Funkcijų interpoliavimas

Ermito daugianariai ir splainai

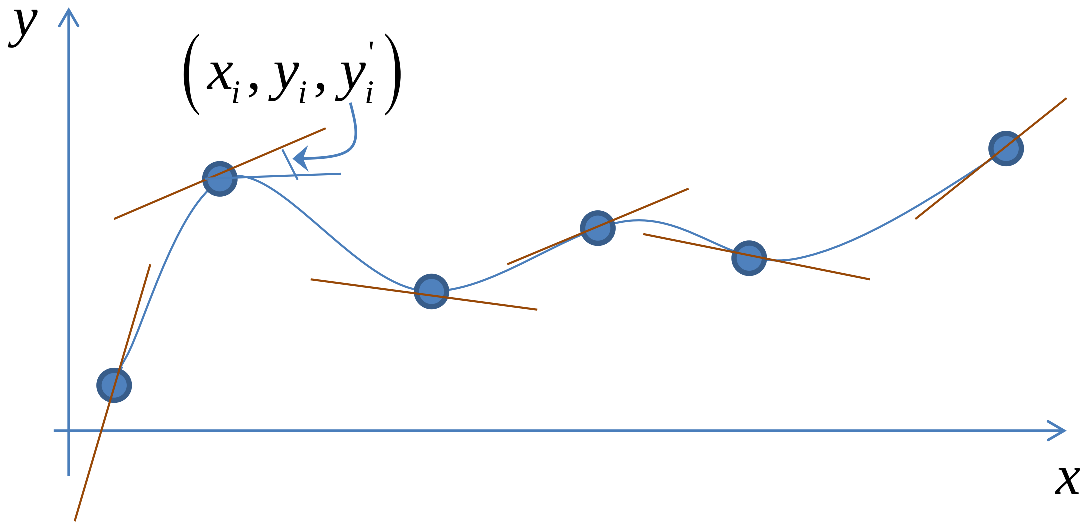
Temoje aiškinama:

- **Interpoliavimas, kai mazguose duotos funkcijos ir jos išvestinės reikšmės. Hemingo metodo taikymas;**
- **Interpoliavimas Ermito bazėje;**
- **Ermito splainai;**
- **Interpoliavimas Ermito splainais, kai išvestinių reikšmės mazguose duotos „pagal nutylėjimą“;**
- **Interpoliavimas globaliaisias splainais;**
- **Interpoliavimas įtemptaisiais splainais**

Interpoliavimas, kai mazguose duotos funkcijos ir jos išvestinės reikšmės. Hemingo metodo taikymas

Interpoliavimas, kai mazguose duotos ne tik *funkcijos, bet ir jos išvestinės* reikšmės:

$$\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right), \qquad y_i = f\left(x_i\right),\ y_i = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i},\ i = 0,1...,n-1$$



Interpoliavimas daugianariais *vienanarių bazėje*

Duoti interpoliavimo mazgai: $\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right),\ \ i=0,1...,n-1$

Daugianario pavidalo interpoliavimo funkcija

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{2n-2}x^{2n-2}+a_{2n-1}x^{2n-1}=\begin{bmatrix}1 & x & \ldots & x^{2n-2} & x^{\mathbf{2n-1}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{2n-2}\\ a_{\mathbf{2n-1}}\end{Bmatrix}$$

Bazinės funkcijos

Bazinių funkcijų išvestinės:

$$f'(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \ldots & (2n-2)x^{2n-3} & (2n-1)x^{2n-2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{2n-2}\\ a_{2n-1}\end{Bmatrix}$$

!!!
Interpoliuojant per n mazgų, reikia tenkinti 2n lygčių

Interpoliavimas daugianariais. Interpoliavimo koeficientų vienanarių *bazėje* apskaičiavimas Hemingo metodu

$$\begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^{2n-2} & x^{2n-1} \end{bmatrix}$$

$$\left(x_i, y_i, y_i'\right),\quad i = 0,1\ldots,n-1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & (2n-2)x^{2n-3} & (2n-1)x^{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{2n-2} & x_0^{2n-1} \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{2n-2} & x_1^{2n-1} \\
 & & & \vdots & & \\
1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{2n-2} & x_{n-1}^{2n-1} \\
0 & 1 & 2x_0 & \cdots & (2n-2)x_0^{2n-3} & (2n-1)x_0^{2n-2} \\
0 & 1 & 2x_1 & \cdots & (2n-2)x_1^{2n-3} & (2n-1)x_1^{2n-2} \\
 & & & \vdots & & \\
0 & 1 & 2x_{n-1} & \cdots & (2n-2)x_{n-1}^{2n-3} & (2n-1)x_{n-1}^{2n-2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2n-2} \\ a_{2n-1} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \end{Bmatrix}$$

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{2n-1}$$

Interpoliavimas Ermito bazėje

Interpoliavimas pagal mazguose duotas funkcijos ir jos išvestinės reikšmes galį būti atliktas Ermito daugianarių bazėje

$$\left(x_i, y_i, y_i^{'}\right),\; i = 0,1...,n-1$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(U_j(x)y_j + V_j(x)y_j^{'}\right)} \Rightarrow U_j(x_i) = \delta_{ij}; V_j(x_i) = 0;$$

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(U_j^{'}(x)y_j + V_j^{'}(x)y_j^{'}\right) \Rightarrow U_j^{'}(x_i) = 0;\; V_j^{'}(x_i) = \delta_{ij}$$

Ermito daugianarių išraiškos:

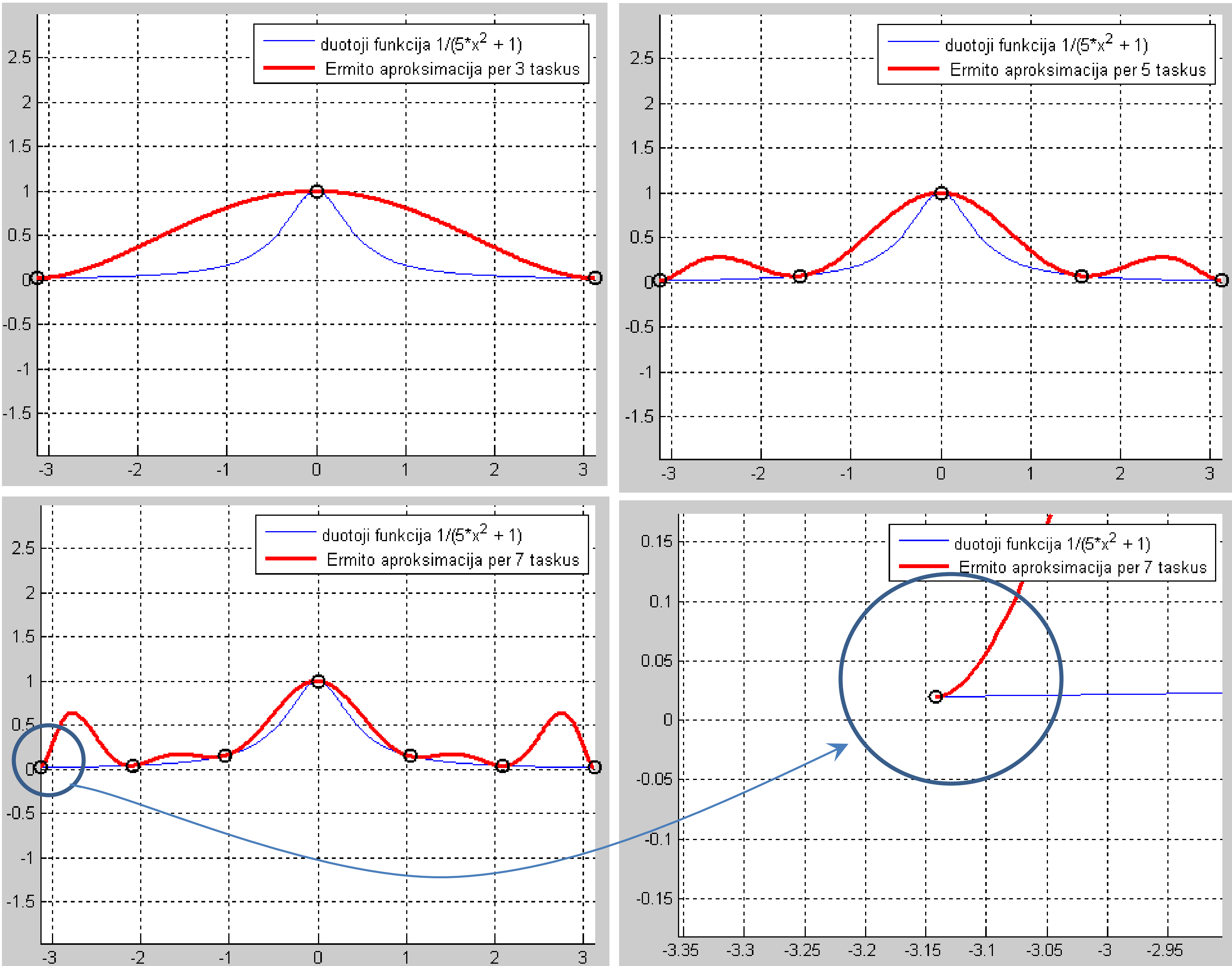
Lagranžo daugianario išvestinė, apskaičiuota mazge x_j

Lagranžo daugianaris, apskaičiuotas visuose taškuose x

$$U_j(x) = (1 - 2L_j^{'}(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \qquad j = 0,1,...,n-1$$

Interpoliavimas pagal mazguose duotas funkcijos ir jos išvestinės reikšmes dažnai sukuria dar labiau banguotas kreives, nei interpoliuojant Lagranžo būdu:



Ermito splainai

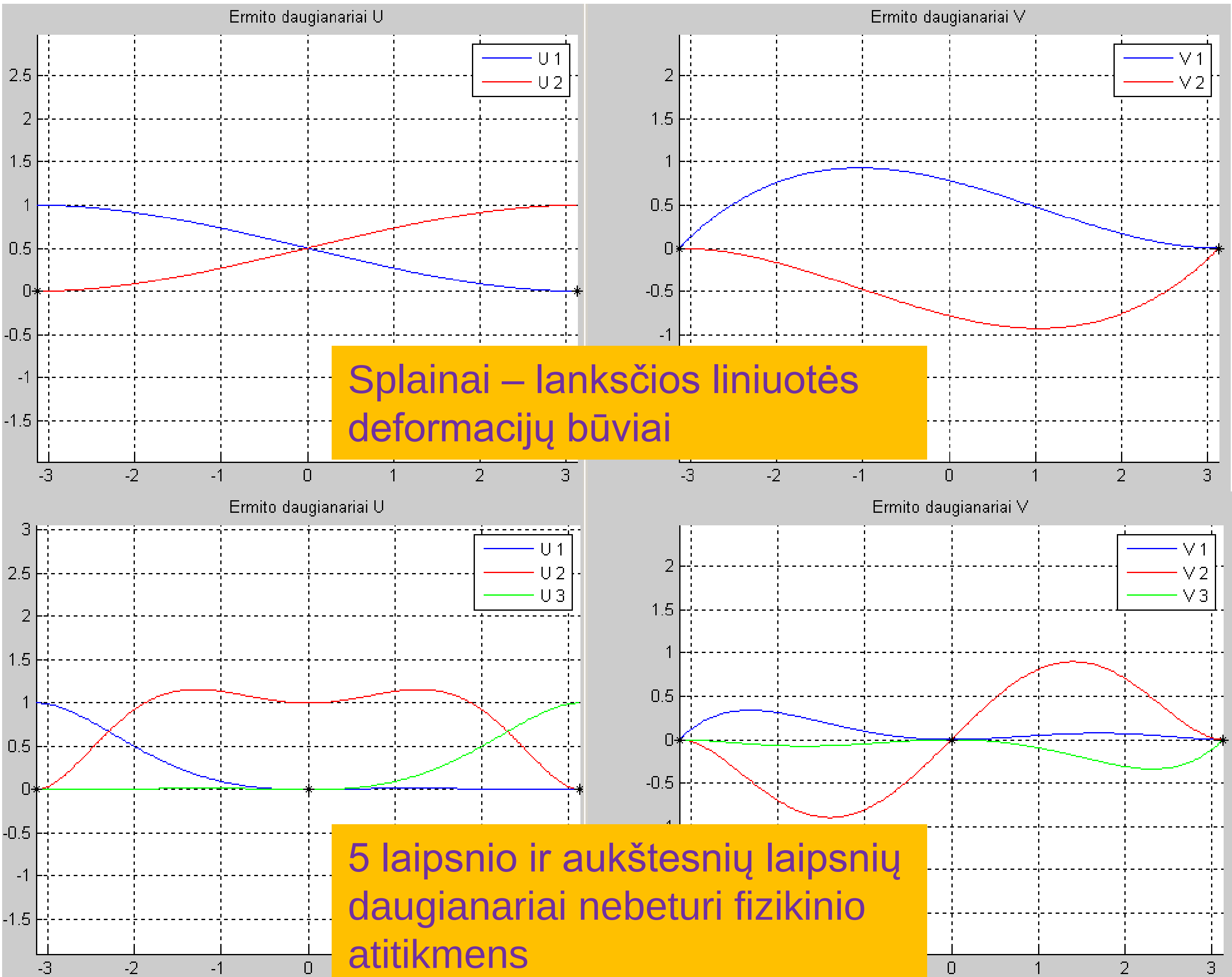
- **Aukštų eilių (t.y. per daugelį interpoliavimo taškų einantys) Ermito daugianariai taikomi retai;**
- **Dažniausiai taikomi kubiniai Ermito daugianariai, kurie interpoliuoja funkcijos reikšmes tarp dviejų gretimų taškų (n=2);**
- **Tokiu atveju kiekviename interpoliavimo taške susijungia du skirtingi daugianariai, nustatyti gretimuose intervaluose. Tačiau *sandūra yra glotni*, kadangi interpoliavimo taške daugianarių išvestinių reikšmės sutampa. Toks interpoliavimas dar vadinamas *Ermito splainais* ;**

*Spline – lanksti liniuotė. Deformuojamų kūnų mechanikos moksle įrodoma, kad deformuotos liniuotės kreivė yra aprašoma 3 eilės daugianariu. Ermito splainai – tai “liniuotės” kiekviename intervale, kurių liestinės sandūrose sutapdintos. Tačiau tai nėra viena ir ta pati “ilga liniuotė”

Ermito splainai ir Ermito daugianariai

$$U_j(x) = (1 - 2L_j'(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \quad j = 1, \ldots, n$$



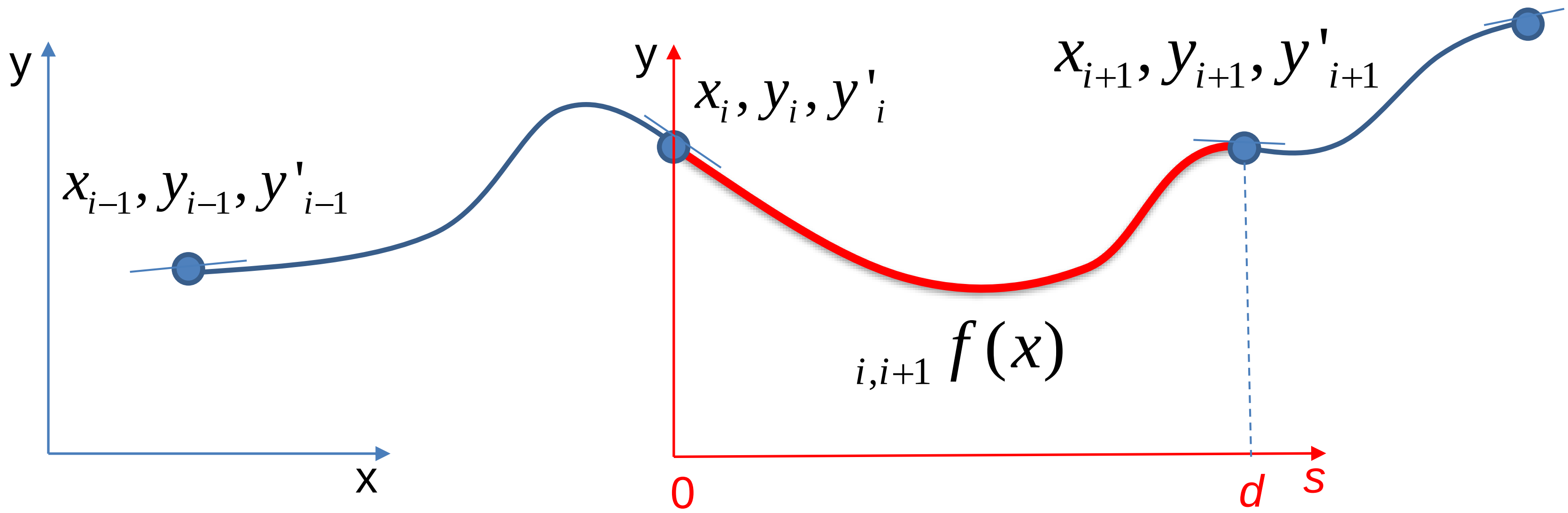
3 laipsnio (n=2)

5 laipsnio (n=3)

Splainai – lanksčios liniuotės deformacijų būviai

5 laipsnio ir aukštesnių laipsnių daugianariai nebeturi fizikinio atitikmens

Lokalioji Ermito splaino koordinačių sistema



- **Kiekvienas kreivės segmentas tarp gretimų mazgų *i* ir i+*1* yra vaizduojamas atskiru Ermito splainu;**
- **Kiekvienam splainui sukurti patogu naudoti bazinių funkcijų išraiškas, nepriklausančias nuo splaino padėties *xOy* koordinačių sistemoje. Todėl splainą tarp mazgų *i* ir *i+1* aprašome jo lokalioje koordinačių sistemoje *sOy* ;**
- **Pakeičiame koordinates:**

$$d = x_{i+1} - x_i; \quad s = x - x_i; \quad s - d = x - x_i + x_i - x_{i+1} = x - x_{i+1};$$

Ermito splaino bazinių funkcijų formulių išvedimas:

$$U_j(x) = (1 - 2L'_j(x_j)(x - x_j))L_j^2(x);$$

$$V_j(x) = (x - x_j)L_j^2(x), \quad j = i, i+1$$

$$L_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}; \; L'_i(x) = \frac{1}{x_i - x_{i+1}};$$

$$L_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}; \; L'_2(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$d = x_{i+1} - x_i;$$

$$s = x - x_i;$$

$$s - d = x - x_{i+1}$$

$$L_i(s) = 1 - \frac{s}{d}; \; L'_i(s) = -\frac{1}{d}; L_{i+1}(s) = \frac{s}{d}; \; L'_{i+1}(s) = \frac{1}{d}$$

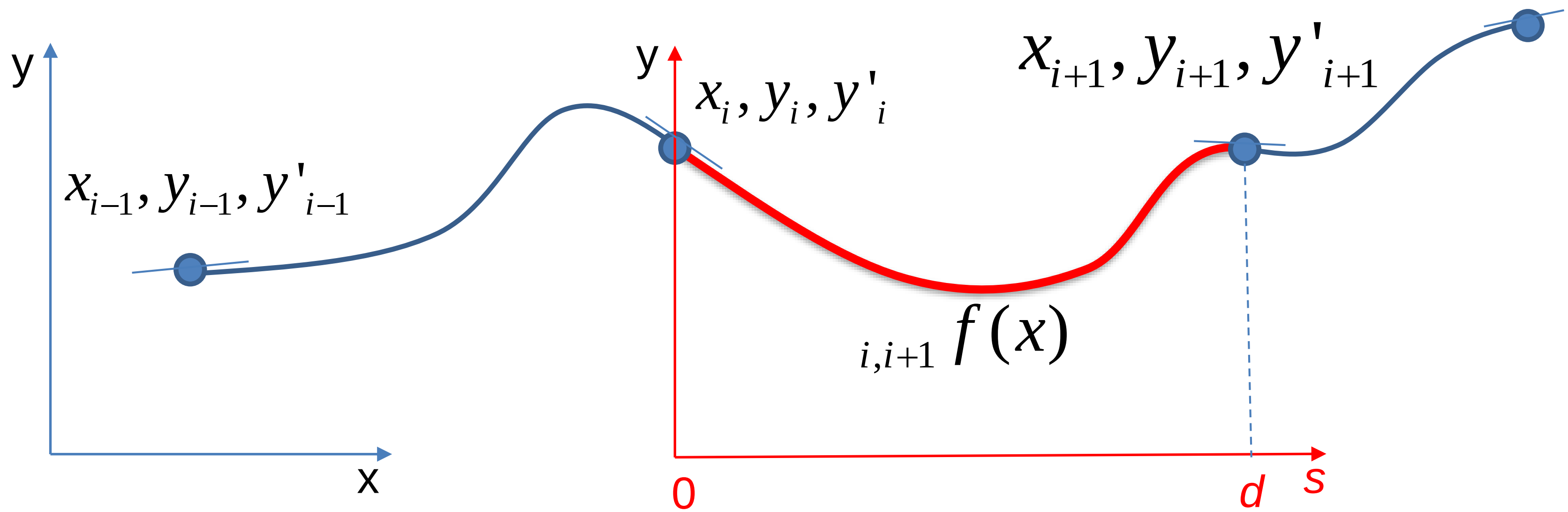
$$U_i(s) = \left(1 + 2\frac{s}{d}\right)\left(1 - \frac{s}{d}\right)^2 = \left(1 + 2\frac{s}{d}\right)\left(\frac{s^2}{d^2} + 1 - 2\frac{s}{d}\right) = \frac{s^2}{d^2} + 2\frac{s^3}{d^3} + 1 + 2\frac{s}{d} - 2\frac{s}{d} - 4\frac{s^2}{d^2} = 1 - 3\frac{s^2}{d^2} + 2\frac{s^3}{d^3};$$

$$U_{i+1}(s) = \left(1 - 2\frac{s-d}{d}\right)\left(\frac{s}{d}\right)^2 = \left(3 - 2\frac{s}{d}\right)\left(\frac{s^2}{d^2}\right) = 3\frac{s^2}{d^2} - 2\frac{s^3}{d^3};$$

$$V_i(s) = s\left(1 - \frac{s}{d}\right)^2 = s\left(\frac{s^2}{d^2} + 1 - 2\frac{s}{d}\right) = s - 2\frac{s^2}{d} + \frac{s^3}{d^2};$$

$$V_{i+1}(s) = (s - d)\frac{s^2}{d^2} = -\frac{s^2}{d} + \frac{s^3}{d^2}$$

Ermito splaino vaizdavimas



$$U_i(s) = 1 - 3\frac{s^2}{d^2} + 2\frac{s^3}{d^3};$$

$$U_{i+1}(s) = 3\frac{s^2}{d^2} - 2\frac{s^3}{d^3};$$

$$V_i(s) = s - 2\frac{s^2}{d} + \frac{s^3}{d^2};$$

$$V_{i+1}(s) = -\frac{s^2}{d} + \frac{s^3}{d^2}$$

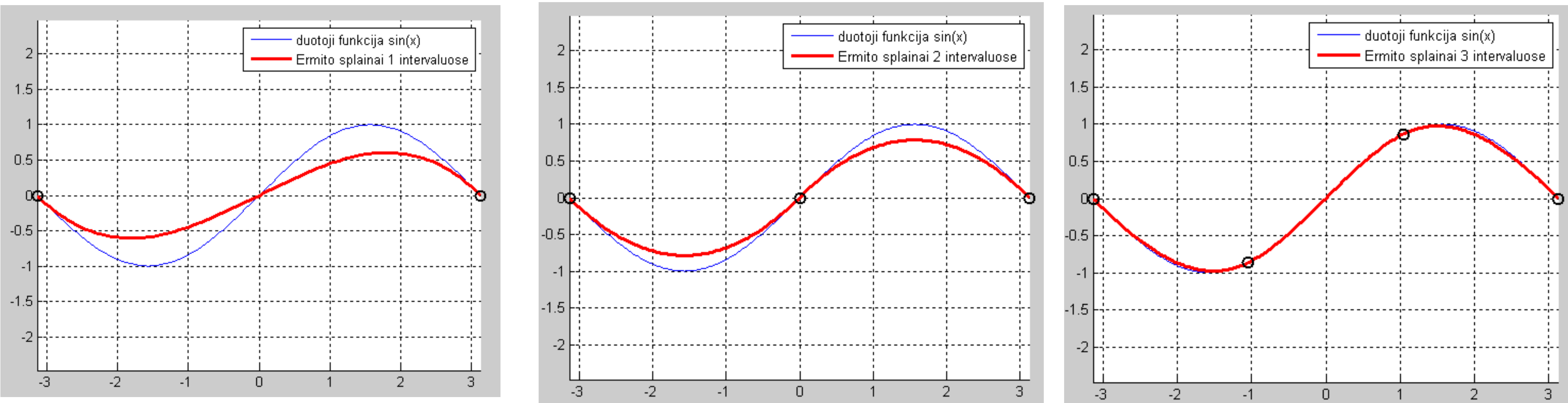
Vaizduojame sistemoje xOy:

$$_{i,i+1}f(x) = \sum_{j=i}^{i+1}\left(U_j(x-x_i)y_j + V_j(x-x_i)y_j'\right)$$

Funkcijos U ir V buvo užrašytos lokalioje sistemoje, todėl braižant jų argumentas s turi būti pakeistas į $x\text{-}x_i$

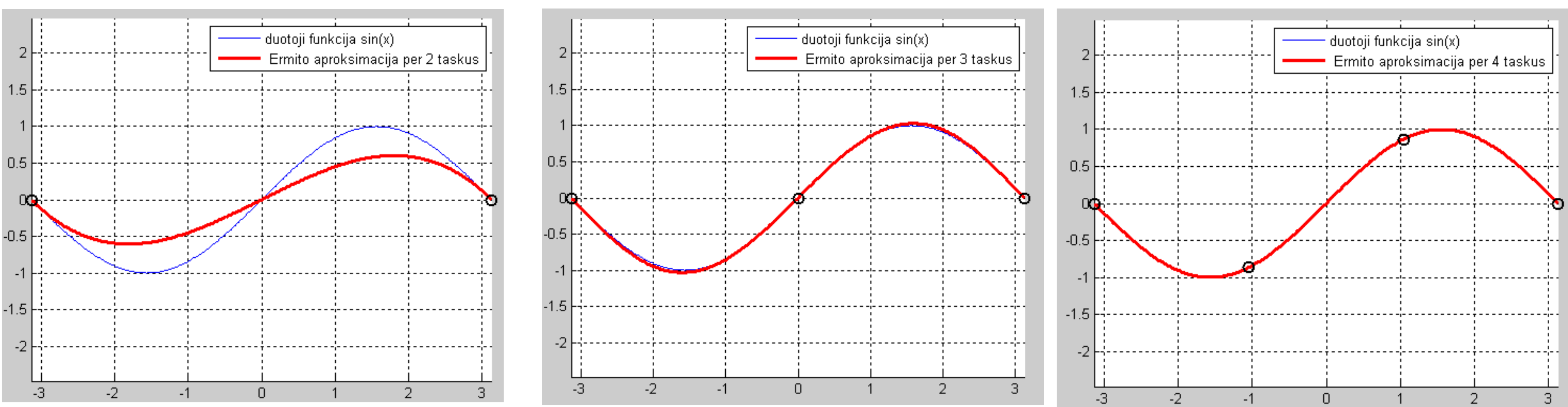
Ermito splainai:

Pvz_SMA_8_3_Ermito_splainai_1D.m

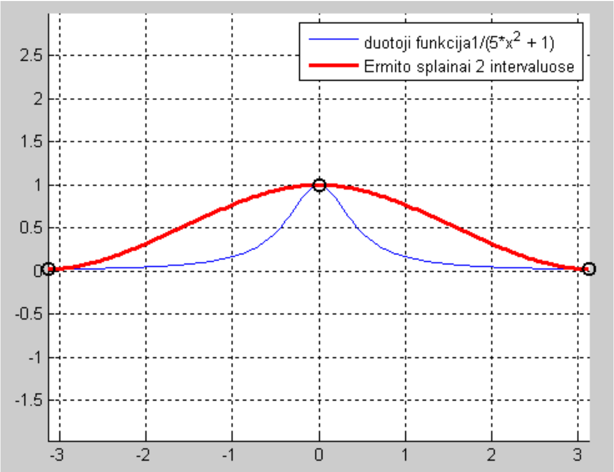


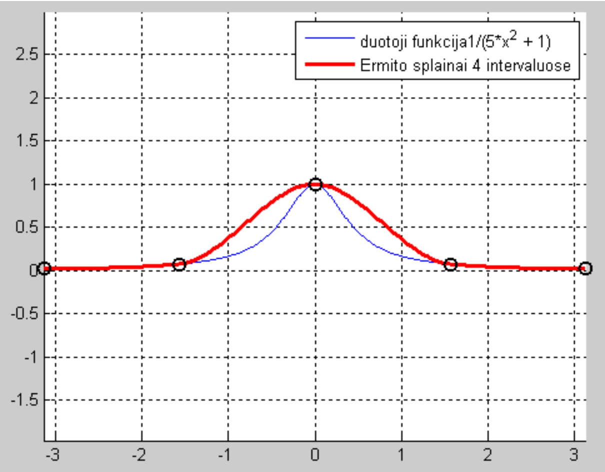
Ermito daugianariai:

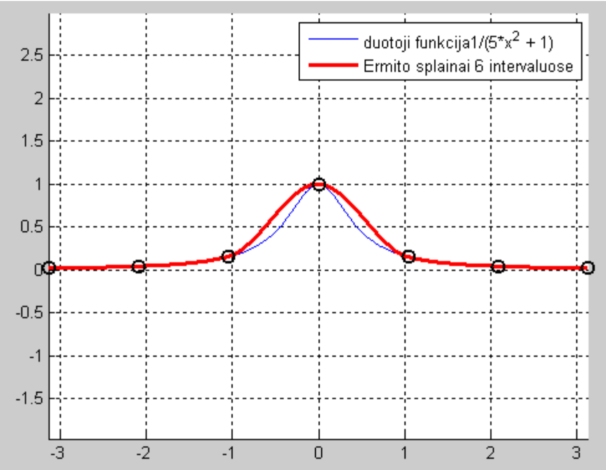
Pvz_SMA_8_1_Ermito_interpoliavimas.m



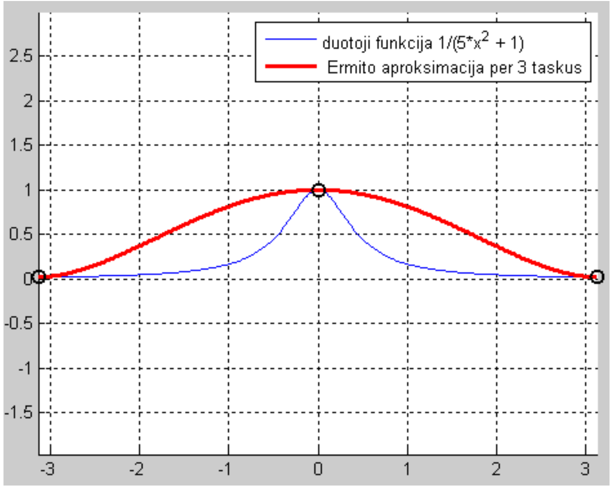
Ermito splainai:

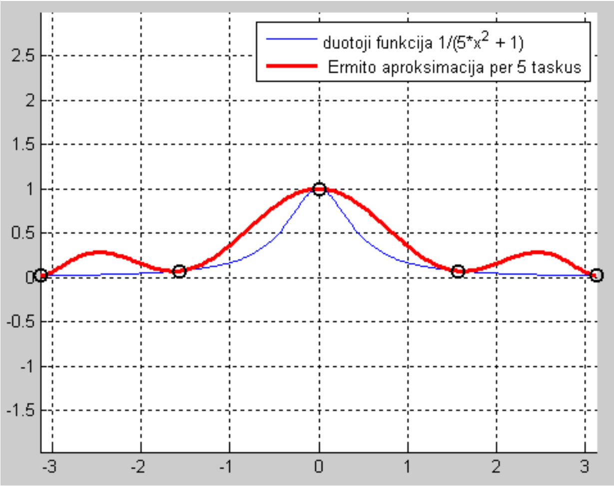


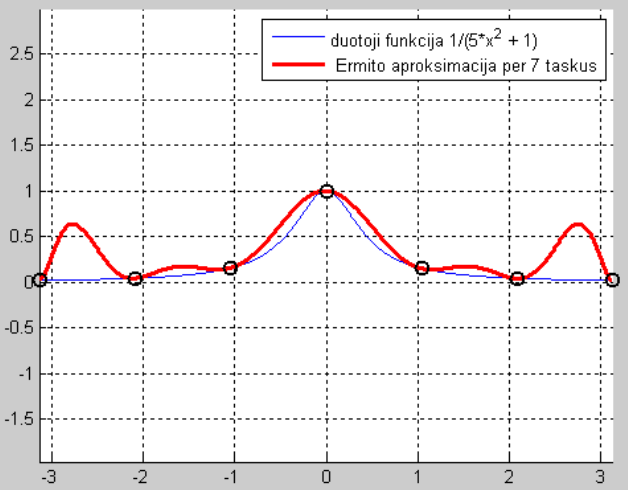




Ermito daugianariai:





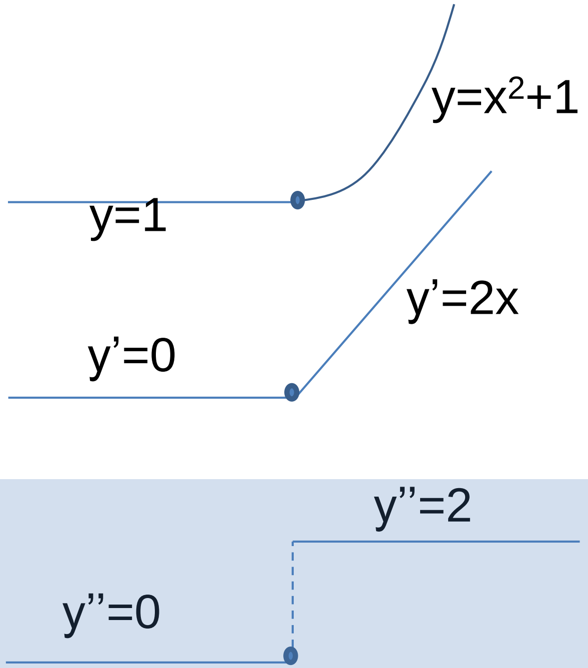


Ermito splainų apibūdinimas(1)

- **Ermito splainai yra *lokalieji;***
- **Pakeitus funkcijos arba jos išvestinės reikšmę viename interpoliavimo mazge, pakinta tik dviejų su šiuo mazgu susietų splainų forma;**
- **Sąvokos *Ermito splainas* ir *lokalusis splainas* yra sinonimai;**
- **Kiekviename interpoliavimo intervale splaino kreivė yra *keturių kubinių Ermito funkcijų svertinė suma*. Šiame intervale ji gali pavaizduoti bet kurį daugianarį iki trečios eilės imtinai, todėl interpoliuojančiai kreivei nesunku suteikti pageidaujamą formą**

Ermito splainų apibūdinimas(2)

- Ermito splainas yra 2 eilės defekto splainas. *Defekto skaičius* parodo koks skaičius aukštesnės eilės išvestinių splainų sandūrų taškuose yra trūkios arba neapibrėžtos;
- Splainas yra *trečios eilės*, todėl jį galima diferencijuoti tik 3 kartus. Bendruoju atveju, Ermito splainų sandūroje:



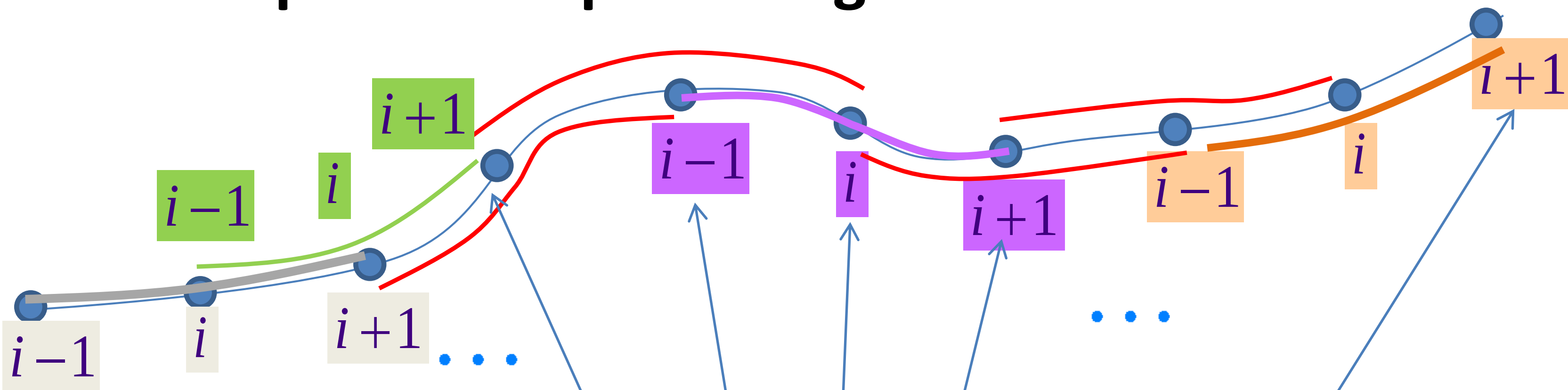
- ✓ kreivė yra visuomet *glotni*;
- ✓ jos pirmoji išvestinė gali būti *laužtė, tačiau ji visuomet tolydi*;
- ✓ antroji išvestinė gali turėti *trūkio tašką*;
- ✓ trečioji išvestinė gali būti *neapibrėžta*, esant trūkiai antrajai išvestinei

Interpoliavimas Ermito splainais, kai išvestinių reikšmės mazguose duotos „pagal nutylėjimą“

Išvestinių reikšmių interpoliavimo mazguose nustatymas “pagal nutylėjimą”

- Numatant interpoliavimo mazgus, kiekvienam jų būtina priskirti ir išvestinės reikšmę. Tai ne visuomet patogu;
- Išvestinės reikšmės “pagal nutylėjimą” gali būti nustatytos, panaudojant *skaitinio diferencijavimo formules*, diskretizavimo taškais laikant duotus interpoliavimo mazgus;
- Yra sukurta ir daugiau rekomendacijų išvestinių skaičiavimui pagal nutylėjimą, vadinamų *Akima formulėmis*. Šiame kurse jų plačiau nenagrinėjame, apsiribodami skaitinio diferencijavimo metodu

Skaitinis išvestinės apskaičiavimas, paremtas Lagranžo interpoliavimu persidengiančiuose intervaluose



$$f(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x-x_i)+(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}f_{i-1}+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}f_i+\frac{(x-x_{i-1})+(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}f_{i+1}$$

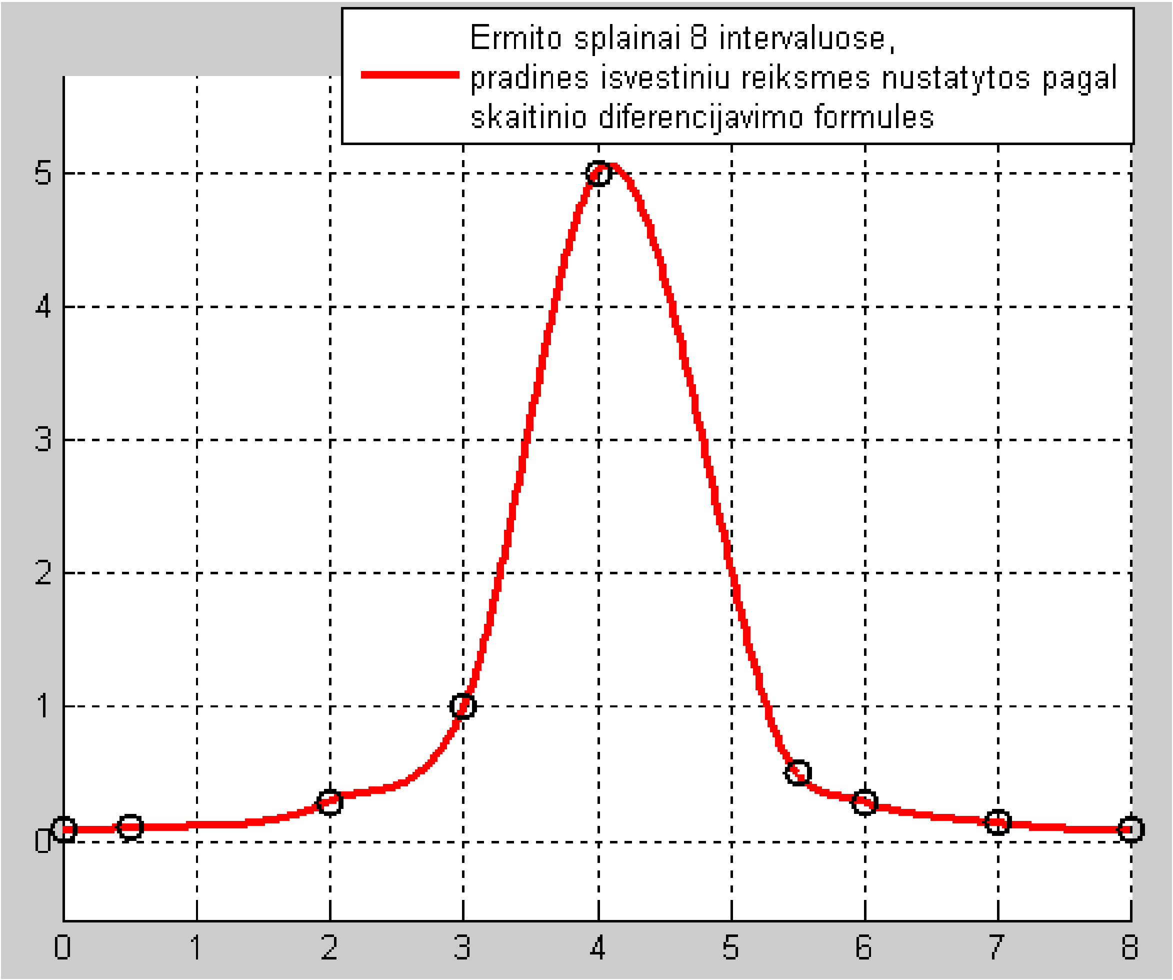
$$f'(x_{i-1}),\ f'(x_i),\ f'(x_{i+1})$$

Kairiajame taške

Vidiniuose taškuose

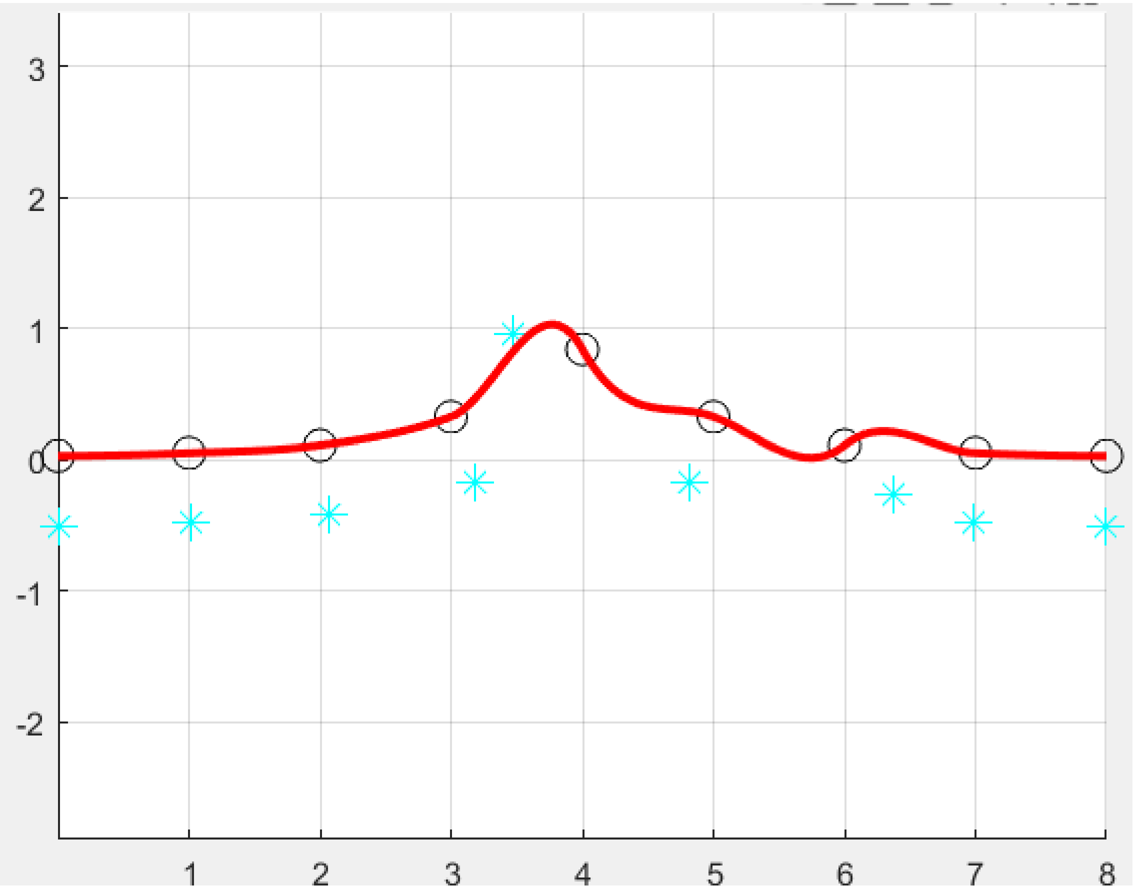
dešiniajame taške

Interpoliavimas Ermito splainais, panaudojant pagal nutylėjimą apskaičiuotas funkcijos išvestinių mazguose reikšmes



Pvz_SMA_8_5_Akima_splainai_1D_isvestines_pagal_nutylejima.m
Pvz_SMA_8_6_Akima_splainai_1D_mouse. m

Pvz_SMA_8_7_Akima_splainai_1D_isvestiniu_valdymas_mouse.m



Interpoliavimo Ermito daugianariais parametrinis pavidalas

$$\left(x_i, y_i, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left(t_i, x_i, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_i} \right), \left(t_i, y_i, \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_i} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

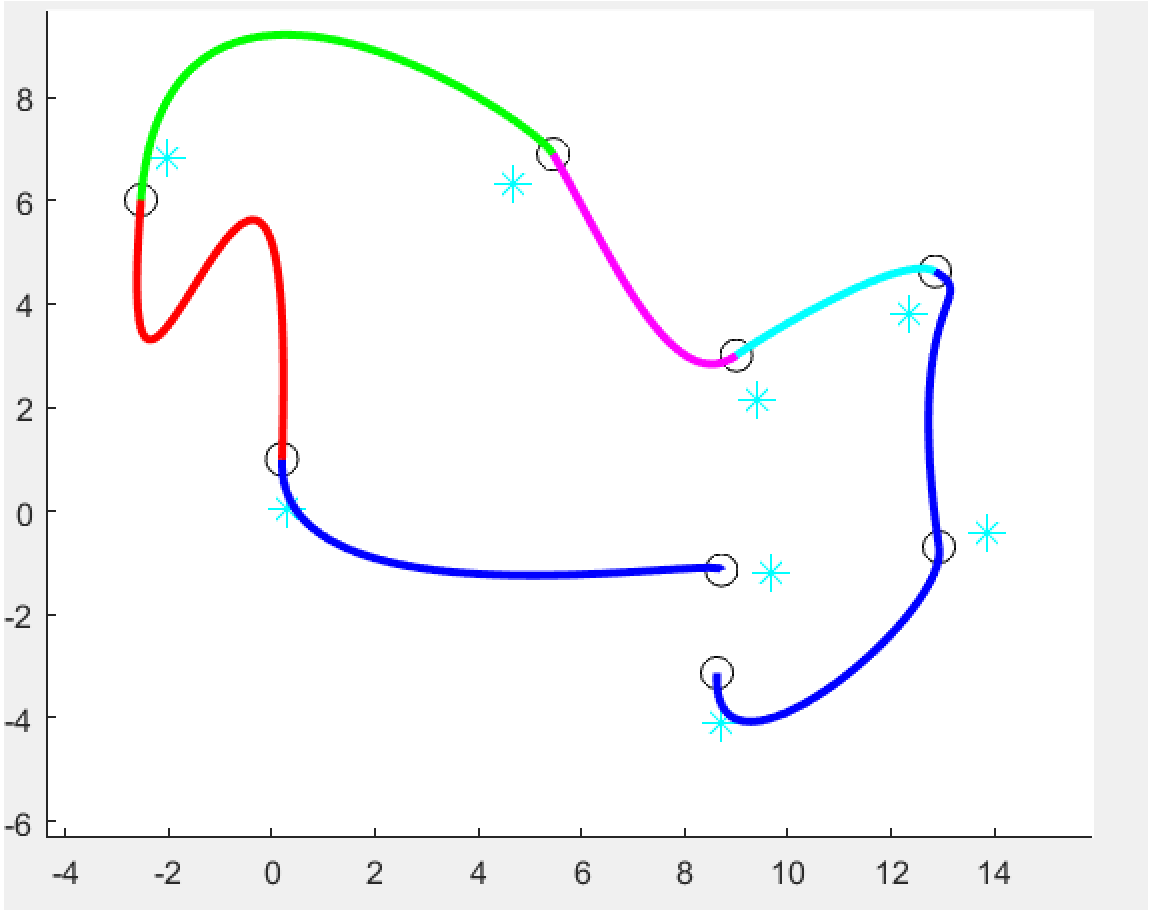
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Laisvai priimame „1“ reikšmę

$$\left(t_i, x_i, 1 \right), \left(t_i, y_i, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_i} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Abi taškų sekas interpoliuojame Ermito daugianariais

Pvz_SMA_8_8_Akima_splainai_2D_isvestiniu_valdymas_mouse.m



Interpoliavimas globaliaisiais splainais

Interpoliavimas globaliaisias splainais per *n* mazgų

- Siekiame sudaryti splainais paremtą glotnią interpoliavimo kreivę per n mazgų, kai duotos tik interpoliavimo mazgų koordintės. Funkcijos išvestinių reikšmės iš anksto nėra žinomos;

- Išvestines apskaičiuosime taip, lyg ta pati “lanksti liniuotė” būtų pravedama per visus interpoliavimo mazgus. Toks splainas primena *fizikine elgsena* paremtą kreivę;

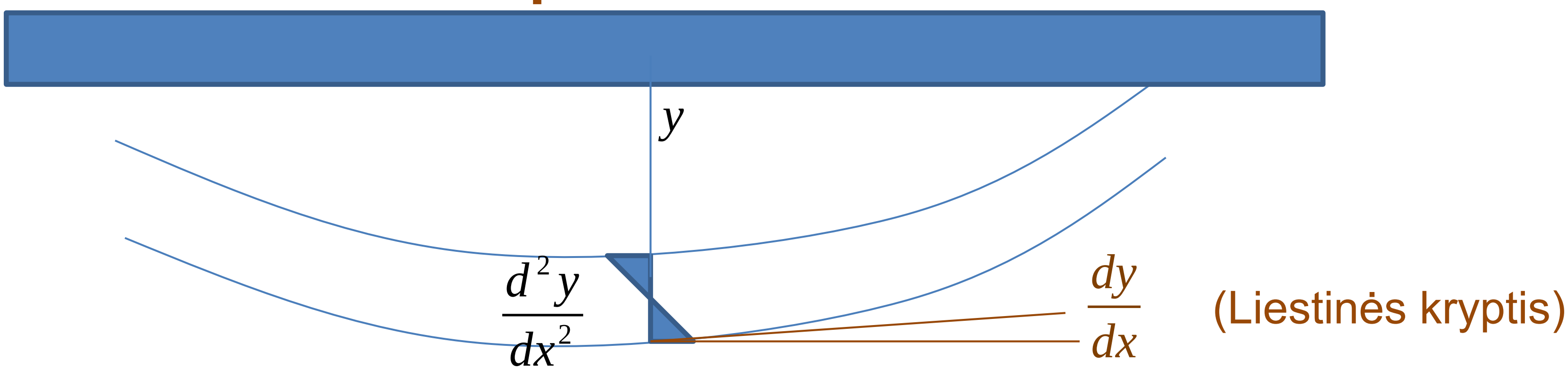
- Tuo šis interpoliavimo būdas skiriasi nuo *Ermito splainų,* kurie leidžia nustatyti bet kokią kreivės pirmosios išvestinės reikšmę mazguose

- Koreguojant tam tikro interpoliavimo mazgo padėtį, interpoliacinės kreivės forma kinta iškart visuose intervaluose. Tai reiškia, kad splainas reaguoja *globaliai*

Splainų per *n* taškų sudarymo principas

- **Žinome, kad kiekviename intervale splainas yra 3 eilės(kubinis) daugianaris;**

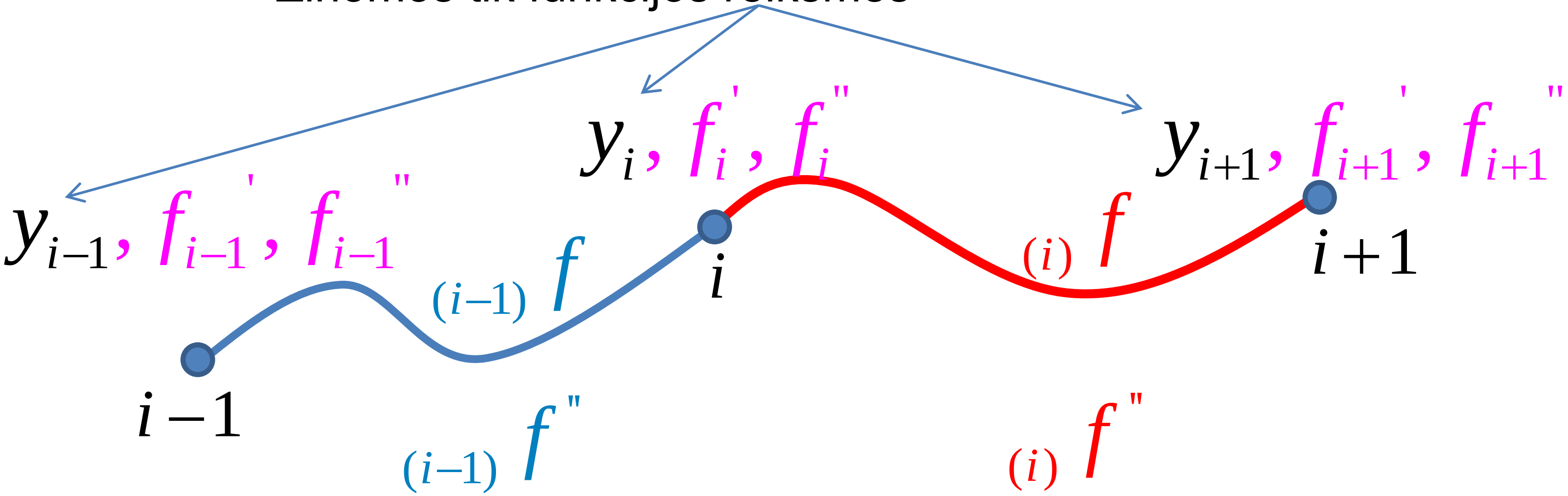
- **Intervalų sandūrose (t.y. interpoliavimo taškuose) visuminė kreivė turi išlikti glotni su 1 eilės defektu . Tai reiškia, kad intervalų sandūroje funkcijos išvestinės turi sutapti iki 2 eilės imtinai. Terminas *splainas* yra šio *1 eilės defekto splaino* sinonimas. Prisiminkime, kad Ermito splainų sutapo tik 1 eilės išvestinių reikšmės, todėl tai buvo 2 eilės defekto splainai**



(Antroji išvestinė reiškia kreivį. Jis nusako įtempių dydį, kurių vienodumas abiejose dviejų splainų sandūros pusėse užtikrina mechaninę pusiausvyros būklę)

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

Žinomos tik funkcijos reikšmės



$${}_{(i)}f'' = f_i'' \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}'' \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

antroji kubinio splaino išvestinė
kiekviename intervale yra tiesinė funkcija

$${}_{(i)}f \equiv {}_{(i)}f\left(x\right)$$

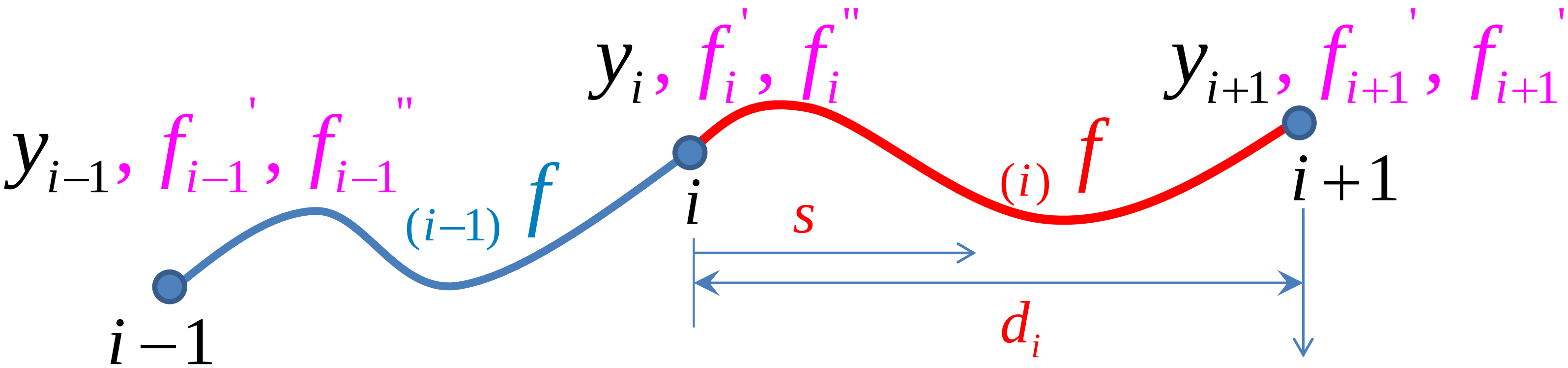
funkcija

$$y_j \equiv {}_{(i)}f\left(x_j\right); \quad f_j' \equiv \left.\frac{d\,{}_{(i)}f(x)}{dx}\right|_{x_j}; \quad f_j'' \equiv \left.\frac{d^2\,{}_{(i)}f(x)}{dx^2}\right|_{x_j}$$

funkcijos ir jos išvestinių reikšmės

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(pažymime kintamuosius taip, lyg koordinačių sistemos pradžia būtų x_i taške)



$$_{(i)}f^{''}(x) = f_i^{''}\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f_{i+1}^{''}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

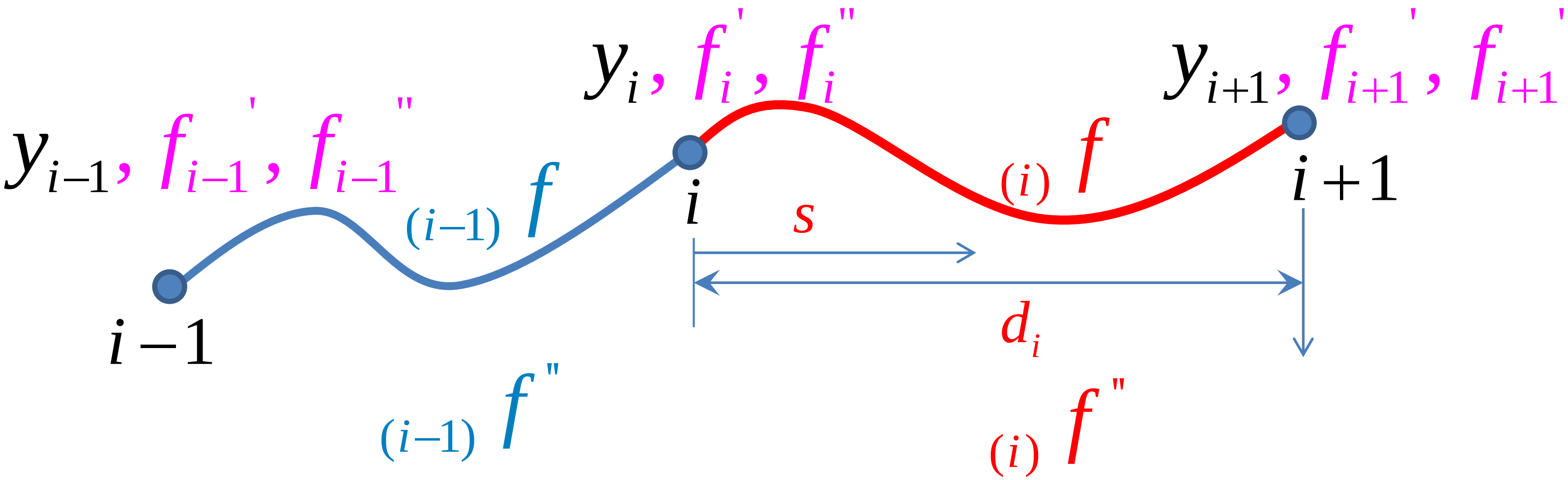
$$_{(i)}f^{''}(x) = f_i^{''}\frac{x_{i+1} - x_i - (x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} + f_{i+1}^{''}\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i};$$

$$_{(i)}f^{''}(s) = f_i^{''}\left(1 - \frac{s}{d_i}\right) + f_{i+1}^{''}\frac{s}{d_i};$$

$$s = x - x_i; \qquad d_i = x_{i+1} - x_i$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(du kartus integruojame antros išvestinės išraišką)



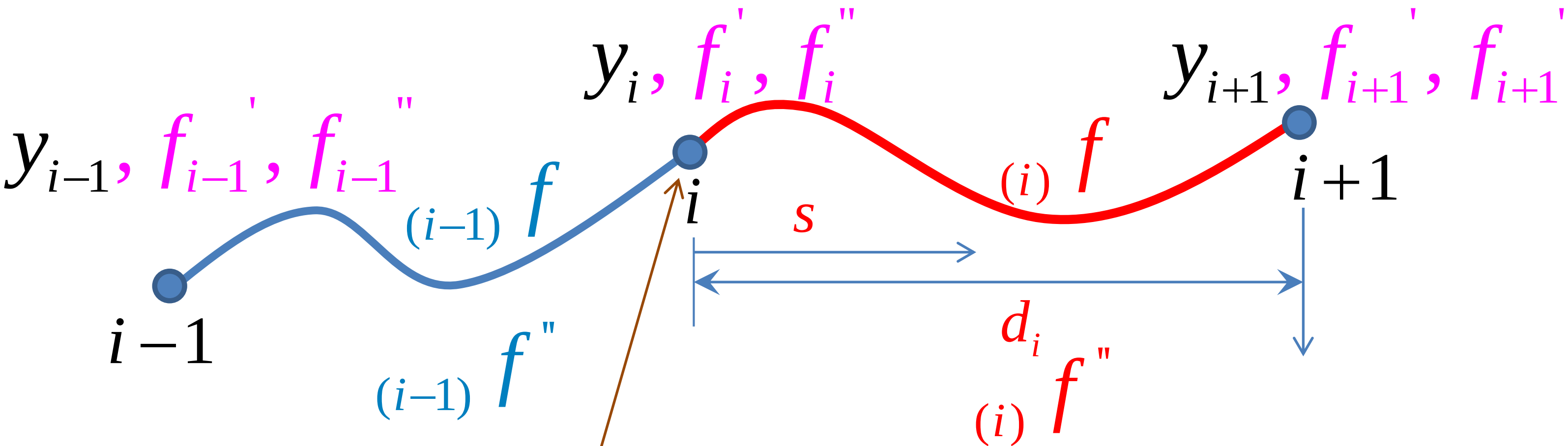
$$_{(i)}f''(s) = f_i''\left(1-\frac{s}{d_i}\right) + f_{i+1}''\frac{s}{d_i};$$

$$_{(i)}f'(s) = f_i'' s - f_i''\frac{s^2}{2d_i} + f_{i+1}''\frac{s^2}{2d_i} + C_1;$$

$$_{(i)}f(s) = f_i''\frac{s^2}{2} - f_i''\frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}''\frac{s^3}{6d_i} + C_1 s + C_2;$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(pagal duotą funkcijos reikšmę kairiajame gale randame integravimo konstantą C2)



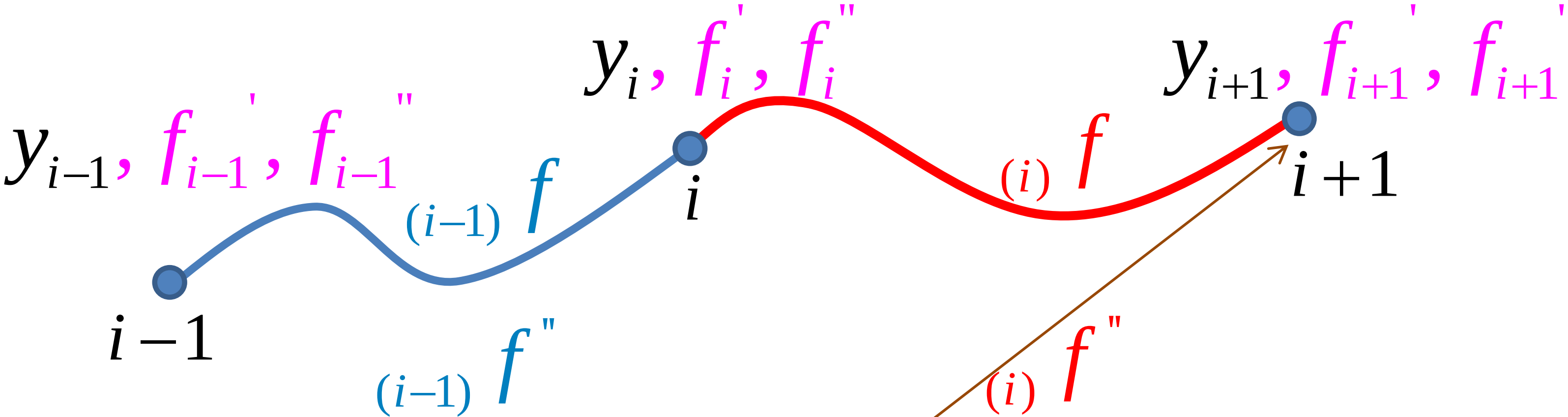
$$_{(i)}f(s) = f_i'' \frac{s^2}{2} - f_i'' \frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^3}{6d_i} + C_1 s + C_2;$$

$$y_i = {}_{(i)}f(0) = C_2;$$

$$C_2 = y_i$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(pagal duotą funkcijos reikšmę dešiniajame gale randame integravimo konstantą C1)

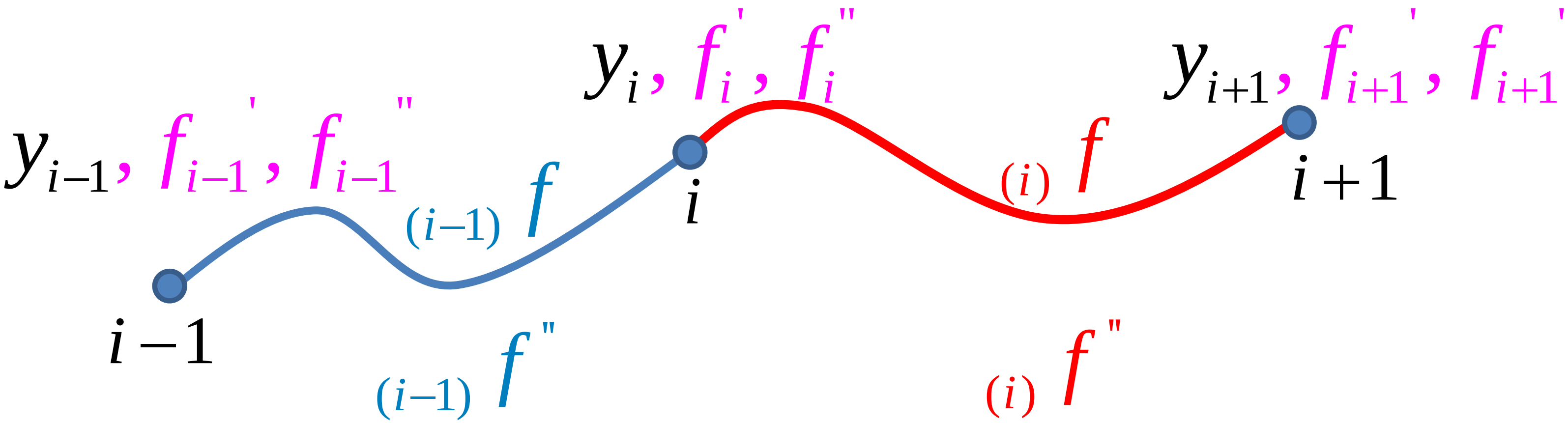


$$_{(i)}f(s) = f_i'' \frac{s^2}{2} - f_i'' \frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^3}{6d_i} + C_1 s + C_2;$$

$$y_{i+1} = {}_{(i)}f(d_i) = f_i'' \frac{d_i^2}{2} - f_i'' \frac{d_i^2}{6} + f_{i+1}'' \frac{d_i^2}{6} + C_1 d_i + y_i;$$

$$C_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i'' \frac{d_i}{3} - f_{i+1}'' \frac{d_i}{6}$$

Splaino matematinė išraiška

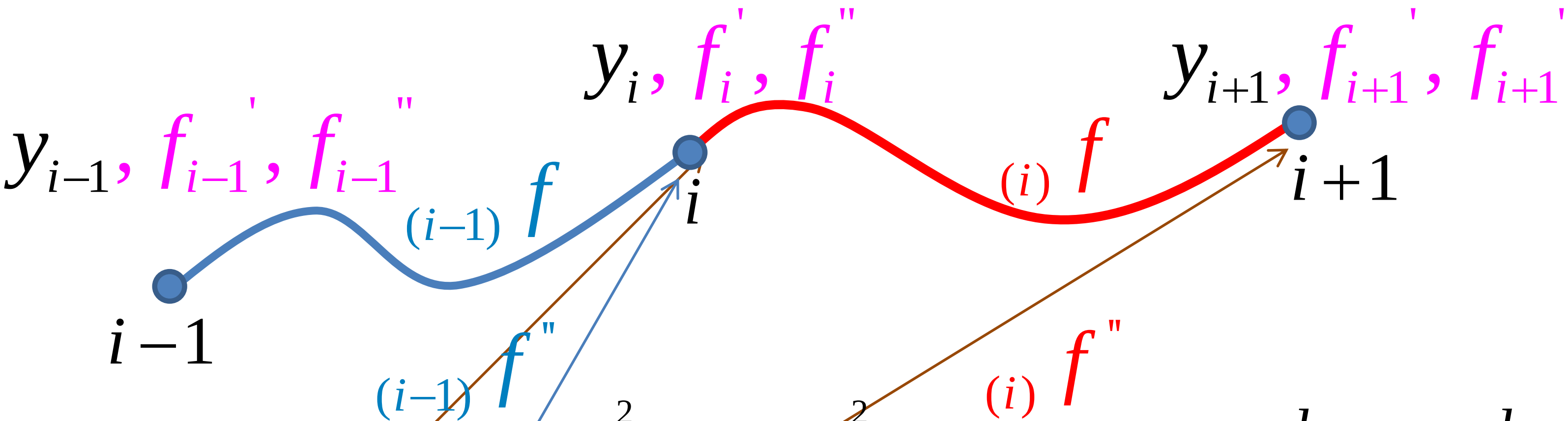


$$_{(i)}f(s) = f_i'' \frac{s^2}{2} - f_i'' \frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^3}{6d_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} s - f_i'' \frac{d_i}{3} s - f_{i+1}'' \frac{d_i}{6} s + y_i;$$

f_i'', f_{i+1}'' **reikšmės nėra duotos. Jas reikia rasti tokias, kad splainų sandūros būtų glotnios . Kiekviename mazge turi sutapti dviejų gretimų splaino segmentų pirmųjų išvestinių reikšmės.**

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(pirmųjų išvestinių išraiškos intervalų galuose)



$$_{(i)}f'(s) = f_i'' s - f_i'' \frac{s^2}{2d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^2}{2d_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i'' \frac{d_i}{3} - f_{i+1}'' \frac{d_i}{6};$$

$$_{(i)}f'(0) = \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i'' \frac{d_i}{3} - f_{i+1}'' \frac{d_i}{6};$$

$$_{(i)}f'(d_i) = f_i'' \frac{d_i}{6} + f_{i+1}'' \frac{d_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i};$$

$$_{(i-1)}f'(d_{i-1}) = f_{i-1}'' \frac{d_{i-1}}{6} + f_i'' \frac{d_{i-1}}{3} + \frac{y_i - y_{i-1}}{d_{i-1}};$$

turi sutapti

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(pagrindinė lygčių sistema, *n-2* lygčių ir *n* nežinomųjų)

$$_{(i)}f'(0) = {}_{(i-1)}f'(d_{i-1})$$

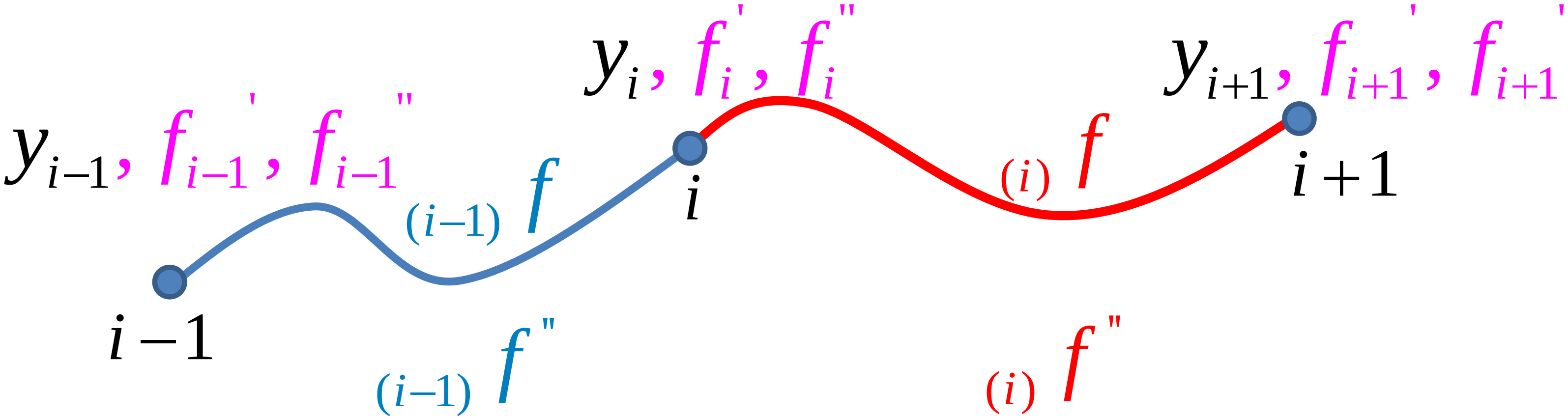
$$\frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - f_i''\frac{d_i}{3} - f_{i+1}''\frac{d_i}{6} = f_{i-1}''\frac{d_{i-1}}{6} + f_i''\frac{d_{i-1}}{3} + \frac{y_i - y_{i-1}}{d_{i-1}}$$

$$f_{i-1}''\frac{d_{i-1}}{6} + f_i''\frac{d_{i-1}+d_i}{3} + f_{i+1}''\frac{d_i}{6} = \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{d_{i-1}}, \quad i = 2:(n-1)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d_1}{6} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \frac{d_{n-1}}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3-y_2}{d_2} - \frac{y_2-y_1}{d_1} \\ \frac{y_4-y_3}{d_3} - \frac{y_3-y_2}{d_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \end{Bmatrix}$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(splainas „laisvais galais“. T.y. galiniuose mazguose kreivumas =0)

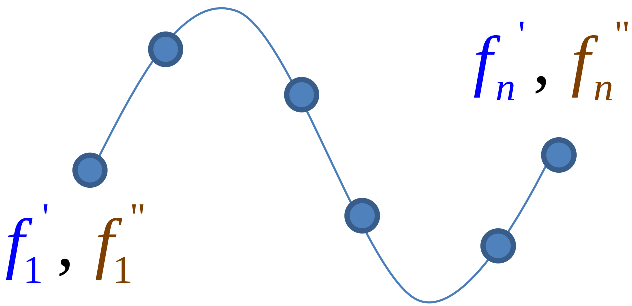


$$f_1'' = f_n'' = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d_1}{6} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \frac{d_{n-1}}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cancel{f_1''} \\ f_2'' \\ f_3'' \\ \vdots \\ f_{n-1}'' \\ \cancel{f_n''} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3-y_2}{d_2} - \frac{y_2-y_1}{d_1} \\ \frac{y_4-y_3}{d_3} - \frac{y_3-y_2}{d_2} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \end{Bmatrix}$$

Splaino matematinės išraiškos sudarymas

(periodinis splainas)



$$_{(1)}\ f'(0) =_{(n-1)} f'(d_{n-1})$$

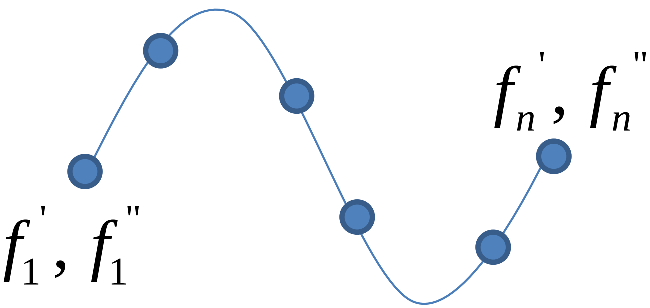
$$_{(i)}\ f'(0) = \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} - f_i^{''} \frac{d_i}{3} - f_{i+1}^{''} \frac{d_i}{6};$$

$$_{(i)}\ f'(d_i) = f_i^{''} \frac{d_i}{6} + f_{i+1}^{''} \frac{d_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i};$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_1^{''} \frac{d_1}{3} + f_2^{''} \frac{d_1}{6} + f_{n-1}^{''} \frac{d_{n-1}}{6} + f_n^{''} \frac{d_{n-1}}{3} = \frac{y_2 - y_1}{d_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{d_{n-1}}; \\ f_1^{''} - f_n^{''} = 0 \end{array}}$$

šios lygtys turi būti sprendžiamos drauge su pagrindine splaino lygčių sistema

Splaino matematinės išraiškos sudarymas (periodinis splainas)

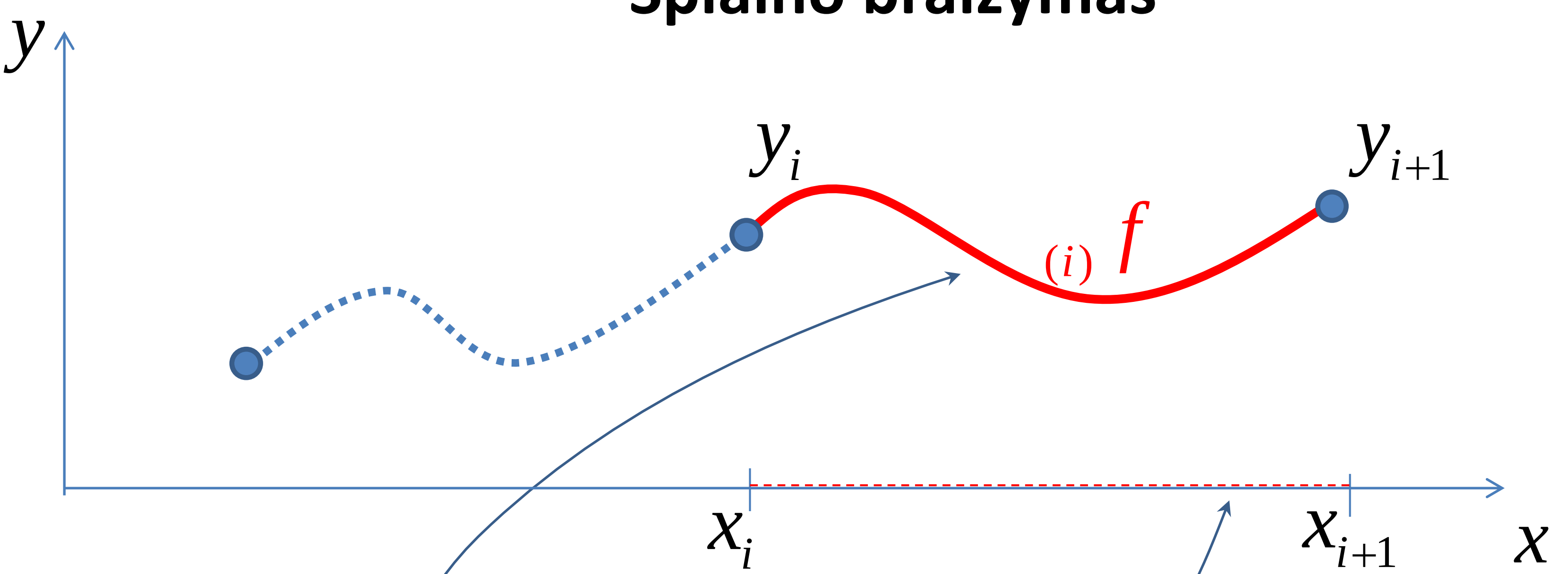


Pagrindinė sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{d_1}{6} & \frac{d_1+d_2}{3} & \frac{d_2}{6} & & & & & \\ & \frac{d_2}{6} & \frac{d_2+d_3}{3} & \frac{d_3}{6} & & & \mathbf{0} & \\ & & \frac{d_3}{6} & \frac{d_3+d_4}{3} & \frac{d_4}{6} & & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{d_{n-2}}{6} & \frac{d_{n-2}+d_{n-1}}{3} & \frac{d_{n-1}}{6} \\ \frac{d_1}{3} & \frac{d_1}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{d_{n-1}}{6} & \frac{d_{n-1}}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^{''} \\ f_2^{''} \\ f_3^{''} \\ \vdots \\ f_{n-1}^{''} \\ f_n^{''} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\ \frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\ \frac{y_5-y_4}{d_4}-\frac{y_4-y_3}{d_3} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \\ \frac{y_2-y_1}{d_1}-\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dvi papildomos lygtys

Splaino braižymas



Kiekvienas splaino segmentas braižomas atskirai:

1) **Parenkami vaizdavimo taškai intervale [x_i, x_{i+1}] ;**

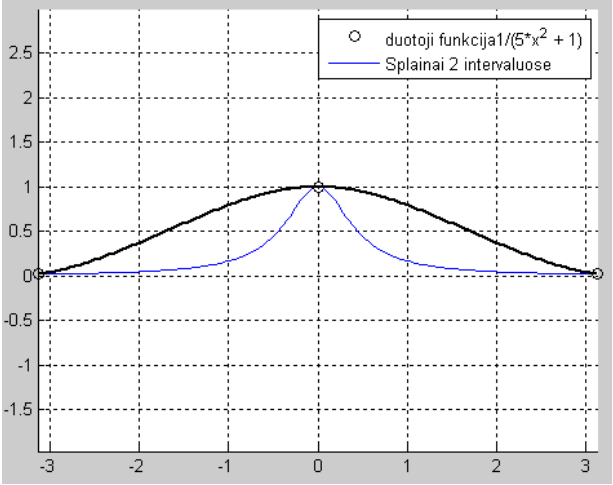
2) **Splainas braižomas, vietoje s ir d_i įrašius reikšmes**

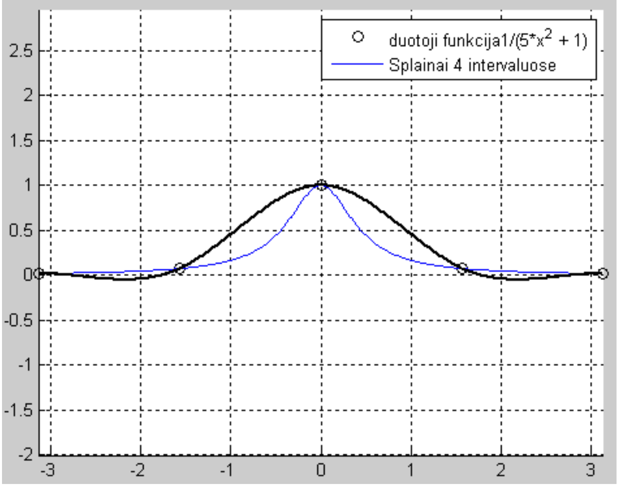
$$s = x - x_i; \qquad d_i = x_{i+1} - x_i$$

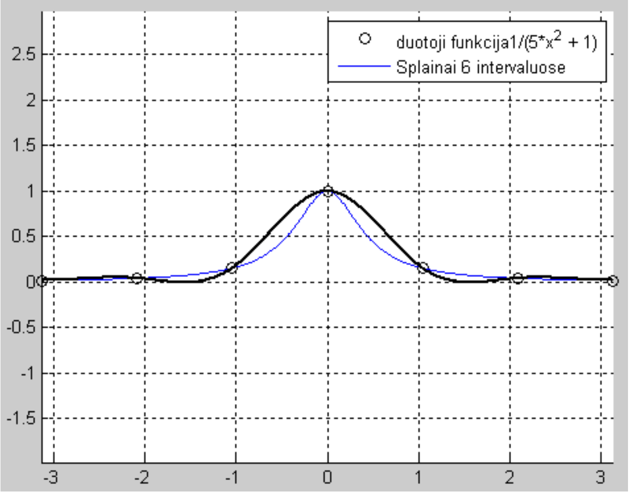
$$^{(i)}f = f_i'' \frac{s^2}{2} - f_i'' \frac{s^3}{6d_i} + f_{i+1}'' \frac{s^3}{6d_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{d_i} s - f_i'' \frac{d_i}{3} s - f_{i+1}'' \frac{d_i}{6} s + y_i$$

1 eilės defekto splainai:

Pvz_SMA_8_9_Splainai_1D.m

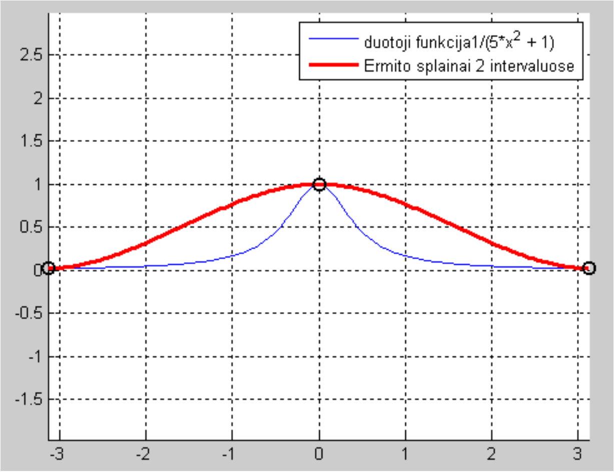


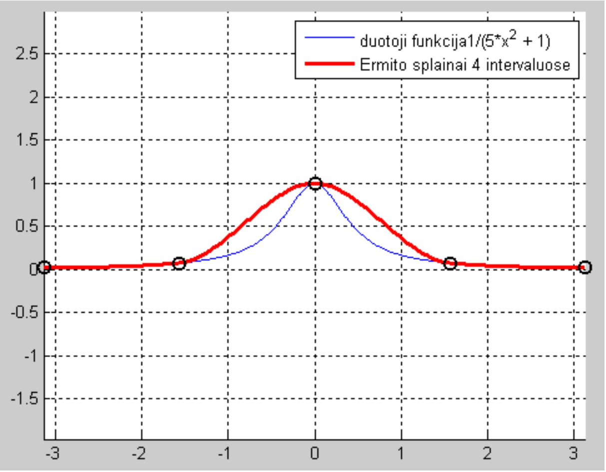


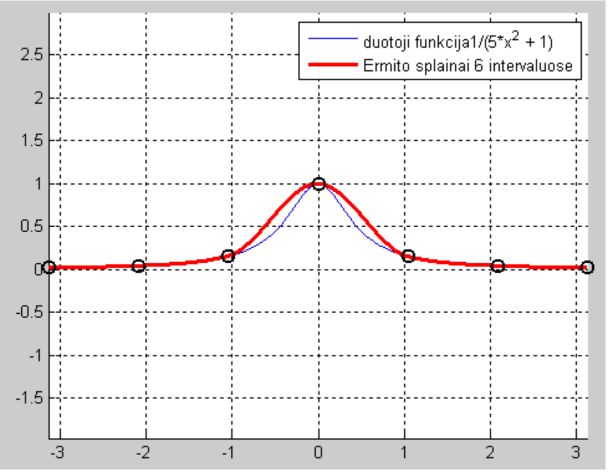


Ermito splainai:

Pvz_SMA_8_3_Ermito_splainai_1D.m

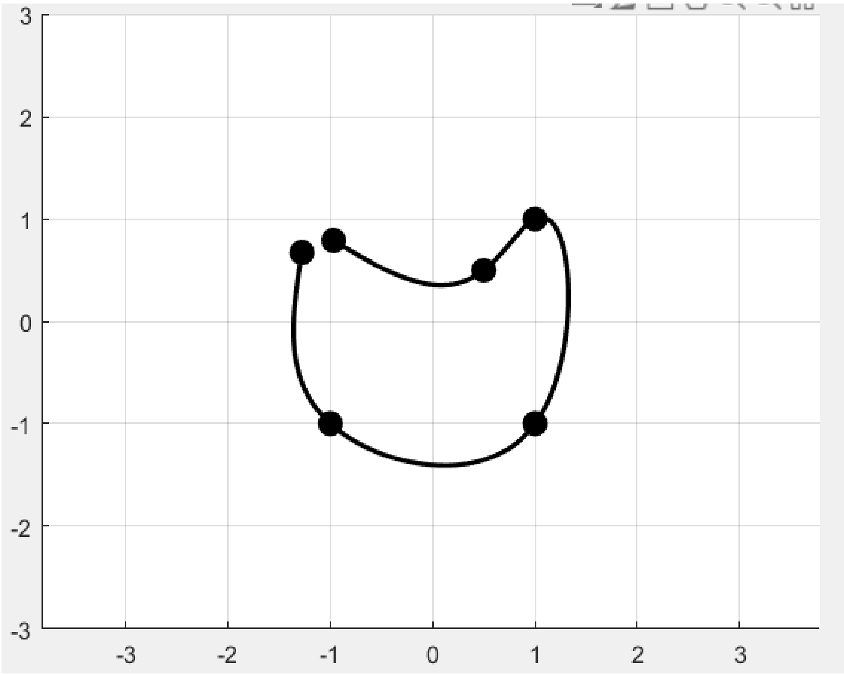




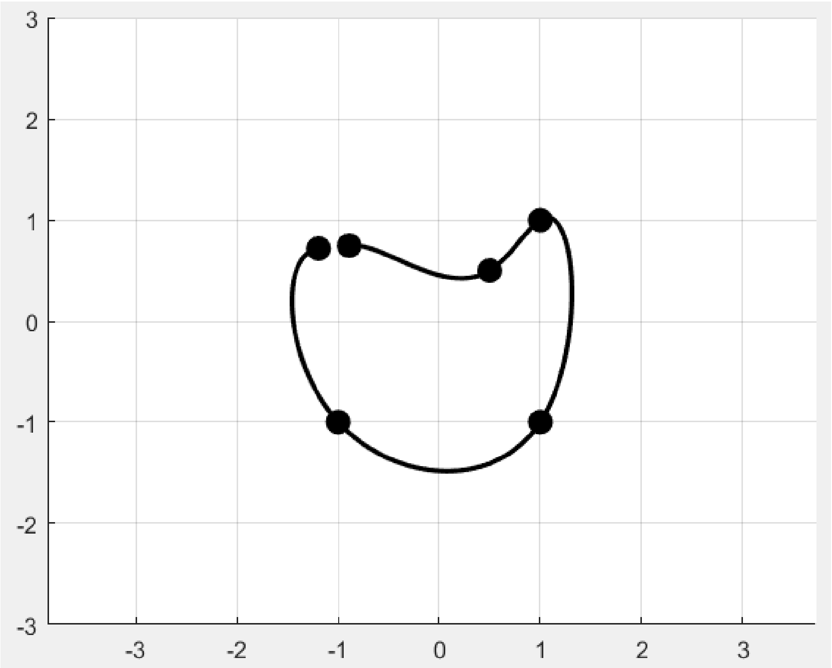


Parametrinis interpoliavimas globaliais splainais

Splainai laisvais galais

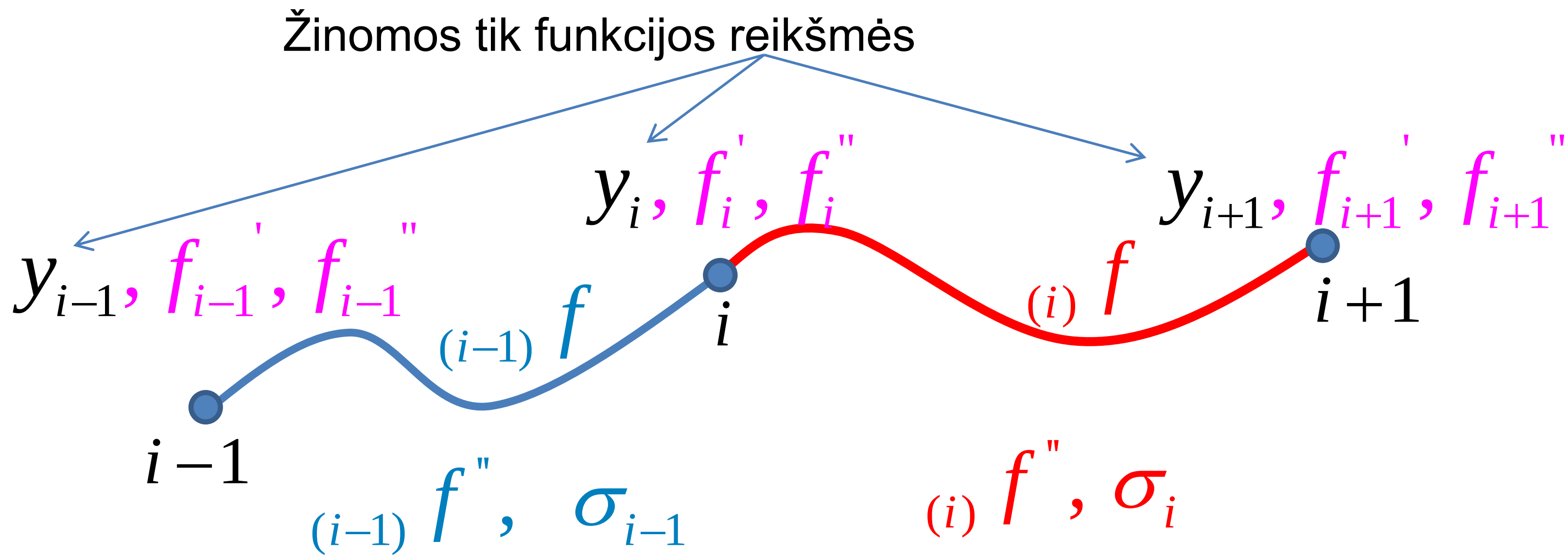


Periodiniai splainai



Pvz_SMA_8_10_Splainai_2D_mouse.m

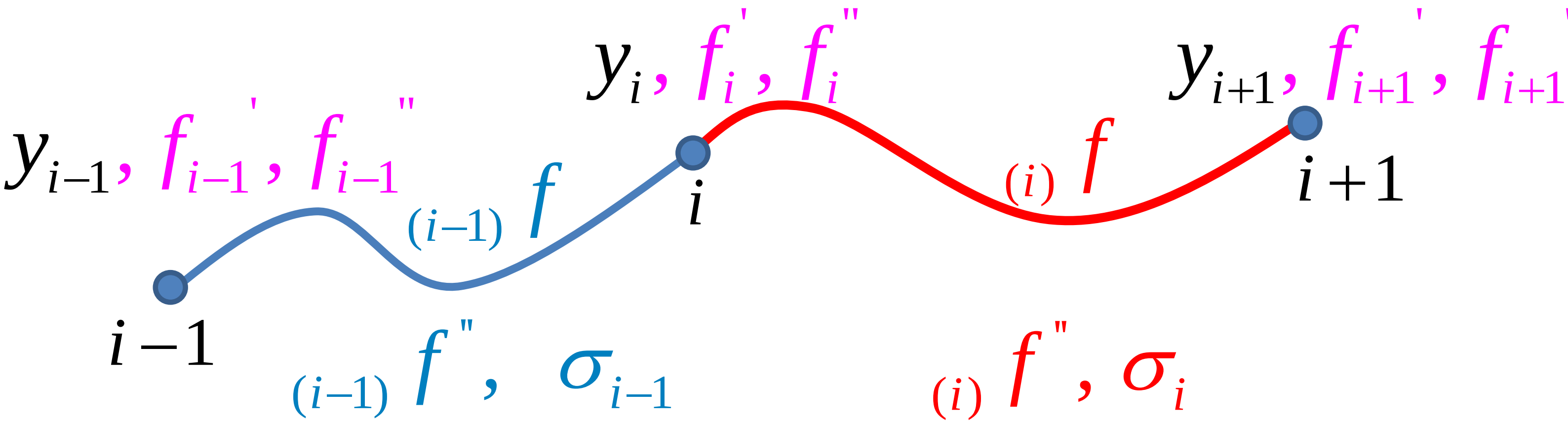
Įtemptieji splainai



$$\left({}_{(i)}f'' - \sigma_i^2 \, {}_{(i)}f \right) = (f_i'' - \sigma_i^2 y_i)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} + (f_{i+1}'' - \sigma_i^2 y_{i+1})\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

- **Įtemptųjų splainų fizikinė prasmė yra išilgai įtempta lanksti liniuotė, kai *išilginės įtempimo jėgos* dydis i segmente yra** σ_i
- **Splaino funkcijos išraiška gaunama, sprendžiant *diferencialinę lygtį*.** (Prisiminkime, kad neįtempto splaino atveju pakako du kartus suintegruoti dešiniąją pusę)

Įtemptojo splaino lygčių sistema



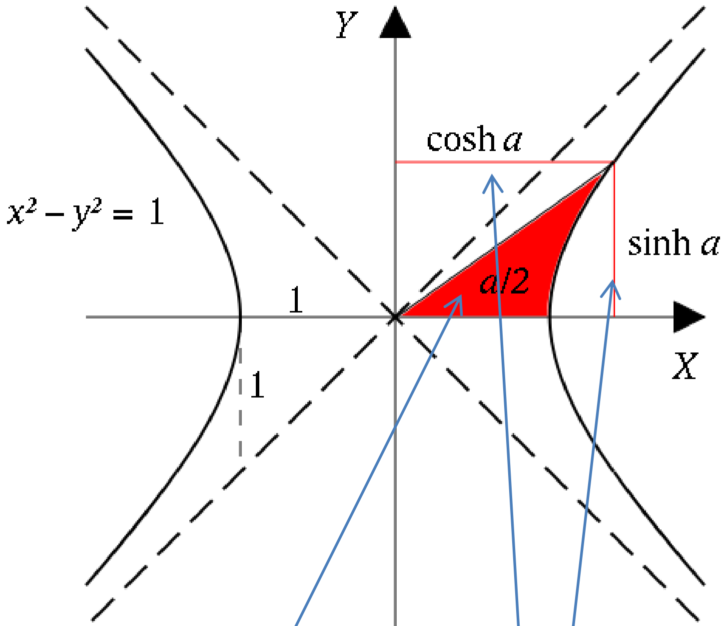
$$\left(\frac{1}{\sigma_{i-1}^2 d_{n-2}} - \frac{1}{\sigma_{i-1}\sinh(\sigma_{i-1}d_{i-1})}\right) f_{i-1}'' +$$

$$+\left(\frac{\cosh(\sigma_{i-1}d_{i-1})}{\sigma_{i-1}\sinh(\sigma_{i-1}d_{i-1})} + \frac{\cosh(\sigma_i d_i)}{\sigma_i \sinh(\sigma_i d_i)} - \frac{1}{\sigma_{i-1}^2 d_{i-1}} - \frac{1}{\sigma_i^2 d_i}\right) f_i'' +$$

$$+\left(\frac{1}{\sigma_{i+1}^2 d_{i+1}} - \frac{1}{\sigma_{i+1}\sinh(\sigma_{i+1}d_{i+1})}\right) f_{i+1}'' =$$

$$= \frac{y_{i+1}-y_i}{d_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{d_{i-1}}, \quad i = 2:n-1$$

Hiperbolinės funkcijos



$a/2$ - figūros plotas

sinh(a) ir *cosh(a)* yra šių atkarpų ilgiai

$$\boxed{\begin{aligned}\sinh\alpha &= \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{2\alpha}-1}{2e^{\alpha}};\\ \cosh\alpha &= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \frac{e^{2\alpha}+1}{2e^{\alpha}};\end{aligned}}$$

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha}-1}{e^{2\alpha}+1};$$

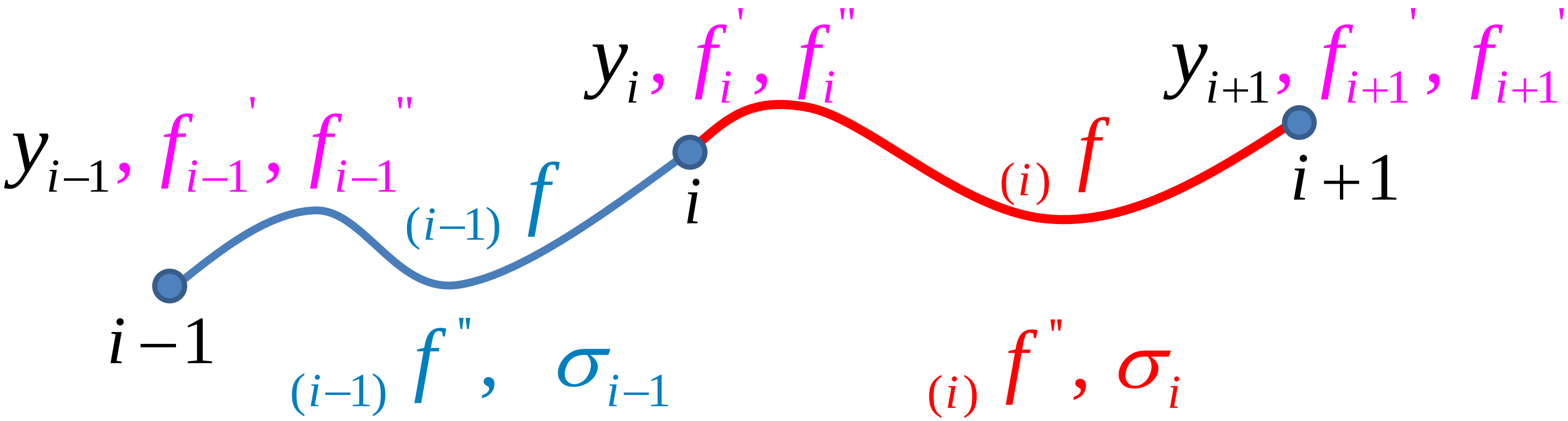
$$\coth\alpha = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha}+1}{e^{2\alpha}-1};$$

$$\operatorname{sech}\alpha = \frac{1}{\cosh\alpha} = \frac{2}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}} = \frac{2e^{\alpha}}{e^{2\alpha}+1};$$

$$\operatorname{csch}\alpha = \frac{1}{\sinh\alpha} = \frac{2}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}} = \frac{2e^{\alpha}}{e^{2\alpha}-1};$$

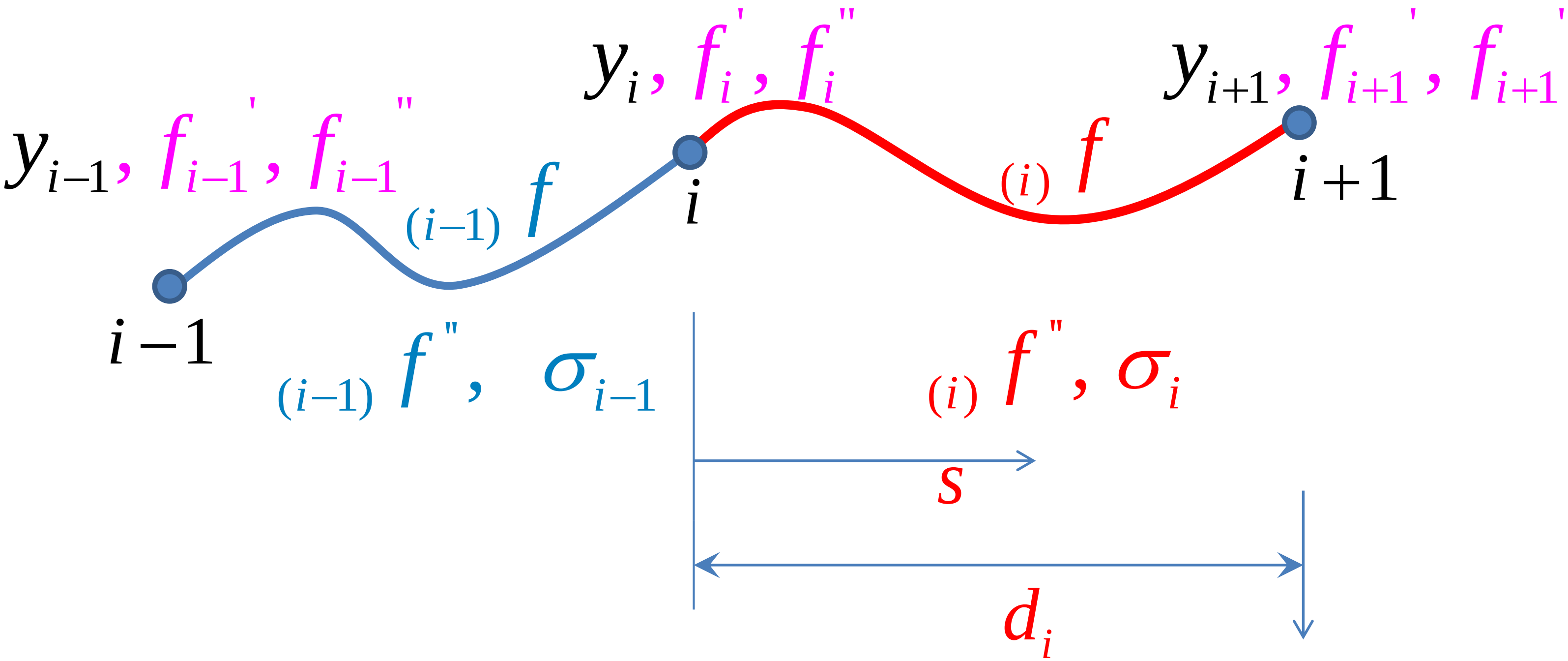
$$\boxed{\begin{aligned}\sinh'\alpha &= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} = \cosh\alpha;\\ \cosh'\alpha &= \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} = \sinh\alpha;\end{aligned}}$$

Įtemptojo splaino lygčių sistema (“laisvi galai”)



$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sigma_1^2 d_1}-\frac{1}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)} & \frac{\cosh(\sigma_1 d_1)}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)}+\frac{\cosh(\sigma_2 d_2)}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)}-\frac{1}{\sigma_1^2 d_1}-\frac{1}{\sigma_2^2 d_2} & \frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)} & \frac{\cosh(\sigma_2 d_2)}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)}+\frac{\cosh(\sigma_3 d_3)}{\sigma_3\sinh(\sigma_3 d_3)}-\frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_3^2 d_3} & \frac{1}{\sigma_3^2 d_3}-\frac{1}{\sigma_3\sinh(\sigma_3 d_3)} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{n-2}^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma_{n-2}\sinh(\sigma_{n-2} d_{n-2})} & \frac{\cosh(\sigma_{n-2} d_{n-2})}{\sigma_{n-2}\sinh(\sigma_{n-2} d_{n-2})}+\frac{\cosh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}-\frac{1}{\sigma_{n-2}^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}} & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}}-\frac{1}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})} \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\
\frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\
\vdots \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \\
0 \\
0
\end{Bmatrix}
$$

Įtemptojo splaino kreivės išraiška



$$_{(i)}f = \frac{f''_i}{\sigma_i^2}\frac{\sinh\left(\sigma_i\left(d_i - s\right)\right)}{\sinh\left(\sigma_i d_i\right)} + \left(y_i - \frac{f''_i}{\sigma_i^2}\right)\frac{d_i - s}{d_i} + \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i^2}\frac{\sinh\left(\sigma_i s\right)}{\sinh\left(\sigma_i d_i\right)} + \left(y_{i+1} - \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i^2}\right)\frac{s}{d_i}$$

$$i = 1 : n-1$$

Įtemptojo periodinio splaino atvejis

1. $f''_1 = f''_n$

2. ${}_{(1)} f'(0) - {}_{(n-1)} f'(d_{n-1}) = 0;$

$$ {}_{(i)} f' = -\frac{f''_i}{\sigma_i}\frac{\cosh\left(\sigma_i\left(d_i - s\right)\right)}{\sinh\left(\sigma_i d_i\right)} - \left(y_i - \frac{f''_i}{\sigma_i^{\,2}}\right)\frac{1}{d_i} + \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i}\frac{\cosh\left(\sigma_i s\right)}{\sinh\left(\sigma_i d_i\right)} + \left(y_{i+1} - \frac{f''_{i+1}}{\sigma_i^{\,2}}\right)\frac{1}{d_i} \;, $$

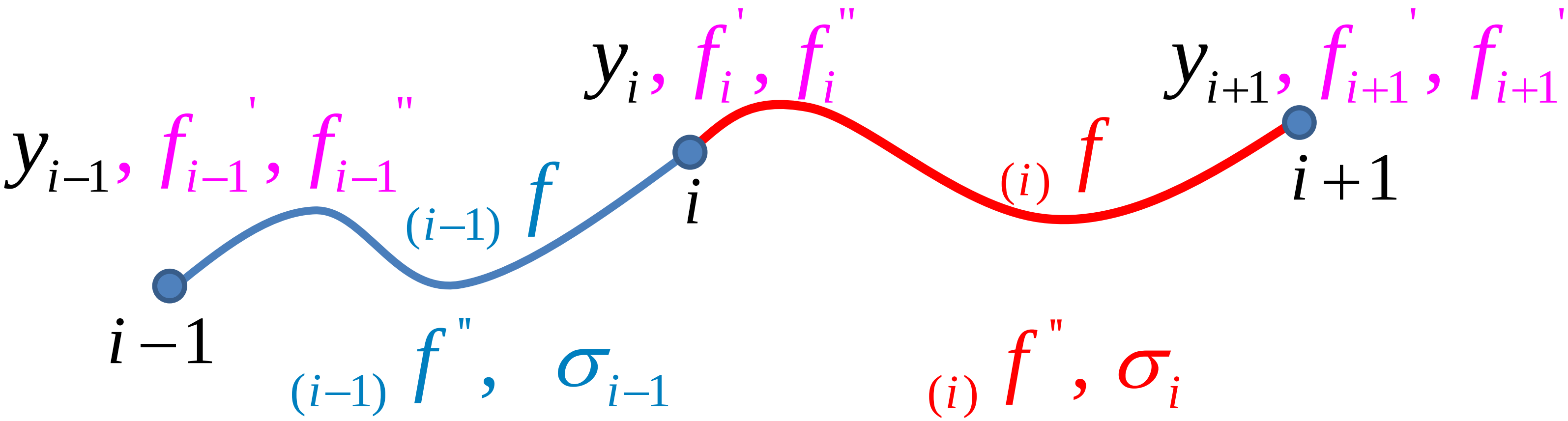
$$ -\frac{f''_1}{\sigma_1}\frac{\cosh\left(\sigma_1 d_1\right)}{\sinh\left(\sigma_1 d_1\right)} + \frac{f''_1}{\sigma_1^{\,2} d_1} + \frac{f''_2}{\sigma_1}\frac{1}{\sinh\left(\sigma_1 d_1\right)} - \frac{f''_2}{\sigma_1^{\,2} d_1} + \frac{f''_{n-1}}{\sigma_{n-1}}\frac{1}{\sinh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)} - \frac{f''_{n-1}}{\sigma_{n-1}^{\,2} d_{n-1}} - $$

$$ -\frac{f''_n}{\sigma_{n-1}}\frac{\cosh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)}{\sinh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)} + \frac{f''_n}{\sigma_{n-1}^{\,2} d_{n-1}} = \frac{y_1 - y_2}{d_1} - \frac{y_{n-1} - y_n}{d_{n-1}}; $$

$$ \left(-\frac{\cosh\left(\sigma_1 d_1\right)}{\sigma_1 \sinh\left(\sigma_1 d_1\right)} + \frac{1}{\sigma_1^{\,2} d_1}\right) f''_1 + \left(\frac{1}{\sigma_1 \sinh\left(\sigma_1 d_1\right)} - \frac{1}{\sigma_1^{\,2} d_1}\right) f''_2 + \left(\frac{1}{\sigma_{n-1} \sinh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)} - \frac{1}{\sigma_{n-1}^{\,2} d_{n-1}}\right) f''_{n-1} + $$

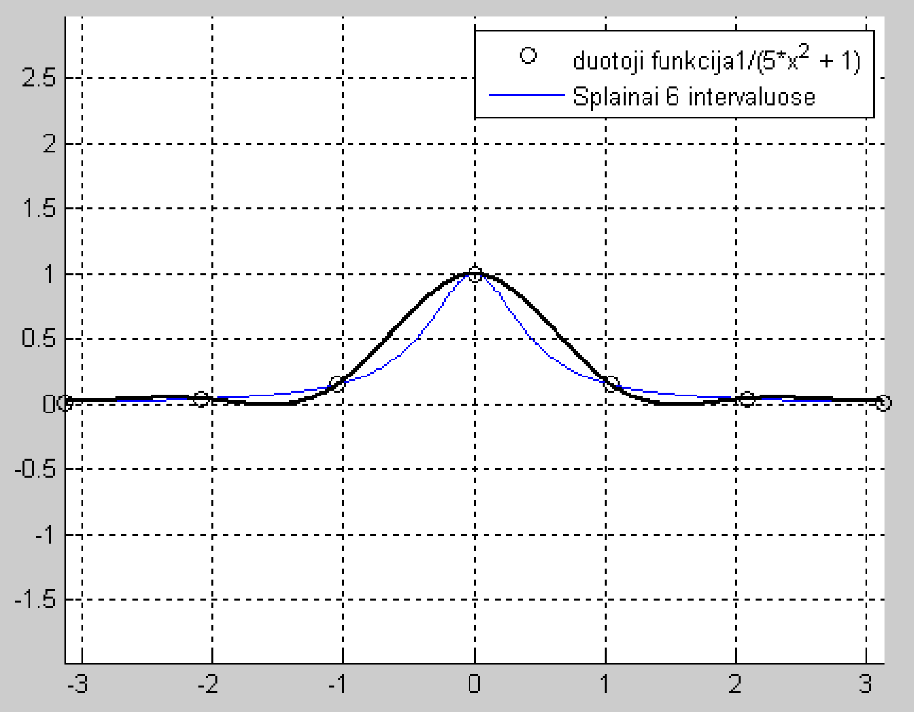
$$ + \left(-\frac{\cosh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)}{\sigma_{n-1} \sinh\left(\sigma_{n-1} d_{n-1}\right)} + \frac{1}{\sigma_{n-1}^{\,2} d_{n-1}}\right) f''_n = \frac{y_1 - y_2}{d_1} - \frac{y_{n-1} - y_n}{d_{n-1}} $$

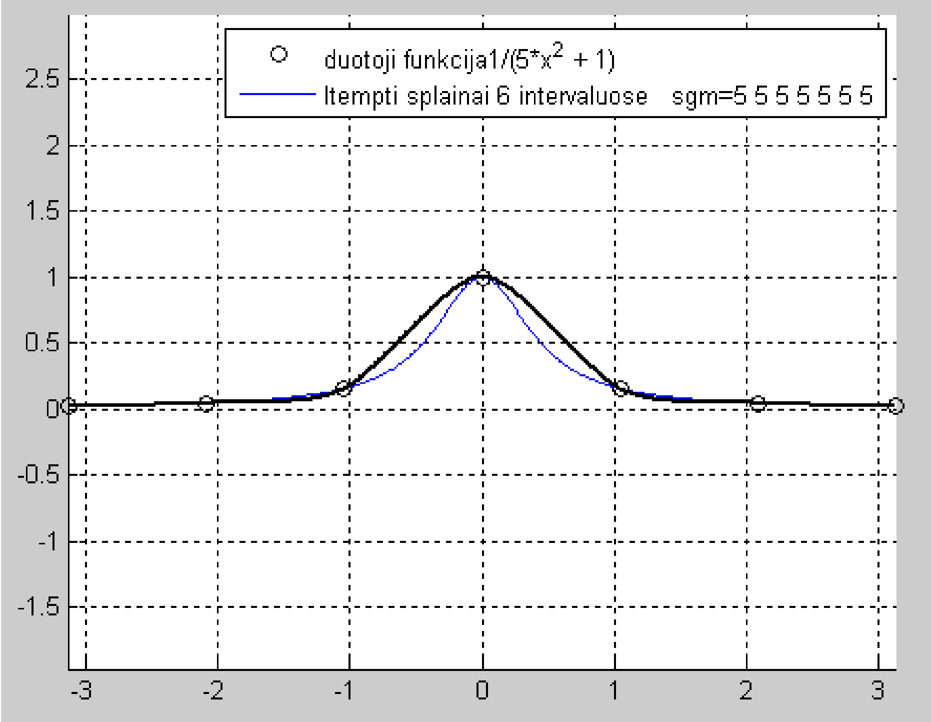
Įtemptojo splaino lygčių sistema ("periodinis")

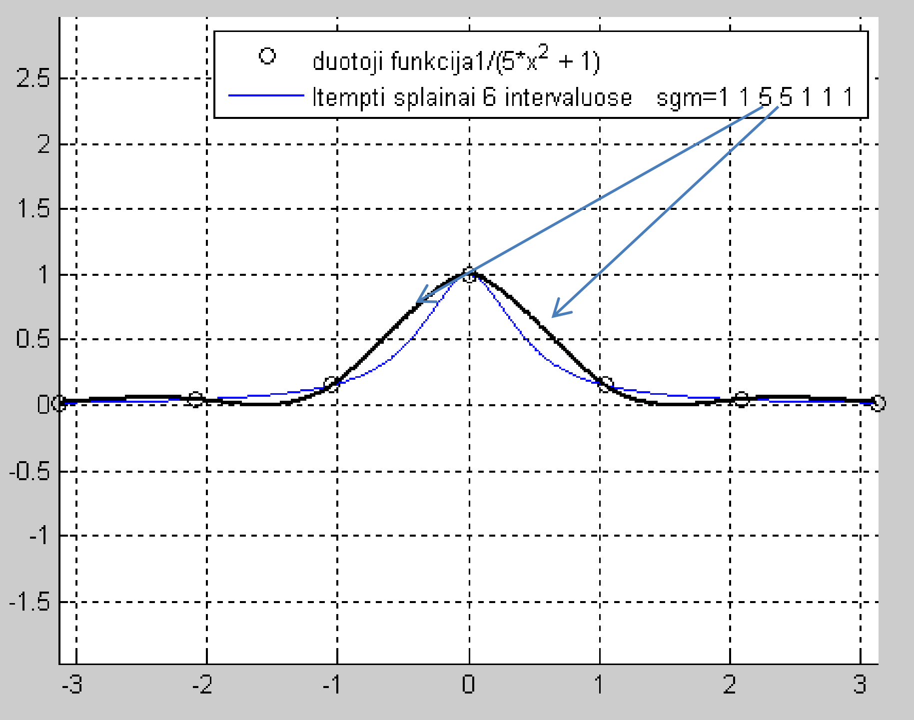


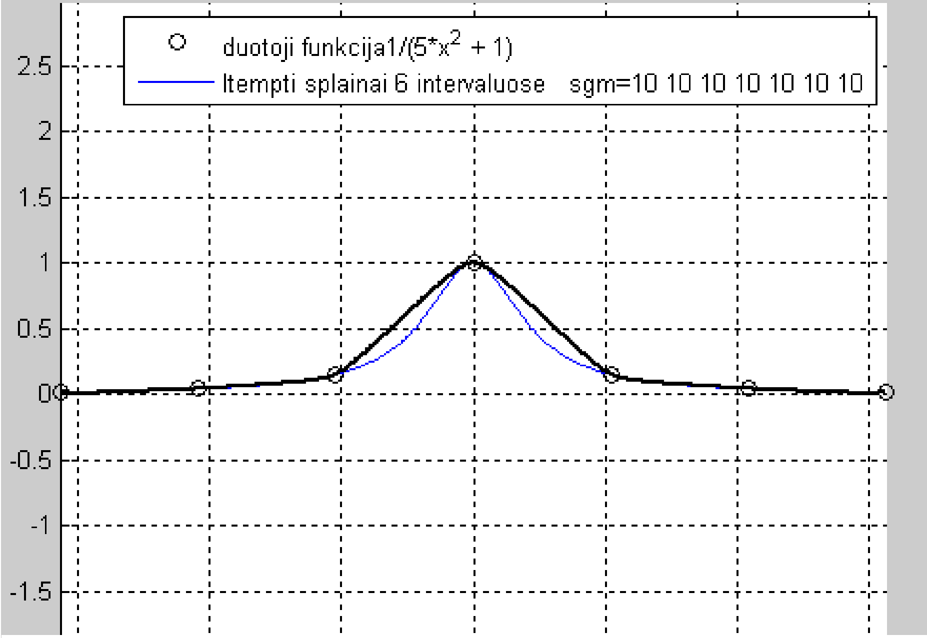
$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sigma_1^2 d_1}-\frac{1}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)} & \frac{\cosh(\sigma_1 d_1)}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)}+\frac{\cosh(\sigma_2 d_2)}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)}-\frac{1}{\sigma_1^2 d_1}-\frac{1}{\sigma_2^2 d_2} & \frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)} & \frac{\cosh(\sigma_2 d_2)}{\sigma_2\sinh(\sigma_2 d_2)}+\frac{\cosh(\sigma_3 d_3)}{\sigma_3\sinh(\sigma_3 d_3)}-\frac{1}{\sigma_2^2 d_2}-\frac{1}{\sigma_3^2 d_3} & \frac{1}{\sigma_3^2 d_3}-\frac{1}{\sigma_3\sinh(\sigma_3 d_3)} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{n-2}^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma_{n-2}\sinh(\sigma_{n-2} d_{n-2})} & \frac{\cosh(\sigma_{n-2} d_{n-2})}{\sigma_{n-2}\sinh(\sigma_{n-2} d_{n-2})}+\frac{\cosh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}-\frac{1}{\sigma_{n-2}^2 d_{n-2}}-\frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}} & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}}-\frac{1}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})} \\
-\frac{\cosh(\sigma_1 d_1)}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)}+\frac{1}{\sigma_1^2 d_1} & \frac{1}{\sigma_1\sinh(\sigma_1 d_1)}-\frac{1}{\sigma_1^2 d_1} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}-\frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}} & -\frac{\cosh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}{\sigma_{n-1}\sinh(\sigma_{n-1} d_{n-1})}+\frac{1}{\sigma_{n-1}^2 d_{n-1}} \\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1
\end{bmatrix}
\left\{\begin{matrix} f_1'' \\ f_2'' \\ \vdots \\ f_n'' \end{matrix}\right\} =
$$

$$
= \left\{\begin{matrix}
\frac{y_3-y_2}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_1} \\
\frac{y_4-y_3}{d_3}-\frac{y_3-y_2}{d_2} \\
\vdots \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{d_{n-2}} \\
\frac{y_1-y_2}{d_1}-\frac{y_{n-1}-y_n}{d_{n-1}} \\
0
\end{matrix}\right\}
$$





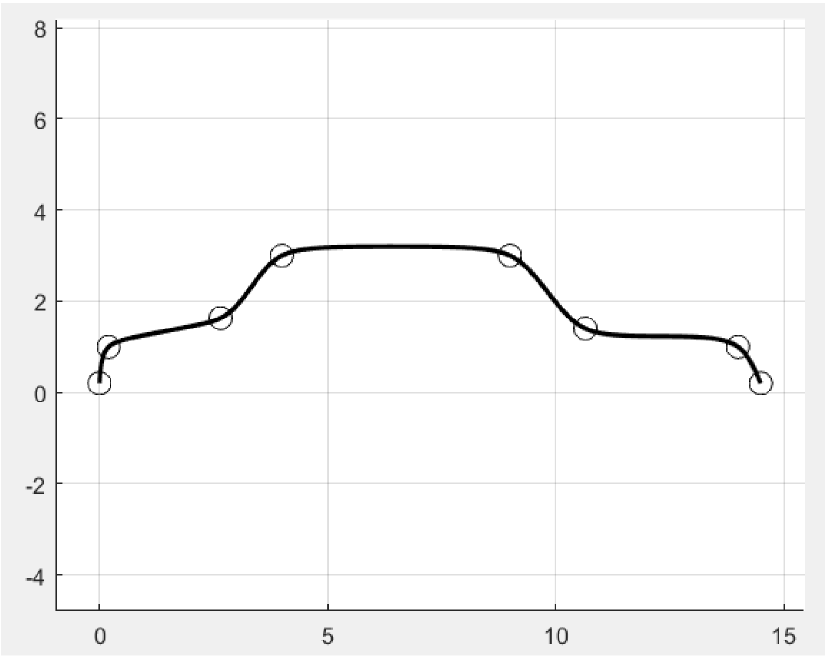




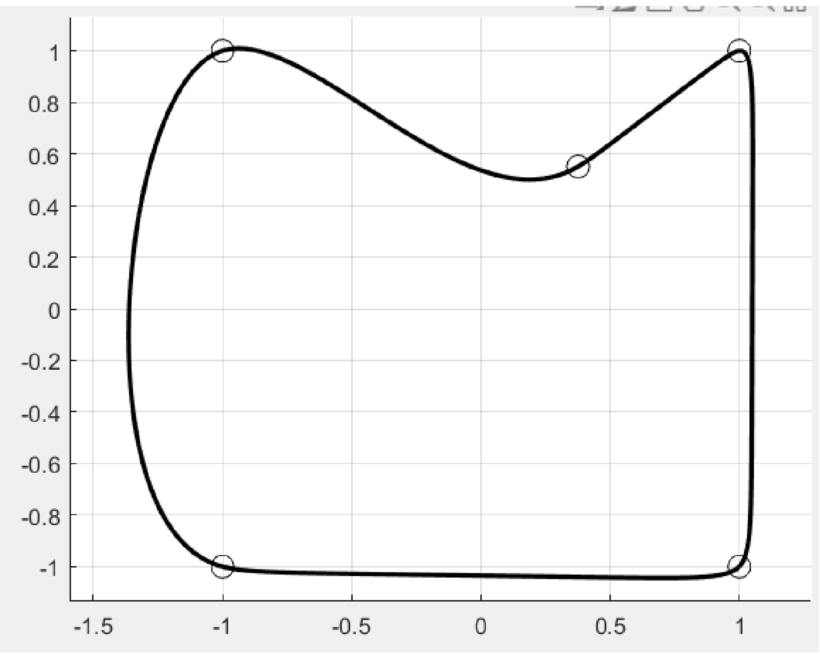
Pvz_SMA_8_11_Itempti_splainai_1D.m

Parametrinis interpoliavimas įtemptais splainais

Įtempti splainai laisvais galais



Įtempti periodiniai splainai



Pvz_SMA_8_12_Itempti_splainai_2D_mouse.m

SMA_08_ Klausimai savikontrolei(1):

1. Kiek bazinių funkcijų reikia naudoti, kai N interpoliavimo mazguose duotos ne tik funkcijos, tačiau ir jos išvestinės reikšmės;
2. Paaiškinkite, kaip sprendžiamas 1. klausime minėtas interpoliavimo uždavinys Hemingo metodu;
3. Kas yra Ermito funkcijos, sprendžiant interpoliavimo uždavinį. Kiek jų, kokia daugianarių eilė. Paaiškinkite, kaip jos gaunamos;
4. Kas yra Ermito splainas;
5. Kas yra splaino defektas, koks jis yra Ermito splainų atveju;
6. Kada interpoliuojamos funkcijos išvestinių reikšmes nustatome pagal nutylėjimą, kam tai reikalinga;

SMA_08_ Klausimai savikontrolei(2):

7. Apibūdinkite globalųjį splainą. Kuo jis skiriasi nuo Ermito splaino;
8. Naudodamiesi literatūra, paaiškinkite, kaip apskaičiuojami globalieji splainai;
9. Kas yra globaliojo splaino kraštinės sąlygos (pvz. laisvųjų galų, periodinės). Kaip jos nustatomos;
10. Apibūdinkite įtemptuosius splainus. Kuo jie skiriasi nuo Ermito ir nuo įprastinių globaliųjų splainų