Funkcijų aproksimavimas:
Bangelių metodas

Temoje aiškinama:

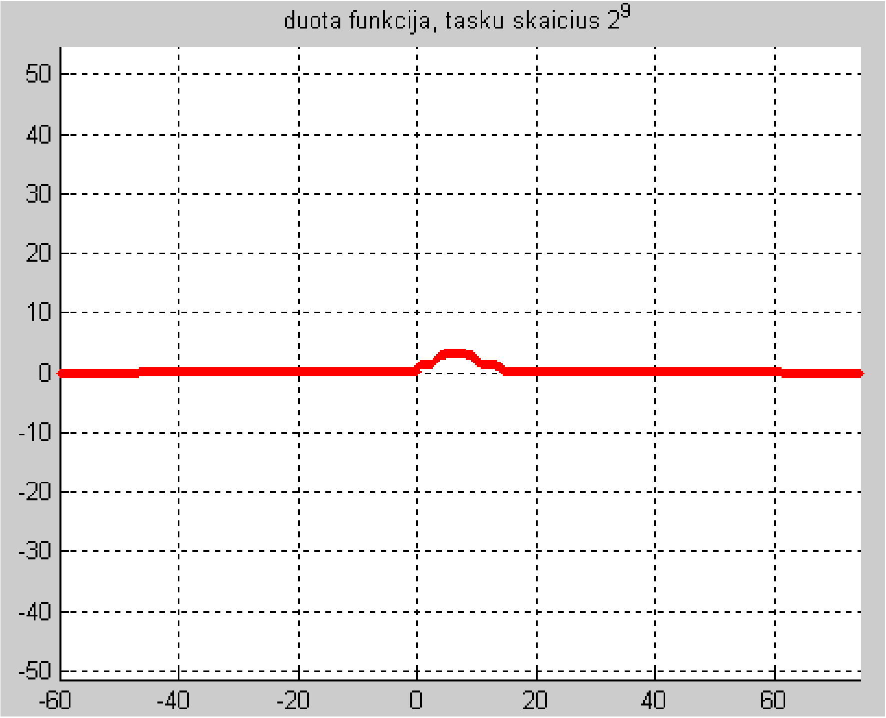
- **Pavienio signalo aproksimavimo uždavinys. Lokalių bazinių funkcijų poreikio motyvavimas;**
- **Mastelio funkcijos ir bangelės apibūdinimas. Haro bangelių bazė ir jos savybės;**
- **Haro bangelių bazės koeficientų apskaičiavimas mažiausių kvadratų metodu;**
- **Haro bangelių bazės koeficientų apskaičiavimas, taikant piramidinį algoritmą;**
- **Parametriškai duotų funkcijų aproksimavimas bangelėmis;**
- **MATLAB funkcijos bangelių aproksimacijai apskaičiuoti**

Pavienio signalo aproksimavimo uždavinys. Lokalių bazinių funkcijų poreikio motyvavimas

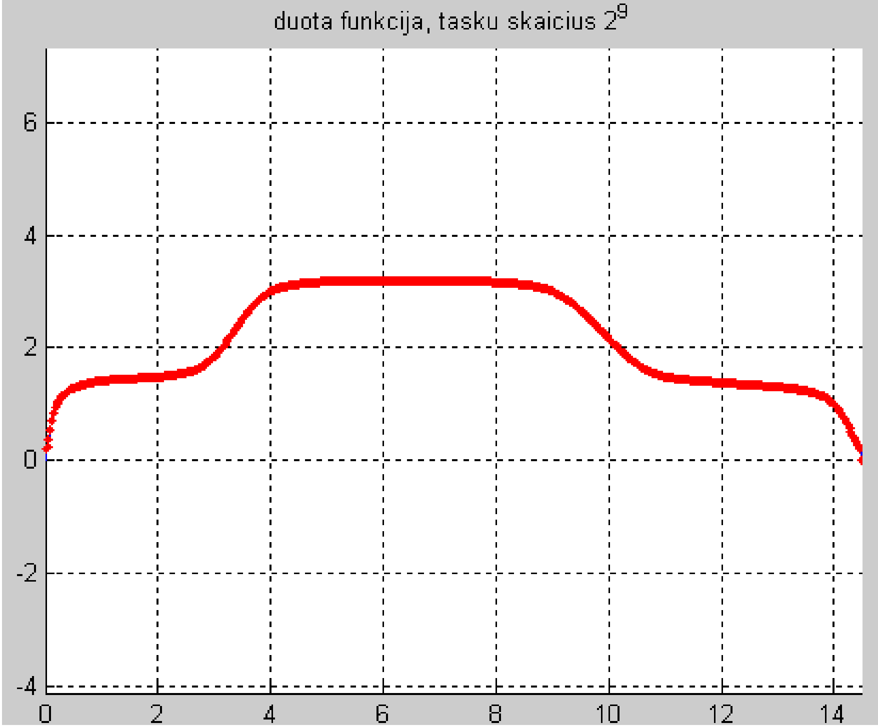
Aproksimavimas bangelėmis (wavelets)

Haro (Haar) bangelių aproksimacija

Bangelėmis siekiama aproksimuoti pavienį laike arba erdvėje atskirtą signalą

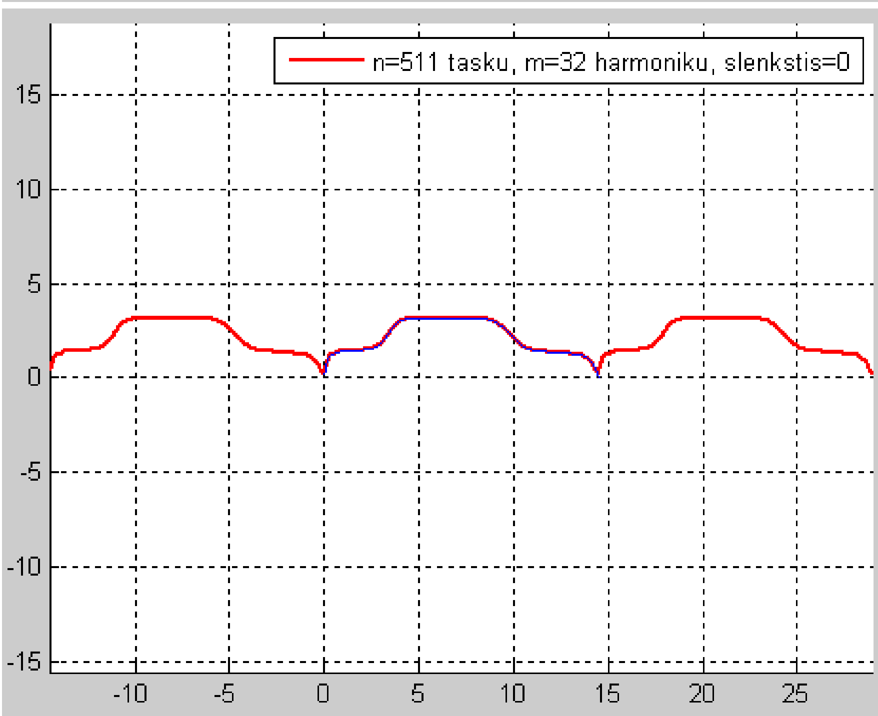


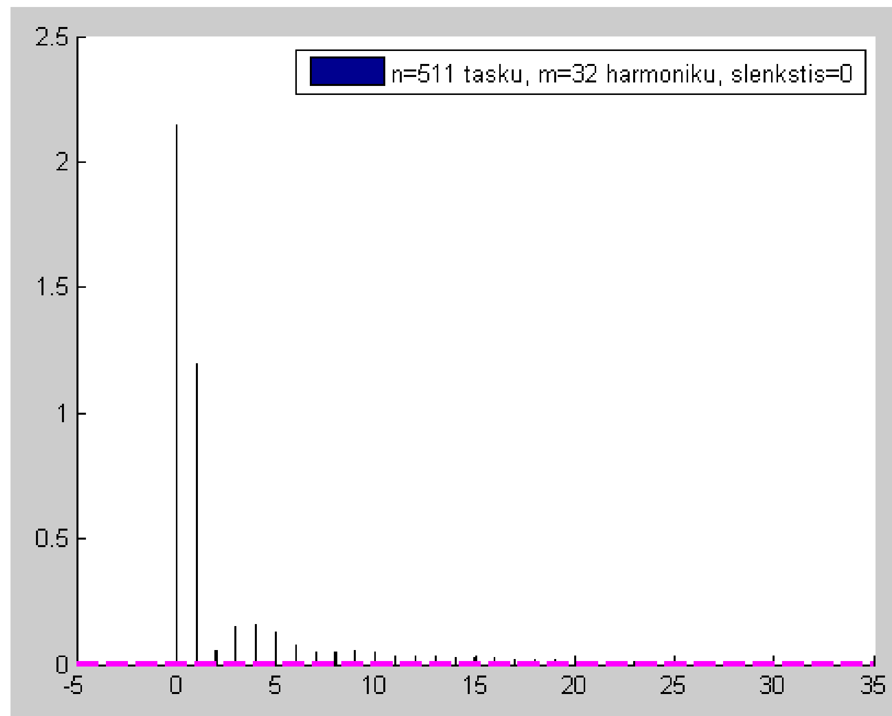
Atskirtam signalui aproksimuoti netinka vienanarių arba trigonometrinių funkcijų bazės



Aproksimuojant Furje būdu, išplėstame intervale funkcija ***pagal nutylėjimą tampa periodine***

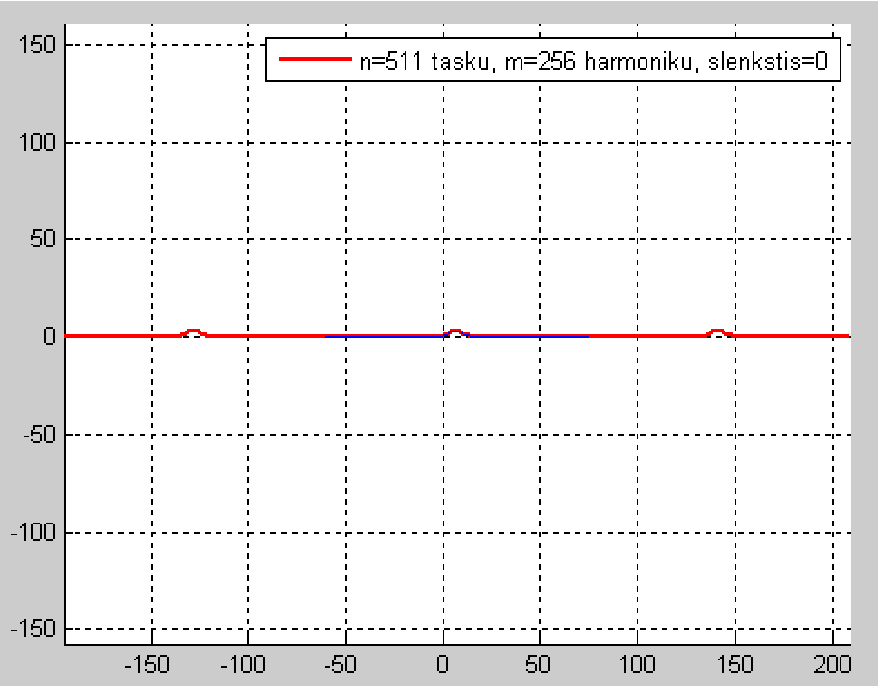
Pvz_SMA_9_6_Fourier_duomenys_is_failo

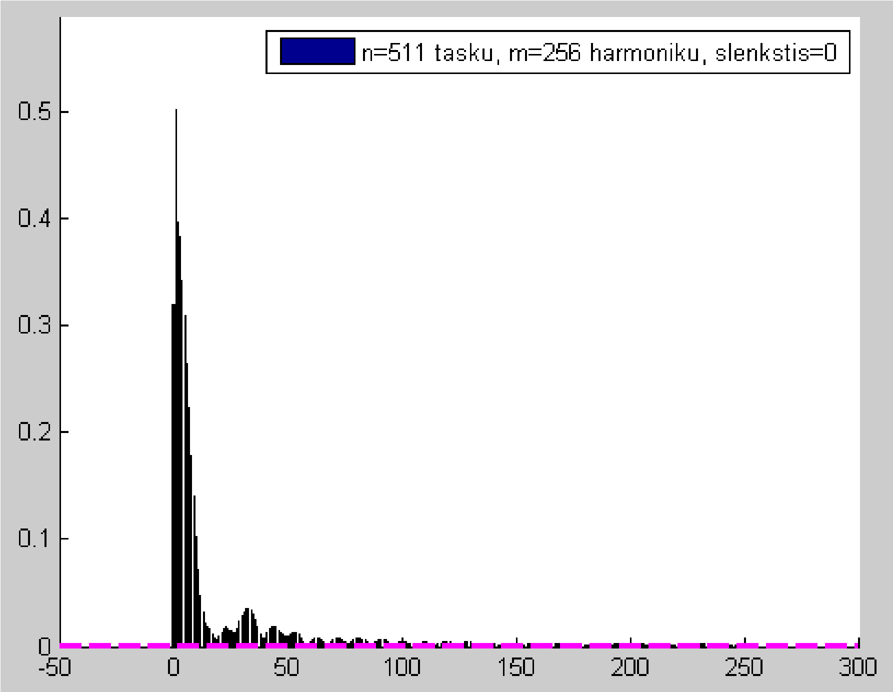


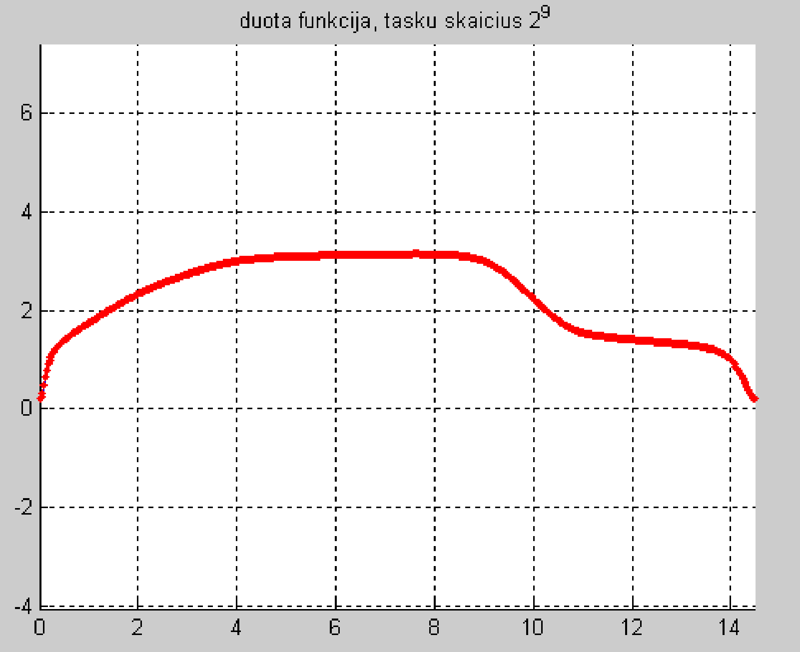


Furje būdu aproksimuojant signalą, atskirtą „ilgame periode“, ***smarkiai išauga aproksimavimo kokybei pasiekti reikalingų harmonikų skaičius.***

Pvz_SMA_9_6_Fourier_duomenys_is_failo.m

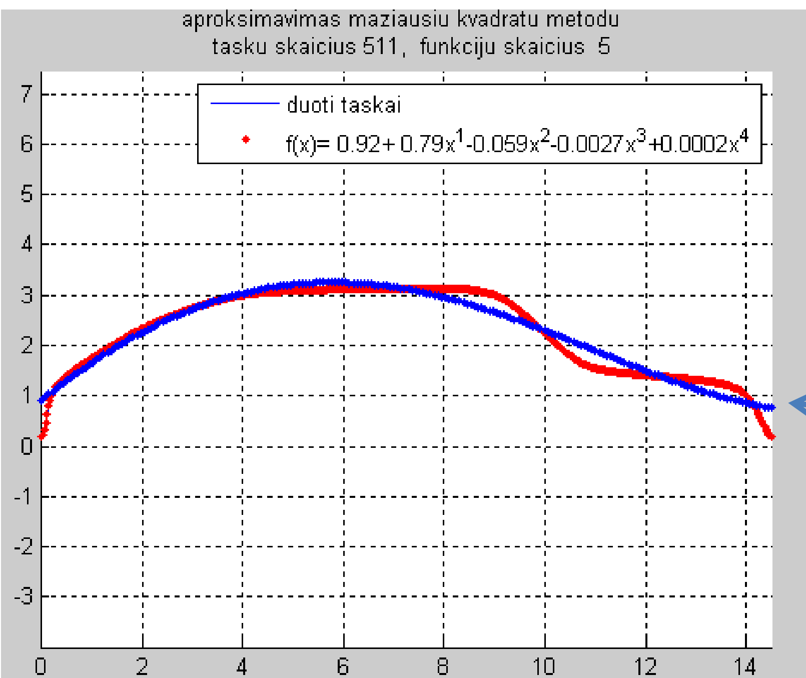


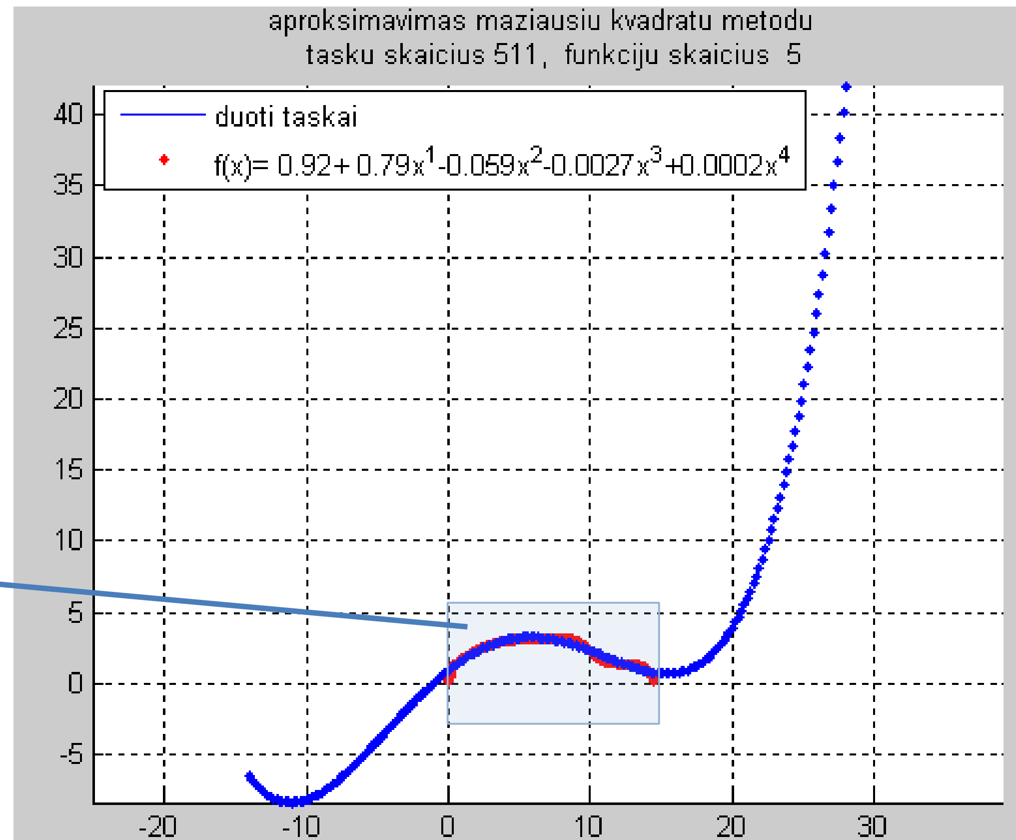




Aproksimuojant vienanarių bazėje, išplėstame intervale funkcija ***visiškai nebeatitinka aproksimuojamo signalo esmės***

Pvz_SMA_9_7_vienanariai_duomenys_is_failo.m





- **Aproksimavimas tiek Furje, tiek ir daugianarių bazinėmis funkcijomis neperiodinių signalų atveju nėra geras. Taip yra todėl, kad šių bazinių funkcijų pobūdis *<u>nėra lokalus;</u>***

- **Neperiodiniams signalams aproksimuoti žymiai geriau tinka *bangelių* pavidalo bazinės funkcijos**

Mastelio funkcijos ir bangelės apibūdinimas. Haro bangelių bazė ir jos savybės

Aproksimavimas bangelėmis

- Atskirtiems signalams aproksimuoti naudojamos *lokalųjį pobūdį* turinčios bazinės funkcijos, vadinamos *mastelio funkcijomis (scaling function)* ir *bangelėmis (wavelet)* ;
- Mokslo literatūroje naudojami terminai *“bangelės”* ir *“vilnelės”* yra sinonimai;
- Bangelės gali būti įvairios, tačiau privalo tenkinti du svarbiausius reikalavimus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$$

- turi “banguoti “ apie *Ox* ašį

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t)\, dt < \infty$$

Šios abi sąlygos gali būti patenkintos, jeigu funkcija nelygi nuliui tik tam tikrame baigtiniame intervale. Jos grafikas visuomet panašus į tame intervale pavaizduotą “subangavimą”, t.y. pavienę *bangelę*

Bangelės aprašomos intervale [0, 1]

Išraiškos yra paprastesnės, kai formuluotės pateikiamos funkcijoms, apibrėžtoms [0,1] intervale. Esant kitokiam intervalui, reikia pakeisti kintamąjį.

- **Nagrinėjame funkciją, duotą intervale 0 <= x <= 1**
- **Kai turime kitokį funkcijos apibrėžimo intervalą a<= X<= b, kintamasis pakeičiamas taip:**

$$X = Ax + B;$$

$$x = 0 \Rightarrow X = a \Rightarrow a = B;$$

$$x = 1 \Rightarrow X = b \Rightarrow b = A + B;$$

$$A = b - a; \quad B = a$$

$$x = \frac{X - a}{b - a};$$

$$X = (b - a)x + a$$

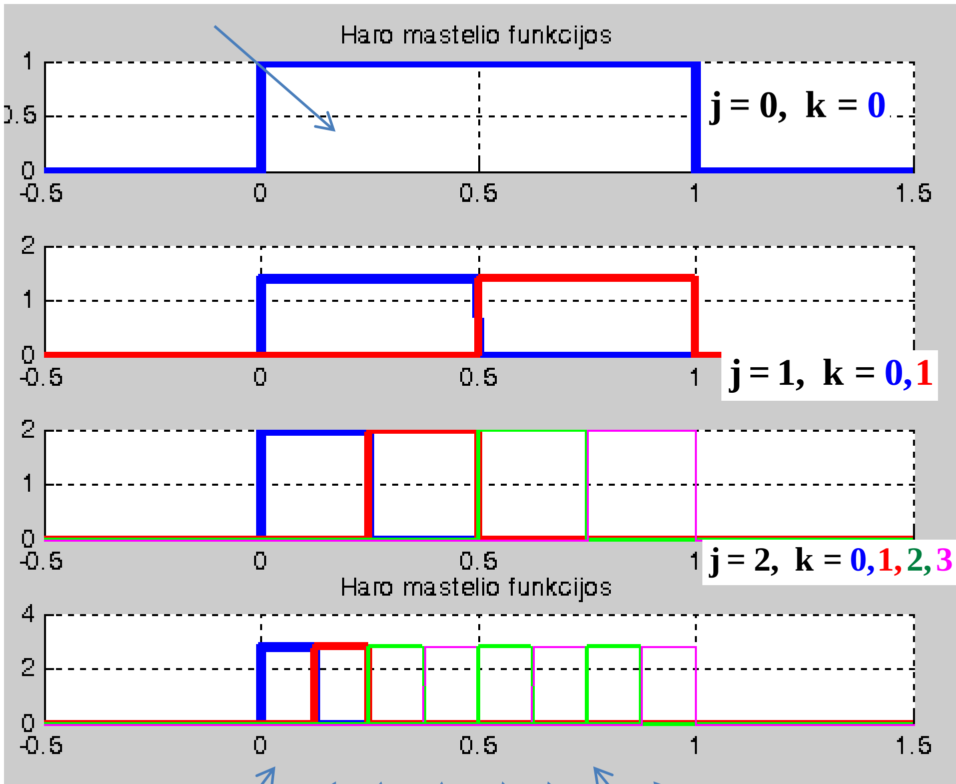
Haro bangelių bazė

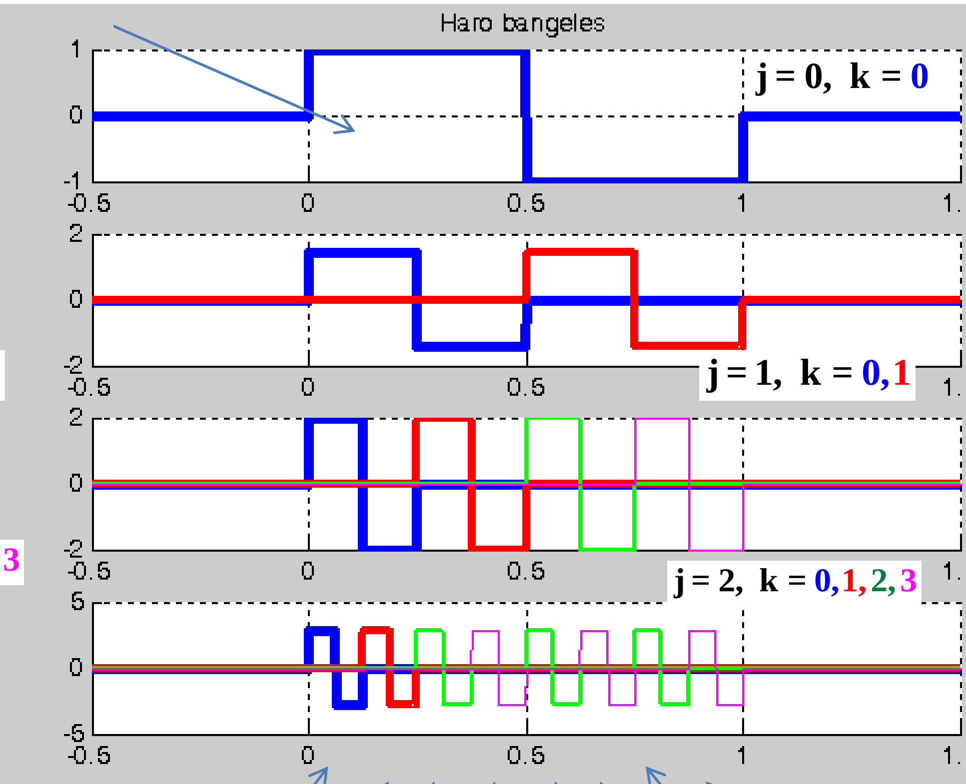
“Motininė” Haro mastelio funkcija (lygis j=0):

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(sign(x)-sign(x-1)\right)$$

“Motininė” Haro bangelė (lygis j=0):

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left(sign(x)-2sign(x-0.5)+sign(x-1)\right)$$





j = 3, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$2^{3/2}\varphi(8x)$ $2^{3/2}\varphi(8x-2)$ $2^{3/2}\varphi(8x-4)$ $2^{3/2}\varphi(8x-6)$

$2^{3/2}\varphi(8x-1)$ $2^{3/2}\varphi(8x-3)$ $2^{3/2}\varphi(8x-5)$ $2^{3/2}\varphi(8x-7)$

j = 3, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$2^{3/2}\psi(8x)$ $2^{3/2}\psi(8x-2)$ $2^{3/2}\psi(8x-4)$ $2^{3/2}\psi(8x-6)$

$2^{3/2}\psi(8x-1)$ $2^{3/2}\psi(8x-3)$ $2^{3/2}\psi(8x-5)$ $2^{3/2}\psi(8x-7)$

Haro bangelių bazė. Savybės (1,2)

1) Bangelių bazė gaunama, suspaudžiant ir perslenkant Ox ašyje motinines ir bangelių funkcijas bei taikant koeficientus:

$$2^{j/2}\varphi(2^j x - k),\quad 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\quad j = 0,1,2,\ldots\quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1$$

2) Skirtinguose smulkumo lygiuose funkcijų amplitudės skirtingos. Jos tokios, kad kiekvienos funkcijos kvadrato integralas būtų lygus 1:

$$\int_0^1 \left(2^{j/2}\varphi(2^j x - k)\right)^2 dx = 1,\quad \int_0^1 \left(2^{j/2}\psi(2^j x - k)\right)^2 dx = 1,\quad j = 0,1,2,\ldots\quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1$$

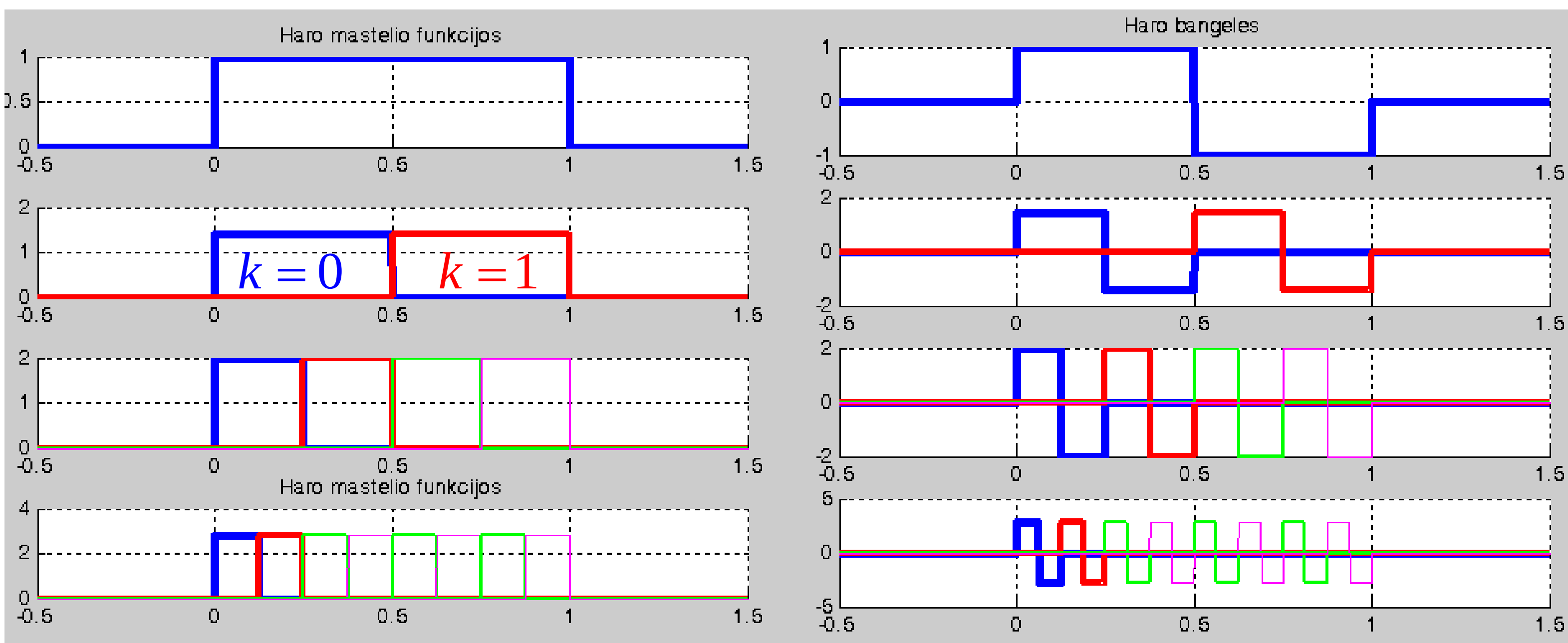
$j = 0$

$j = 1$

$j = 2$

$j = 3$

$\vdots$



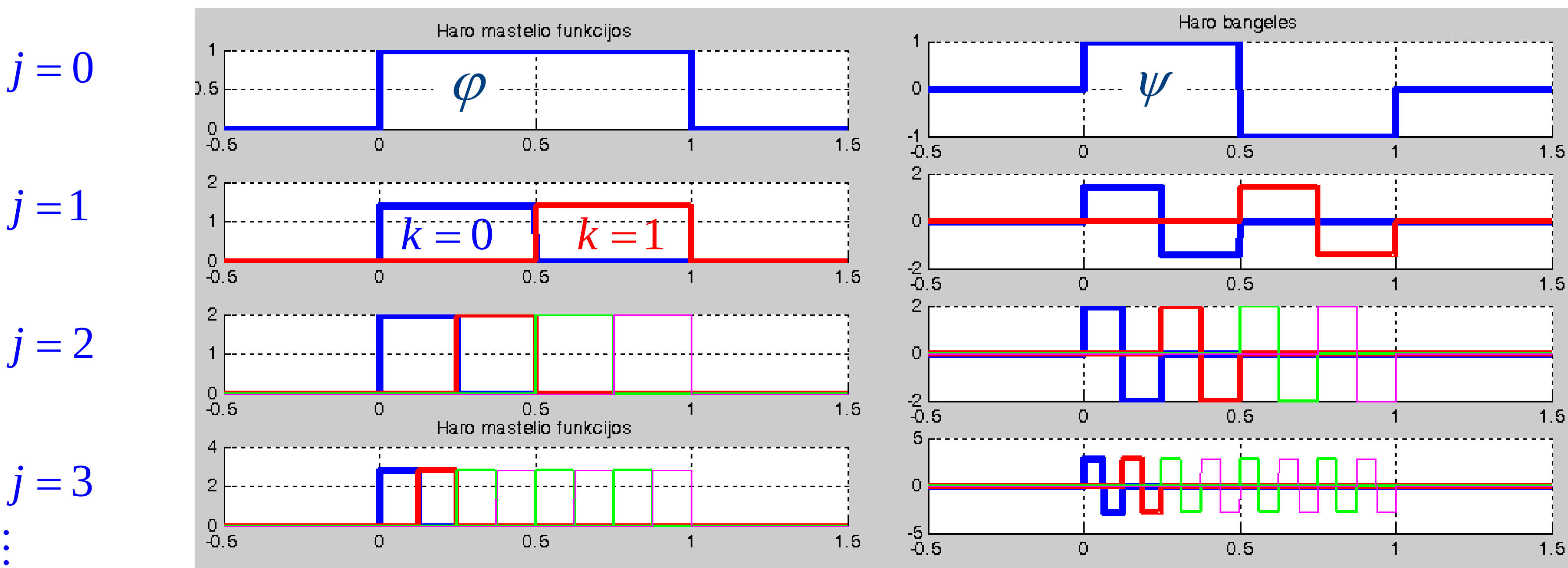
Haro bangelių bazė. Savybės (3)

3) **Tenkinamos** ***tarpusavio ortogonalumo sąlygos tarp mastelio funkcijos postūmių tame pačiame lygyje*****. Haro funkcijų atveju tai akivaizdu, kadangi postūmiai nepersikerta tarpusavyje Ox ašyje**

$$\int_0^1 \varphi(2^j x - k)\varphi(2^j x - s)dx = 0;$$

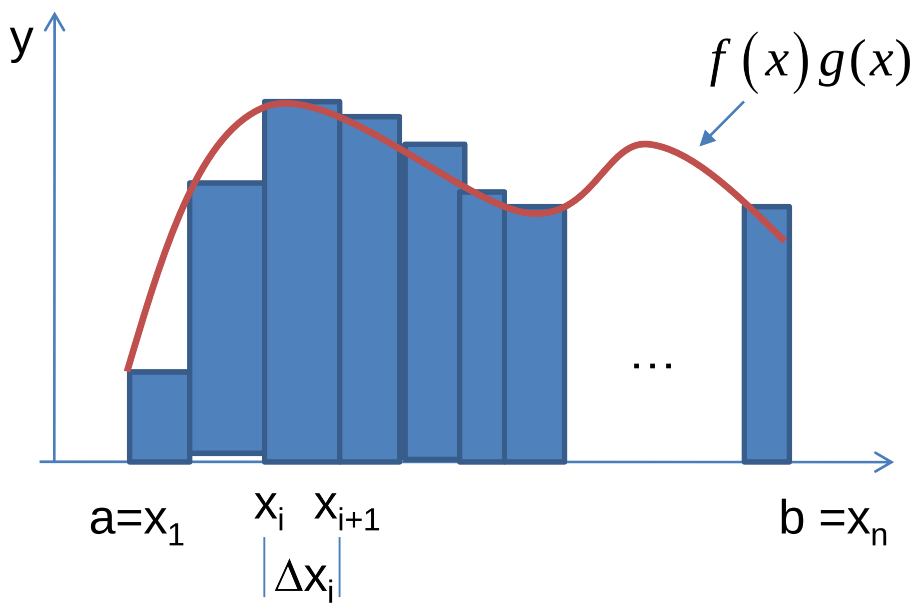
$$j = 0,1,2,\ldots \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,2^j - 1; \qquad s = 0,1,\ldots,2^j - 1; \quad k \neq s$$

Bangelės yra tarpusavyje ortogonalios tiek imant iš to paties, tiek ir iš skirtingų lygių. Jos taip pat yra ortogonalios to paties lygio ir žemesniųjų lygių numerių mastelio funkcijoms;



!! Funkcijų ortogonalumo paaiškinimas :

- *Du nenuliniai vektoriai yra ortogonalūs, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui;*
- *dvi funkcijos yra ortogonalios, jeigu jų* ***sandaugos integralas nagrinėjamame intervale lygus nuliui****;*
- *Galima paaiškinti taip:*
  - *Integralas yra riba nykstamai mažu žingsniu paimtų dauginamųjų funkcijų reikšmių sandaugų sumos, padaugintos iš žingsnio ilgio. Tai reiškia, kad* ***dviejų funkcijų sandaugos integralas yra ribinis dviejų vektorių skaliarinės sandaugos atvejis***

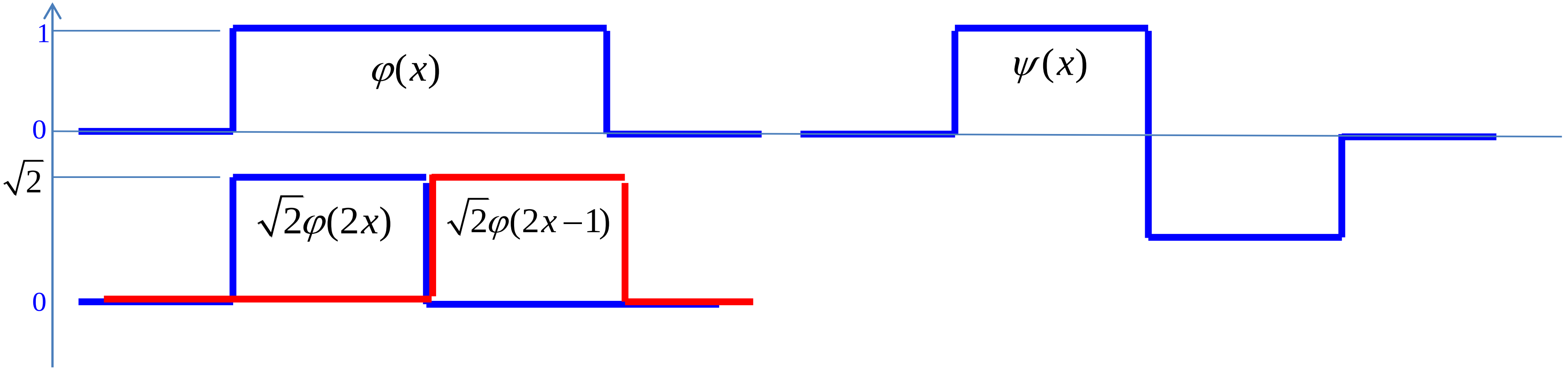


$$I = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\, g(x_i)\, \Delta x_i$$

Haro bangelių bazė. Savybės (4)

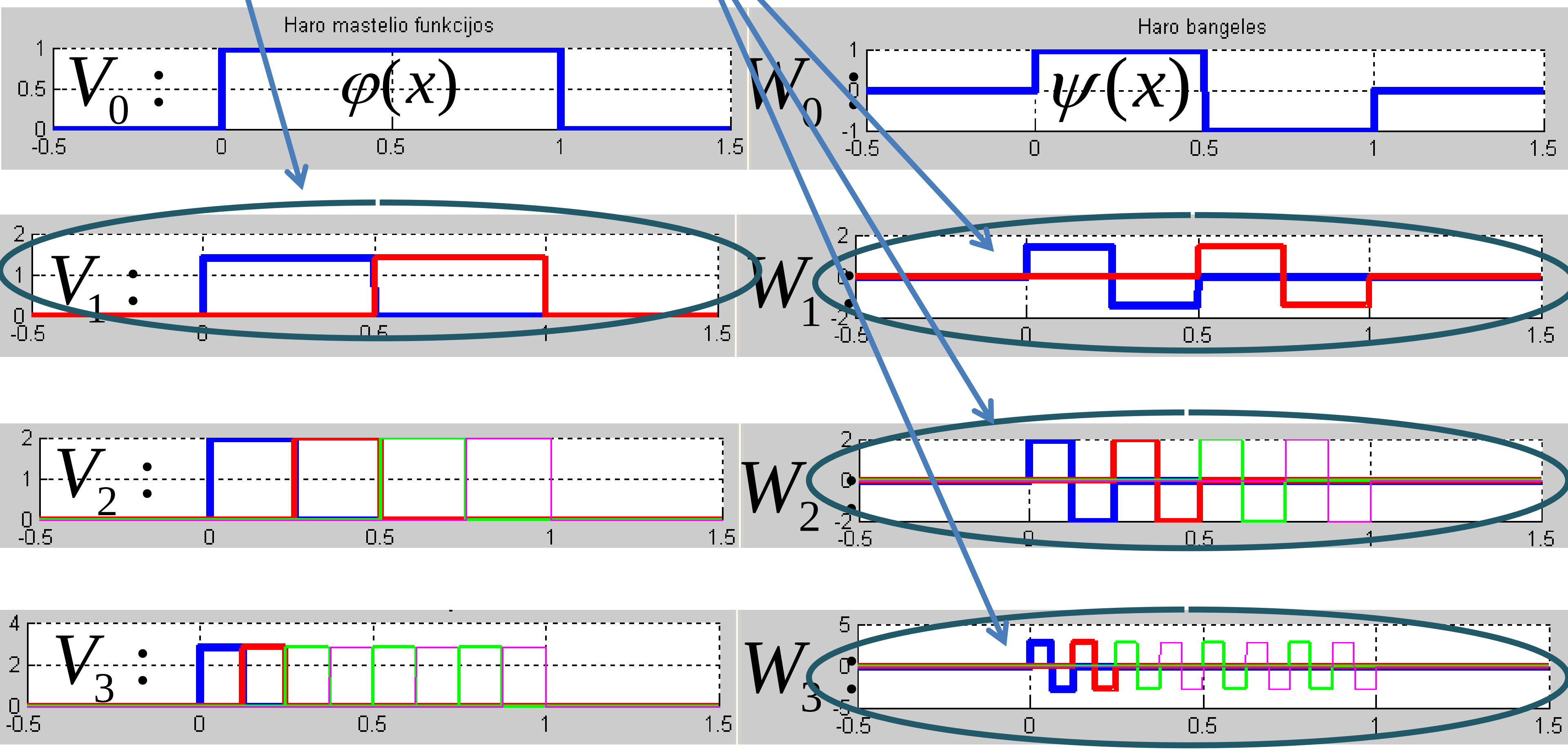
4) Visoms bangelių rūšims turi galioti *plėtinių lygtys*, kurios **tiesiškai išreiškia** mastelio ir bangelių funkcijas **kaip** mastelio funkcijų sekančiame smulkesniame lygyje **tiesinę kombinaciją.**

Haro bangelių atveju plėtinių lygtys yra tokios:



$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1); \quad \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1)$$

1. Aproksimuojant bangelėmis, funkcija pateikiama tam tikro parinkto smulkumo *MF bazėje* (t.y. saugomi koeficientai prie tos bazės funkcijų);
2. Smulkesnių signalo detalių koeficientai apskaičiuojami ir išsaugomi to paties ir smulkesniųjų lygių *BF* bazėje;
3. Taip parinktos bazinės funkcijos yra tarpusavyje ortogonalios



$$V_j : 2^{j/2}\varphi(2^j x - k),\ k = 0 : 2^j - 1$$

$$2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ k = 0 : 2^j - 1$$

Haro bangelių koeficientų apskaičiavimas mažiausių kvadratų metodu

Kaip apskaičiuoti bangelių aproksimacijos koeficientus?

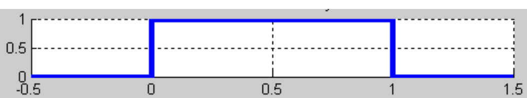
1. Aproksimavimas bangelėmis yra bendrojo aproksimavimo uždavinio atskiras atvejis, kai turime tokią aproksimuojančių funkcijų bazę:

Mastelio funkcija

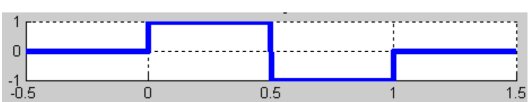
(pradinė aproksimacija)

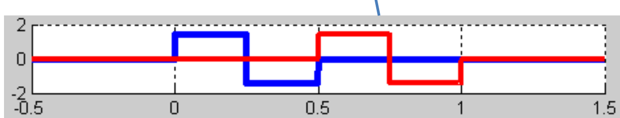
Bangelių funkcijos

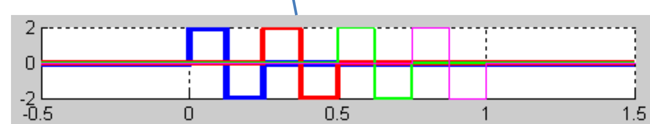
(detalės)



$$f(x) = \varphi(x) \quad \psi(x) \quad \underline{2^{1/2}\psi(2x) \quad 2^{1/2}\psi(2x-1)} \quad \underline{2^{1}\psi(4x) \quad 2^{1}\psi(4x-1) \quad 2^{1}\psi(4x-2) \quad 2^{1}\psi(4x-3)} \quad \cdots \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$







koeficientai

$$f(x) = \left[\varphi(x) \quad \psi(x) \quad 2^{1/2}\psi(2x) \quad 2^{1/2}\psi(2x-1) \quad 2^{1}\psi(4x) \quad 2^{1}\psi(4x-1) \quad 2^{1}\psi(4x-2) \quad 2^{1}\psi(4x-3) \quad \cdots \right] \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$f(x) = \mathbf{G}(x)\mathbf{c}$$

Ieškomi koeficientai

$$\int_0^1 \mathbf{G}^T(x)\mathbf{G}(x)dx\ \mathbf{c} = \int_0^1 \mathbf{G}^T(x) f(x)dx$$

- *x* yra tolydus argumentas, todėl anksčiau nagrinėtos iš matricų daugybos veiksmo kylančios skaliarinės sandaugos virsta integralais (žr.paaiškinimą apie funkcijų ortogonalumą ankstesnėje skaidrėje)

$$\int_0^1 \mathbf{G}^T(x)\mathbf{G}(x)dx \; \{\mathbf{c}\} = \int_0^1 \mathbf{G}^T(x) f(x) dx$$

1

Visi ne įstrižainėje esantys integralai =0

$$\begin{bmatrix}
\int_0^1 (\varphi(x))^2 dx & \int_0^1 \varphi(x)\psi(x)dx & \int_0^1 \varphi(x)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \varphi(x)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 \psi(x)\varphi(x)dx & \int_0^1 (\psi(x))^2 dx & \int_0^1 \psi(x)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \psi(x)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x)\psi(x)dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x)\right)^2 dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x)\right)2^{1/2}\psi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)\psi(x)dx & \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1)2^{1/2}\psi(2x)dx & \int_0^1 \left(2^{1/2}\psi(2x-1)\right)^2 dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-1)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-1)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-2)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-2)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-3)\varphi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)\psi(x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)2^{1/2}\varphi(2x)dx & \int_0^1 2^1\psi(4x-3)2^{1/2}\varphi(2x-1)dx & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\int_0^1 \varphi(x) f(x)dx \\
\int_0^1 \psi(x) f(x)dx \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x) f(x)dx \\
\int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1) f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x) f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-1) f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-2) f(x)dx \\
\int_0^1 2^1\psi(4x-3) f(x)dx \\
\vdots
\end{Bmatrix}$$

Matrica gaunama vienetinė, kadangi parinkta funkcijų bazė yra ortonormuota

ieškomi koeficientai

Šiuos integralus reikia apskaičiuoti

Aproksimavimo koeficientai gali būti gauti, apskaičiuojant integralus:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx \\ \int_0^1 \psi(x) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1/2}\psi(2x-1) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1}\psi(4x) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1}\psi(4x-1) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1}\psi(4x-2) f(x) dx \\ \int_0^1 2^{1}\psi(4x-3) f(x) dx \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

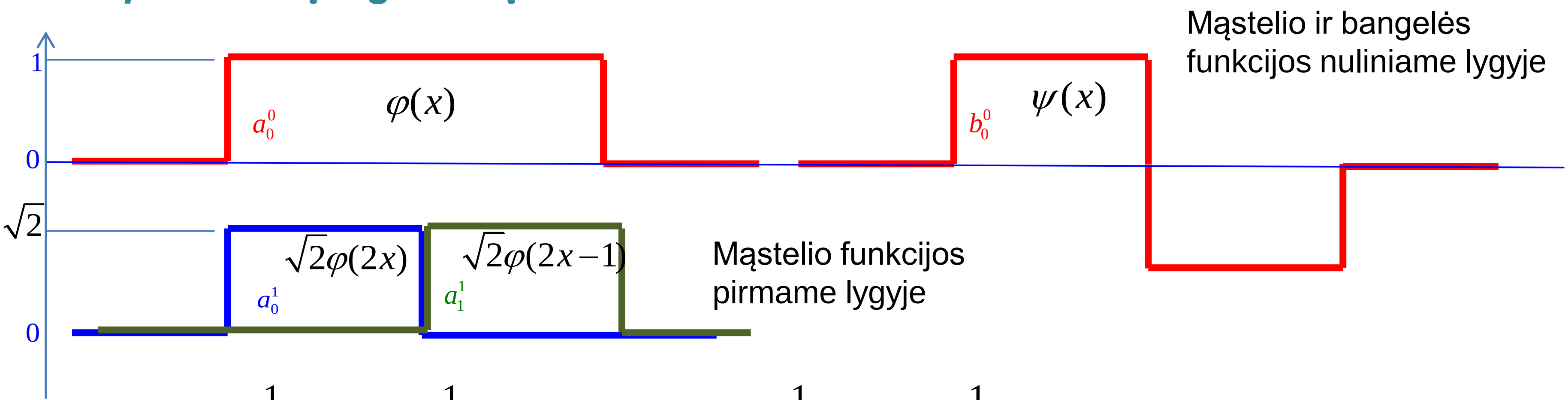
Kai žinomi koeficientai, aproksimuotą funkciją pavaizduojame pagal išraišką:

$$f_{approx}(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x) & \psi(x) & 2^{1/2}\psi(2x) & 2^{1/2}\psi(2x-1) & 2^{1}\psi(4x) & 2^{1}\psi(4x-1) & 2^{1}\psi(4x-2) & 2^{1}\psi(4x-3) & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ b_0^0 \\ b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_0^2 \\ b_1^2 \\ b_2^2 \\ b_3^2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Vaizdavimo taškai

Haro bangelių bazės koeficientų apskaičiavimas, taikant piramidinį algoritmą

Racionalu bangelių aproksimacijos koeficientus apskaičiuoti, taikant *piramidinį algoritmą*



$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1);\quad \psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2x-1)$$

Plėtinių formulės

$$a_0^1=\int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x)f(x)dx$$

Mąstelio funkcijų koeficientai pirmajame lygyje

$$a_1^1=\int_0^1 2^{1/2}\varphi(2x-1)f(x)dx$$

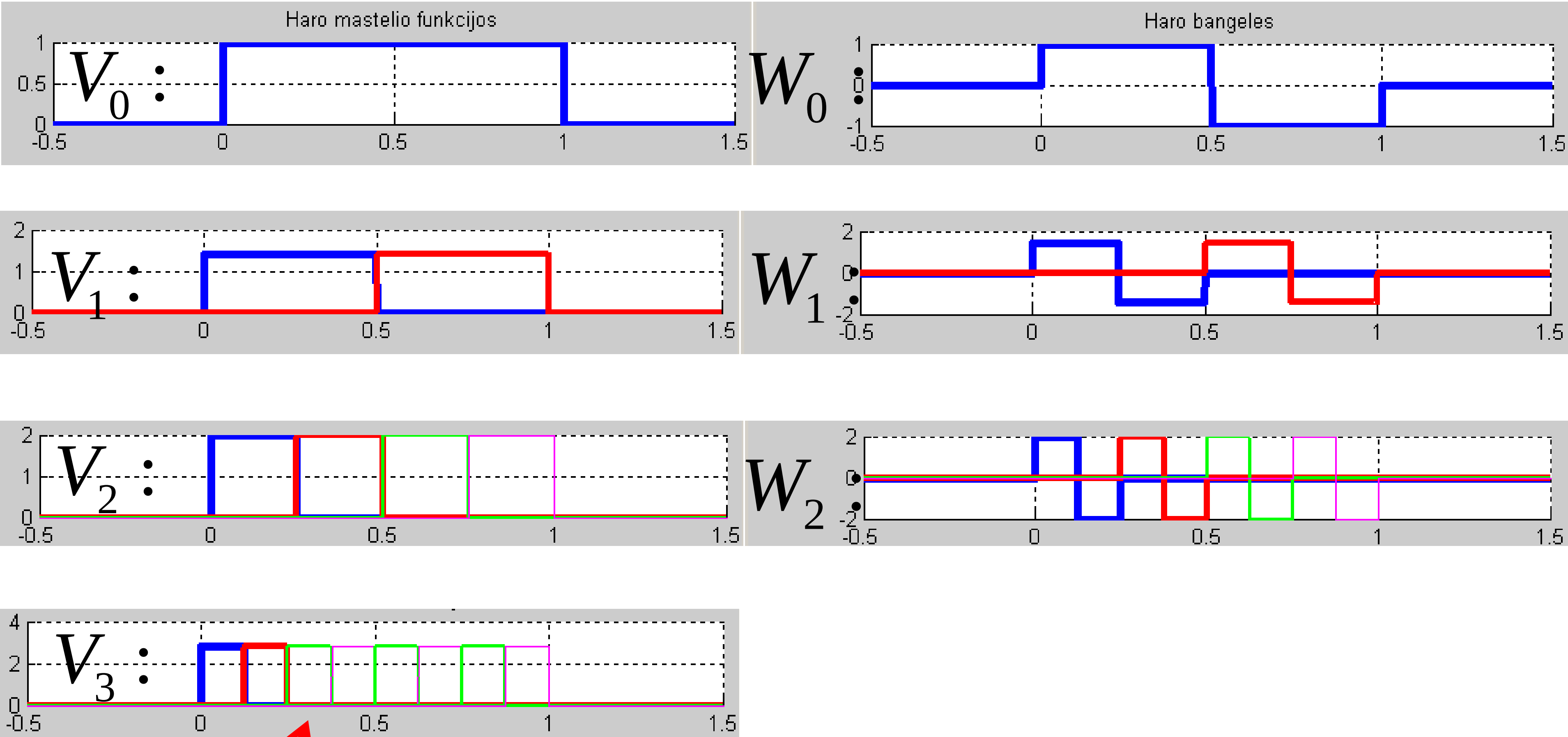
$$\frac{a_0^1+a_1^1}{2^{1/2}}=\int_0^1\big(\varphi(2x)+\varphi(2x-1)\big)f(x)dx=\int_0^1\varphi(x)f(x)dx=a_0^0;\qquad a_0^0=\frac{a_0^1+a_1^1}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{a_0^1-a_1^1}{2^{1/2}}=\int_0^1\big(\varphi(2x)-\varphi(2x-1)\big)f(x)dx=\int_0^1\psi(x)f(x)dx=b_0^0;\qquad b_0^0=\frac{a_0^1-a_1^1}{\sqrt{2}};$$

Mąstelio ir bangelės funkcijų koeficientai nuliniame lygyje

Pagal dviejų šalia esančių mąstelio funkcijų koeficientus galima apskaičiuoti sekančiame stambesniame lygyje esančių ir atitinkamą intervalą dengiančių mąstelio ir bangelės funkcijų koeficientus

Piramidinis algoritmas, 1 žingsnis:



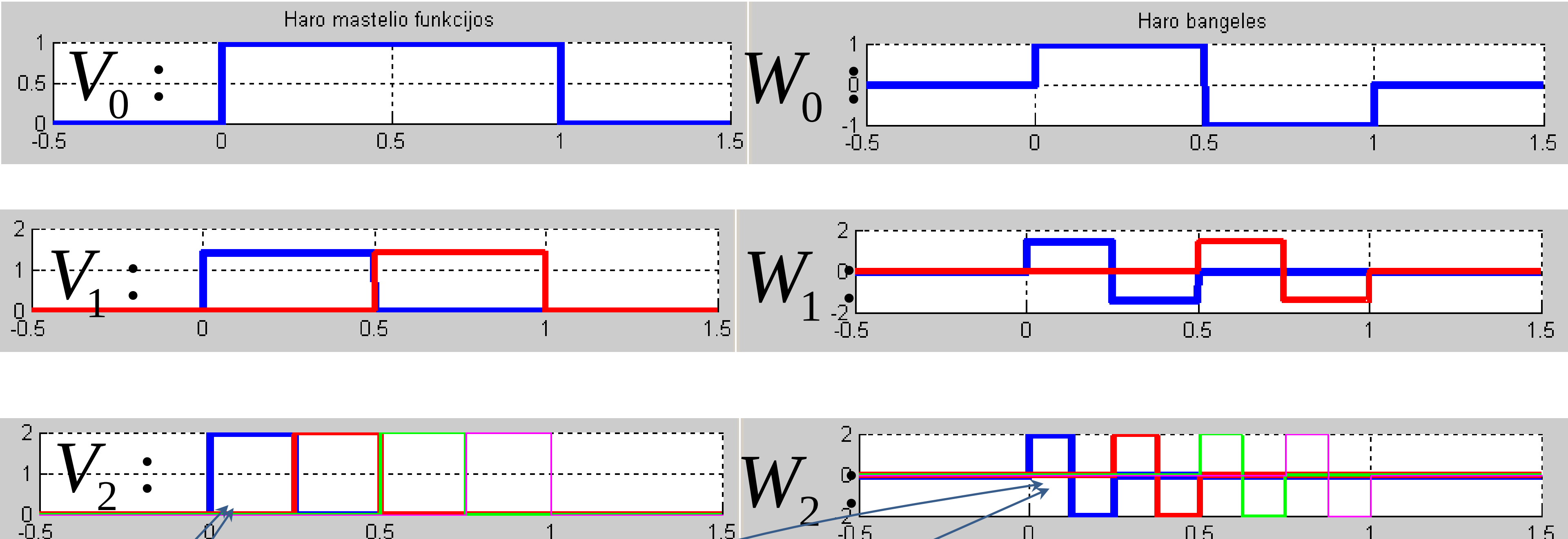
1. Signalą, duotą 2^n *(šiame paveiksle n=3)taškuose*, aproksimuojame mastelio funkcijų bazėje

$$\mathbf{V}_n : 2^{n/2}\varphi(2^n x - k),\ k = 0 : 2^n - 1$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n}} = 2^{-n/2} y_i, \quad i = 0 : 2^n - 1$$

Koeficientai yra aproksimuojamos funkcijos reikšmės atitinkamos mastelio funkcijos kairiajame taške

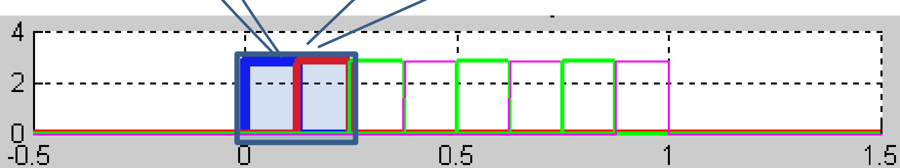
Piramidinis algoritmas, 2 žingsnis:



$$\mathbf{a}_i^{n-1} = \frac{\mathbf{a}_{2i-1}^n + \mathbf{a}_{2i}^n}{\sqrt{2}};$$

$$\mathbf{b}_i^{n-1} = \frac{\mathbf{a}_{2i-1}^n - \mathbf{a}_{2i}^n}{\sqrt{2}};$$

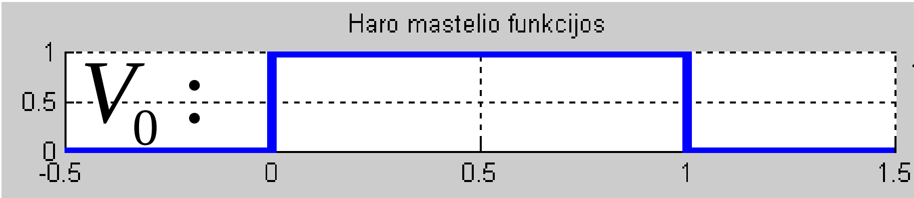
2. Apskaičiuojame mastelio funkcijų ir bangelių koeficientus, aproksimuojančius stambesnio mastelio bazinių funkcijų lygmenyje

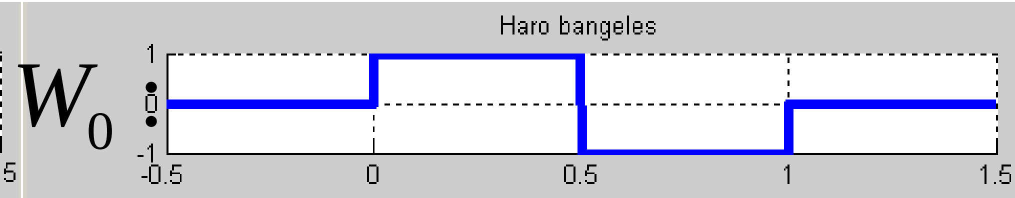


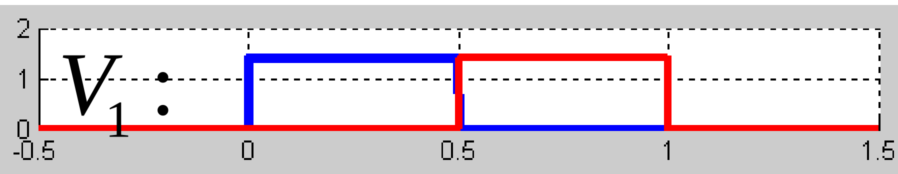
$\mathbf{a}_i^n$ nesaugome

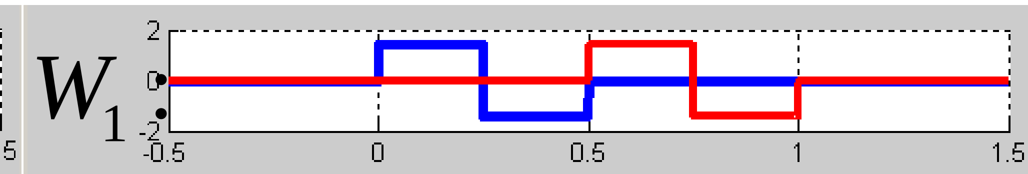
Piramidinis algoritmas, 3 žingsnis, ir t.t.:

Visuose lygiuose, išskyus 0 intervalų skaičius yra *lyginis, t.y.2^j*



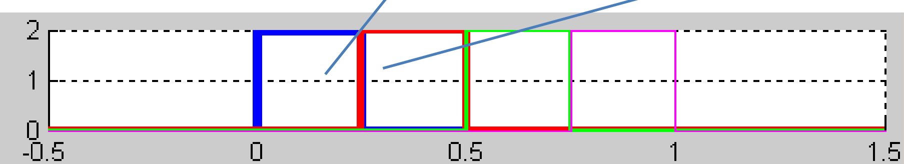


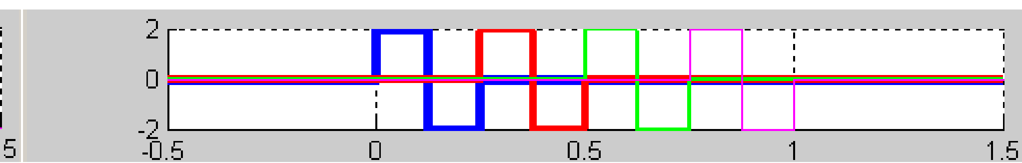




$$a_i^{n-1} = \frac{a_{2i-1}^n + a_{2i}^n}{\sqrt{2}};\qquad b_i^{n-1} = \frac{a_{2i-1}^n - a_{2i}^n}{\sqrt{2}};$$

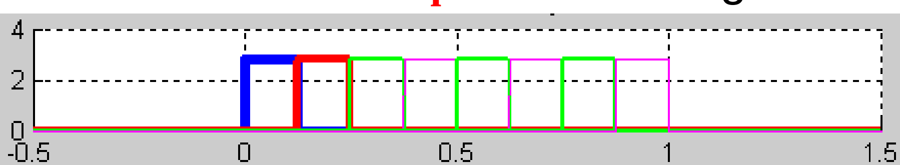
3. Apskaičiuojame mastelio funkcijų ir bangelių koeficientus, aproksimuojančius stambesnio mastelio bazinių funkcijų lygmenyje





a_i^{n-1} nesaugome

b_i^{n-1} saugome



a_i^n nesaugome

Atvejis, kai funkcija apibrėžta intervale [a,b] (MATLAB):

$$x = \frac{X - a}{b - a}$$

$$\tilde{x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}; \qquad \varphi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - sign(\tilde{x}-1)\right)$$

$$\psi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - 2sign(\tilde{x}-0.5) + sign(\tilde{x}-1)\right)$$

Aproksimavimas pagal duotas signalo reikšmes smulkiausiame mastelyje:

$$\mathbf{a}_i^{\mathbf{n}} = 2^{-n/2}(b-a)y_i, \quad i = 0 : 2^n - 1$$

Jeigu bazinių funkcijų apibrėžimo sritis labai mažais dydžiais pratęsime už srities ribų, bus pavaizduoti vertikalūs frontai intervalo pradžioje ir gale

```
function h=Haar_scaling(x,j,k,a,b)   %
eps=1e-9; xtld=(x-a)/(b-a);
xx=2^j*xtld-k; h=2^(j/2)*(sign(xx-eps)-sign(xx-1+eps))/(2*(b-a));
return,end

function h=Haar_wavelet(x,j,k,a,b)
eps=1e-9; xtld=(x-a)/(b-a);
xx=2^j*xtld-k; h=2^(j/2)*(sign(xx-eps)-2*sign(xx-0.5)+sign(xx-1+eps))/(2*(b-a));
return,end
```

Pvz_SMA_9_8_Haar_base

Atvejis, kai funkcija apibrėžta intervale [a,b] (Python):

$$\tilde{x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}; \qquad \varphi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - sign(\tilde{x}-1)\right)$$

$$\psi(\tilde{x}) = \frac{1}{2(b-a)}\left(sign(\tilde{x}) - 2sign(\tilde{x}-0.5) + sign(\tilde{x}-1)\right)$$

Aproksimavimas pagal duotas signalo reikšmes smulkiausiame mastelyje:

$$\mathbf{a}_i^{\mathbf{n}} = 2^{-n/2}(b-a)y_i, \quad i = 0 : 2^n - 1$$

Jeigu bazinių funkcijų apibrėžimo sritis labai mažais dydžiais pratęsime už srities ribų, bus pavaizduoti vertikalūs frontai intervalo pradžioje ir gale

```
def HaarScaling(x,j,k,a,b):    # mastelio funkcija
# vaizdavimo taskai x, lygis j, postumis k, intervalas [a,b]
    eps=1e-9;xtld=(x-a)/(b-a);xx=np.power(2,j)*xtld-k
    h=np.power(2,j/2)*(np.sign(xx-eps)-np.sign(xx-1+eps))/2/(b-a)
    return h

def HaarWavelet(x,j,k,a,b):    # bangeles funkcija
# vaizdavimo taskai x, lygis j, postumis k, intervalas [a,b]
    eps=1e-9;xtld=(x-a)/(b-a);xx=np.power(2,j)*xtld-k
    h=np.power(2,j/2)*(np.sign(xx-eps)+np.sign(xx-1+eps) \
                                  -2*np.sign(xx-0.5))/2/(b-a)
    return h
```

Piramidinis algoritmas (formulių suvestinė)

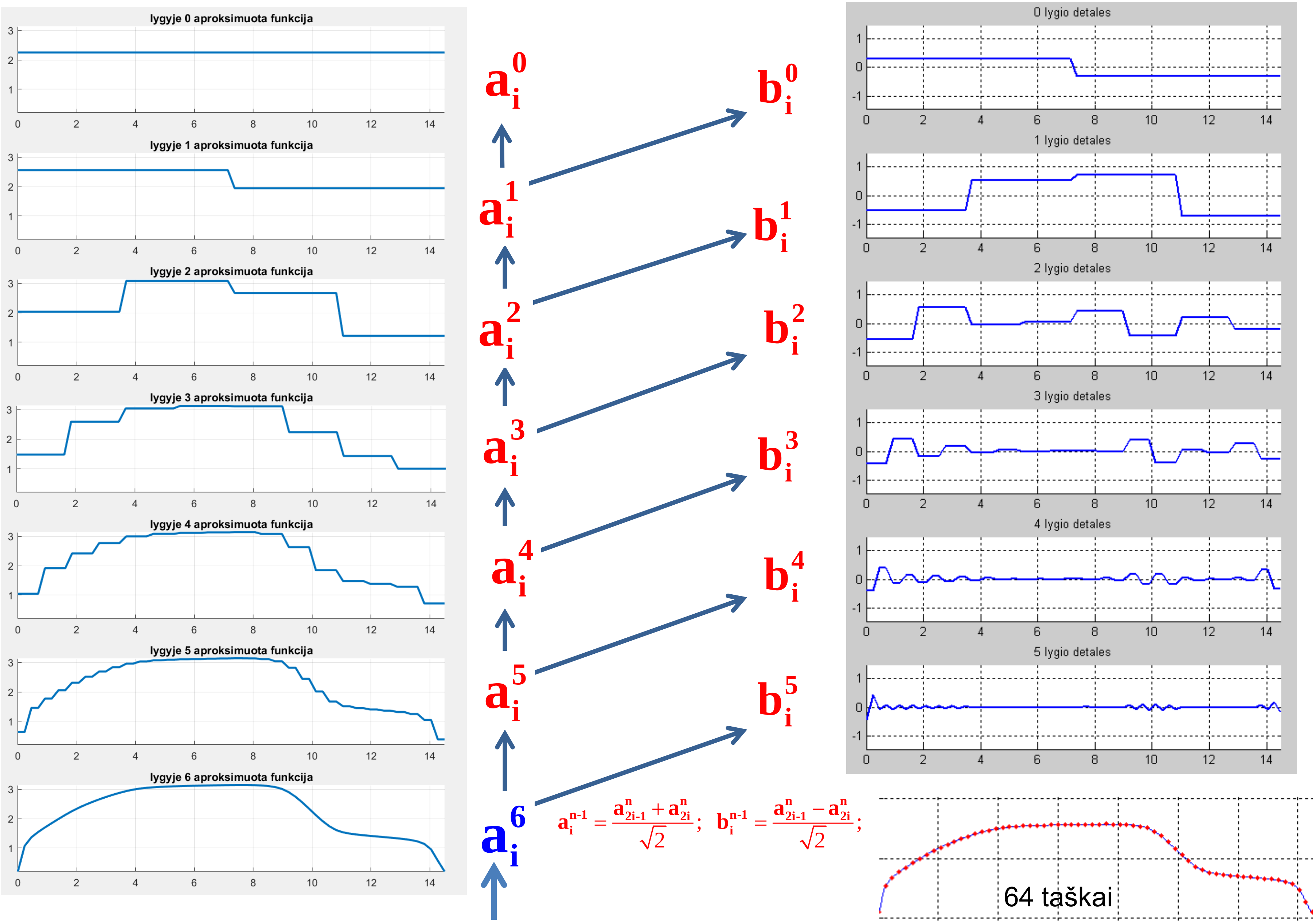
Duoti taškai:	$\left(x_i, y_i\right),\ i=1:2^n$
Aproksimavimas smulkiausiame mastelyje:	$a_i^n = 2^{-n/2}(b-a)y_i,\ i=1:2^n$
Aproksimavimo ir detalių koeficientų apskaičiavimas stambesniuose masteliuose:	$a_i^{n-1} = \dfrac{a_{2i-1}^n + a_{2i}^n}{\sqrt{2}};\quad b_i^{n-1} = \dfrac{a_{2i-1}^n - a_{2i}^n}{\sqrt{2}};\quad i=1:2^{n-1}$ $a_i^{n-2} = \dfrac{a_{2i-1}^{n-1} + a_{2i}^{n-1}}{\sqrt{2}};\quad b_i^{n-2} = \dfrac{a_{2i-1}^{n-1} - a_{2i}^{n-1}}{\sqrt{2}};\quad i=1:2^{n-2}$ $\vdots$ $a_i^0 = \dfrac{a_1^1 + a_2^1}{\sqrt{2}};\quad b_i^0 = \dfrac{a_1^1 - a_2^1}{\sqrt{2}};\quad i=1$

Aproksimavimo bangelėmis koeficientai

- Saugome tik „raudonus“ koeficientus (žr. ankstesnę skaidrę);
- Kurį smulkumo lygį bepasirinktume aproksimavimui *mastelio funkcijomis*, bendras koeficientų skaičius visuomet yra 2^n (t.y. tiek pat, kiek buvo duota taškų smulkiausiame lygyje);
- Aproksimavimas bangelėmis įgalina rūšiuoti signalo dedamasias pagal jų svarbą

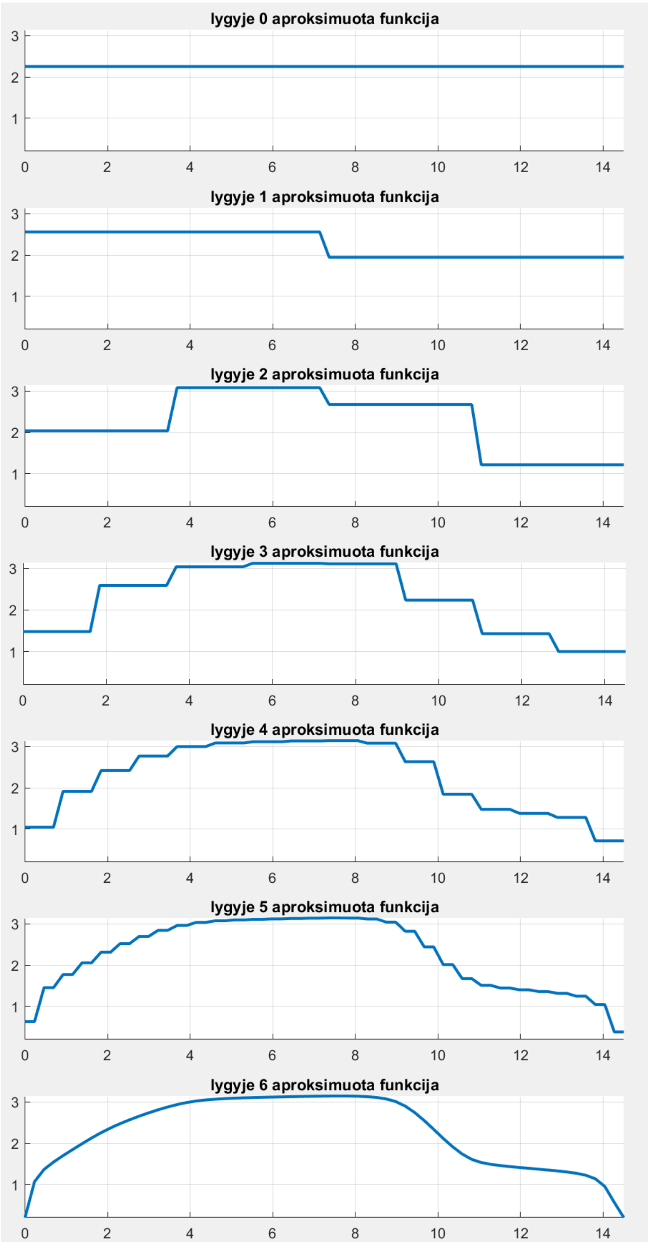
Aproksimavimo bangelėmis koeficientų apskaičiavimas

Pvz_SMA_9_9_ Haro_bangeliu_aproksimacija.m
Pvz_SMA_9_9_ Haro_bangeliu_aproksimacija.py

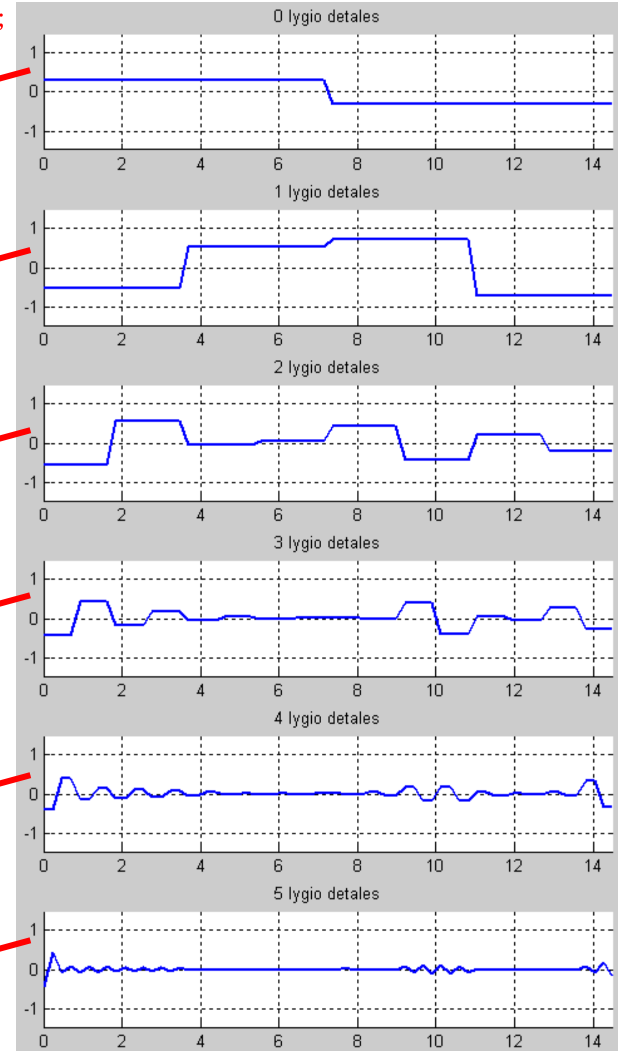


$$a_i^6 = 2^{-3}(b-a)y_i,\ i=1:2^6 \quad \longleftarrow \quad (x_i, y_i),\ i=1:2^6\ ;$$

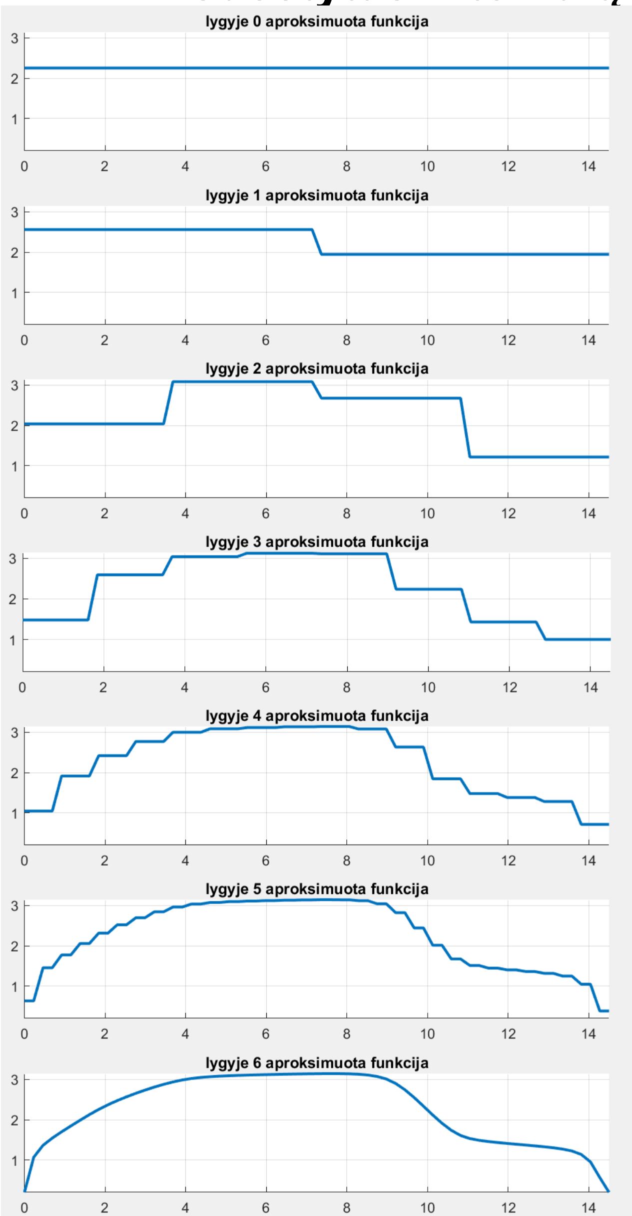
Bangelėmis aproksimuoto signalo reikšmių apskaičiavimas (signalo „rekonstravimas“)

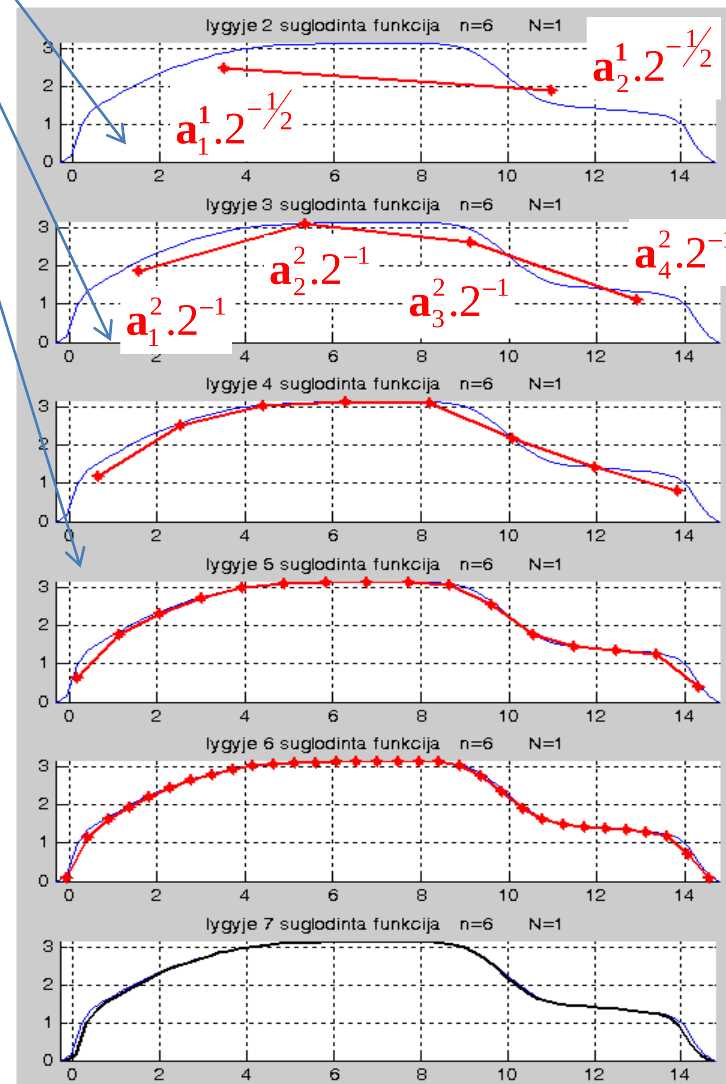


$$a^{n}_{2i-1} = \frac{a_i^{n-1} + b_i^{n-1}}{\sqrt{2}}; a^{n}_{2i} = \frac{a_i^{n-1} - b_i^{n-1}}{\sqrt{2}};$$

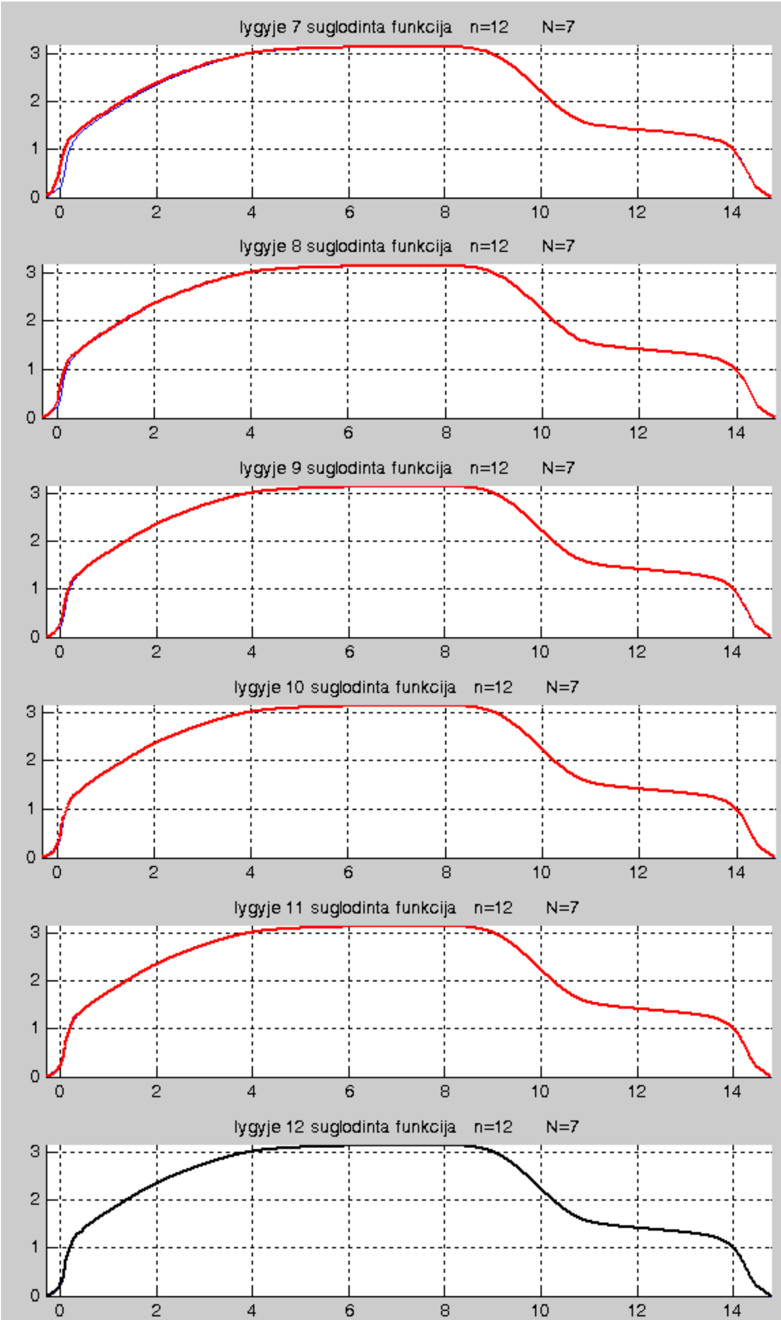


Bangelėmis aproksimuotą signalą paprasčiau vaizduoti, panaudojant tik mastelio funkcijų koeficientų a_i reikšmes, išdėstytas intervalų centruose

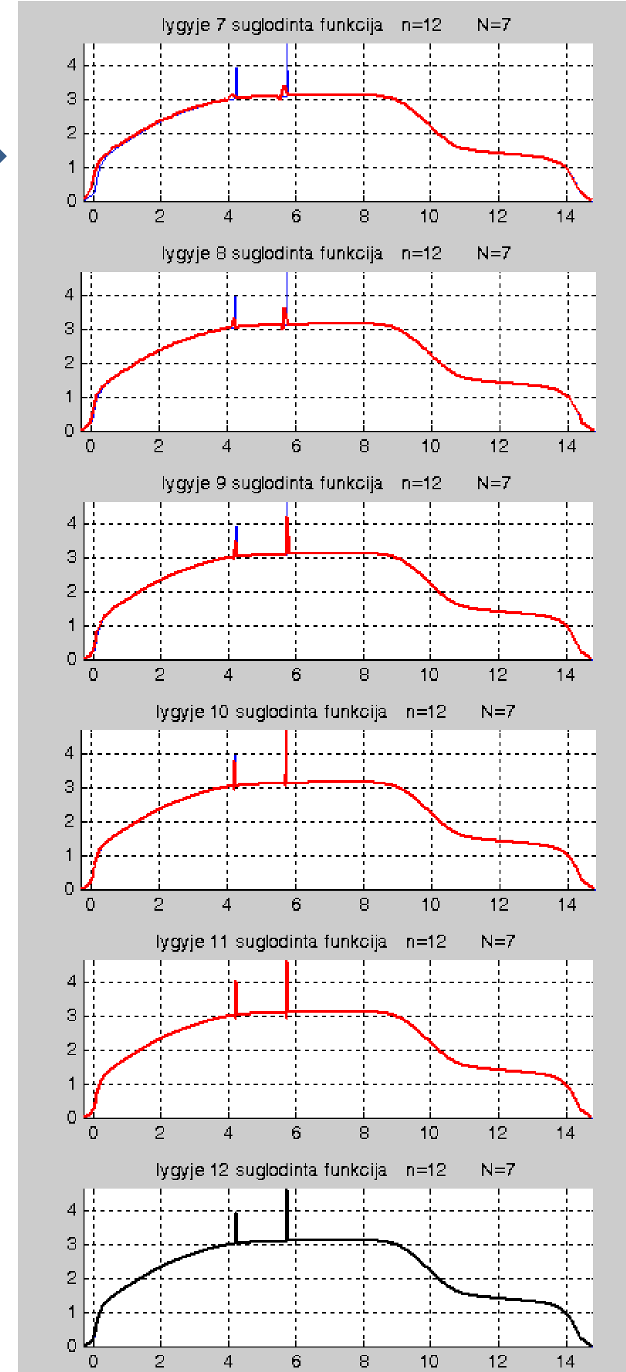




“Glodinimas” = “aproksimavimas”

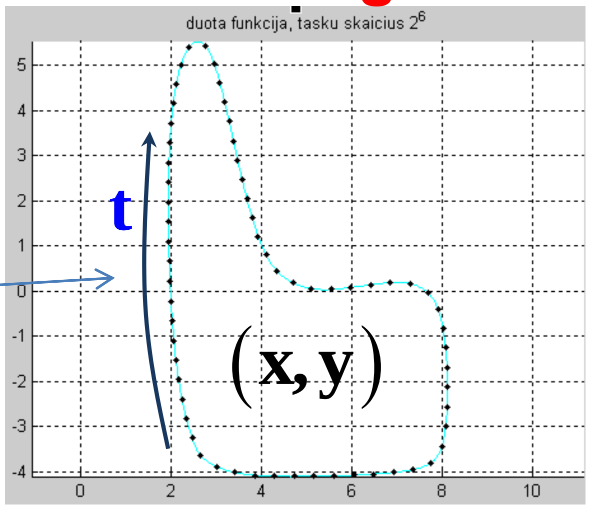


„Triukšmo“ filtravimas

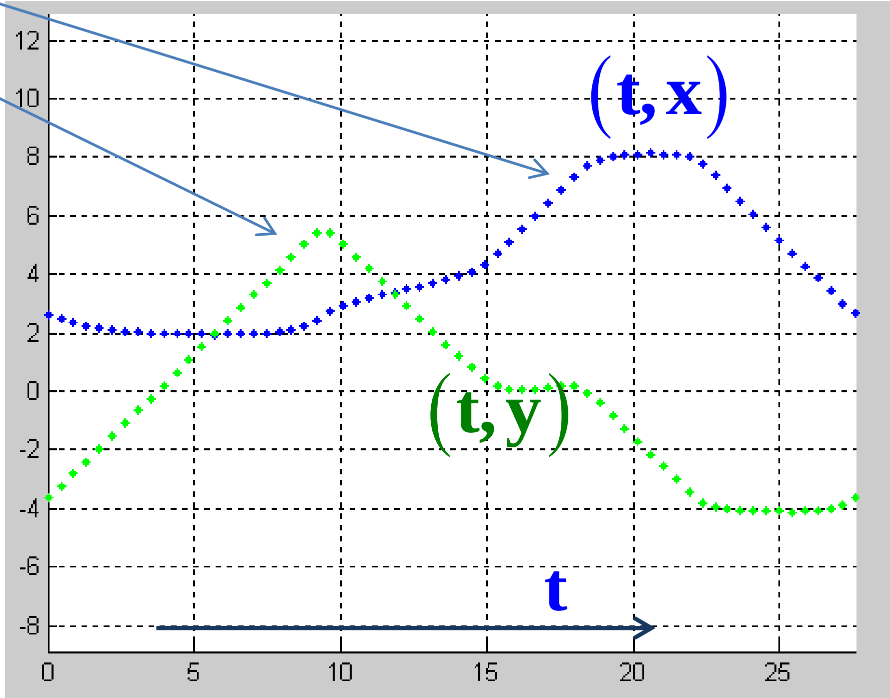


Parametriškai duotų funkcijų aproksimavimas bangelėmis

Parametriškai duotų funkcijų aproksimavimas bangelėmis

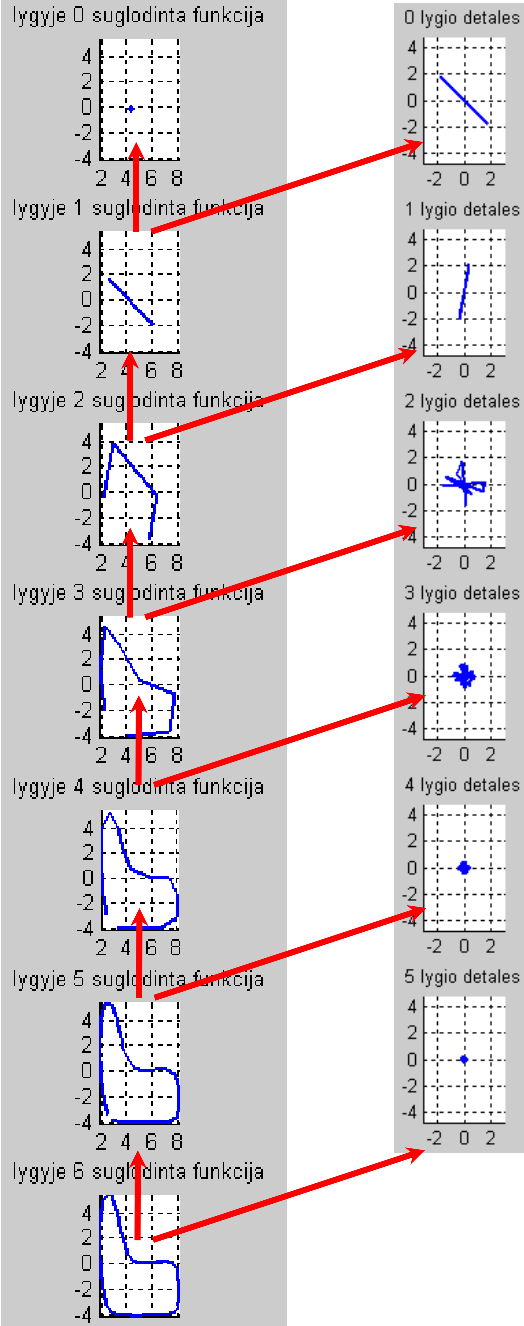


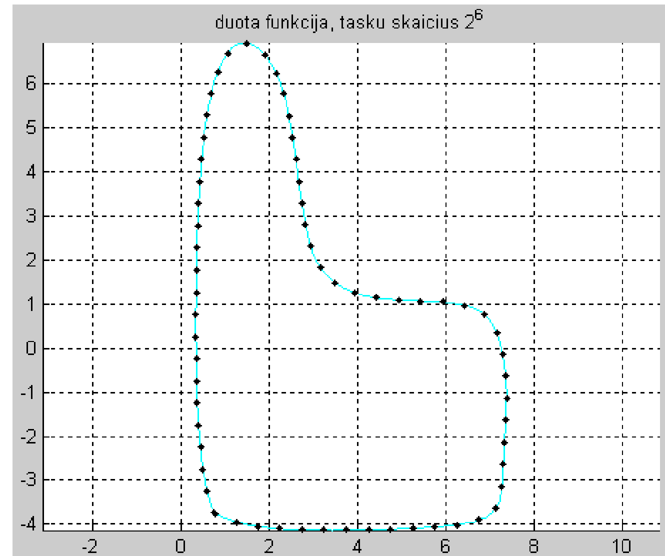
- Duota taškų seka, aprašanti bendrojo pavidalo *kreivę*
- Sudaromos jos koordinačių priklausomybės nuo parametro
- Didėjančio argumento sekos (t,x) ir (t,y) laikomos dviem nepriklausomais signalais, kurie aproksimuojami bangelėmis



Parametrinis aproksimavimas Haro bangelėmis

Pvz_SMA_9_10_
Haro_bangeliu_aproksimacija_parametrine.m





- **Apskaičiavus aproksimuoto signalo reikšmes, jos vaizduojamos erdvėje (x,y), t.y. eliminuojamas parametras t**

- **Čia nuliniame detalumo lygyje aproksimuota funkcija yra vienas taškas, kadangi duotoji kreivė yra uždara**

MATLAB funkcijos bangelių aproksimacijai apskaičiuoti

MATLAB Wavelet Toolbox funkcijų taikymas

Wavelet decomposition

Signal, 2^n points

[C,L]=wavedec(X,N,'wname')

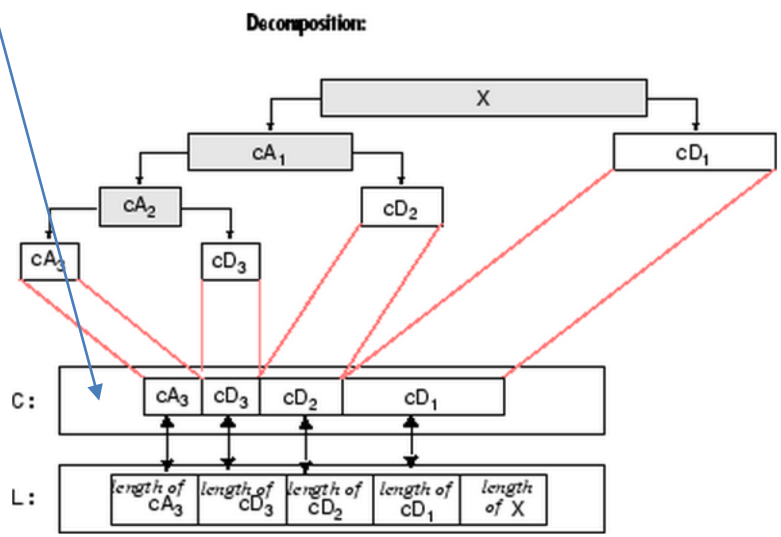
At which level approximation in the base of scaling functions is performed

Approximation and details coefficients

'haar'	Haar wavelet
'db'	Daubechies wavelets
'sym'	Symlets
'coif'	Coiflets
'bior'	Biorthogonal wavelets
'fk'	Fejer-Korovkin filters
'rbio'	Reverse biorthogonal wavelets
'meyr'	Meyer wavelet
'dmey'	Discrete approximation of Meyer wavelet
'gaus'	Gaussian wavelets
'mexh'	Mexican hat wavelet
'morl'	Morlet wavelet
'cgau'	Complex Gaussian wavelets
'shan'	Shannon wavelets
'fbsp'	Frequency B-Spline wavelets
'cmor'	Complex Morlet wavelets

db1 or haar, db4, db15

N=3



Wavelet reconstruction

X=waverec(C,L,'wname')

Signal

A = appcoef(C,L,wavelet,N)

D = detcoef(C,L,wavelet,N)

Approximation and details coefficients at level N calculated from C,L

SMA_09_Klausimai savikontrolei(1):

1. Kas yra diskretusis Furje aproksimavimas(DFA), kokios bazinės funkcijos naudojamos;
2. Kas yra bazinių funkcjų ortogonalumas integruojant ir sumuojant diskrečiuose taškuose;
3. Kaip apskaičiuojami DFA koeficientai;
4. Paaiškinkite, kokią informaciją apie tiriamą signalą teikia Furje harmonikų amplitudės. Ar pagal sumines harmonikų amplitudes galima vienareikšmiškai atkurti išeities signalą;
5. Kaip filtruojamas signalas pagal dažnius;
6. Kaip filtruojamas signalas pagal amplitudžių reikšmes;
7. Kokie sunkumai kyla, taikant Furje aproksimavimą neperiodiniams signalams;

SMA_09_03 Klausimai savikontrolei:

1. Kodėl pavieniam signalui aproksimuoti netinka Furje metodas;
2. Paaiškinkite kas yra ir kam naudojamos Haro mastelio funkcijos ir bangelės;
3. Išvardinkite 4 svarbiausias mastelio funkcijų ir bangelių savybes;
4. Kaip apskaičiuojami diskrečiojo bangelių aproksimavimo koeficientai;
5. Naudodamiesi literatūra paaiškinkite, kaip gaunamos piramidinio algoritmo formulės;
6. Kam naudojamas piramidinis algoritmas, paaiškinkite skaičiavimų eigą;
7. Paaiškinkite, kaip pateikiamas signalas, išskaidytas į aproksimavimo ir detalių koeficientus;
8. Kaip atliekamas bangelių aproksimavimas daugiareikšmėms funkcijoms (pvz. kontūru duotam piešiniui)