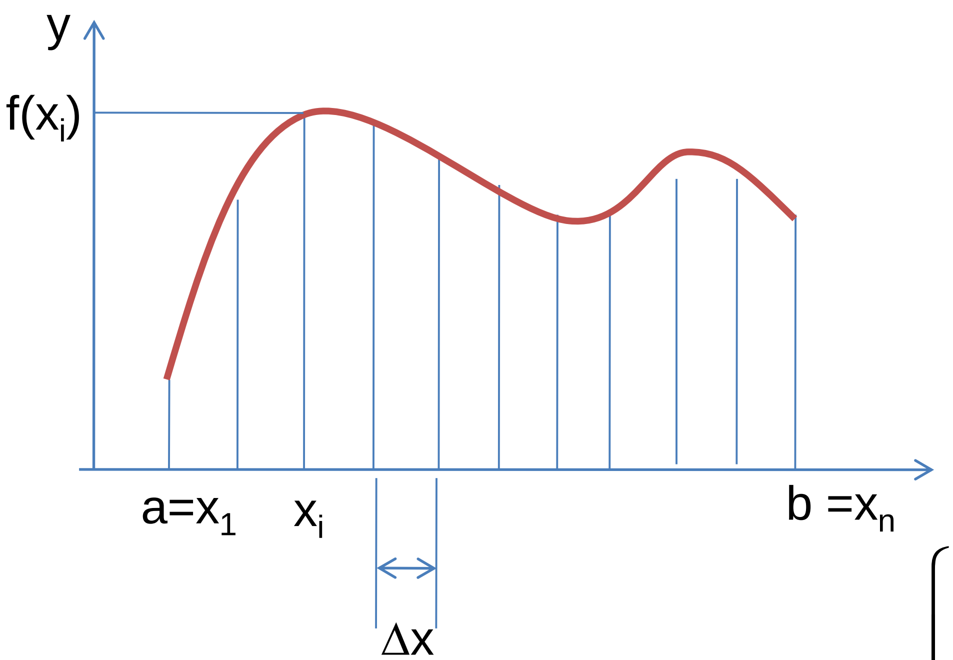


Bendruoju atveju, taškai gali būti išdėstyti netolygiai

Hemingo būdas Niutono ir Koteso formulių koeficientams apskaičiuoti

Niutono ir Koteso formulės. *Hemingo išvedimo būdas*

- **Intervale taikomas interpoliavimas vienanariais, parinkus tolygiai išdėstytus interpoliavimo mazgus žingsniu $\Delta x=(b-a)/(n-1)$:**



$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \cdot \left[f(x_1) \quad f(x_2) \quad \cdots \quad f(x_n) \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}, \; a \le x_i \le b$$

Reikia rasti formulės koeficientus

$$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i), \ \ a \le x_i \le b$$

Pareikalaujame, kad formulė tiksliai integruotų daugianarius nuo 0 iki (n-1) eilės imtinai:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_a^b 1dx \\ \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_a^b xdx \\ \vdots \\ \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_a^b x^{n-1}dx \end{Bmatrix} = \frac{n-1}{b-a} \cdot \begin{Bmatrix} b-a \\ \dfrac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n}\left(b^n-a^n\right) \end{Bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{G}\right]\left\{\mathbf{w}\right\} = \left\{\mathbf{m}\right\}$$

Koeficientų išraiškas apskaičiuojame iš lygčių sistemos. Tokiu būdu galime aprašyti bet kokios eilės skaitinio integralo apskaičiavimo *formulę* (*schemą)*

Pvz_SMA_11_1_koeficientai_Hemingo_metodu

Apibrėžtinio integralo skaitinio apskaičiavimo uždavinys yra glaudžiai susijęs su anksčiau šiame kurse nagrinėtu interpoliavimo uždaviniu:

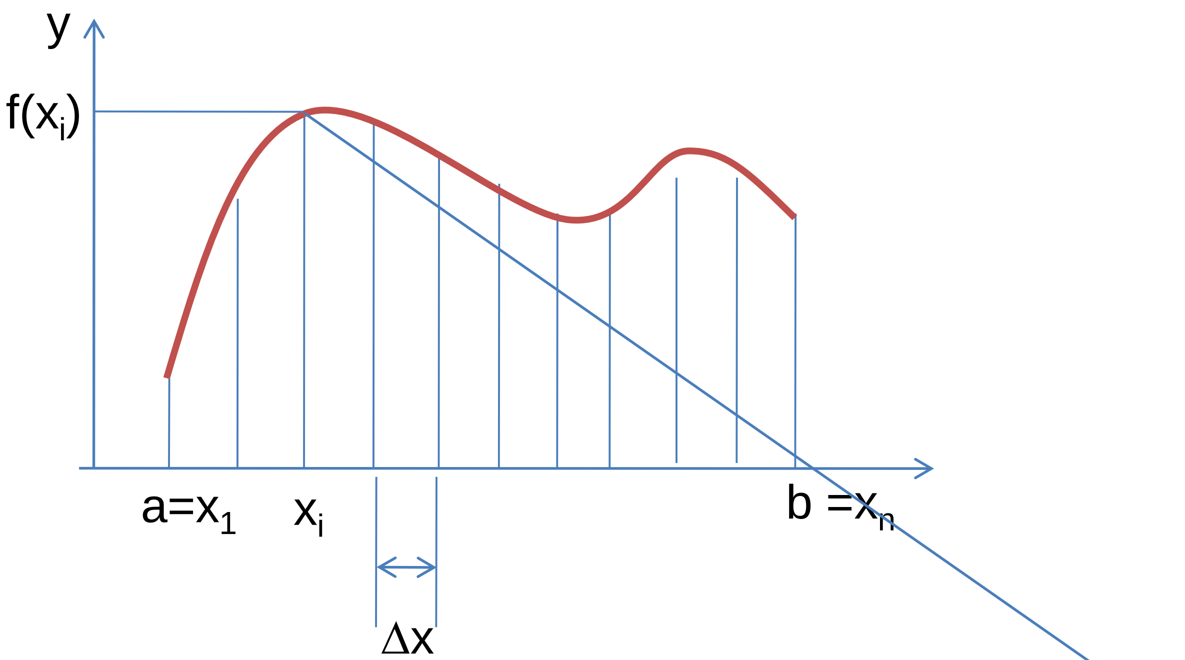
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

- **Lygčių sistemos koeficientų matrica yra tokia pati, kokia taikoma sprendžiant interpoliavimo uždavinį Hemingo metodu**;
- **Išvesta formulė tiksliai apskaičiuoja vienanarių integralus, o tuo pačiu ir bet kokio daugianario integralą iki parinktos eilės (n-1);**
- **Tai , reiškia, kad iš tikrųjų integruojame daugianarį, interpoliuojantį duotąją funkciją patrinktuose mazguose, o ne pačią duotąją funkciją.**

Koeficientų apskaičiavimas pagal Lagranžo daugianarius

Niutono ir Koteso formulės koeficientų apskaičiavimas *panaudojant Lagranžo daugianarius*

- **Intervale taikomas interpoliavimas daugianariais (pvz. Lagranžo), parinkus tolygiai išdėstytus interpoliavimo mazgus žingsniu $\Delta x=(b-a)/(n-1)$:**



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i) \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b L_i(x)dx \right) f(x_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i),$$

$$a \le x_i \le b \ , \ \Delta x = \frac{b-a}{n-1}$$

Niutono-Koteso formulės koeficientai

$$w_i = \frac{n-1}{b-a} \int_a^b L_i(x)dx$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

- Skaitinio integravimo formulės koeficientai gali būti apskaičiuoti, taikant integravimo veiksmus simboliais :

```
syms dx x L a

N=9 % didziausias integralo formules tasku skaicius
for i=2:N
  for j=1:i
    xx=[a:dx:a+(i-1)*dx]; % taskai kas dx
    L=1;
    for k=1:i, if k ~= j, L=L*(x-xx(k))/(xx(j)-xx(k)); end, end  % Lagranzo daugianaris
    coef(j)=int (L, sym(xx(1)), sym(xx(i))); % Lagranzo daugianario integralas
  end
  coef/dx
end
```

Pvz_SMA_11_2_Newton_Cotes_Lagrange_symbolic

Hemingo metodu skaičiuoja ⇨ *Pvz_SMA_11_3_Newton_Cotes_symbolic*

Niutono ir Koteso formulės. *Aukštesnių eilių interpoliavimas Lagranžo daugianariais:*

N = 2 :

[1/2, 1/2] × (b - a)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) \times (b-a)$$

N = 3 :

[1/3, 4/3, 1/3] × $\frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(a + \frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right) \times \frac{b-a}{2}$$

N = 4 :

[3/8, 9/8, 9/8, 3/8] × $\frac{b-a}{3}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{3}{8}f(a) + \frac{9}{8}f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + \frac{9}{8}f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right) \times \frac{b-a}{3}$$

N = 5 :

[14/45, 64/45, 8/15, 64/45, 14/45] × $\frac{b-a}{4}$

$\vdots$

N = 6 :

[95/288, 125/96, 125/144, 125/144, 125/96, 95/288] × $\frac{b-a}{5}$

N = 7 :

[41/140, 54/35, 27/140, 68/35, 27/140, 54/35, 41/140] × $\frac{b-a}{6}$

N = 8 :

[5257/17280, 25039/17280, 343/640, 20923/17280, 20923/17280, 343/640, 25039/17280, 5257/17280] × $\frac{b-a}{7}$

N = 9 :

[3956/14175, 23552/14175, - 3712/14175, 41984/14175, - 3632/2835, 41984/14175, - 3712/14175, 23552/14175, 3956/14175] × $\frac{b-a}{8}$

Skaitinis integralo reikšmės apskaičiavimas, skaidant integravimo intervalą į keleto žingsnių ilgio dalis

- **Imant n diskretizavimo taškų, Lagranžo intepoliavimu paremta formulė tiksliai suintegruoja daugianarius iki n-1 eilės. Taip yra todėl, kad tokius daugianarius interpoliavimo formulė aprašo tiksliai;**

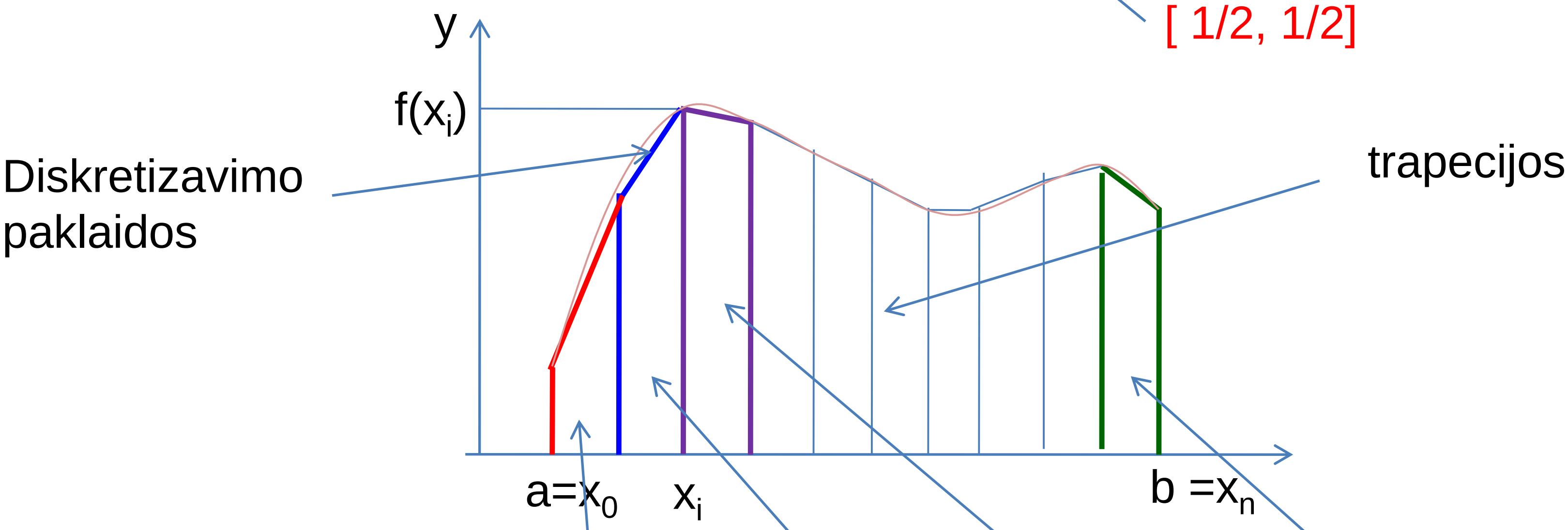
- **Praktiškai formulę taikome integruodami bet kokias funkcijas, todėl gauname interpoliavimo paklaidą. Esant dideliam taškų skaičiui, aukštos eilės Lagranžo daugianariai yra labai banguoti. Todėl bendruoju atveju *didinant taškų skaičių integravimo tikslumas nebedidėja;***

- **Patogiau skaidyti intervalą [a,b] dalimis ir taikyti interpoliavimą daugianariu kiekvienoje dalyje, esant nedideliam mazgų skaičiui**

Niutono ir Koteso formulės. *Tiesinis interpoliavimas Lagranžo daugianariais kiekviename žingsnyje*

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{2}\left(\int_a^{a+\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \Delta x\sum_{i=1}^{2} w_i f(x_i),\; a\le x_i\le a+\Delta x \quad .$$

[1/2, 1/2]



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = x_{i+1}-x_i \;, \; i=\overline{1,\ n}$$

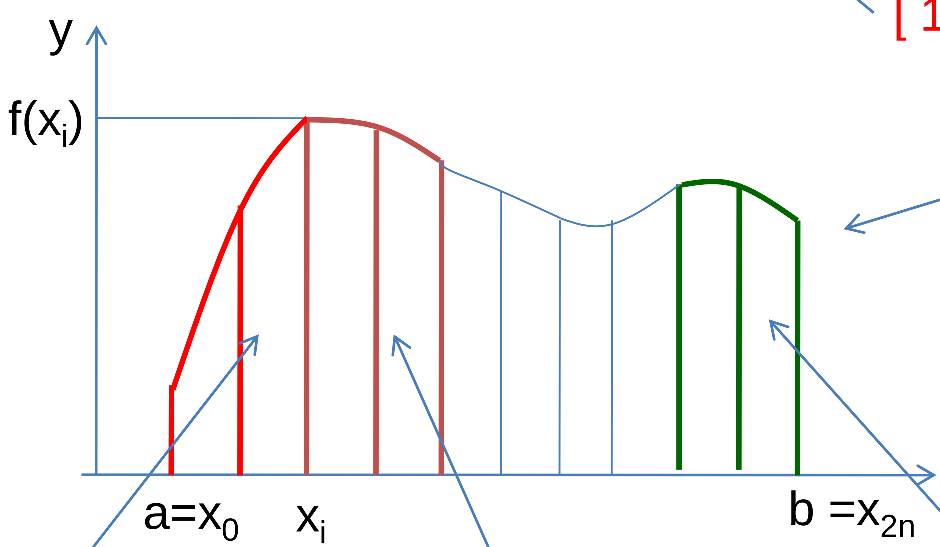
Trapecijų formulė:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+\mathbf{2}f(x_1)+\mathbf{2}f(x_2)\cdots+\mathbf{2}f(x_{n-1})+f(x_n)\right),$$

Niutono ir Koteso formulės. *Interpoliavimas antrosios eilės Lagranžo daugianariais žingsnių porose*

$$\int_a^{a+2\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{3}\left(\int_a^{a+2\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i),\quad a \le x_i \le a+2\Delta x \ .$$

[1/3, 4/3, 1/3]



Intervalų poros, kuriose funkcija interpoliuojama 2-os eilės daugianariu (parabole)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \ ,\ i = \overline{1,\ n}$$

Simpsono formulė:

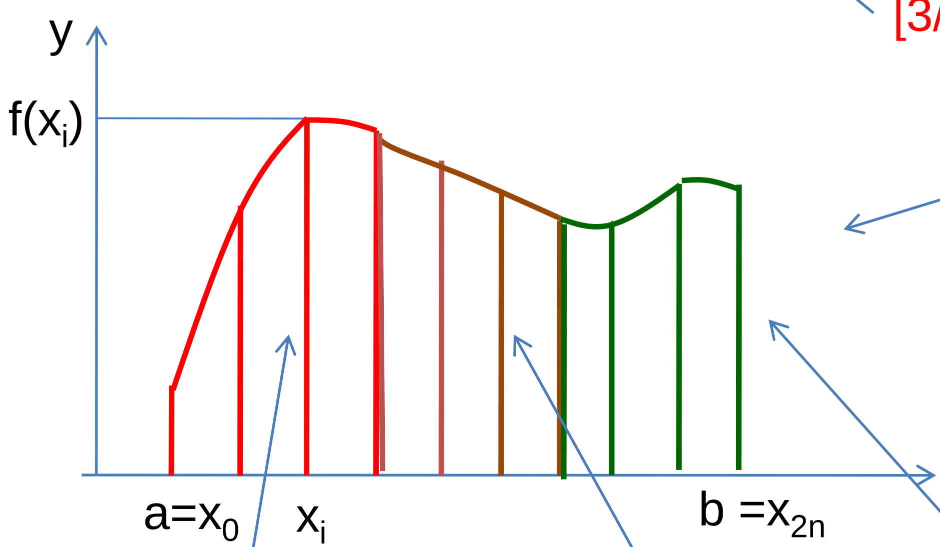
Intervalų skaičius n-1 turi būti **lyginis**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+\mathbf{2}f(x_2)+4f(x_3)+\mathbf{2}f(x_4)+\cdots+\mathbf{2}f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right),$$

Niutono ir Koteso formulės. *Interpoliavimas trečios eilės Lagranžo daugianariais žingsnių triadose:*

$$\int_a^{a+3\Delta x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{4}\left(\int_a^{a+3\Delta x} L_i(x)dx\right) f(x_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i),\quad a \le x_i \le a+3\Delta x \quad .$$

[3/8, 9/8, 9/8, 3/8]



Intervalų triados, kuriose funkcija interpoliuojama 3-ios eilės daugianariu

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{8}\left(3f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)+3f(x_3)+3f(x_3)+9f(x_4)+\cdots+3f(x_{n-3})+9f(x_{n-2})+9f(x_{n-1})+3f(x_n)\right),$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i \quad , \; i = \overline{1, \; n}$$

Intervalų skaičius n-1 turi būti **dalus iš 3**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{8}\left(3f(x_0)+9f(x_1)+9f(x_2)+\mathbf{6}\,f(x_3)+9f(x_4)+\cdots+\mathbf{6}\,f(x_{n-3})+9f(x_{n-2})+9f(x_{n-1})+3f(x_n)\right),$$

Niutono ir Koteso formulių tikslumo eilė

Niutono ir Koteso formulių *tikslumo eilė*

- **Formulės, kuri tiksliai apskaičiuoja k laipsnio daugianario integralą, tikslumo eilė yra k;**
- **Formulės sudarytos taip, kad n taškų formulės tikslumo eilė yra bent jau n-1 ;**
- **Kai kurių formulių tikslumo eilė gali būti ir aukštesnė. Patikrinkime.**

Pvz_SMA_11_4_Newton_Cotes_analize_symbolic

Ši sistemos dalis tikrai tenkinama

$$
\Delta x \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \\ x_1^{n+1} & x_2^{n+1} & \cdots & x_n^{n+1} \\ x_1^{n+2} & x_1^{n+2} & \cdots & x_1^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b-a \\ \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\left(b^n-a^n\right) \\ \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right) \\ \frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \\ \frac{1}{n+2}\left(b^{n+2}-a^{n+2}\right) \\ \vdots \end{Bmatrix}
$$

- **Kiek papildomų lygčių tenkinama, galime patikrinti kiekvienos konkrečios formulės atveju;**
- **Jeigu tenkinama kuri nors iš šių lygčių, tai reiškia, kad formulė tiksliai integruoja tokį kintamojo laipsnį**

Trapecijų formulės tikslumo eilės patikrinimas

$$\Delta x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Delta x \\ {\color{blue}0} & {\color{blue}\Delta x^2} \\ {\color{blue}0} & {\color{blue}\Delta x^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta x^2/2 \\ {\color{blue}\Delta x^3/3} \\ {\color{blue}\Delta x^4/4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ {\color{blue}\mathbf{\Delta x^3/6}} \\ {\color{blue}\mathbf{\Delta x^4/4}} \end{Bmatrix}$$

- **Tenkinamos 2 lygtys (t.y. kiek buvo numatyta apskaičiuojant koeficientus)**
- **Trapecijų formulės tikslumo eilė yra 1**

Simpsono formulės tikslumo eilės patikrinimas

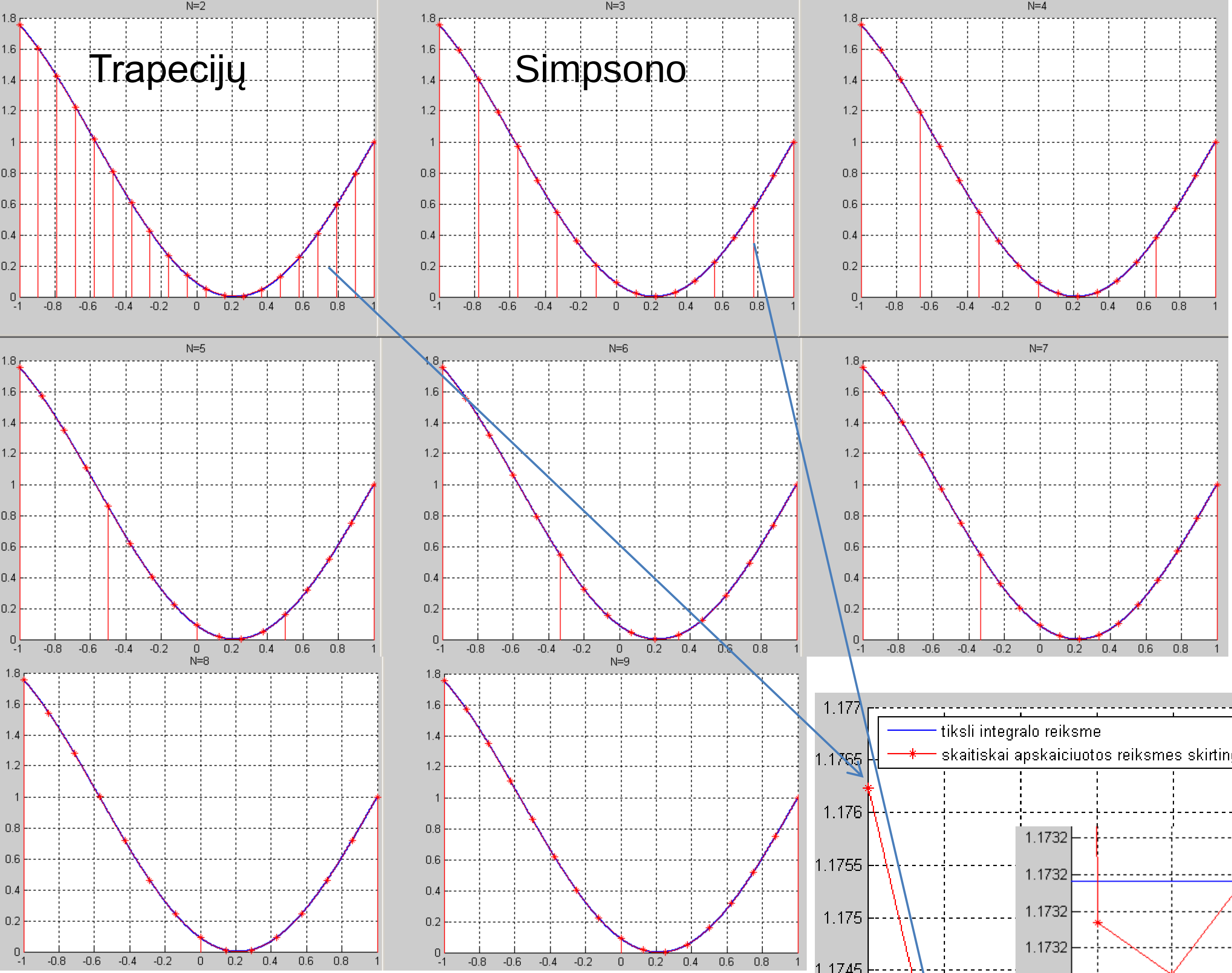
$$\Delta x \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Delta x & 2\Delta x \\ 0 & \Delta x^2 & 4\Delta x^2 \\ 0 & \Delta x^3 & 8\Delta x^3 \\ 0 & \Delta x^4 & 16\Delta x^4 \\ 0 & \Delta x^5 & 32\Delta x^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\Delta x \\ 2\Delta x^2 \\ 8\Delta x^3/3 \\ 4\Delta x^4 \\ 32\Delta x^5/5 \\ 4\Delta x^6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{4\Delta x^5/15} \\ \mathbf{4\Delta x^6/3} \end{Bmatrix}$$

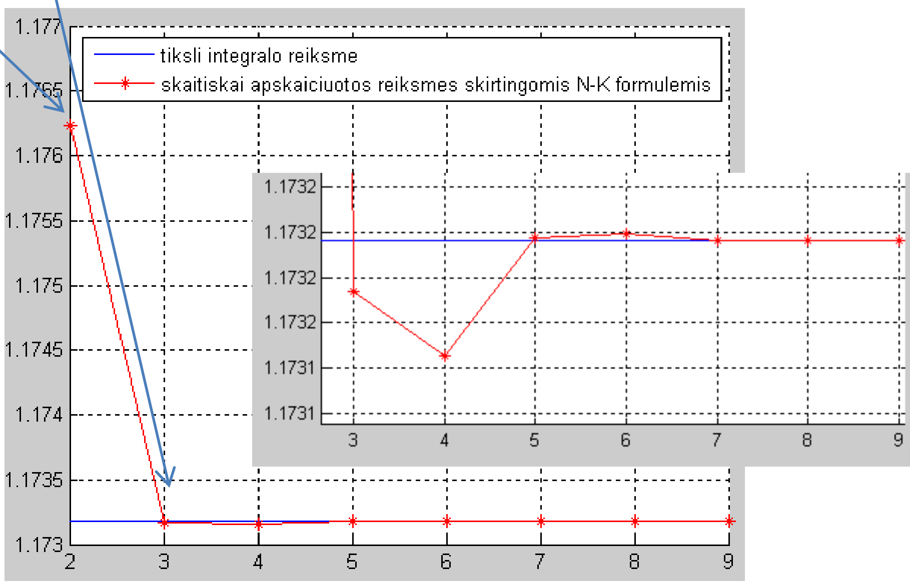
- **Tenkinamos 4 lygtys (t.y. viena daugiau, nei buvo numatyta apskaičiuojant koeficientus)**
- **Simpsono formulės tikslumo eilė yra 3**
- **Būtų galima pademonstruoti, kad visų Niutono ir Koteso formulių, panaudojančių *nelyginį taškų skaičių*, tikslumo eilė yra *lygi taškų skaičiui*;**
- **visų Niutono ir Koteso formulių, panaudojančių *lyginį taškų skaičių*, tikslumo eilė yra *vienetu mažesnė už taškų skaičių*;**

Pvz_SMA_11_5_Trapeciju_ir_Simpsono_metodai

Pvz_SMA_11_6_Ivairiu_Niutono_Koteso_formuliu_taikymas

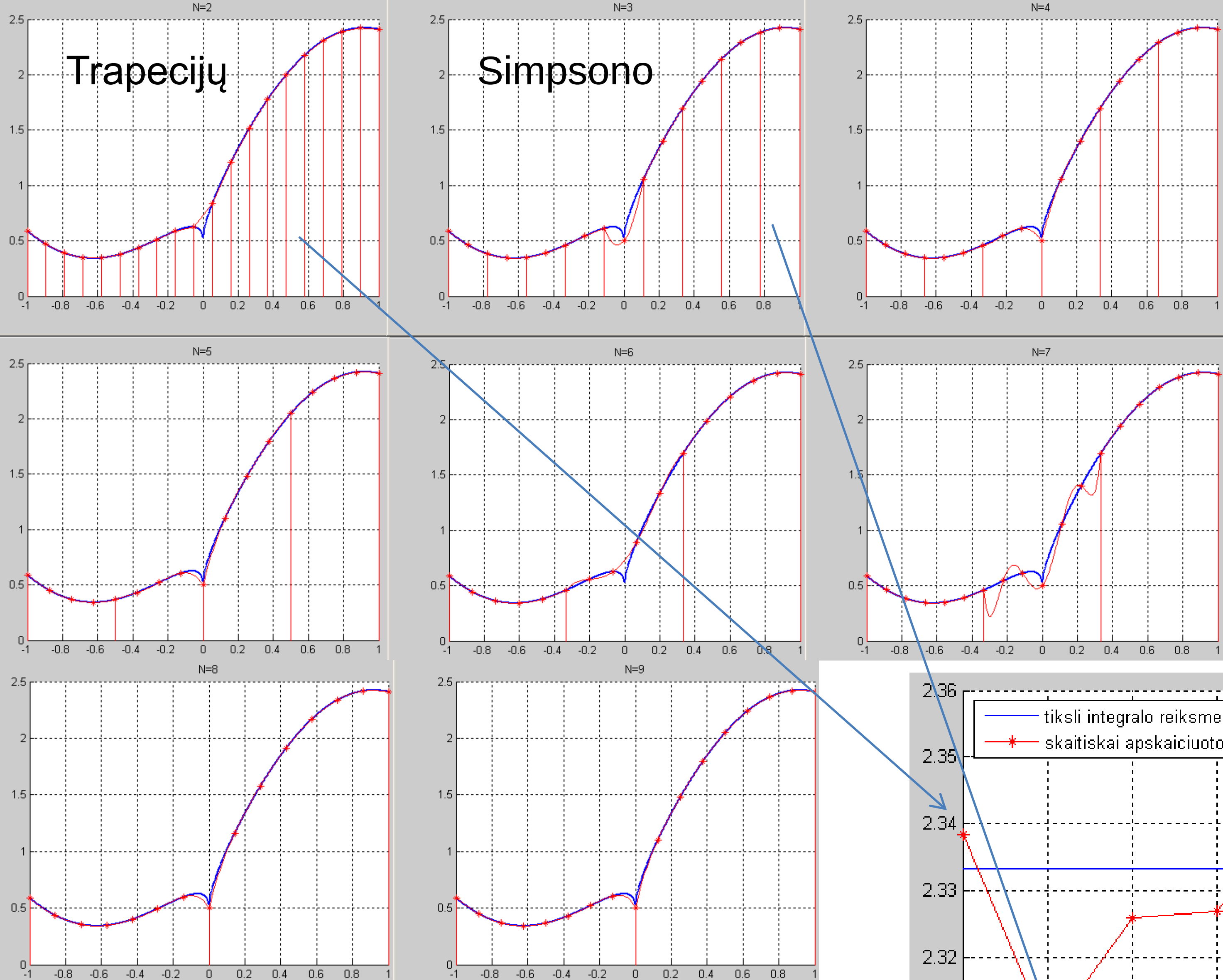
Pvz_SMA_11_7_Ivairiu_Niutono_Koteso_formuliu_taikymas_ciklas

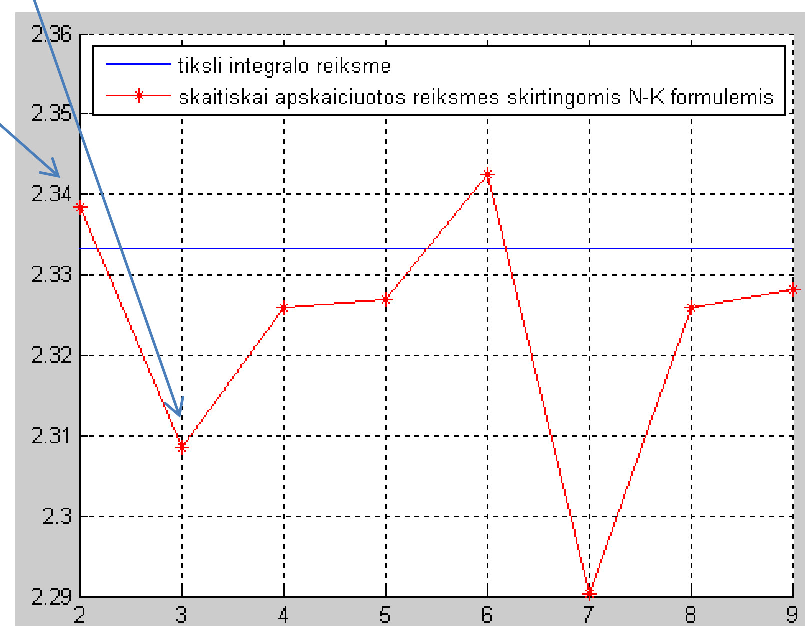




f=sin(2*x-2)+1

$$f(x) = \sin(2x - 2) + 1$$





f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{|x|} + 0.5$$

- **Dažniausiai naudojama tiesinė arba antros eilės Lagranžo interpoliacija (t.y. trapecijų ir Simpsono formulės) :**

  -tokios formulės paprastesnės;

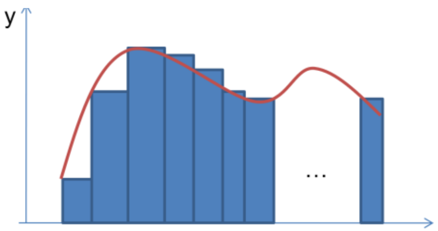
  -aukštesnės eilės formulės įgalina padidinti tikslumą tik nežymiai, be to, ne visuomet;

  -kai intervalai tarp interpoliavimo mazgų vienodi, tikslumą galima pagerinti, panaudojant *Ričardsono ekstrapoliavimo formulę ir Rombergo metodą*

Apskaičiuotų reikšmių patikslinimas, panaudojant Ričardsono ekstrapoliavimo formulę

Niutono ir Koteso metodu apskaičiuotų integralo reikšmių tikslumo pagerinimas, panaudojant *Ričardsono ekstrapoliavimo formulę*

Tarkime, kad tam tikru metodu galime apskaičiuoti integralo reikšmę su paklaida, proporcinga diskretizavimo žingsnio ilgiui (t.y. formulė yra nulinės tikslumo eilės):



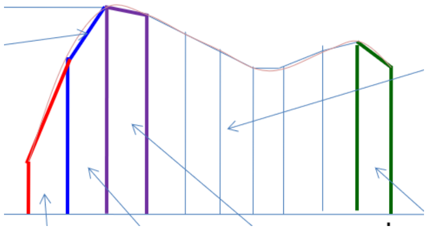
$$I_0(h) = I + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots,$$

$$I_0(h/2) = I + c_1 h/2 + c_2 h^2/4 + \cdots,$$

$$I_1 = 2I_0(h/2) - I_0(h) = I - \frac{c_2}{2} h^2 + \cdots,$$

Taip apskaičiuotos reikšmės paklaida yra proporcinga *diskretizavimo žingsnio ilgio kvadratui*. Tai reiškia, *gavome aukštesnės tikslumo eilės reikšmę, panaudodami dvi reikšmes, apskaičiuotas pagal žemesnės tikslumo eilės formulę.*

Jeigu reikšmę galime apskaičiuoti pagal pirmos tikslumo eilės formulę:



$$I_1(h) = I + c_2 h^2 + c_3 h^3 + \cdots,$$

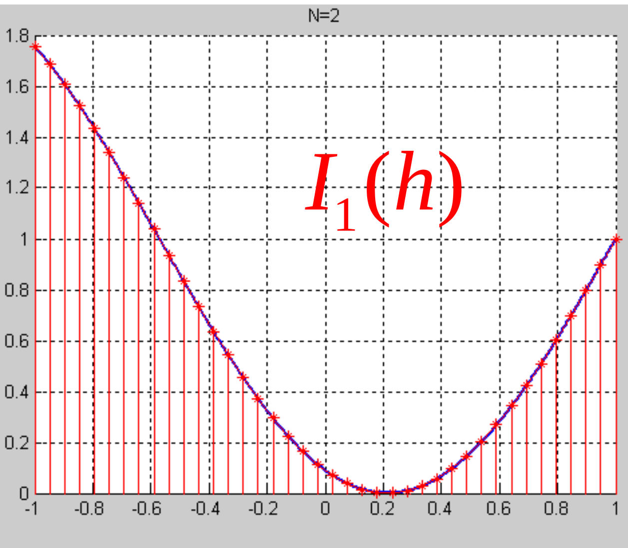
$$I_1(h/2) = I + c_2 h^2/4 + c_3 h^3/8 + \cdots,$$

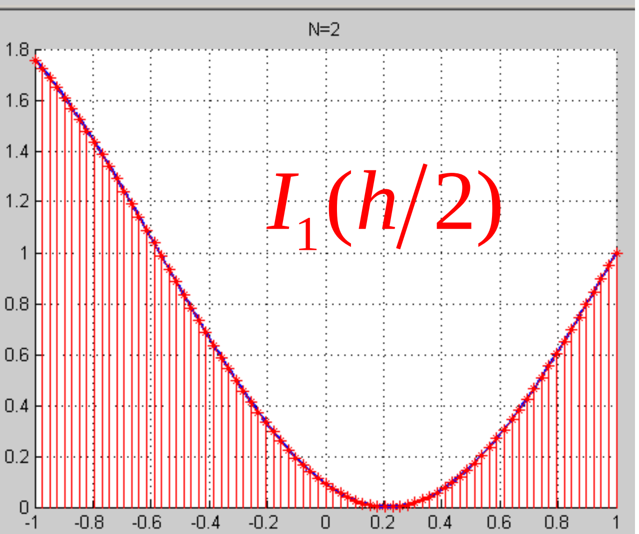
$$I_2 = \left(4I_1(h/2) - I_1(h)\right)/3 = I - \frac{c_3}{6} h^3 + \cdots,$$

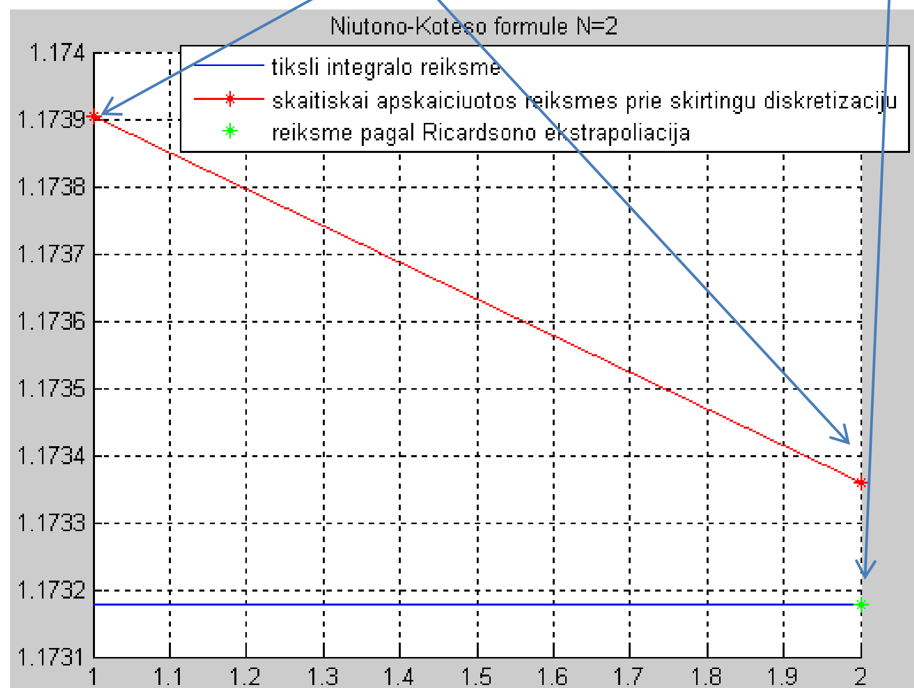
Taip apskaičiuotos reikšmės paklaida yra proporcinga *diskretizavimo žingsnio ilgio kubui*. Tai reiškia, *gavome aukštesnės tikslumo eilės reikšmę, panaudodami dvi reikšmes, apskaičiuotas pagal žemesnės tikslumo eilės formulę.*

Pavyzdys. **Trapecijų metodas yra *1 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio kvadratui);**
Apskaičiavę trapecijų metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę

$$\left(4I_1(h/2)-I_1(h)\right)/3=I_2$$



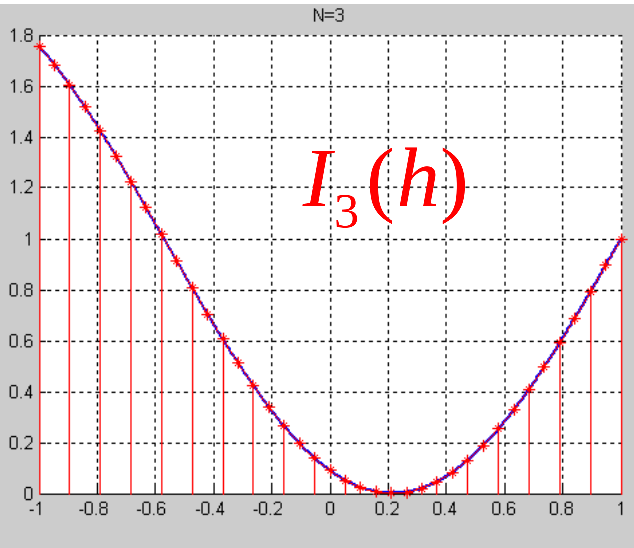


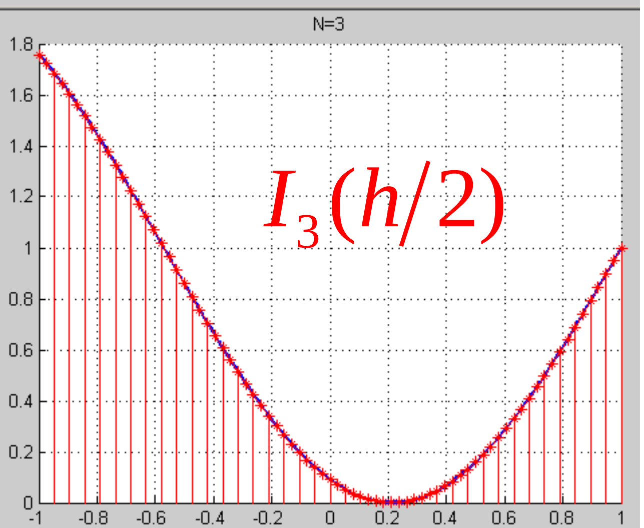


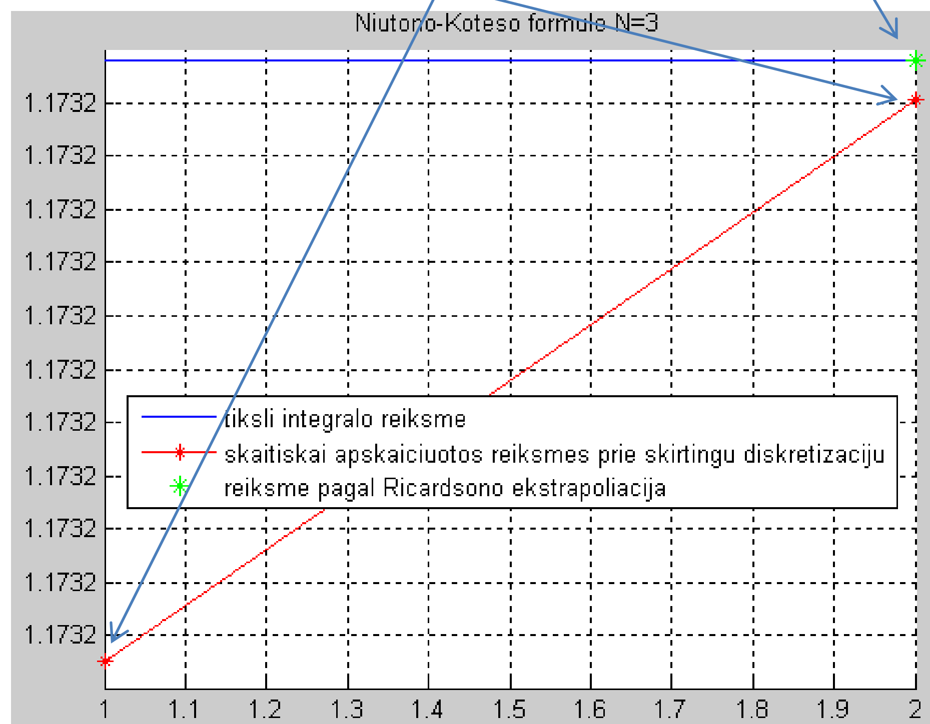
Pvz_SMA_11_8_Ricardsono_ekstrapoliacija

Pavyzdys. Simpsono metodas yra *3 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio ketvirtajam laipsniui);
Apskaičiavę Simpsono metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę:

$$\left(16 I_2(h/2) - I_2(h)\right)/15 = I_4$$



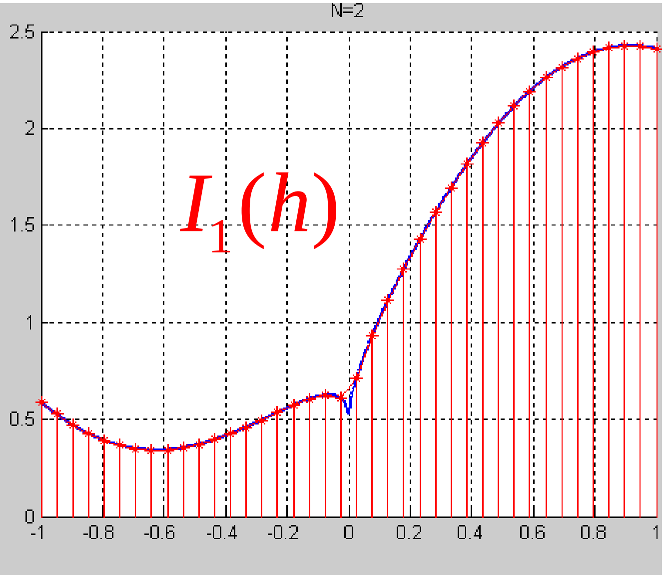


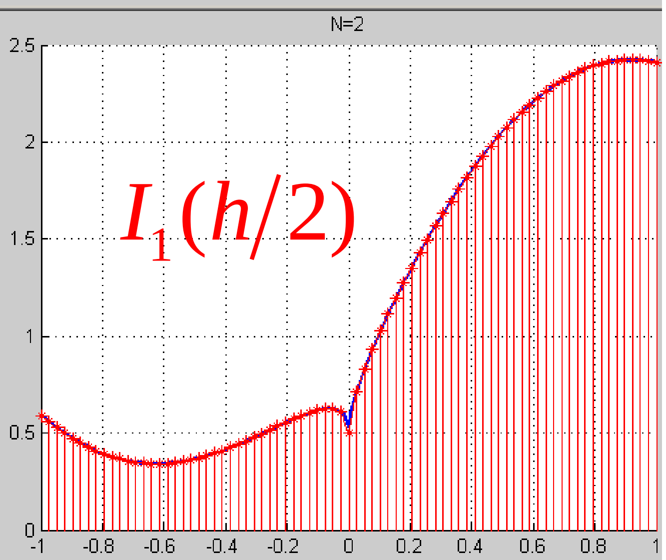


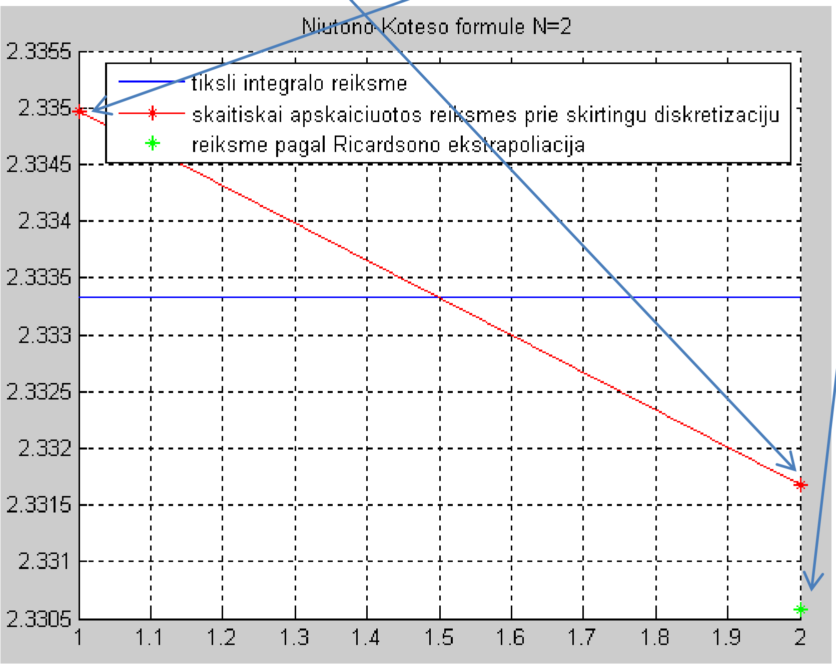
Pvz_SMA_11_8_Ricardsono_ekstrapoliacija

Pavyzdys. Trapecijų metodas yra *1 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio kvadratui);
Apskaičiavę trapecijų metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę

$$\left(4I_1(h/2)-I_1(h)\right)/3=I_2$$





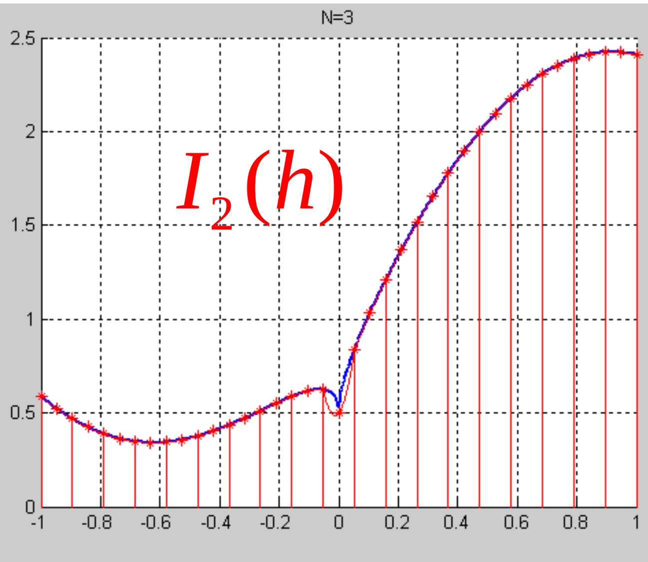


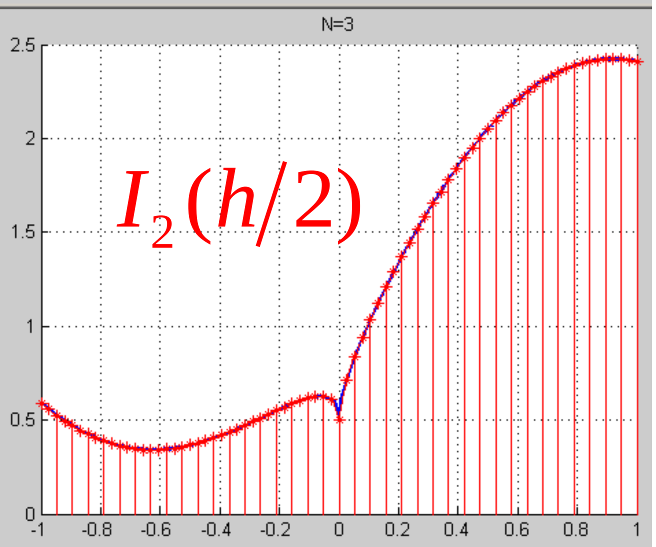
Ekstrapoliuota reikšmė tikslumo nepagerino. Priežastis – šios konkrečios funkcijos atveju apskaičiuota reikšmė labai “jautri” integravimo žingsnio dydžiui.

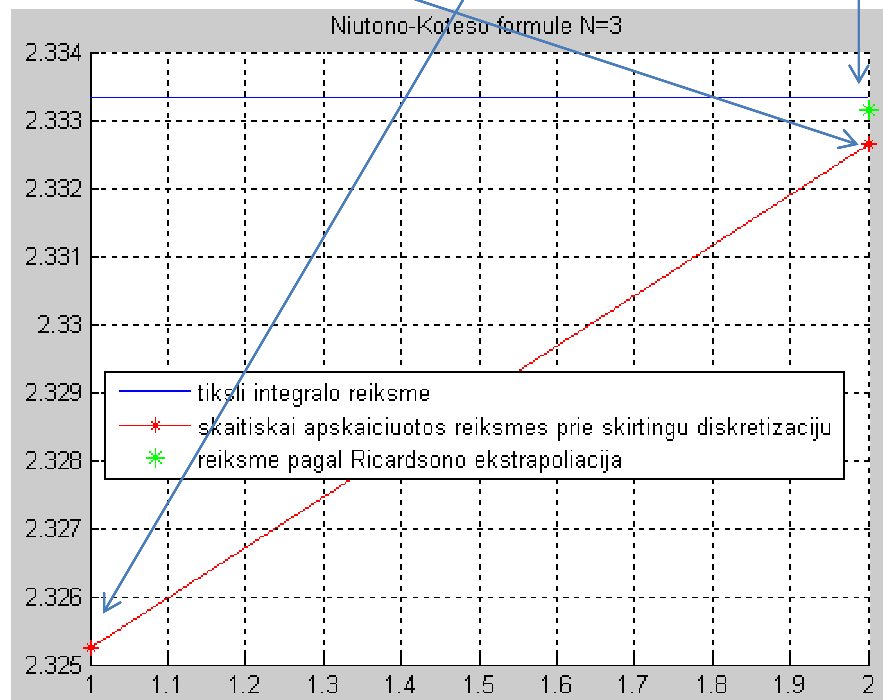
Pvz_SMA_11_8_Ricardsono_ekstrapoliacija

Pavyzdys. Simpsono metodas yra *3 tikslumo eilės* (t.y. jo paklaida proporcinga žingsnio ketvirtajam laipsniui);
Apskaičiavę Simpsono metodu integralo reikšmes, esant tam tikram ir du kartus mažesniam žingsniui, pagal Ričardsono formulę gausime aukštesnės tikslumo eilės reikšmę:

$$\left(16 I_3(h/2) - I_3(h)\right)/15 = I_4$$







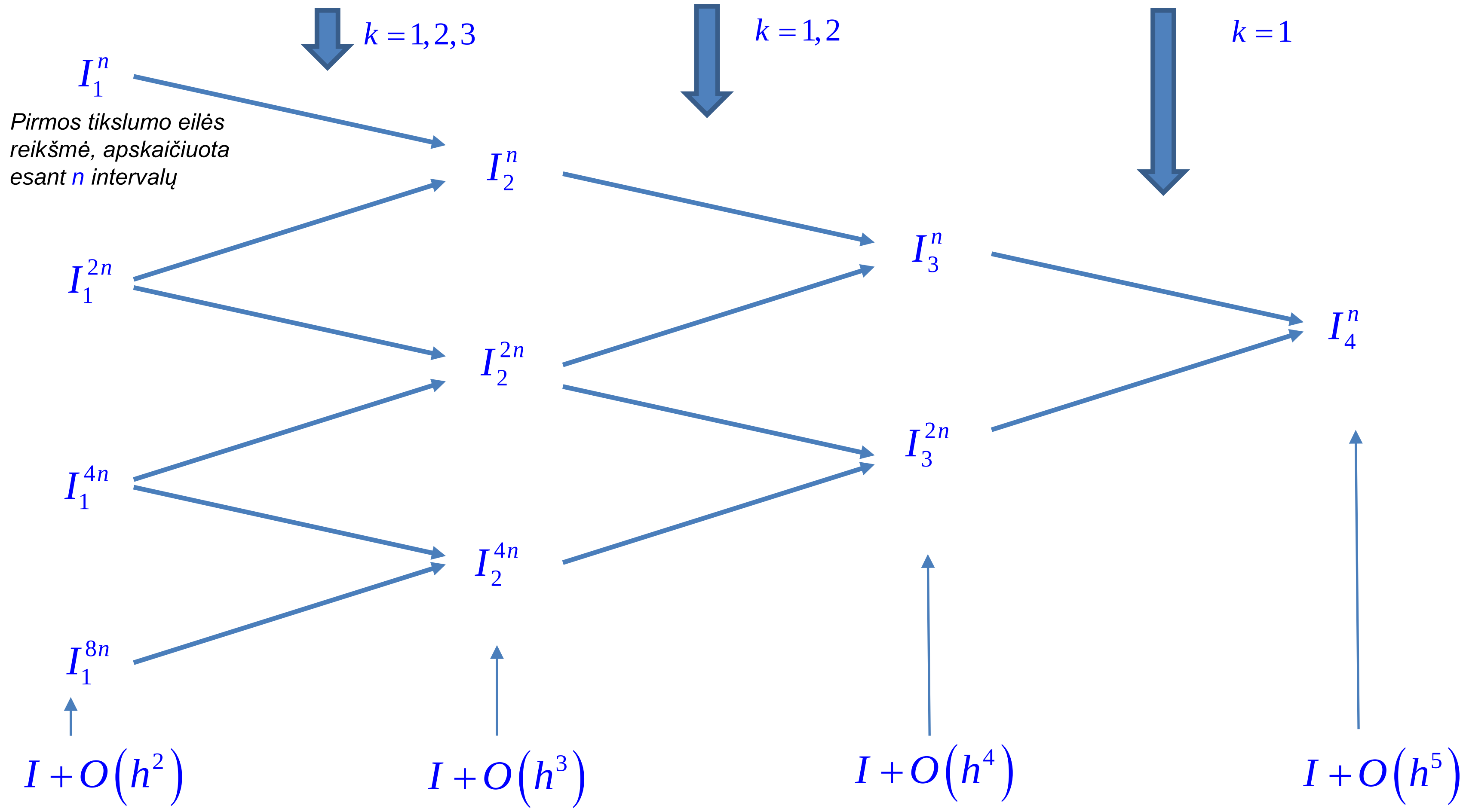
Ekstrapoliuotos reikšmės tikslumas pagerėjo.

Pvz_SMA_11_8_Ricardsono_ekstrapoliacija

Apskaičiuotų reikšmių patikslinimas, panaudojant Rombergo metodą

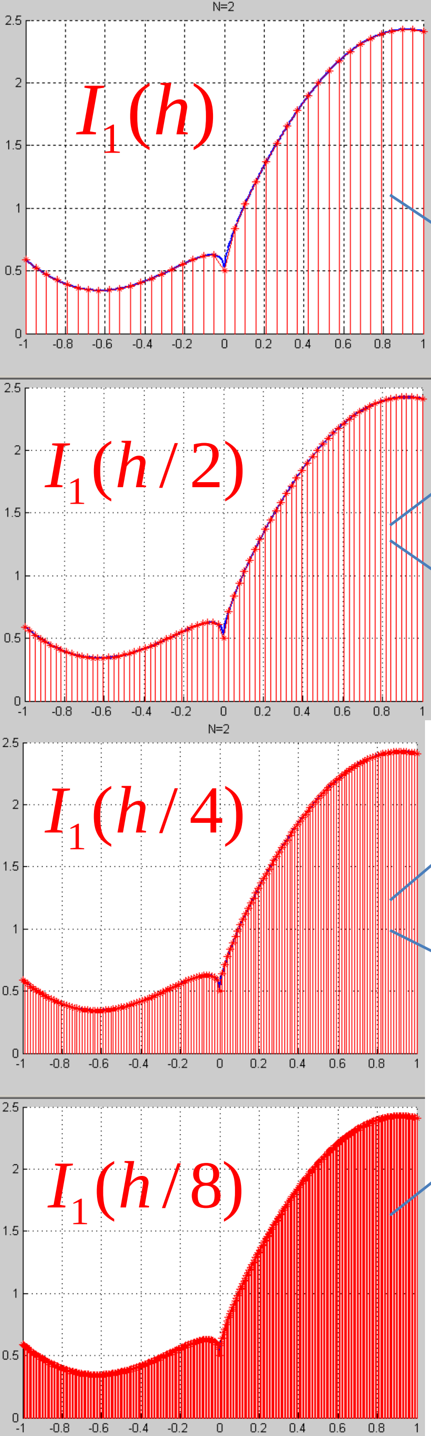
Niutono ir Koteso metodu apskaičiuotų integralo reikšmių tikslinimas, panaudojant *Rombergo metodą*

$$I_2^{n2^{k-1}} = \frac{4I_1^{n2^k} - I_1^{n2^{k-1}}}{3} \qquad I_3^{n2^{k-1}} = \frac{8I_2^{n2^k} - I_2^{n2^{k-1}}}{7} \qquad I_4^{n2^{k-1}} = \frac{16I_3^{n2^k} - I_3^{n2^{k-1}}}{15}$$



Pvz_SMA_11_9_Rombergo_metodas

Trapecijų metodas + Rombergo metodas:



$$\frac{\left(4I_1(h/2)-I_1(h)\right)}{3}$$

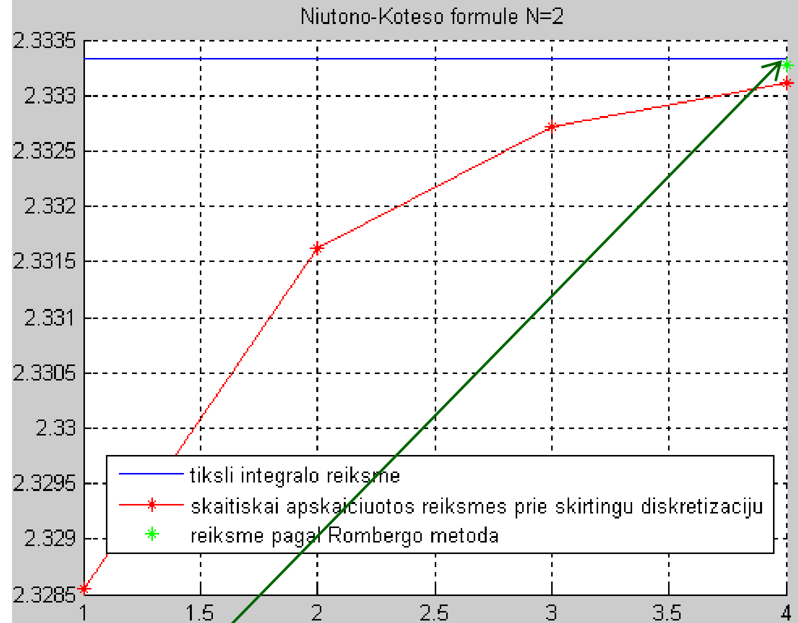
$$I_2(h) \qquad I_2(h/2) \qquad I_2(h/4)$$

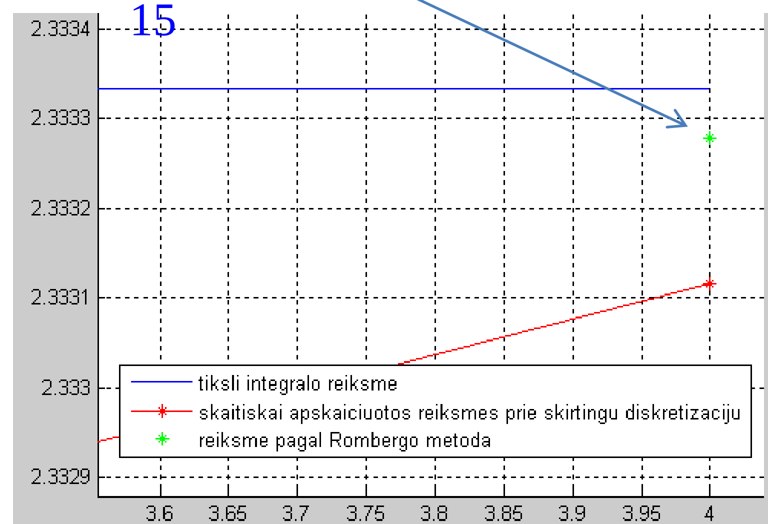
$$\frac{\left(8I_2(h/2)-I_2(h)\right)}{7}$$

$$I_3(h) \qquad I_3(h/2)$$

$$\frac{\left(16I_3(h/2)-I_3(h)\right)}{15}$$

$$I_4(h)$$

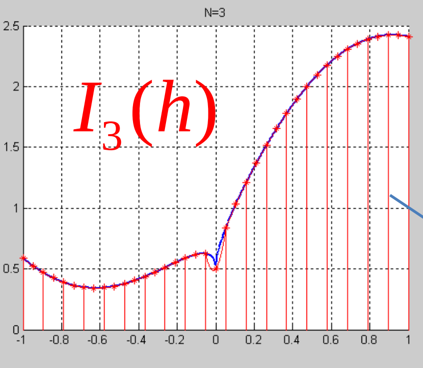


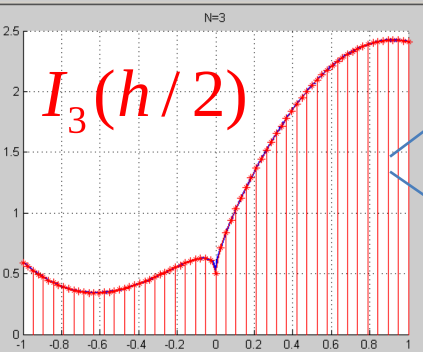


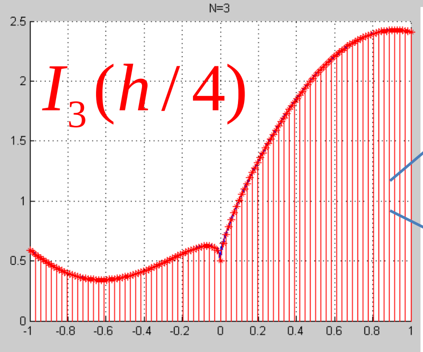
f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

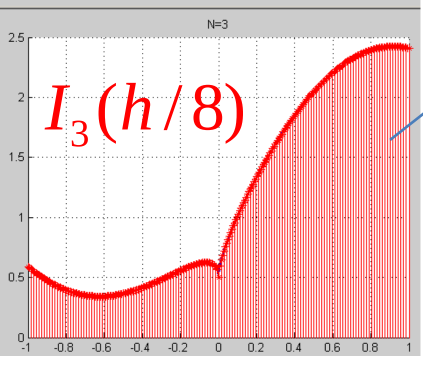
$$f(x)=\sin(2x)+\sqrt{|x|}+0.5$$

Simpsono metodas + Rombergo metodas:









$$\frac{\left(16 I_2(h/2) - I_2(h)\right)}{15}$$

$I_3(h)$

$$\frac{\left(32 I_2(h/2) - I_2(h)\right)}{31}$$

$I_3(h/2)$

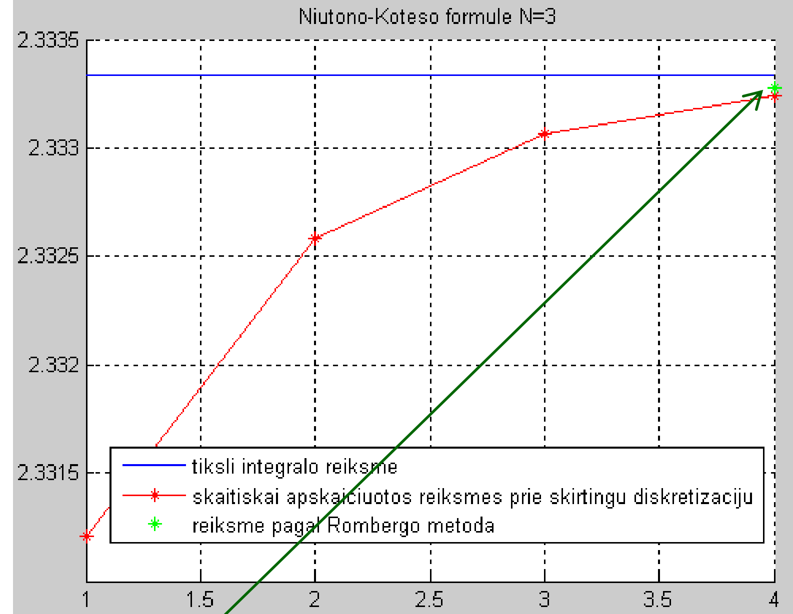
$I_4(h)$

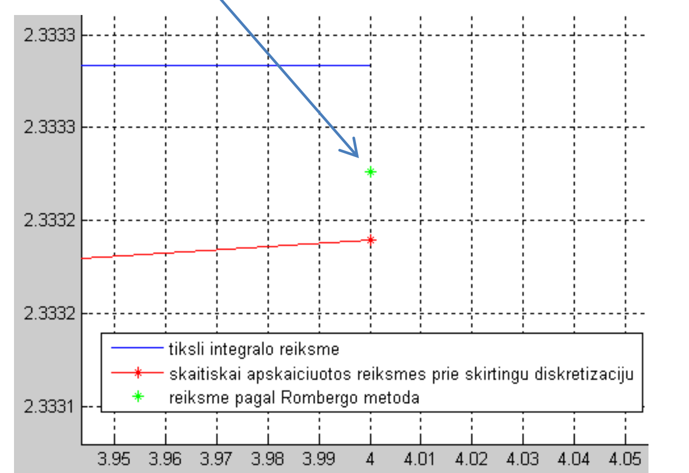
$I_3(h/4)$

$I_4(h/2)$

$I_5(h)$

$$\frac{\left(64 I_3(h/2) - I_3(h)\right)}{63}$$





f=sin(2*x)+sqrt(abs(x))+0.5;

$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{|x|} + 0.5$$

SMA_11_Klausimai savikontrolei:

1.Apibūdinkite apibrėžtinio integralo (AI) skaitinio apskaičiavimo bendrąją formulę;

2.Paaiškinkite, kaip taikomas Hemingo metodas AI apskaičiavimui. Kaip gaunama lygčių sistemos koeficientų matrica ir dešniųjų pusių vektorius. Kokie dydžiai gaunami, išsprendus šią lygčių sistemą;

3.Kaip parenkami interpoliavimo mazgai, taikant Niutono ir Koteso formules. Koks ryšys tarp Lagranžo interpoliavimo funkcijų ir AI skaitinio apskaičiavimo koeficientų;

4.Paaiškinkite AI apskaičiavimą pagal Niutono ir Koteso formules, taikant integravimo intervalo skaidymą dalimis;

5.Kas yra AI skaitinio apskaičiavimo formulės eilė. Kaip ji nustatoma? Kokios tikslumo eilės yra trapecijų ir Simpsono formulės;

6.Paaiškinkite Ričardsono ekstrapoliacijos formulę. Kam ji taikoma, nuo ko priklauso jos koeficientai;

7.Paaiškinkite Rombergo metodą. Kuo jis paremtas ir kam taikomas