Aproksimavimas bangelėmis, kurių pagrindas >1:

Debiuši (Daubechie) bangelių šeima

Bangelės, kurių pagrindas >1.
Debiuši (Daubechie) bangelių šeima

- Haro bangelių pagrindas yra 1. Tai reiškia, kad nei viena bazinė funkcija nenulinėmis reikšmėmis nepatenka į bet kurio jos postūmio nenulinių reikšmių sritį;
- Tikėtina, kad pagrindo N>1 bangelės galėtų glotniau aproksimuoti signalo funkciją, nei laiptuotos Haro bangelės;
- Bendruoju atveju, kai pagrindas yra *N*, dėmenų skaičius plėtinio lygtyse yra N+1:

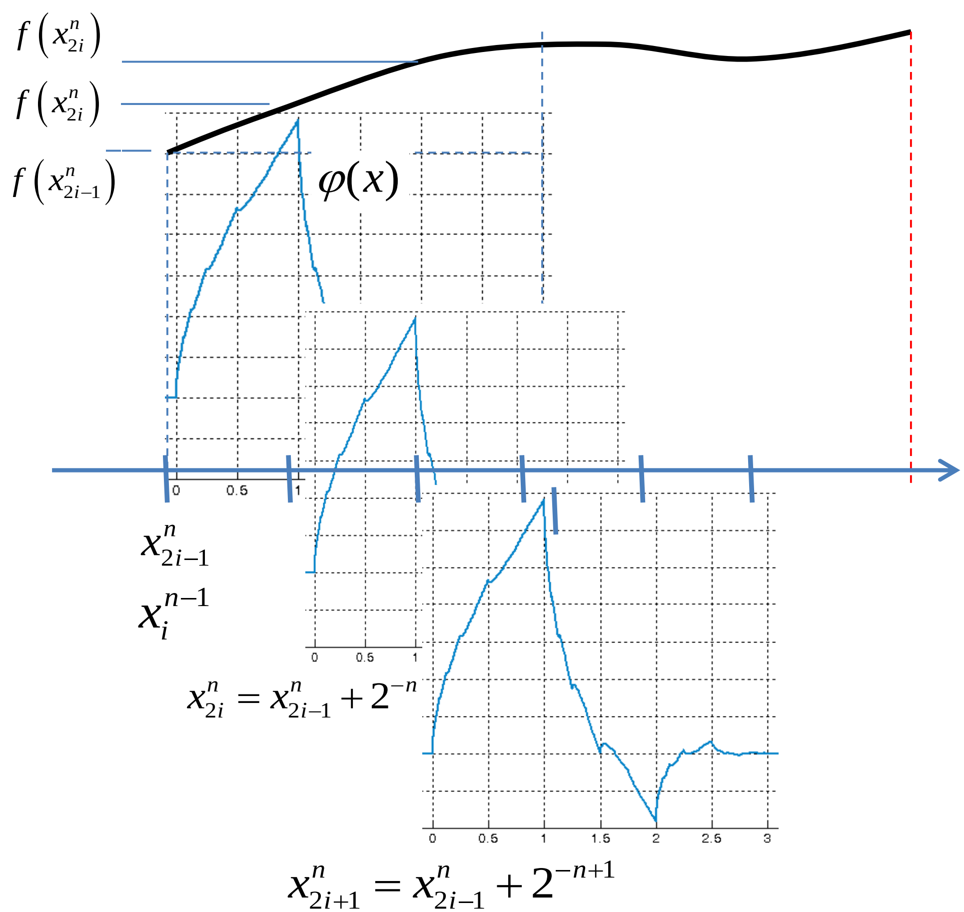
$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi(2x-k) \; ;$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k c_{N-k} \varphi(2x-k) = \sum_{k=0}^{N} g_k \varphi(2x-k)$$

- Taip parinkus plėtinio lygčių koeficientus, *užtikrinamas MF ir BF ortogonalumas tame pačiame smulkumo lygyje*, jeigu tik MF postūmiai yra tarpusavyje ortogonalūs

- Mastelio funkcijos pagrindo N >= 1 (1,3,5,7,…) yra apibrėžtos N kartų ilgesniame intervale, nei atstumas tarp diskrečių funkcijos taškų;
- MF perdengia viena kitą N-1 ilgio intervale, kuriame jų reikšmės sumuojamos;

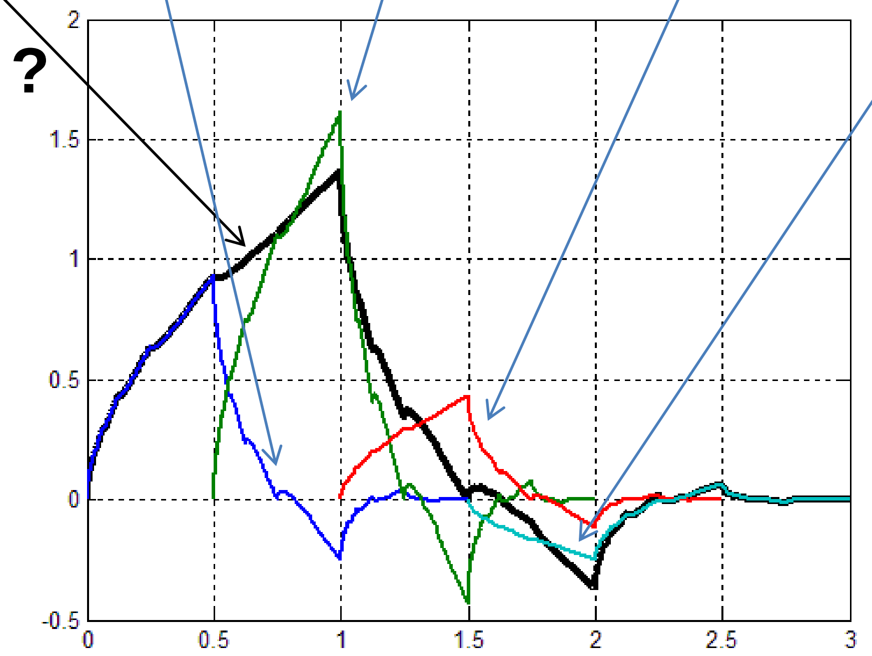
Šios reikšmės laikomos MF koeficientais smulkiausiame detalizacijos lygyje



Pavyzdžiui, kai N=3, MF plėtinio lygtys yra tokios:

$$\psi(x) = c_3\psi(2x) - c_2\psi(2x-k) + c_1\psi(2x-k) - c_0\psi(2x-k)$$

$$\varphi(x) = c_0\varphi(2x) + c_1\varphi(2x-k) + c_2\varphi(2x-k) + c_3\varphi(2x-k)$$



- **tiesiškai kombinuojame 2k. suspaustas ir atitinkamai pastumtas *Ox* ašyje MF kopijas;**
- **Kol kas nežinome nei plėtinio koeficientų, nei MF. Iš anksto aišku tik, kad MF postūmiai tame pačiame lygyje turi būti *ortogonalūs*, kad galioja *MF plėtinio lygtys* ir kad $\varphi(x)$ integralas intervale [0,N] turi būti lygus 1.**

Matematiškai suformuluosime reikalavimus MF plėtinio koeficientams *c*

1)Turi būti tenkinama MF postūmių ortogonalumo sąlyga:

Tarkime, MF apibrėžta intervale [0,N], t.y. sveikaskaitiniu žingsniu

Taikome plėtinio lygtį

$$\int_0^N \varphi(x)\varphi(x-l)\,dx = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(c_i c_{j+2l} \int_0^N \varphi(2x-i)\varphi(2x-2l-j)\,dx \right); \Rightarrow l < \frac{N+1}{2}$$

Priešingu atveju šios MF patektų į nepersikertančius intervalus, todėl integralas būtų =0

$$l=0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\frac{c_i c_j}{2} \int_0^N \varphi(2x-i)\varphi(2x-2l-j)\,d(2x) \right) = \sum_{i=0}^N \frac{c_i^{\,2}}{2} = 1$$

$$\sum_{i=0}^N c_i^{\,2} = 2; \quad kai\ l=0$$

$$l \ge 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\frac{c_i c_j}{2} \int_0^N \varphi(2x-i)\varphi(2x-2l-j)\,d(2x) \right) = \sum_{i=0}^N c_i c_{i+2l} = 0$$

Nenuliniai dėmenys gaunami, tik esant *i*=2*l*+*j*, 0<= *i*,*j* <*N*+1

$$\sum_{i=0}^N c_i c_{i+2l} = 0; \quad kai\ 1 \le l < \frac{N+1}{2}$$

2)Turi būti tenkinama geriausio vienanarių aproksimavimo sąlyga:

$$\int_0^N x^m \psi(x)\,dx = \sum_{k=0}^N (-1)^k c_{N-k} \int_0^N x^m \varphi(2x-k)\,dx \approx \sum_{k=0}^N (-1)^k c_{N-k} k^m = 0,\ m=1,2,\ldots,{(N+1)}/{2}$$

Detalių koeficientas

Aproksimuojant vienanarį x^m, detalių koeficientai turi būti =0. Tai reikštų, kad MF jį aproksimuoja tiksliai

MF plėtinio koeficientai apskaičiuojami iš lygčių sistemos:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} c_i^{\,2} = 2; \\ \sum_{i=0}^{N} c_i c_{i+2l} = 0;\ \ kai\ l \geq 1,\ \ l < \dfrac{N+1}{2} \\ \sum_{k=0}^{N} (-1)^k k^m c_{N-k} = 0, m = 1, 2, \ldots, {(N+1)}/{2} \end{cases}$$

Pradinis artinys, parenkamas laisvai

Pvz. N=3 (*Deubechie* šeimos bangelė, db2):

c=fsolve(@fun, ones(1,N+1))

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2; \\ c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0; \\ c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0; \\ -c_2 + 2c_1 - 3c_0 = 0 \end{cases}$$

```
function f=fun(c)   % suformuoja lygciu sistemos funkcija
    N=length(c)-1;
    f(1)=sum(c.^2)-2;
    for L=1:(N+1)/2-1
        cc=[c,zeros(1,2*L)];
        f(L+1)=dot(c(1:N+1),cc(2*L+1:2*L+N+1));
    end
    for i=0:(N+1)/2-1
        coef=[0:N].^i; cc=c(end:-1:1).*coef;
        f((N+1)/2+i+1)=sum(cc (1:2:end))-sum(cc(2:2:end));
    end
return
end
```

C= 0.6830 1.1830 0.3170 -0.1830

!! MF plėtinio koeficientų lygčių sistemos sprendinys yra nevienareikšmis. Sprendiniai yra du, kadangi indeksus 1:N naudojant atvirkščia tvarka (t.y. N:-1:1) gaunama tokia pati lygtis:

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2; \\ c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0; \\ c_3 - c_2 + c_1 - c_0 = 0; \quad *(-3) \\ -c_2 + 2c_1 - 3c_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 2; \\ c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0; \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = 0; \\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0 \end{cases}$$

C= 0.6830 1.1830 0.3170 -0.1830

C= -0.1830 0.3170 1.1830 0.6830

Pasirenkame sprendinį, kuriame abs(C(1)) > abs(C(end))

Pvz_SMA_8_11_Daubechie_base

Mastelio ir bangelės funkcijos apskaičiuojamos *paprastųjų iteracijų* metodu, kai žinomi jų *plėtinių koeficientai*:

- Pradiniais MF ir BF artiniais parenkama Haro MF;
- MF plėtinio koeficientai *c* žinomi

C= 0.6830 1.1830 0.3170 -0.1830

g= -0.1830 -0.3170 1.1830 -0.6830

N=3 $i=0$

MF artinys *i* 2k suspaudžiamas, apskaičiuojami atnaujinti MF ir BF artiniai:

$$\varphi^{i+1}(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k \varphi^i(2x-k)\ ;$$

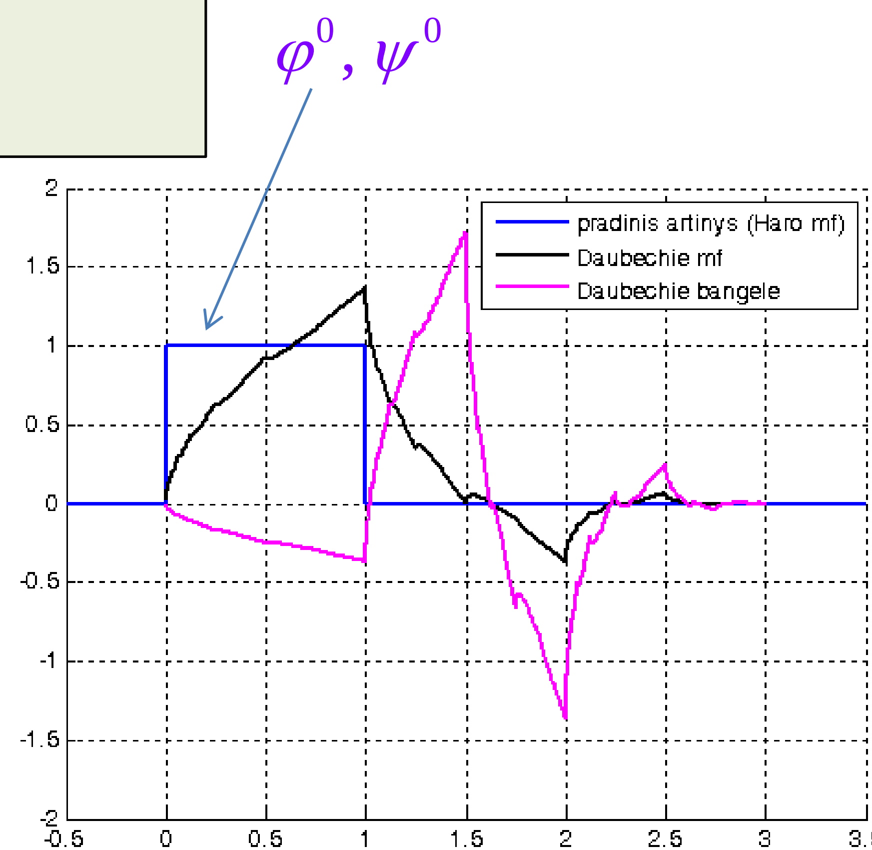
$$\psi^{i+1}(x)=\sum_{k=0}^{N} g_k \varphi^i(2x-k)\ ;$$

Pabaigos sąlyga

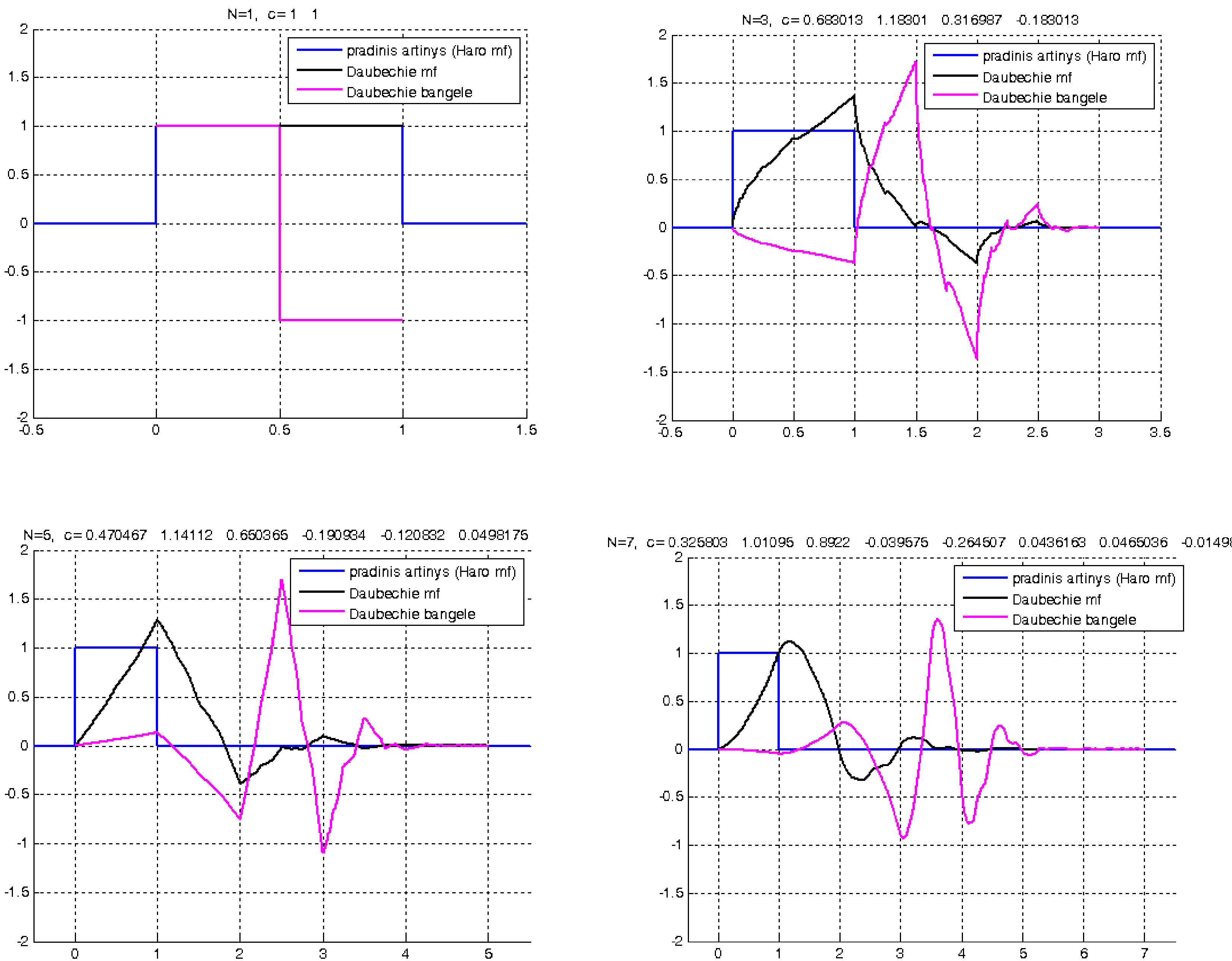
0

$i=i+1$

1



Pvz_SMA_8_11_Daubechie_base


N=1, c=1 1
pradinis artinys (Haro mf)
Daubechie mf
Daubechie bangele
N=3, c= 0.683013 1.18301 0.316987 -0.183013
pradinis artinys (Haro mf)
Daubechie mf
Daubechie bangele
N=5, c= 0.470467 1.14112 0.650365 -0.190934 -0.120832 0.0498175
pradinis artinys (Haro mf)
Daubechie mf
Daubechie bangele
N=7, c= 0.325803 1.01095 0.8922 -0.039575 -0.264507 0.0436163 0.0465036 -0.0149
pradinis artinys (Haro mf)
Daubechie mf
Daubechie bangele

Signalo aproksimavimas mastelio ir bangelių funkcijomis.
Piramidinis algoritmas

1. Signalą, duotą 2^n *taškuose*, aproksimuojame MF bazėje:

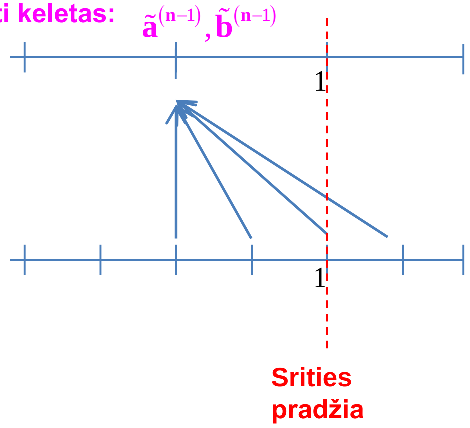
$$\mathbf{a}_{\mathbf{i}}^{\mathbf{n}} = 2^{-n/2} y_i, \quad i = 0 : 2^n - 1$$

2. Apskaičiuojame MF ir BF koeficientus, aproksimuojančius signalą stambesniame detalizacijos lygmenyje

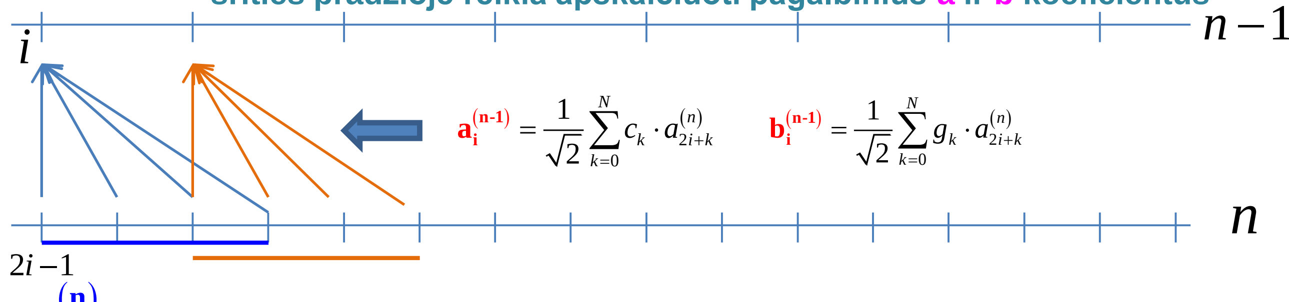
$$\mathbf{a}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n-1})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot a_{2i+k}^{(n)} \qquad \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n-1})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{N} g_k \cdot a_{2i+k}^{(n)} \qquad i = \overline{0, 2^{n-1} - 1}$$

Šie koeficientai atitinka pagalbiniam taškui, esančiam už srities ribų. Esant ilgesniam pagrindui N, jų gali būti keletas: $\tilde{\mathbf{a}}^{(\mathbf{n-1})}, \tilde{\mathbf{b}}^{(\mathbf{n-1})}$

Kraštinių sąlygų problema, kai N > 1 :
- **srities pabaigoje ir pradžioje signalo reikšmes reikia „pratęsti“, pvz., įrašyti papildomų nulių;**
- **srities pradžioje reikia apskaičiuoti pagalbinius a ir b koeficientus**



$\mathbf{a}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n-1})}, \mathbf{b}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n-1})}$



$\mathbf{a}_{2\mathbf{i}-1:2\mathbf{i}-1+N}^{(\mathbf{n})}$

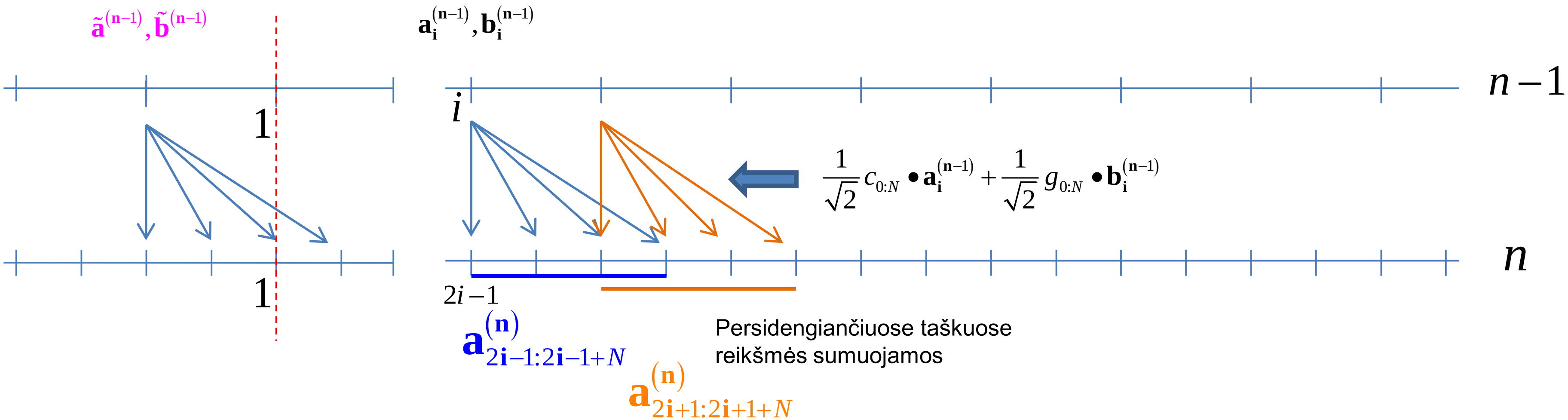
$\mathbf{a}_{2\mathbf{i}+1:2\mathbf{i}+1+N}^{(\mathbf{n})}$

Signalo rekonstrukcija

1. Pagal signalą aproksimuojančių MF ir BF koeficientus apskaičiuojame MF koeficientus smulkesniame detalizacijos lygmenyje

$$\mathbf{a}^{(\mathbf{n})}_{2\mathbf{i}-1:2\mathbf{i}-1+N} = \mathbf{a}^{(\mathbf{n})}_{2\mathbf{i}-1:2\mathbf{i}-1+N} + \frac{1}{\sqrt{2}} c_{0:N} \bullet \mathbf{a}^{(\mathbf{n}-1)}_{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}} g_{0:N} \bullet \mathbf{b}^{(\mathbf{n}-1)}_{\mathbf{i}}$$

$$i = \overline{0, 2^{n-1}-1}$$



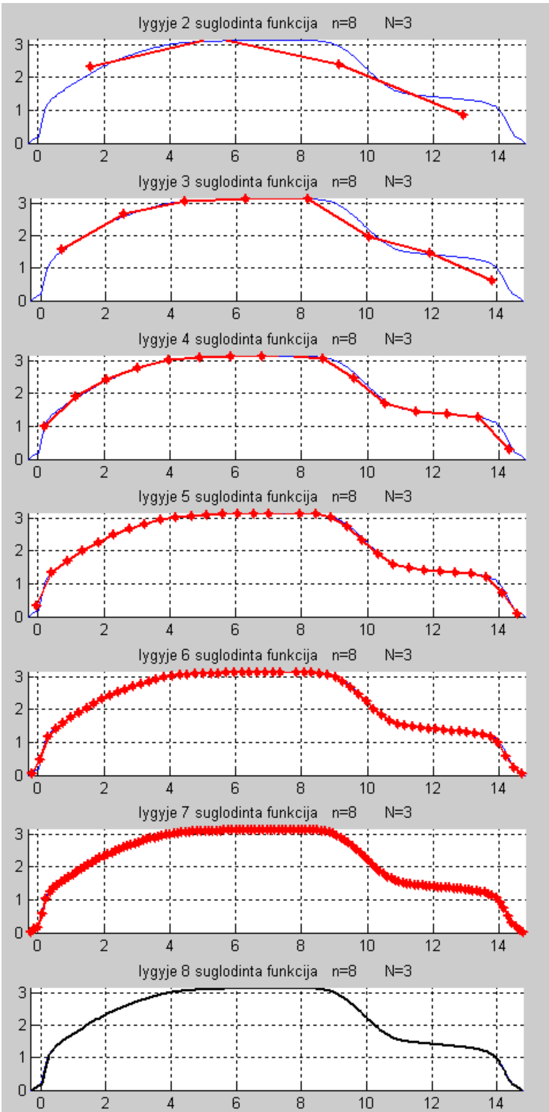
2. Signalas vaizduojamas, Oy ašyje atidedant ne MF, tačiau gautų koeficientų reikšmes

$$\mathbf{a}^{(\mathbf{n})}_{0:2^n-1} \bullet 2^{n/2}$$

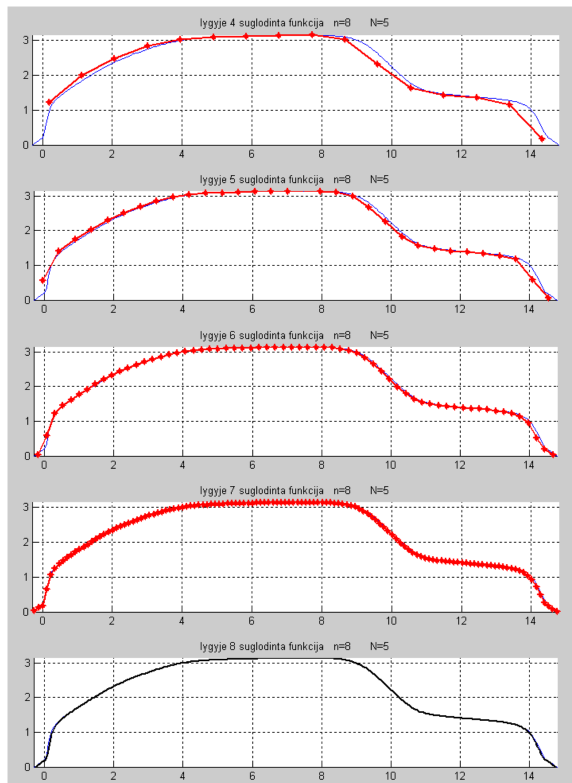
Pvz_SMA_9_12_Daubechie_bangeles_koeficientai

Signalas išskaidomas iki stambiausio lygmens, o po to vėl grįžtama į smulkų.
Raudonai pavaizduoti ***aproksimacijos koeficientai*** (prie mastelio funkcijų)

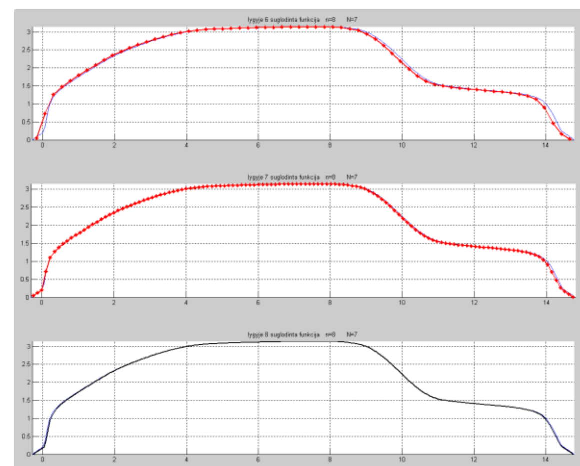
N=3



N=5

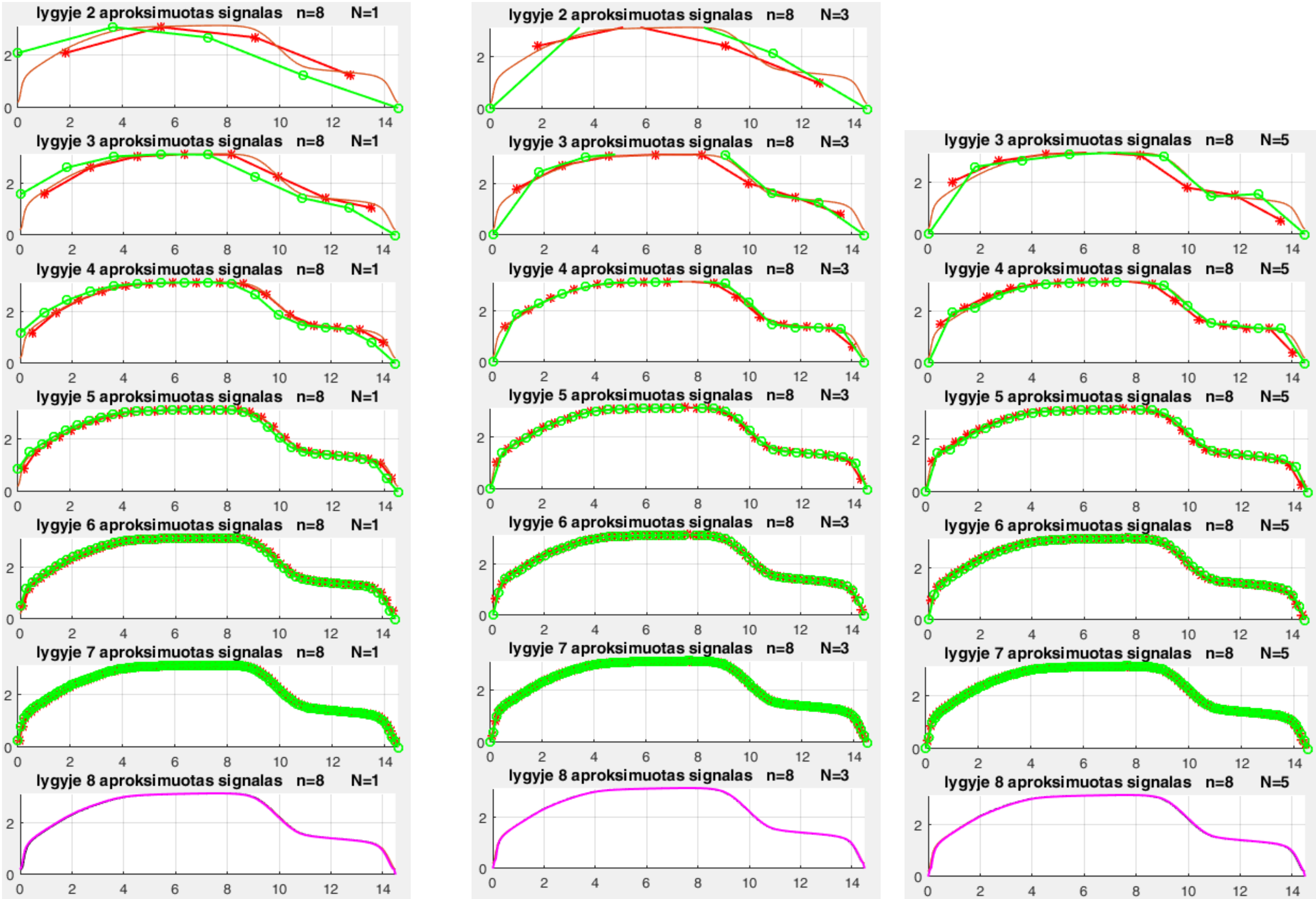


N=7

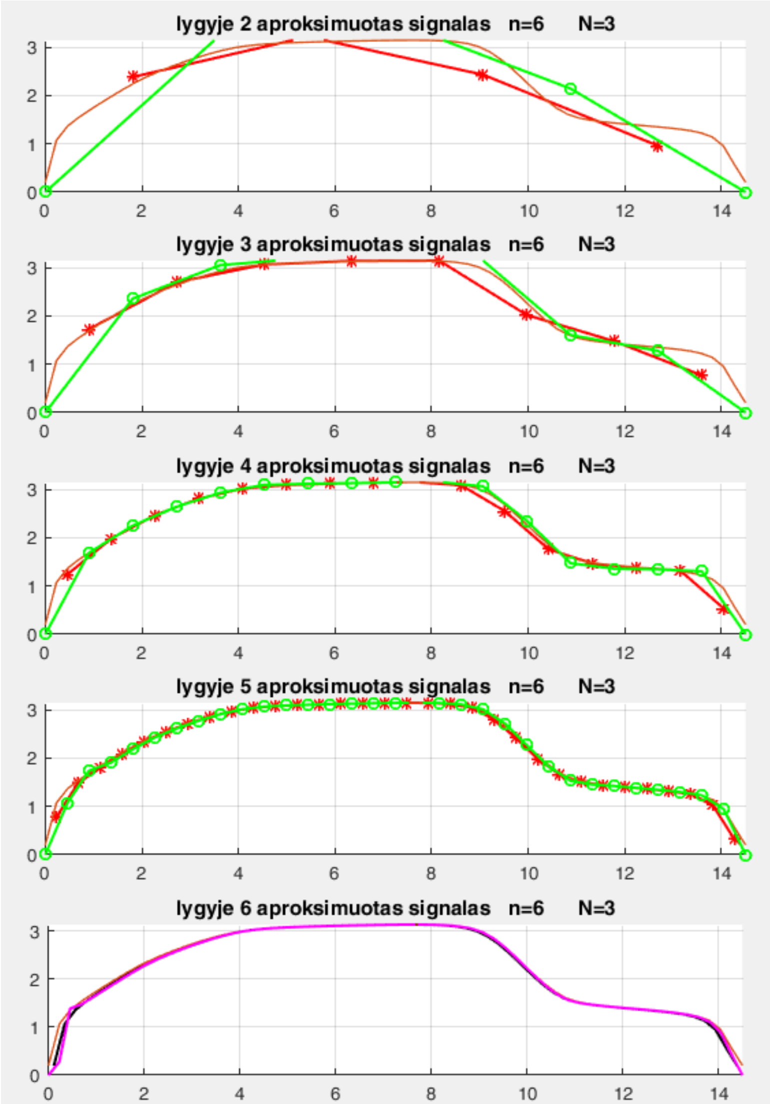


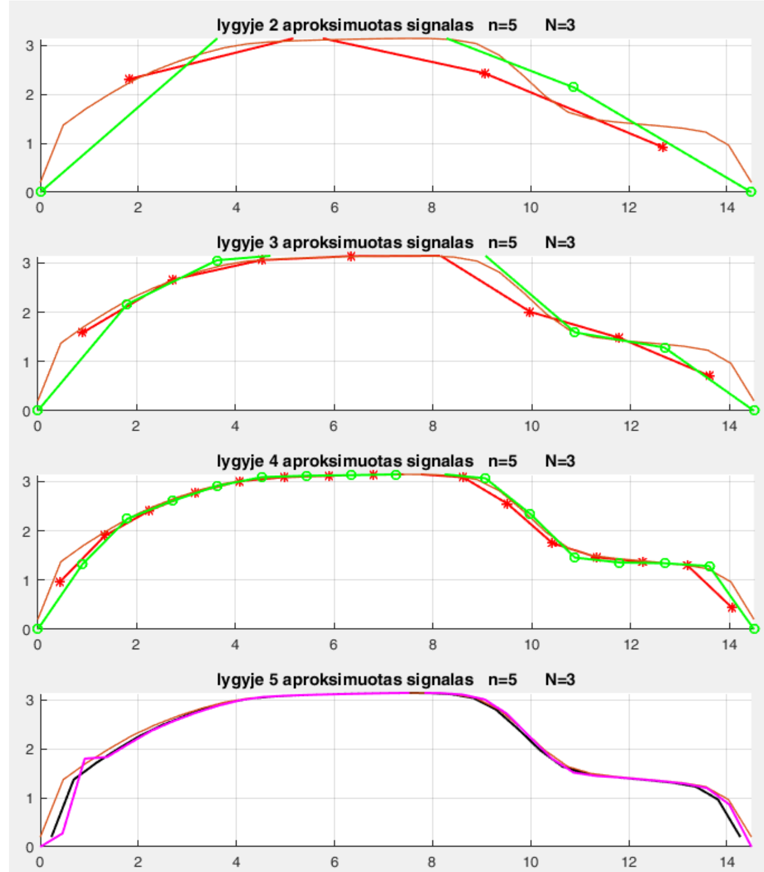
Pvz_SMA_9_12_Daubechie_bangeles_koeficientai

Signalas išskaidomas iki stambiausio lygmens, o po to vėl grįžtama į smulkų. Žaliai pavaizduotos ***pagal mastelio funkcijų reikšmes atkurtos signalo reikšmės***. Raudonai pavaizduoti aproksimacijos koeficientai

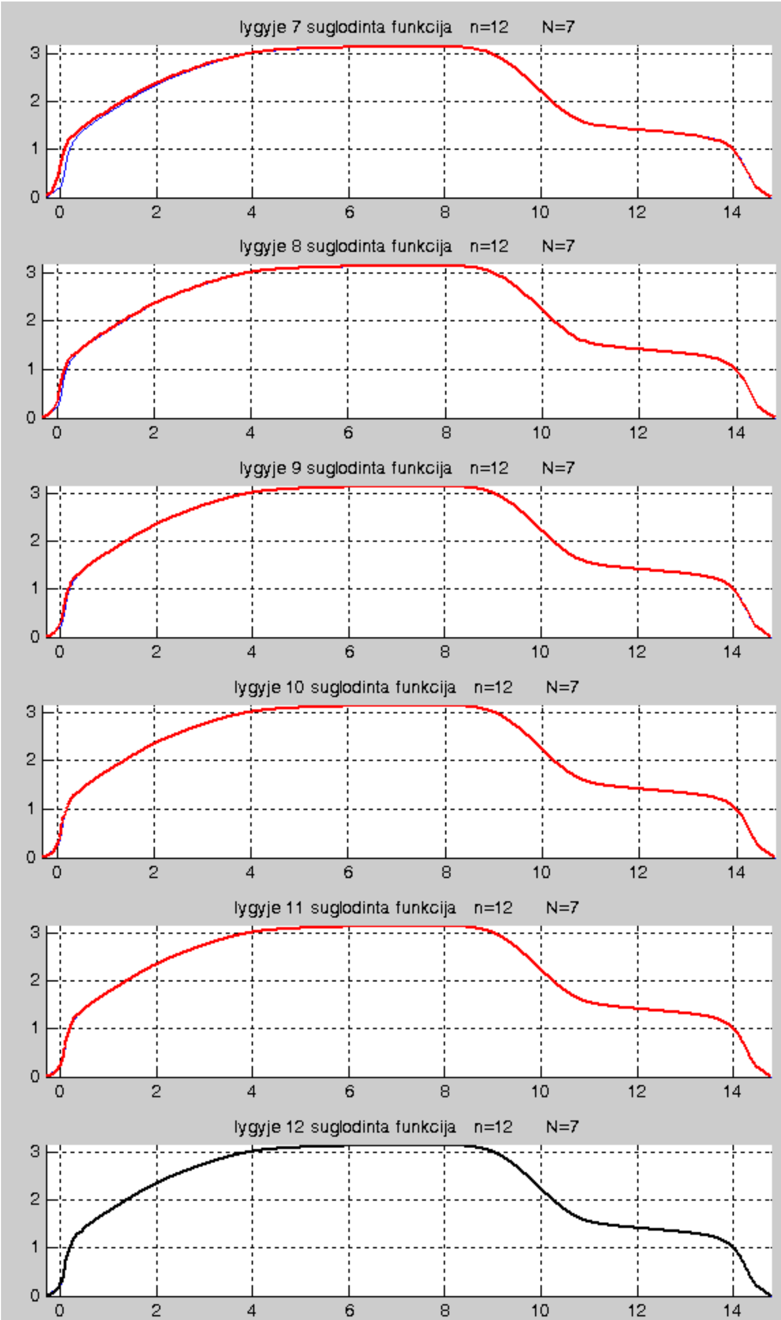


Pvz_SMA_9_12_Daubechie_bangeles_koeficientai

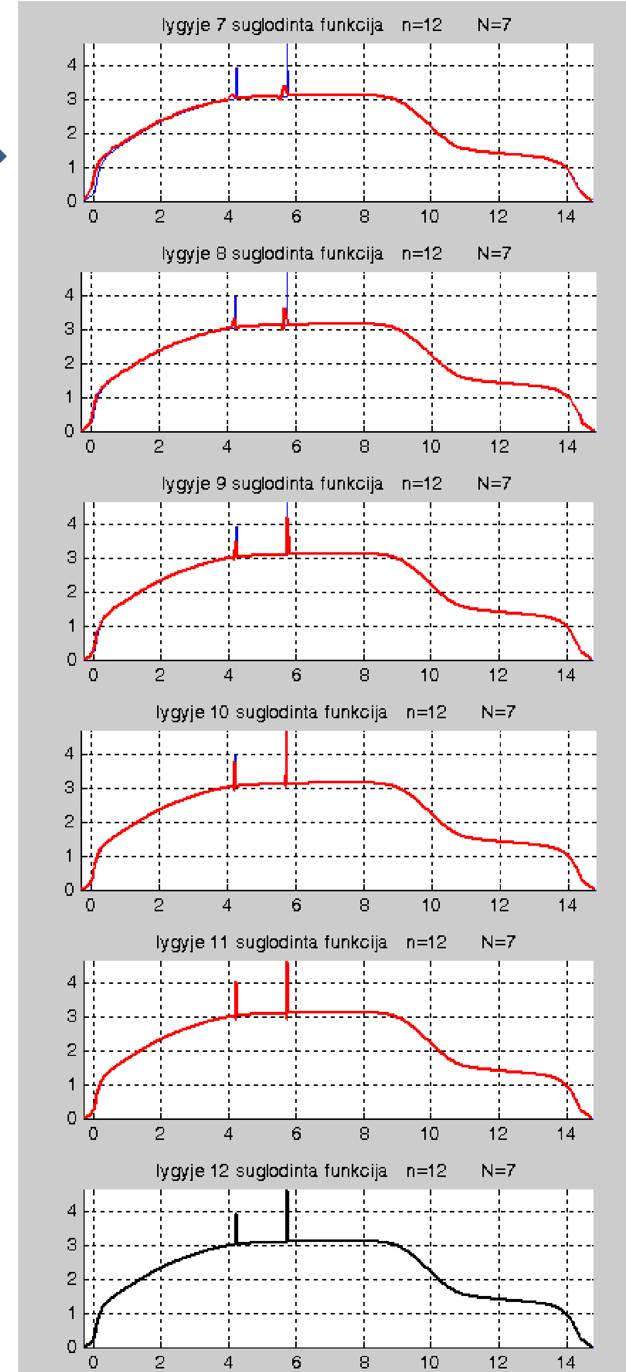




Gali atsitikti, kad išskaidant ir po to atkuriant signalą, smulkiausiame lygyje signalas gaunamas netikslus (dažniausiai arti intervalo galų). Priežastis yra griežtai nereglamentuotas kraštinių sąlygų aprašymas bei apytikslūs pradiniai aproksimacijos koeficientai, nustatomi smulkiausiame lygyje.



„Triukšmo“ filtravimas



MATLAB Wavelet Toolbox funkcijų taikymas

Wavelet decomposition

Signal, 2^n points

[C,L]=wavedec(X,N,'wname')

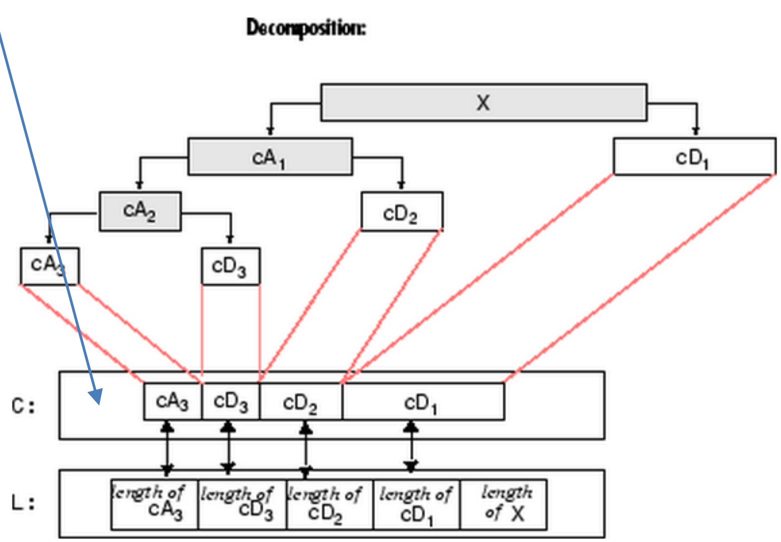
At which level approximation in the base of scaling functions is performed

Approximation and details coefficients

'haar'	Haar wavelet
'db'	Daubechies wavelets
'sym'	Symlets
'coif'	Coiflets
'bior'	Biorthogonal wavelets
'fk'	Fejer-Korovkin filters
'rbio'	Reverse biorthogonal wavelets
'meyr'	Meyer wavelet
'dmey'	Discrete approximation of Meyer wavelet
'gaus'	Gaussian wavelets
'mexh'	Mexican hat wavelet
'morl'	Morlet wavelet
'cgau'	Complex Gaussian wavelets
'shan'	Shannon wavelets
'fbsp'	Frequency B-Spline wavelets
'cmor'	Complex Morlet wavelets

db1 or haar, db4, db15

N=3



Wavelet reconstruction

X=waverec(C,L,'wname')

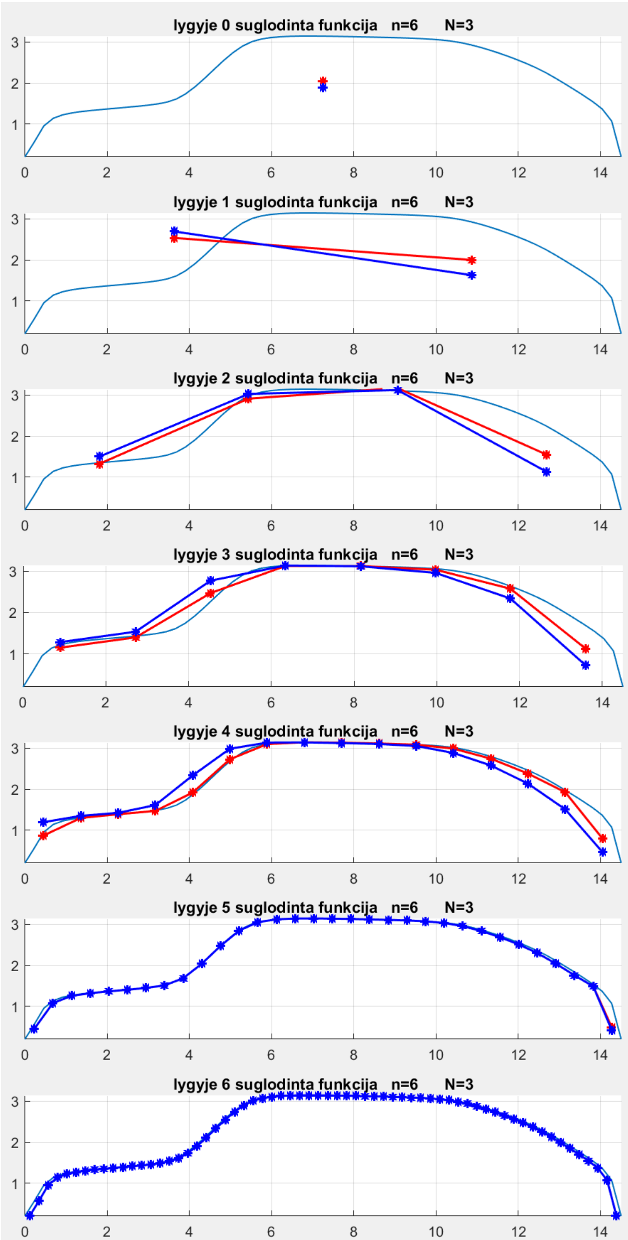
Signal

A = appcoef(C,L,wavelet,N)

D = detcoef(C,L,wavelet,N)

Approximation and details coefficients at level N calculated from C,L

Pvz_SMA_9_13_Daubechie_sulyginimas_su_Wavelet_TB



Koeficientai pagal *wavedec* funkciją

Koeficientai pagal šio kurso formules

Pagalbiniai koeficientai, naudojami signalo rekonstrvimui (nevaizduojami)

Pagrindiniai aproksimavimo koeficientai(vaizduojami)

A =

0.3784 0.6160 1.8931

A =

0.2751 0.2452 1.9043 1.1501

A =

0.1864 0.2188 0.7493 1.5131 1.5603 0.5642

A =

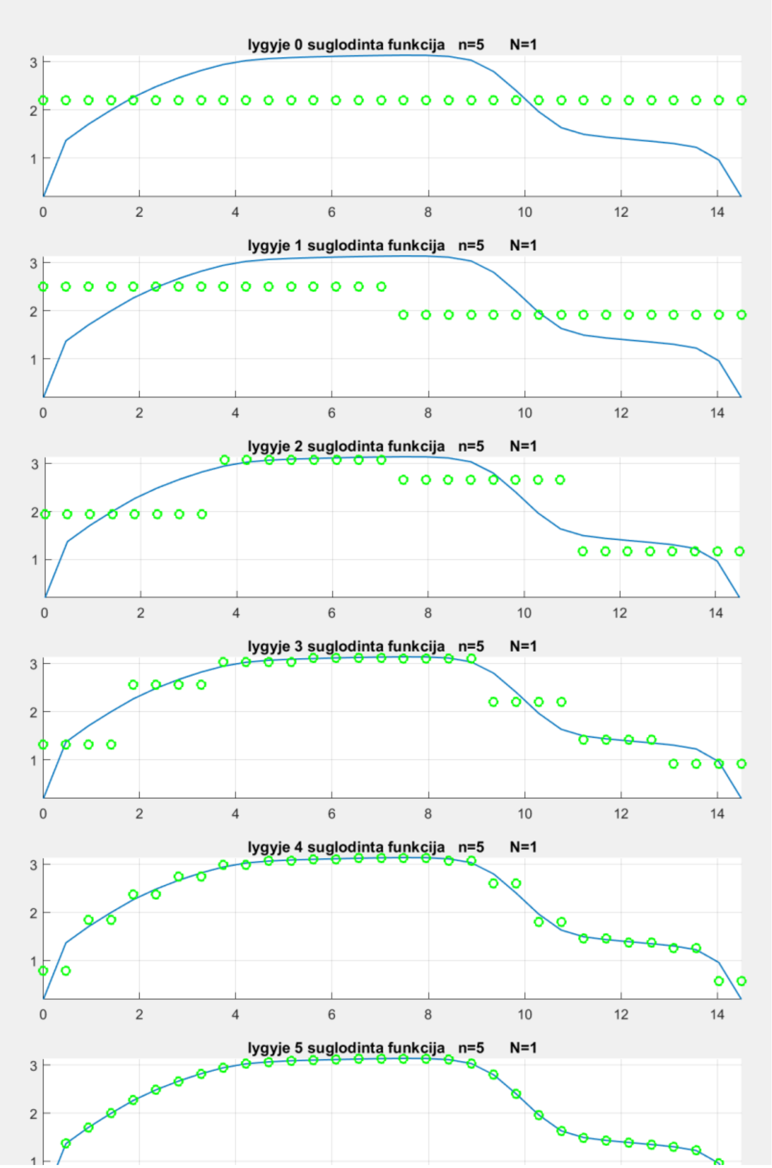
0.1252 0.1516 0.4539 0.5427 0.9797 1.1094 1.1031 1.0465 0.8267 0.2564

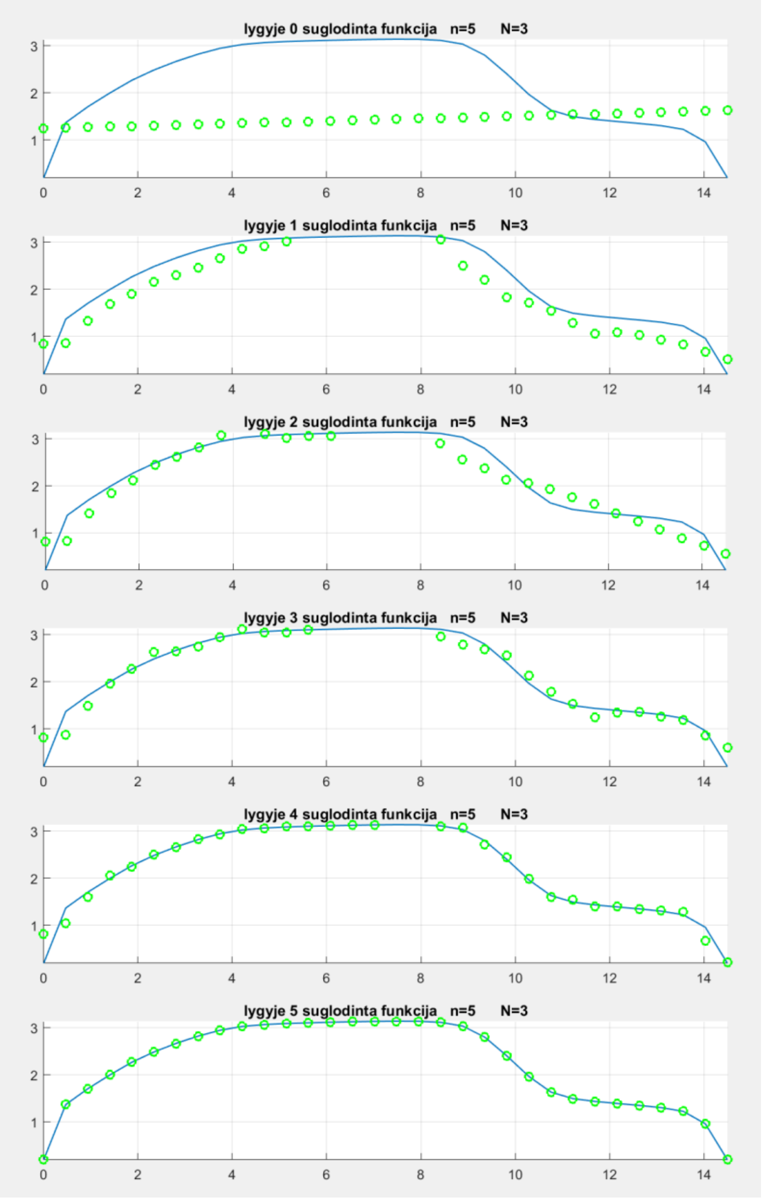
.
.
.

Aproksimavimo koeficientai gali būti gaunami šiek tiek skirtingi, priklausomai nuo pagalbinių koeficientų („pradinių sąlygų“) nustatymo būdo

Pvz_SMA_9_14_Daubechie_su_rekonstrukcija_Wavelet_TB

Signalo aproksimacija įvairiuose lygiuose, taikant ***Haro*** ir ***db3*** bangeles



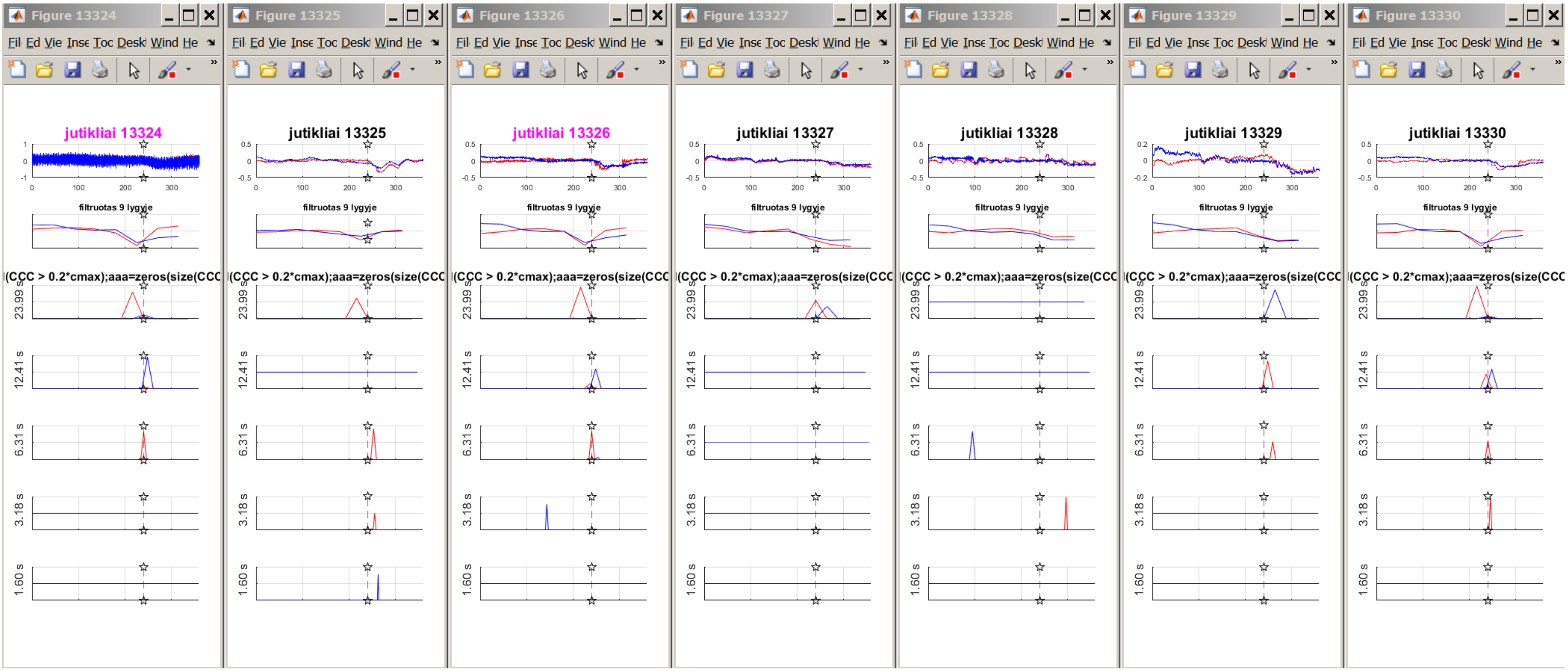


SMA_09_03x_Klausimai savikontrolei:

1. Naudodamiesi literatūra paaiškinkite, kaip aproksimavimui taikomos pagrindo N>1 bangelės;
2. Užrašykite plėtinių lygtis bendruoju Debiuši mastelio funkcijų ir bangelių atveju;
3. Paaiškinkite, kaip užrašomi reikalavimai plėtinio koeficientams bandruoju atveju. Kokiomis sąlygomis remiantis gaunama lygčių sistema jų apskaičiavimui;
4. Kaip gaunamos Debiuši mastelio funkcijos ir bangelės. Ar galime užrašyti jų analizinę išraišką;
5. Naudodamiesi literatūra paaiškinkite, kaip taikomas piramidinis algoritmas bendruoju Debiuši bangelių aproksimavimo atveju. Kaip signalas skaidomas ir kaip rekonstruojamas;
6. Paaiškinkite, kaip taikoma bangelių aproksimacija signalų "triukšmo" pašalinimui

Aproksimavimas bangelėmis – inžinerinio taikymo pavyzdys

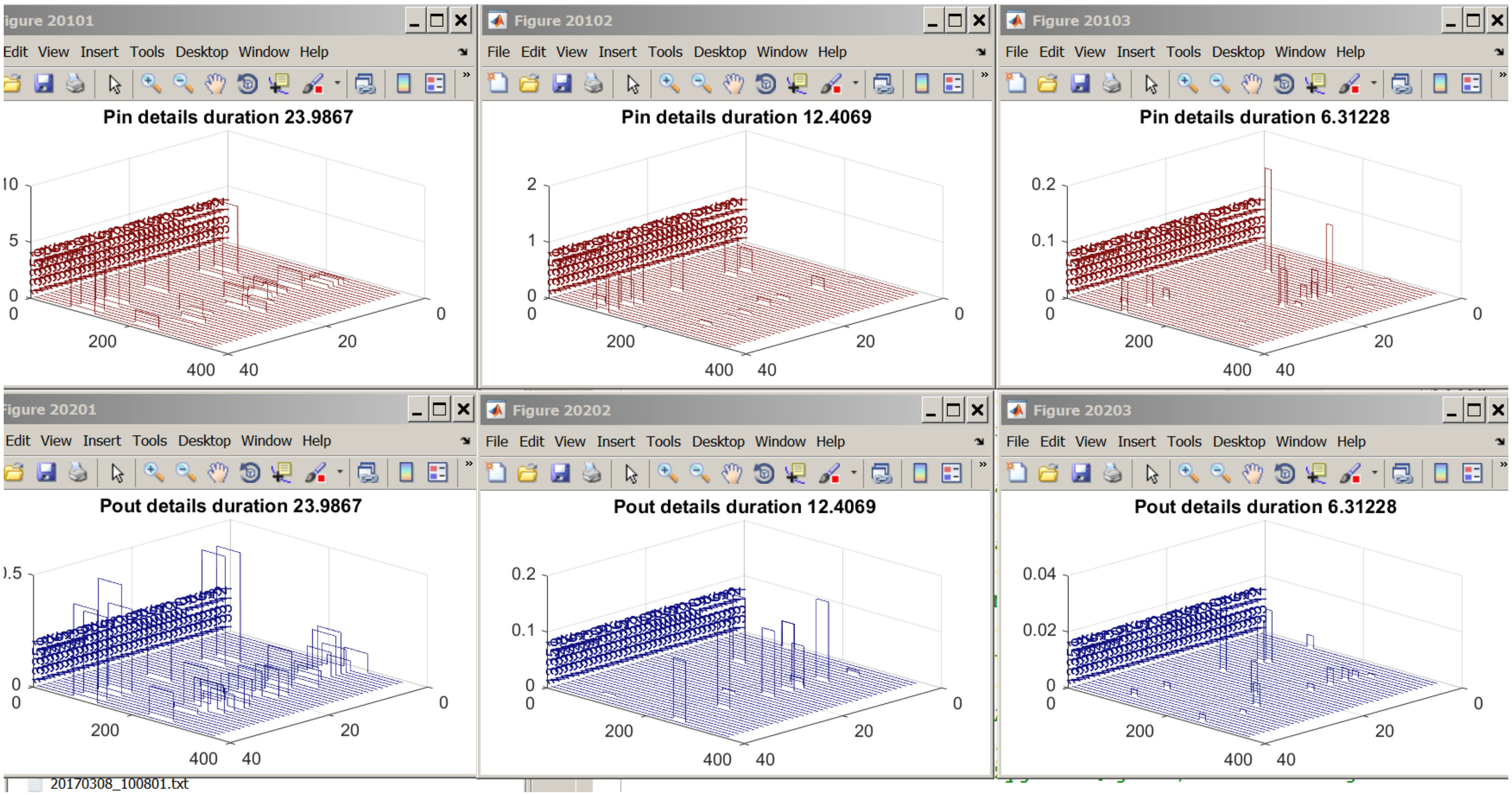
Avarijos vamzdyne aptikimas pagal slėgio monitoringo laiko priklausomybes (1)



- Jutikliais užregistruotos slėgio kitimo laike priklausomybės;
- Bangelių funkcijų koeficientų reikšmės skiringos trukmės detalėms

Aproksimavimas bangelėmis – inžinerinio taikymo pavyzdys

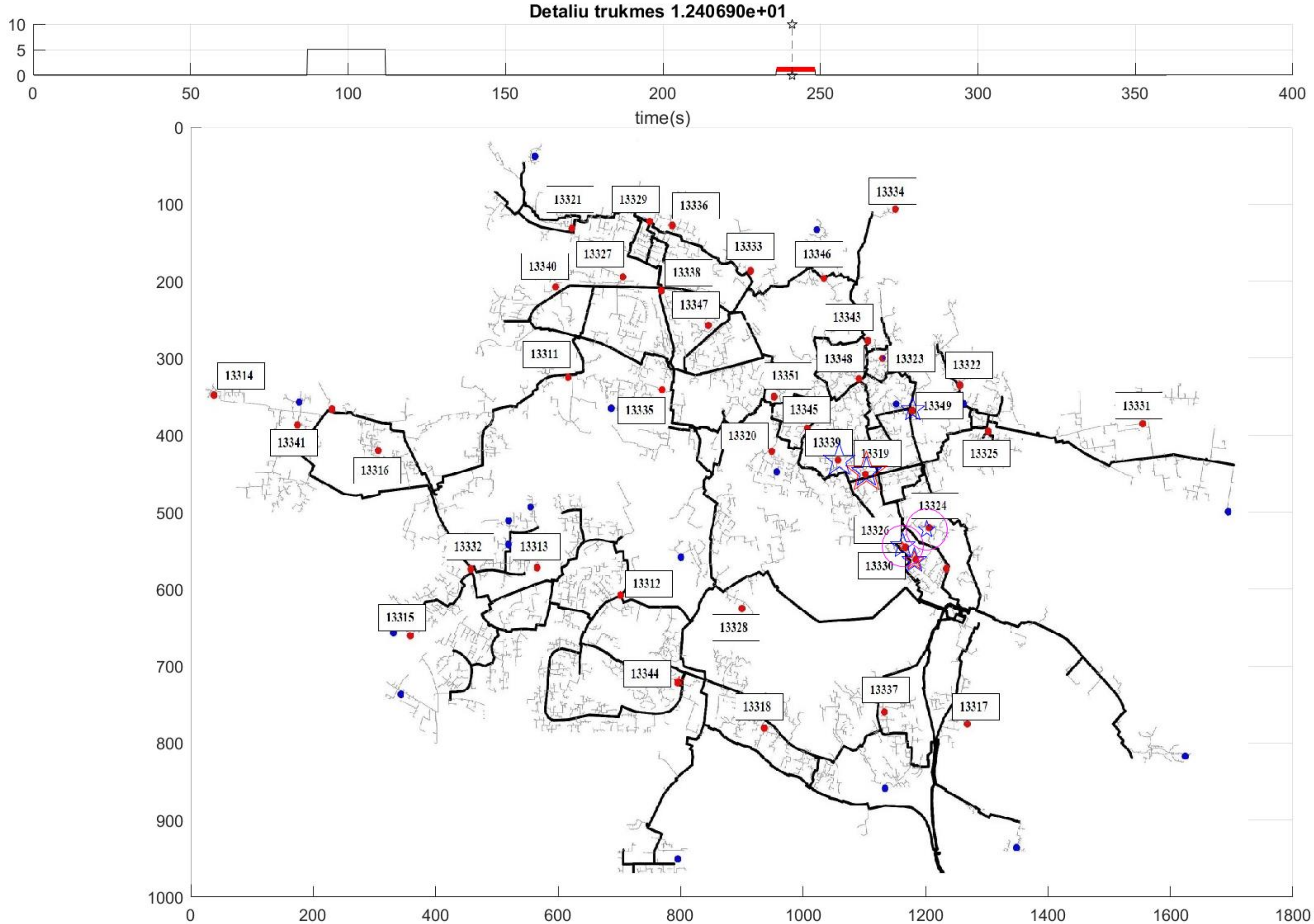
Avarijos vamzdyne aptikimas pagal slėgio monitoringo laiko priklausomybes (2)



- Bangelių funkcijų koeficientų reikšmės skiringos trukmės detalėms plokštumoje ***laikas – jutiklio numeris***

Aproksimavimas bangelėmis – inžinerinio taikymo pavyzdys

Avarijos vamzdyne aptikimas pagal slėgio monitoringo laiko priklausomybes (3)



- Į avariją sureagavę jutikliai, pavaizduoti miesto vamzdyno schemoje