Skaitinis apibrėžtinio integralo apskaičiavimas: *Gauso formulės*

Temoje aiškinama:

- **Optimalaus interpoliavimo mazgų parinkimo uždavinys, siekiant gauti aukščiausio galimo tikslumo formulę integralo reikšmei apskaičiuoti**;
- **Gauso-Ležandro formulių išvedimas;**
- **Gauso-Ermito ir Gauso-Legero formulės netiesioginiams integralams apskaičiuoti;**
- **Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti stačiakampėje srityje;**
- **Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti trikampėje srityje. Baricentrinės koordinatės**

Optimalaus interpoliavimo mazgų parinkimo uždavinys, siekiant gauti aukščiausio galimo tikslumo formulę integralo reikšmei apskaičiuoti

Gauso formulės. *Optimalus interpoliavimo mazgu parinkimas*

- **Niutono ir Koteso formulės išvedamos, kai tolygiai intervale išdėstytų interpoliavimo mazgų padėtys iš anksto žinomos;**
- **Interpoliavimo mazgus būtų galima parinkti ir kituose intervalo taškuose, siekiant, kad formulės tikslumo eilė būtų kuo aukštesnė;**
- **Jeigu galime parinkti *n* mazgų padėtis ir n svorio koeficientų, kiekvienam jų parinkti svorio koeficientą, yra galimybė tenkinti *2n* lygčių, t.y. *integralo skaitinio apskaičiavimo formulės tikslumo eilė būtų 2n-1***

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i), \; -1 \le t_i \le 1$$

Formules išvesime intervalui [-1,1]. Jeigu intervalas kitoks, galima pakeisti kintamąjį:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)dt$$

Gauso-Ležandro formulių išvedimas

Gauso-Ležandro formulių išvedimas *Hemingo būdu. Pavyzdys, kai n=3*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{-1}^{1} 1dt \\ \int_{-1}^{1} tdt \\ \int_{-1}^{1} t^2dt \\ \int_{-1}^{1} t^3dt \\ \int_{-1}^{1} t^4dt \\ \int_{-1}^{1} t^5dt \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Šioje sistemoje nežinomieji yra:

$w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3$

Sudarykime daugianarį:

$$\left(t-t_1\right)\left(t-t_2\right)\left(t-t_3\right)=c_0+c_1t+c_2t^2+t^3;$$

Kol kas nekreipkime dėmesio, kad t_i , o tuo pačiu ir c_i yra nežinomi.

Ties interpoliavimo mazgų abscisėmis šis daugianaris virsta 0:

$$c_0+c_1t_i+c_2t_i^{\ 2}+t_i^{\ 3}=0,\ \ i=1,2,3$$

Hemingo lygčių sistemą kairėje pusėje padauginame iš vektoriaus $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^{\,2} + t_i^{\,3} = 0, \;\; i = 1, 2, 3$$

$$0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}$$

$$c_0 m_0 + c_1 m_1 + c_2 m_2 = -m_3;$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_3$$

$$
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 \\
t_1 & t_2 & t_3 \\
t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\
t_1^3 & t_2^3 & t_2^3 \\
t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\
t_1^5 & t_2^5 & t_3^5
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}
$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$t_i\left(c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^{\,2} + t_i^{\,3}\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_4$$

Šias lygtis kol kas atmetame

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \\ t_1^4 & t_2^4 & t_3^4 \\ t_1^5 & t_2^5 & t_3^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}$$

$$t_i^{\,2}\left(c_0 + c_1 t_i + c_2 t_i^{\,2} + t_i^{\,3}\right) = 0, \;\; i = 1,2,3$$

$$0 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_5$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_3 \qquad \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_4 \qquad \begin{bmatrix} m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = -m_5$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 \\ -m_4 \\ -m_5 \end{Bmatrix}$$

Šie koeficientai jau žinomi

$$(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + t^3 = 0$$

Šios reikšmės dar nežinomos, tačiau jos yra ***jau žinomo daugianario šaknys***

$$(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + t^3 = 0$$

$$roots([1 \quad c_2 \quad c_1 \quad c_0])$$

$$t_1, t_2, t_3$$

Lagranžo daugianarių vardiniai taškai

$$w_i = \int_{-1}^{1} L_i(t)\,dt, \quad i = 1, 2, 3$$

```
syms G base
 N=3 % integravimo formules tasku skaicius (tikslumo eile bus 2*N-1)

% baziniai vienanariai
base(1)=sym(1);
for j=2:2*N, base(j)=sym(x^(j-1)); end

% Vienanariu integralai("momentai"):
m=int(base,-1,1)

for i=1:N,  A(i,1:N)=m(i:i+N-1); end
b=-m(N+1:2*N)'
c=A\b
coef=[1,c([N:-1:1])'] % daugianario koeficientai

xx=sort(roots(eval(coef)));   %optimalus integravimo taskai

 % Svorio koeficientu apskaiciavimas
for j=1:N
    L=1;  for k=1:N, if k ~= j, L=L*(x-xx(k))/(xx(j)-xx(k)); end,
end
    w(j)=int(L,-1,1); % svorio koeficientai
end
```

$$\int_{-1}^{1} t^i dt$$

$$\begin{bmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_3 \\ -m_4 \\ -m_5 \end{Bmatrix}$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$\left(\int_{-1}^{1} L_i(x) dx \right)$$

Gauso ir Ležandro formulės apibrėžtiniam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [-1,1] | **Taškų skaičius** | **Koeficientai**

-

Ležandro daugianarių šaknys

$\pm \xi_i$		v_i
	n=2	
0.57735 02691 89626		1.00000 00000 00000
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.88888 88888 88889
0.77459 66692 41483		0.55555 55555 55556
	n=4	
0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053		0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
	n=5	
0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683		0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366
0.90617 98459 38664		0.23692 68850 56189
	n=6	
0.23861 91860 83197		0.46791 39345 72691
0.66120 93864 66265		0.36076 15730 48139
0.93246 95142 03152		0.17132 44923 79170

Gauso ir Ležandro formulės apibrėžtiniam integralui apskaičiuoti

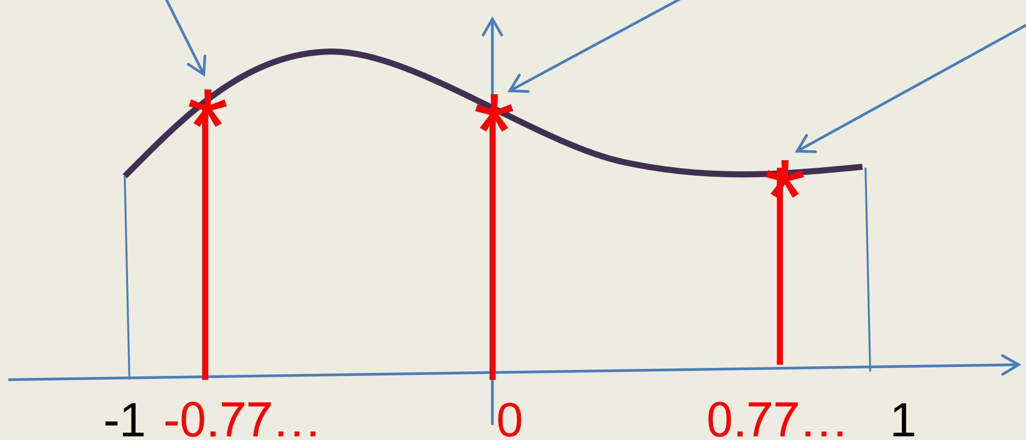
Taškų padėtys intervale [-1,1] | **Taškų skaičius** | **Koeficientai**

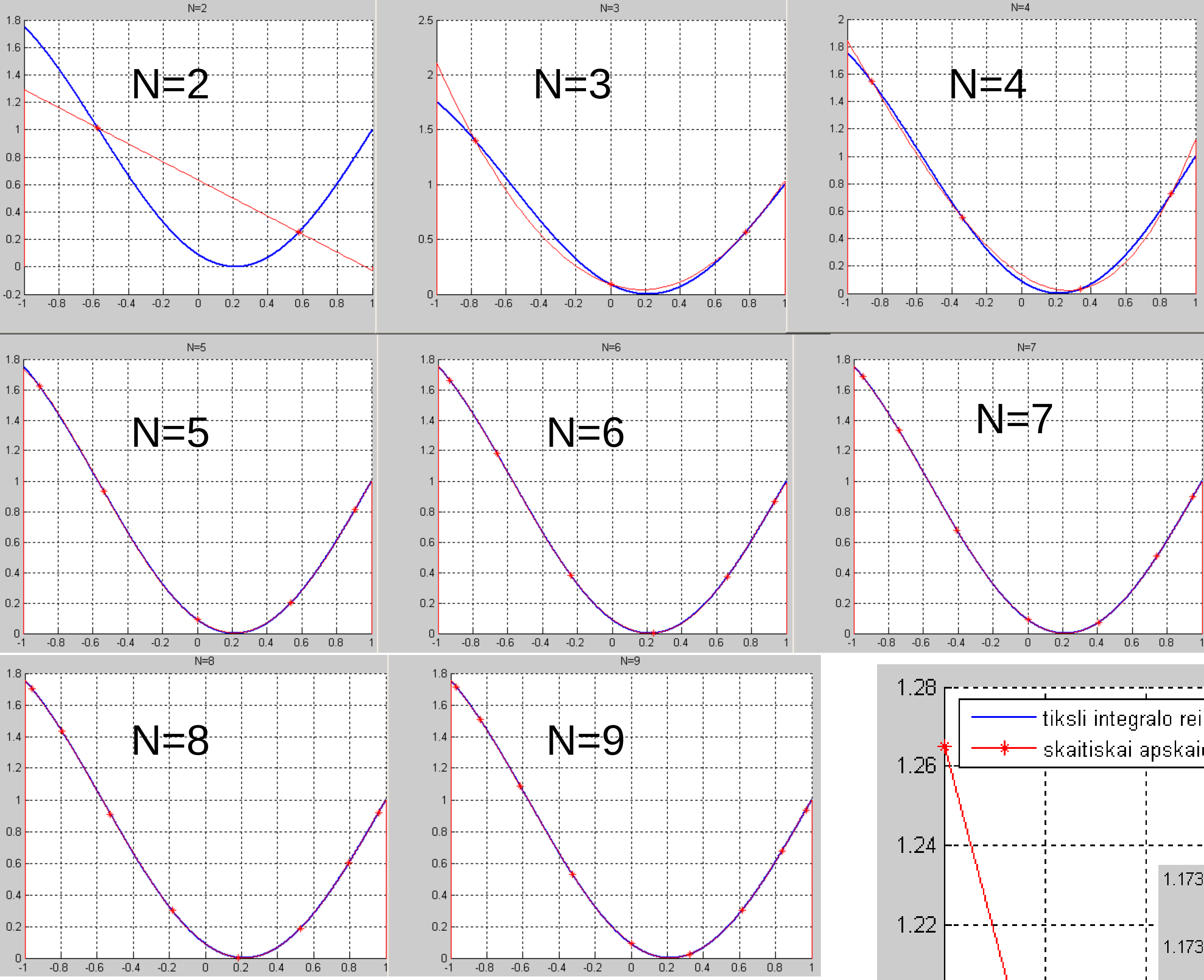
-

Ležandro daugianarių šaknys

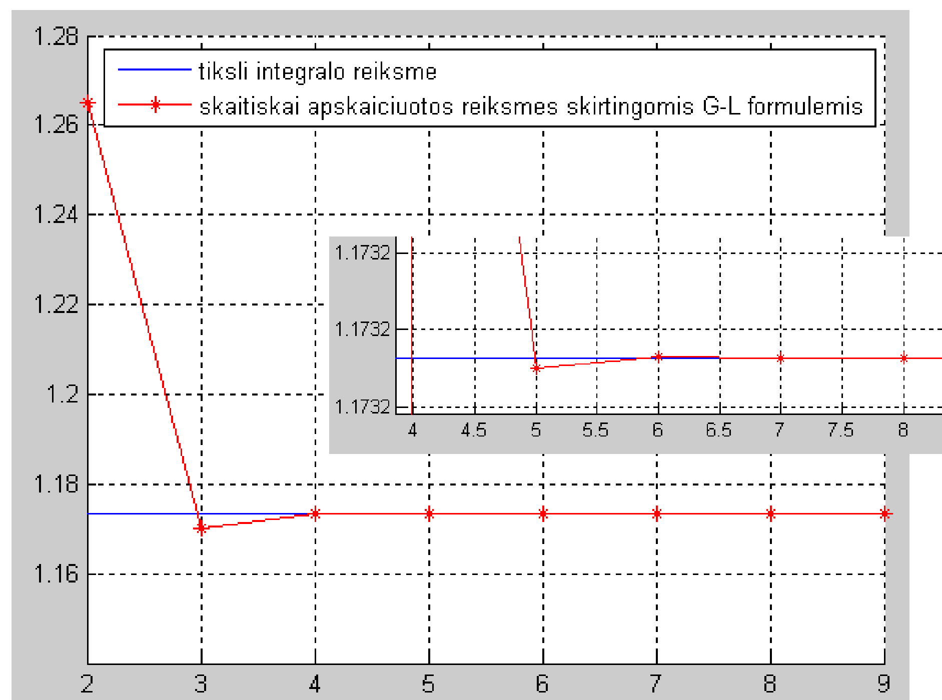
$\pm\xi_i$		v_i
	n=2	
0.57735 02691 89626		1.00000 00000 00000
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.88888 88888 88889
0.77459 66692 41483		0.55555 55555 55556

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.55...* f(-0.77...) + 0.88...* f(0) + 0.55...* f(0.77...)$$

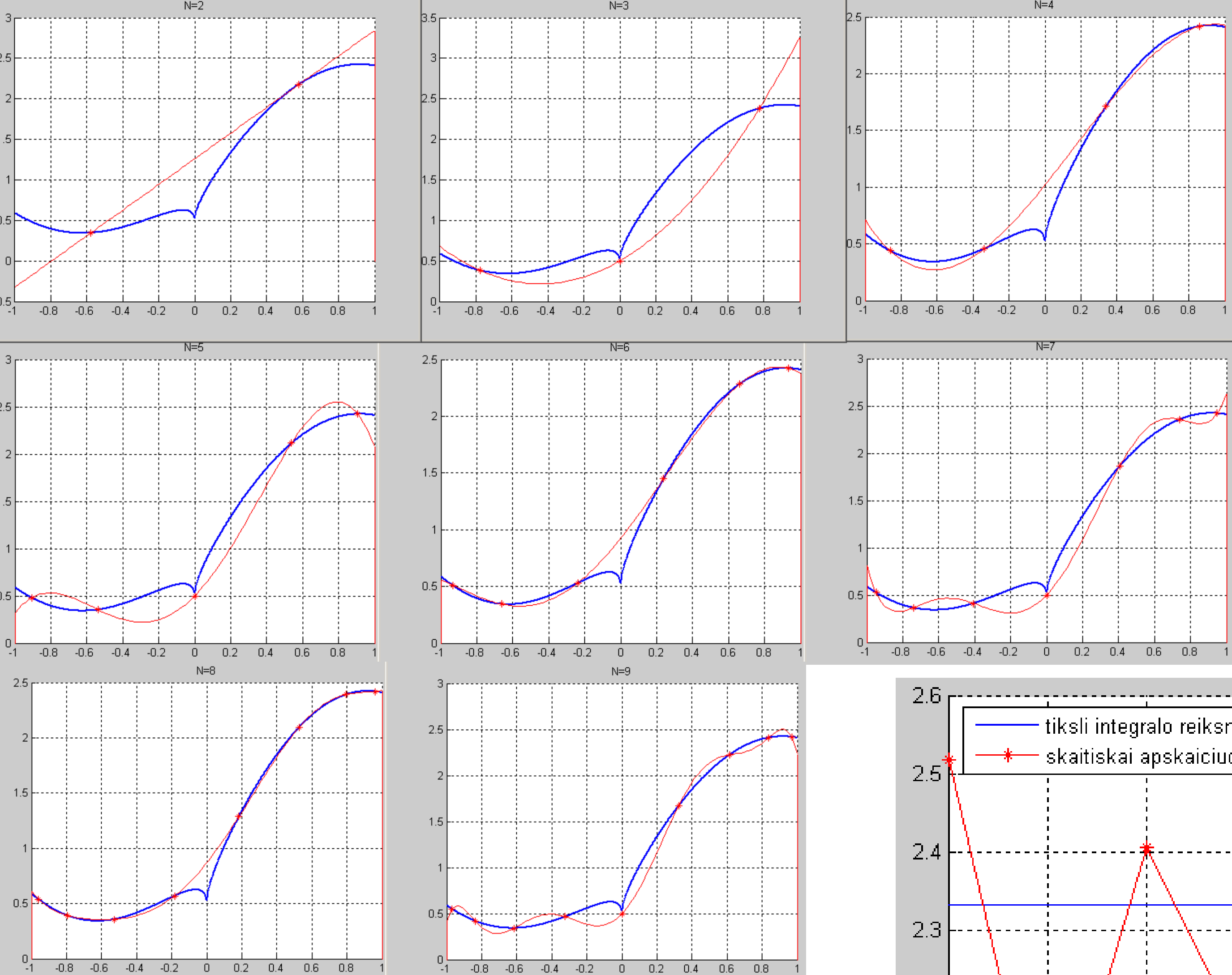




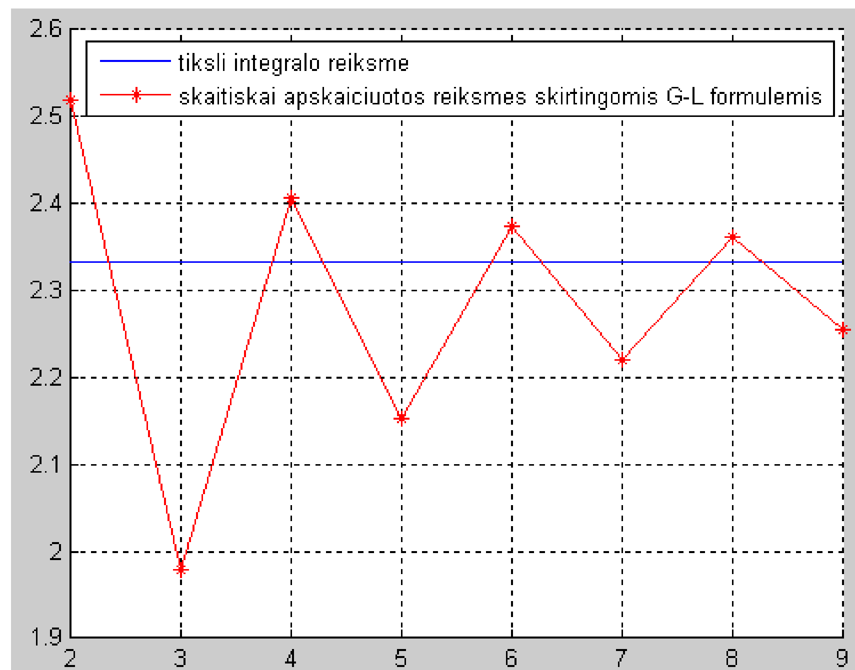
$$f(x) = \sin(2x-2)+1$$



Pvz_SMA_12_2_Gauso_Lezandro _formuliu_taikymas_ciklas.m



$$f(x) = \sin(2x) + \sqrt{|x|} + 0.5$$



Pvz_SMA_12_2_Gauso_Lezandro _formuliu_taikymas_ciklas.m

- **Gauso ir Ležandro formulės dažniausiai vartojamos, kai reikia integralą apskaičiuoti viena formule visame intervale(t.y. neskaidant intervalo);**
- **Sudėtingos funkcijos integralą galima būtų apskaičiuoti, skaidant ją intervalais, ir kiekviename jų taikyti Gauso ir Ležandro formules;**
- **Prisiminkime, kad skaidymas intervalais buvo taikytas Niutono ir Koteso formulių šeimai. Rezultate buvo gautos trapecijų, Simpsono ir kt. formulės**

- Gimininingos išnagrinėtoms Gauso-Ležandro formulėms yra *Gauso-Ermito* ir *Gauso-Legero* formulės. Jos skirtos tam tikriems netiesioginiams integralams apskaičiuoti
- *Gauso-Ermito* formulės :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

Imamos tik funkcijos reikšmės, t.y. ***be eksponentės daugiklio*** (!)

- *Gauso-Legero* formulės :

$$\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

Gauso-Ermito formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [0,Inf]

Taškų skaičius

Koeficientai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

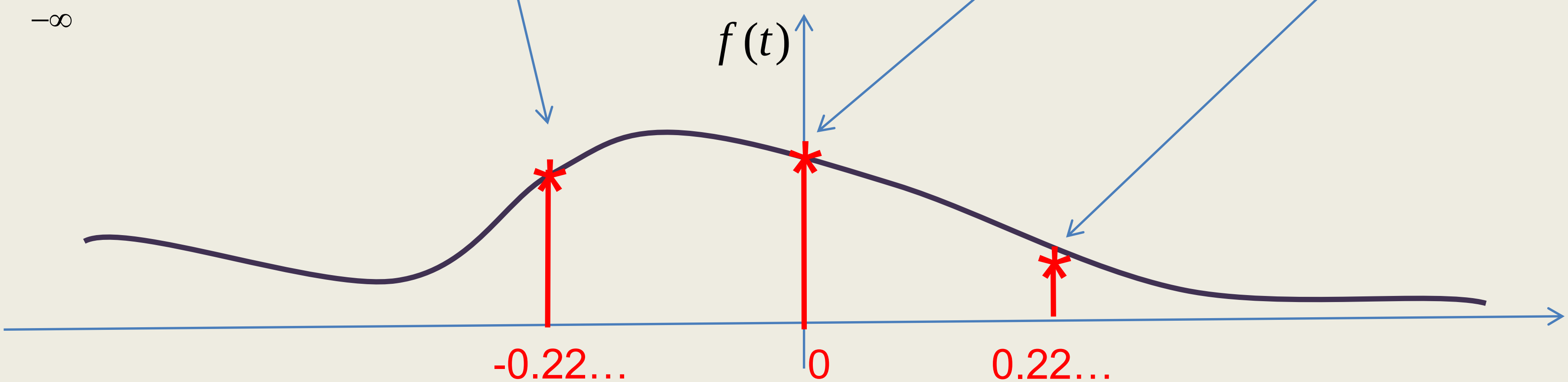
$\pm\ \xi_i$		v_i
	n=2	
0.70710 67811 86548		1.46114 11826 611
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.18163 59006 037
0.22474 48713 91589		0.32393 11752 136
	n=4	
0.52464 76232 75290		1.05996 44828 950
1.65068 01238 85785		1.24022 58176 958
	n=5	
0.00000 00000 00000		0.94530 87204 829
0.95857 24646 13819		0.98658 09967 514
2.02018 28704 56086		1.18148 86255 360

Gauso-Ermito formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

$\pm \xi_i$		ν_i
	n=2	
0.70710 67811 86548		1.46114 11826 611
	n=3	
0.00000 00000 00000		0.18163 59006 037
0.22474 48713 91589		0.32393 11752 136

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-t^2}dt = 0.32...* f(-0.22...) + 0.18...* f(0) + 0.32...* f(0.22...)$$



Gauso-Legero formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

Taškų padėtys intervale [0,Inf]

Taškų skaičius

Koeficientai

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

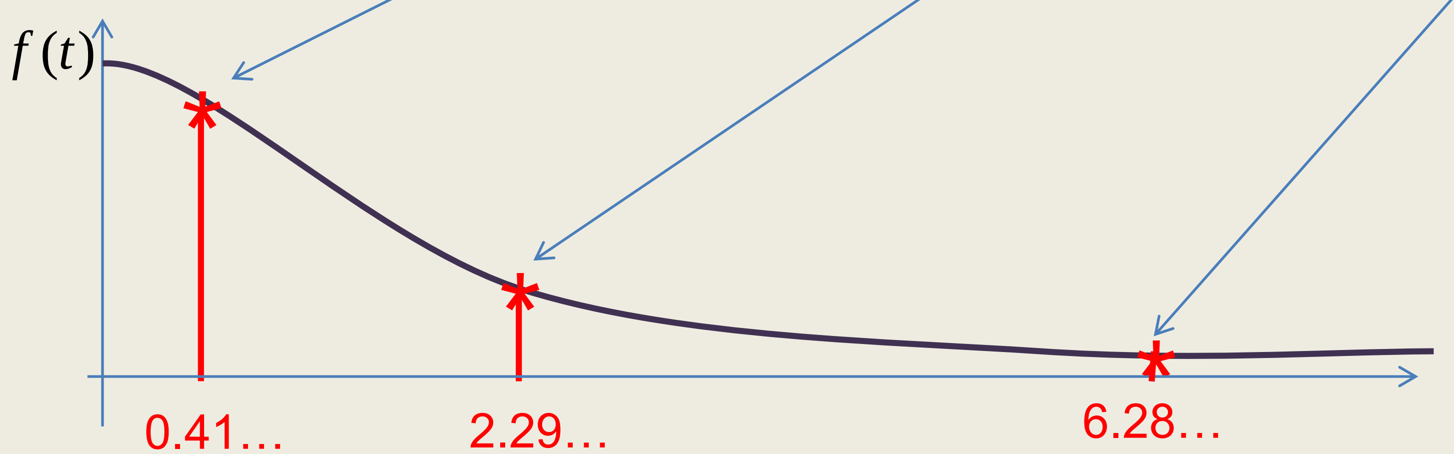
ξ_i		ν_i
	n=2	
0.58578 6437627		1.53332 603312
3.41421 3562373		4.45095 733505
	n=3	
0.41577 4556783		1.07769 286927
2.29428 0360279		2.76214 296190
6.28994 5082937		5.60109 462543
	n=4	
0.32254 7689619		0.83273 912383
1.74576 1101158		2.04810 243845
4.53662 0296921		3.63114 630582
9.39507 0912301		6.48714 508441

Gauso-Legero formulės netiesioginiam integralui apskaičiuoti

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dx = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i)$$

ξ_i		ν_i
	n=2	
0.58578 6437627		1.53332 603312
3.41421 3562373		4.45095 733505
	n=3	
0.41577 4556783		1.07769 286927
2.29428 0360279		2.76214 296190
6.28994 5082937		5.60109 462543

$$\int_0^\infty f(t)e^{-t}dt = 1.07...*f(0.41...) + 2.76...*f(2.29...) + 5.60...*f(6.28...)$$



Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti stačiakampėje srityje

Gauso apibrėžtinio integralo apskaičiavimo formulių išplėtimas *dvilypiam integralui* apskaičiuoti

- **Apibrėžtinio integralo skaitinio apskaičiavimo formulės dar vadinamos *kvadratūrų formulėmis* (žodį "kvadratas" laikant "ploto" sinonimu)**

- **Giminingas yra *dvilypio integralo, arba tūrio* apskaičiavimo uždavinys. Tokios formulės dar vadinamos *kubatūrų formulėmis* (žodį "kubas" laikant "tūrio" sinonimu)**

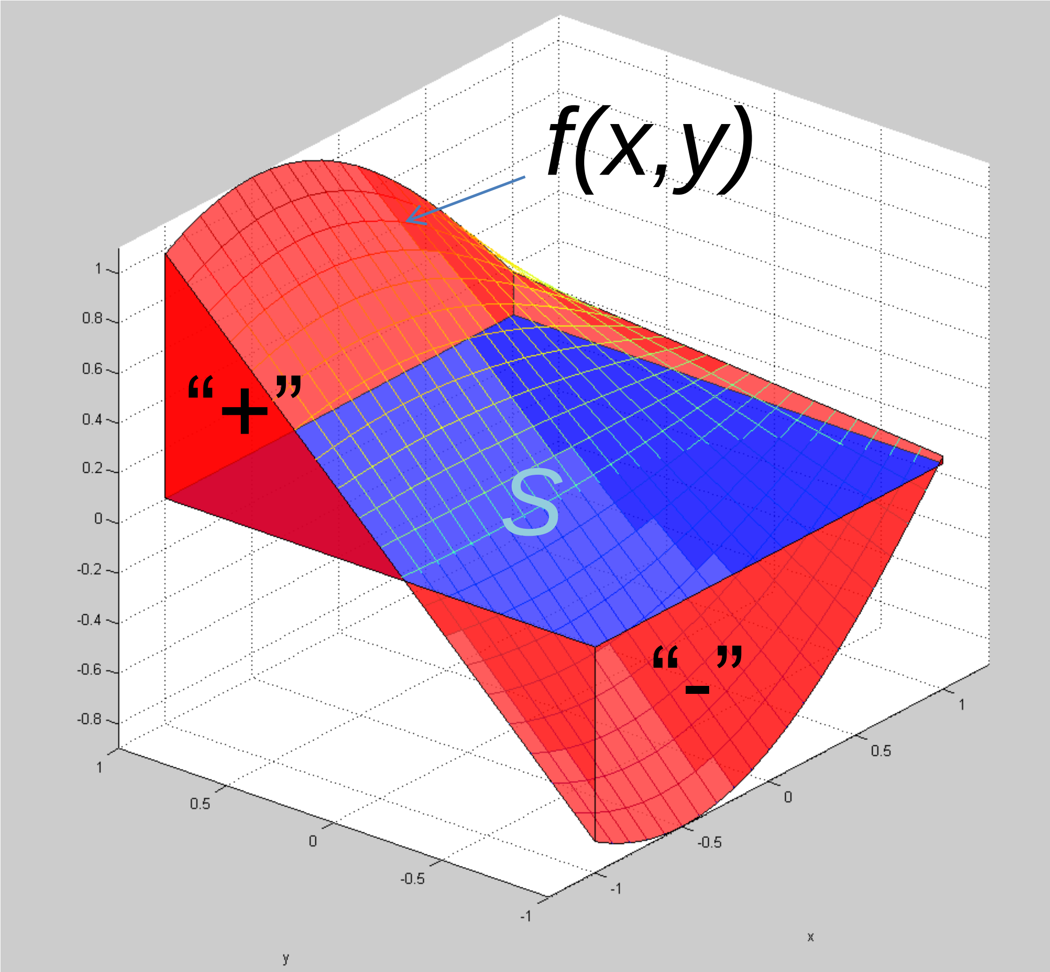
Dvilypis integralas. *Apibrėžimas ir geometrinė prasmė*

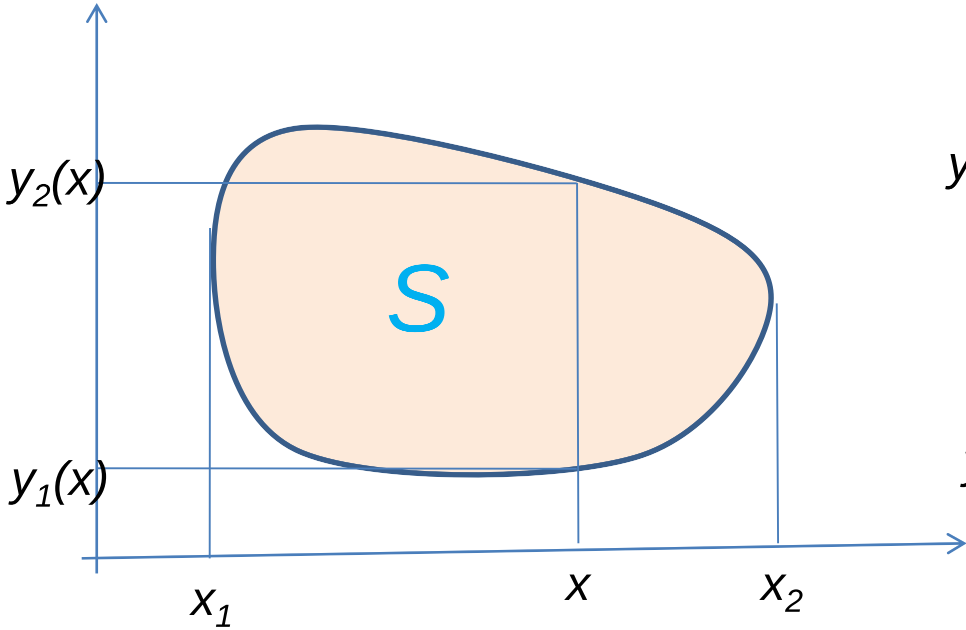
Duotos *funkcijos f(x,y) dvilypis integralas argumentų srityje S* – tai suminė reikšmė su ženklu imamo tūrio, kurį apriboja funkcijos paviršius,

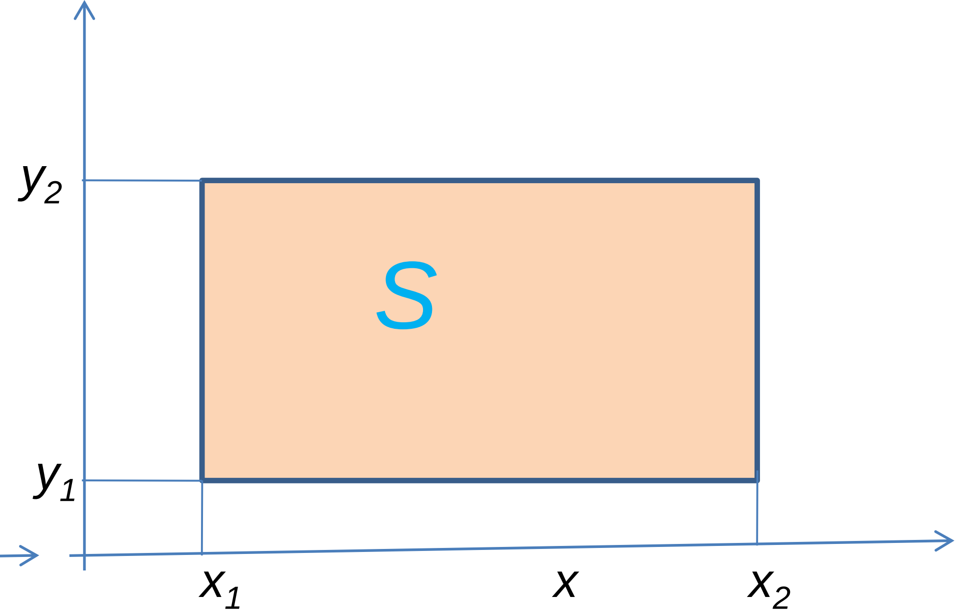
•xOy plokštuma ir

•cilindrinis paviršius, kurio sudaromoji lygiagreti z ašiai ir praeina srities *S* kontūru, imamas nuo xOy plokštumos iki funkcijos paviršiaus

$$\iint\limits_{S} f(x,y)dxdy$$





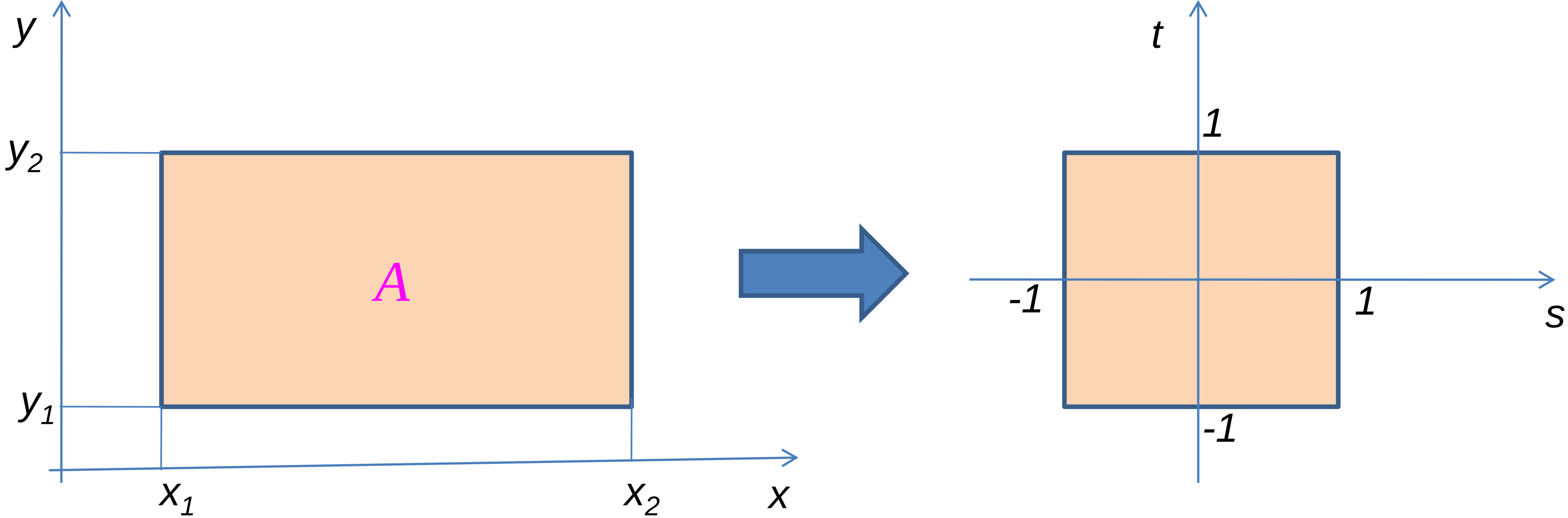


$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Benruoju atveju integravimo rėžiai pagal y yra nuo x priklausantys dydžiai

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right)dx$$

Kai sritis stačiakampė, integravimo rėžiai pagal abu kintamuosius yra pastovūs dydžiai



$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \frac{A}{4}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(s,t)\,dt\right)ds$$

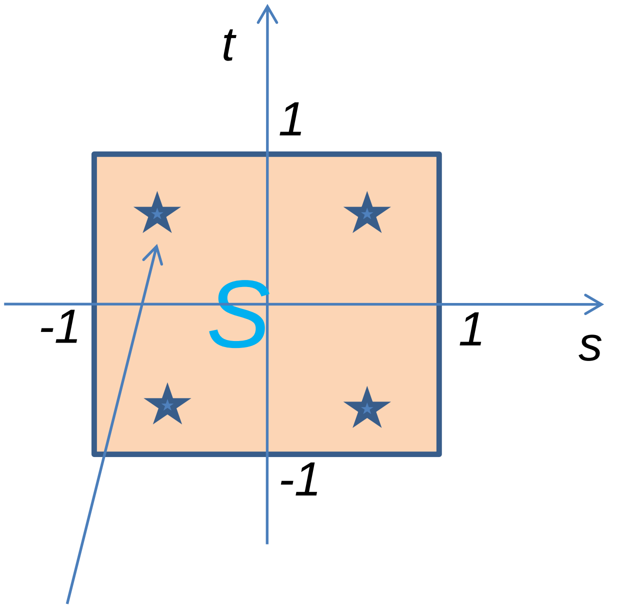
$$x = \frac{x_2 - x_1}{2}s + \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{2}t + \frac{y_2 + y_1}{2}$$

Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti *stačiakampėje srityje* gaunamos, taikant Gauso ir Ležandro metodą:

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(s,t)\,dt\right)ds = \sum_{j=1}^{n_s}\left(w_j \sum_{i=1}^{n_t} w_i f(s_j,t_i)\right)$$

$$-1 \le s_i \le 1, \quad -1 \le t_i \le 1$$

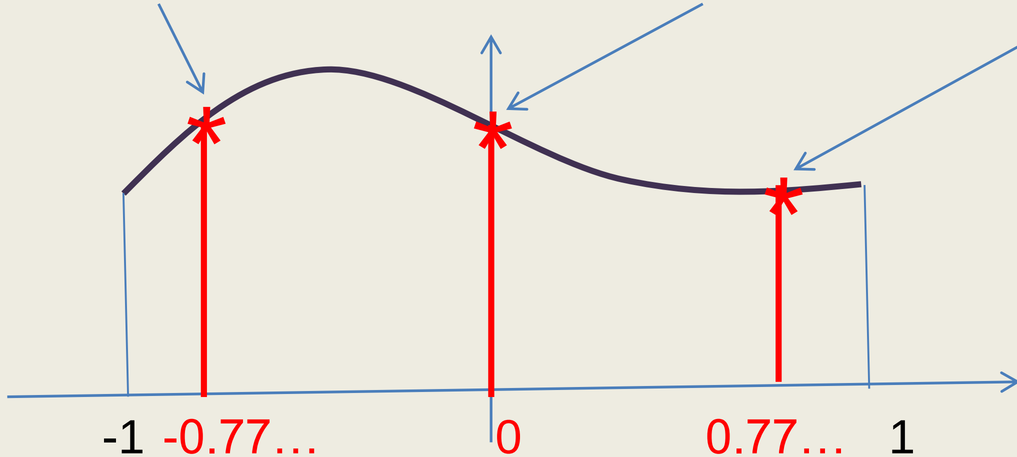


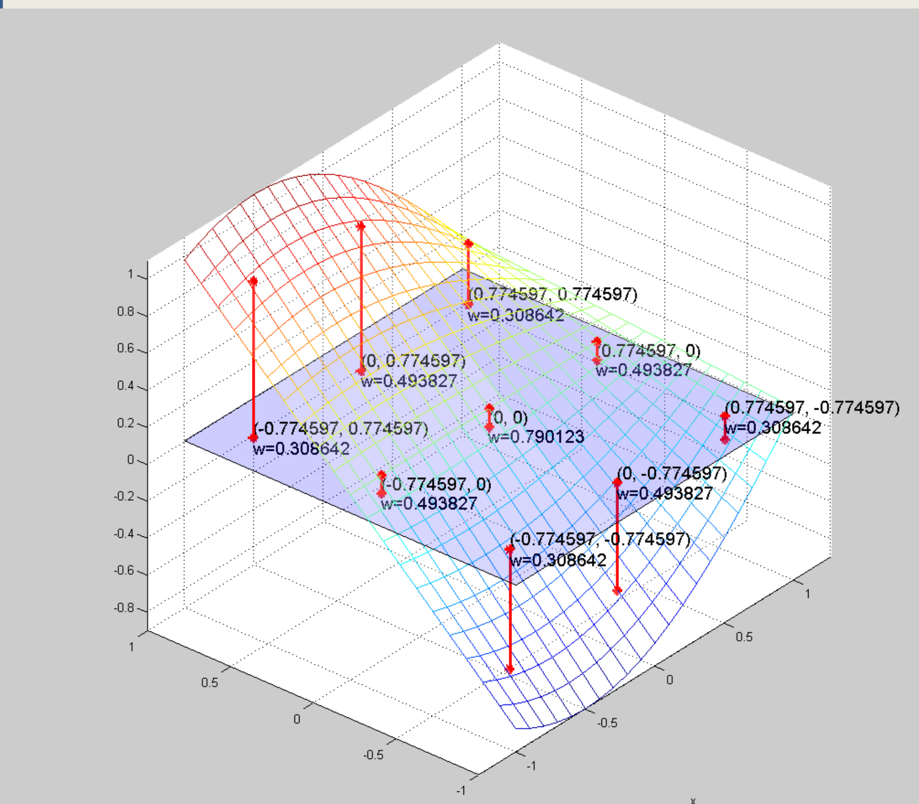
Integravimo taškas *(i,j)*
Svoris $w_i w_j$

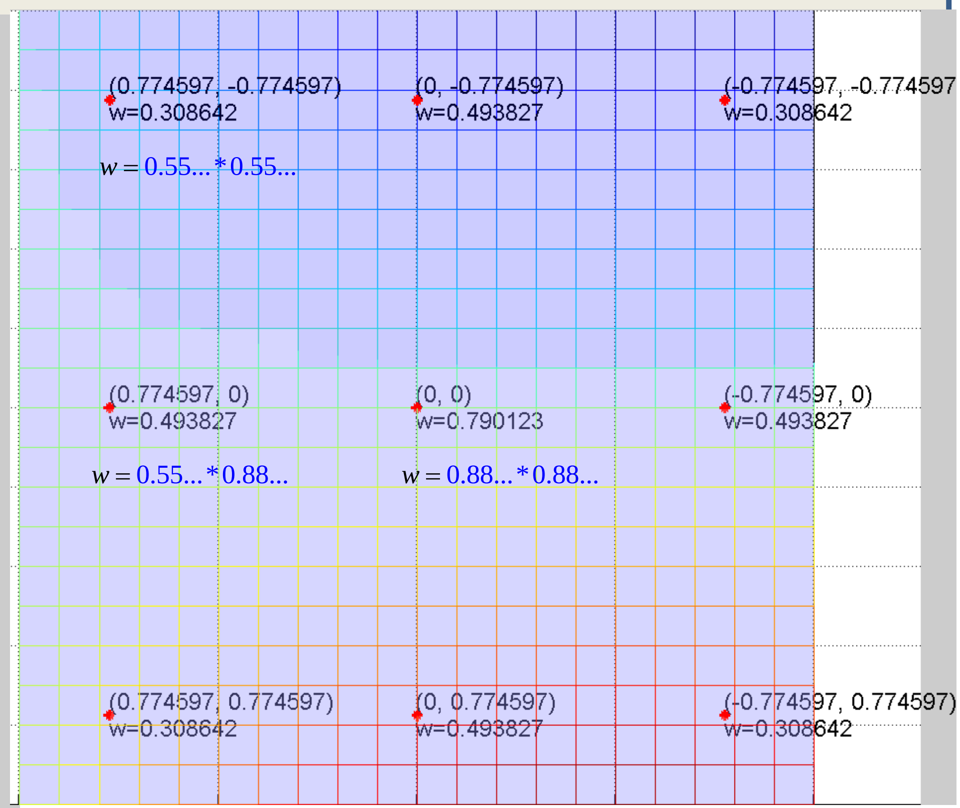
Taškų koordinatės pagal abi ašis parenkamos tokios pat, kaip ir integruojant pagal vieną kintamąjį Gauso ir Ležandro metodu

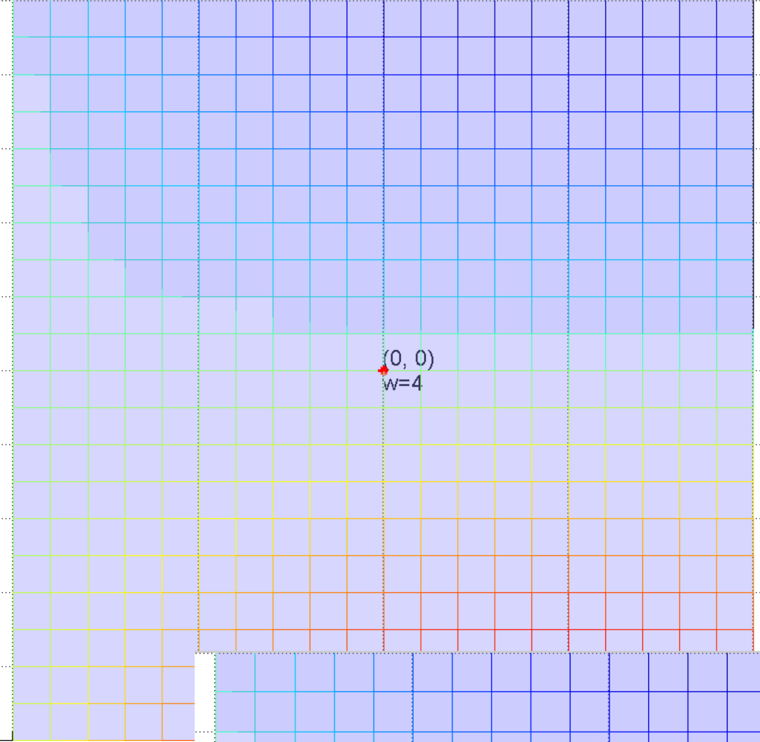
Pvz_SMA_12_3_Dvilypis_integralas

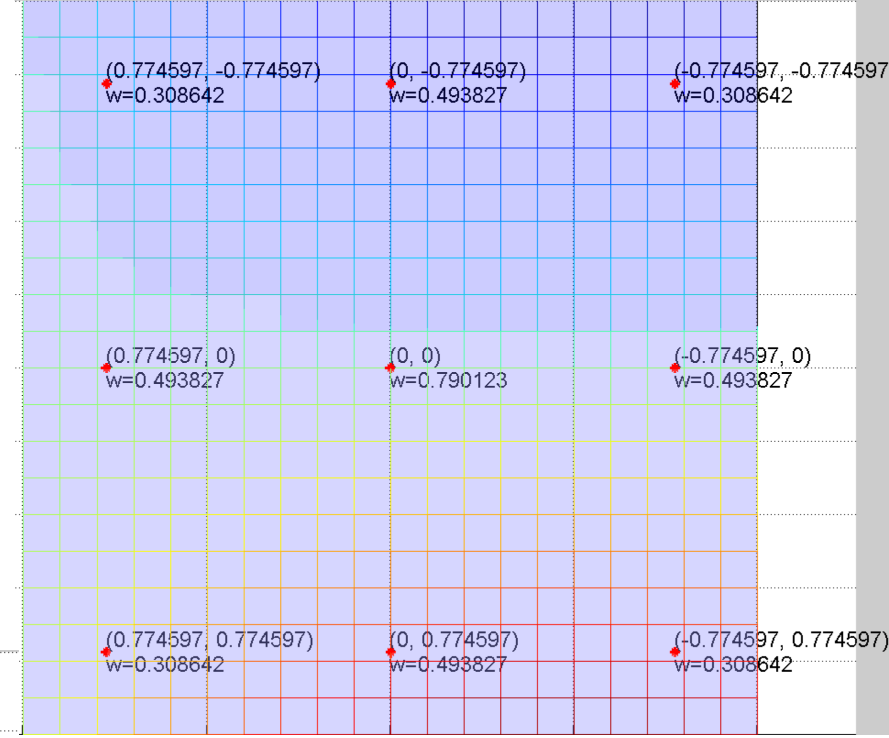
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.55\ldots * f(-0.77\ldots) + 0.88\ldots * f(0) + 0.55\ldots * f(0.77\ldots)$$

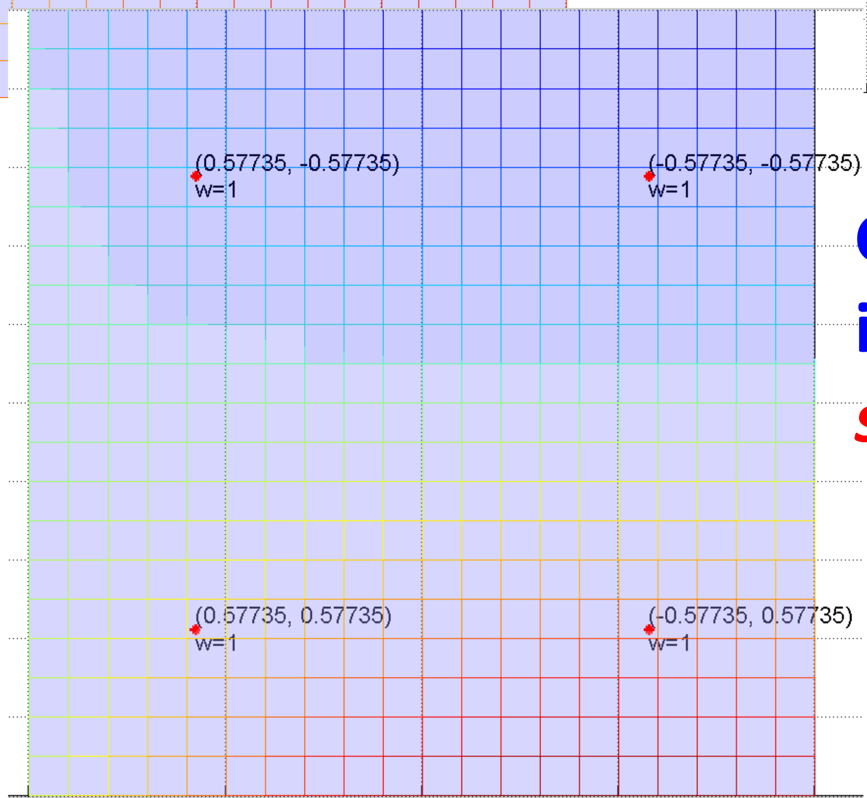








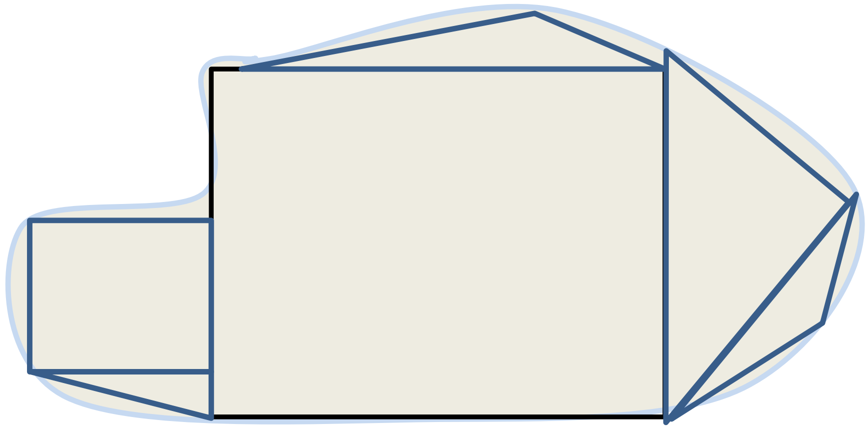




Gauso ir Ležandro integravimo taškai ir svoriai *stačiakampėje srityje*

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(t,s)\,ds\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i$$

Kai integravimo sritis ne stačiakampė, ją galima apytiksliai pateikti kaip *stačiakampių ir trikampių sričių* junginį:

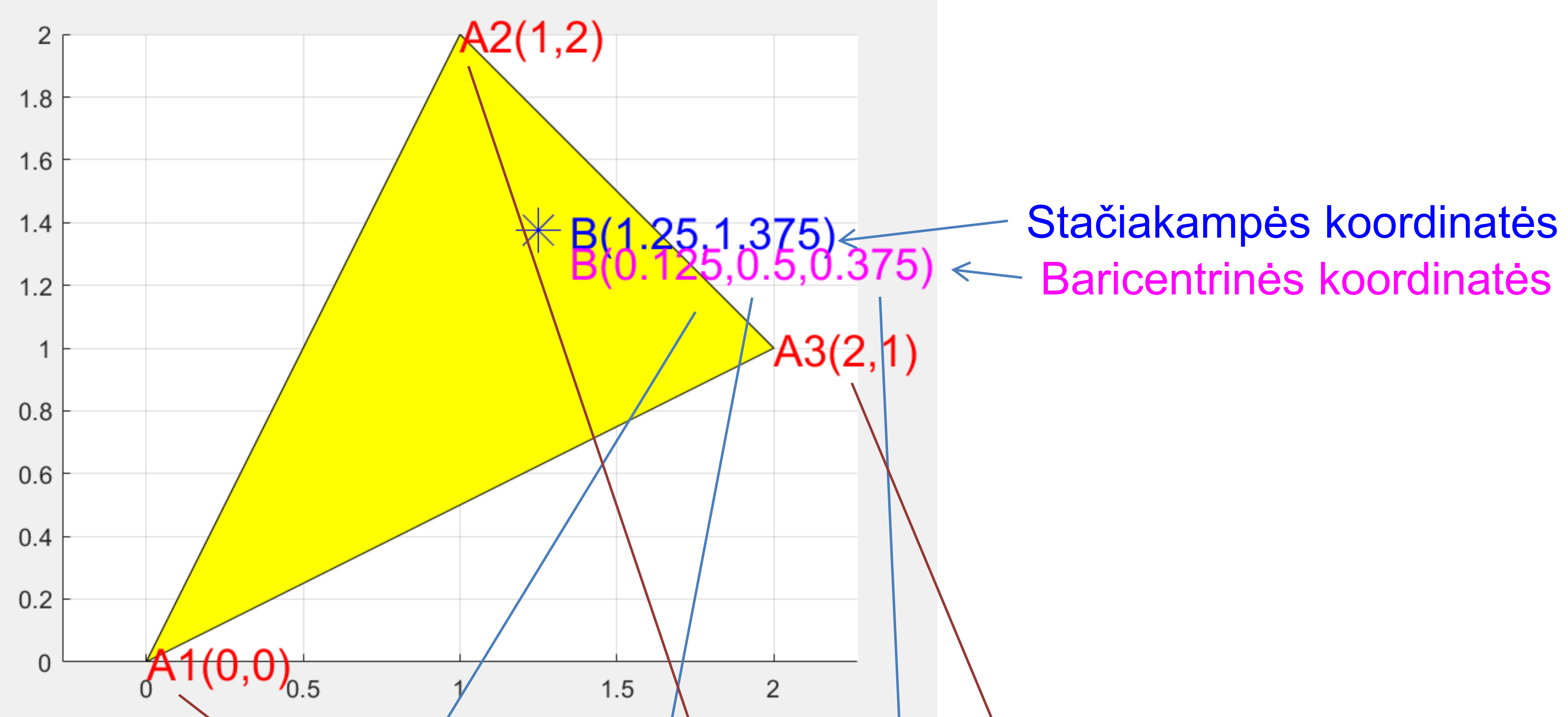


Galima išvesti skaitinio integravimo formules dvilypiam integralui apskaičiuoti *trikampėje srityje*

Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti trikampėje srityje. Baricentrinės koordinatės

Skaitinės formulės dvilypiam integralui apskaičiuoti *trikampėje srityje*

- **Trikampėje srityje Gauso-Ležandro integravimo taškai išreiškiami per *baricentrines koordinates*;**
- **Taikant baricentrines koordinates, bet kurio trikampiui priklausančio taško koordinatės išreiškiamos *viršūnių koordinačių svertinės sumos pavidale;***
- **Taško *baricentrinės koordinatės yra viršūnių koordinačių daugikliai* taško koordinačių išraiškoje;**
- **Baricentrinių koordinačių suma visuomet =1**



$$B = 0.125*(0,0) + 0.5*(1,2) + 0.375*(2,1) = (1.25, 1.375)$$

$$0.125 + 0.5 + 0.375 = 1$$

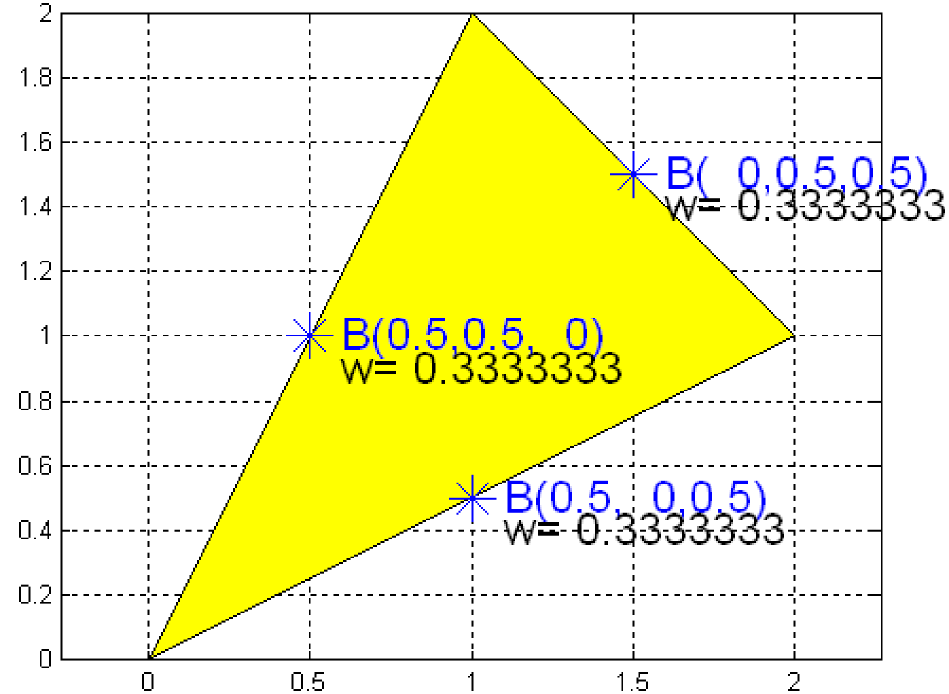
Baricentrinių koordinačių suma visuomet =1

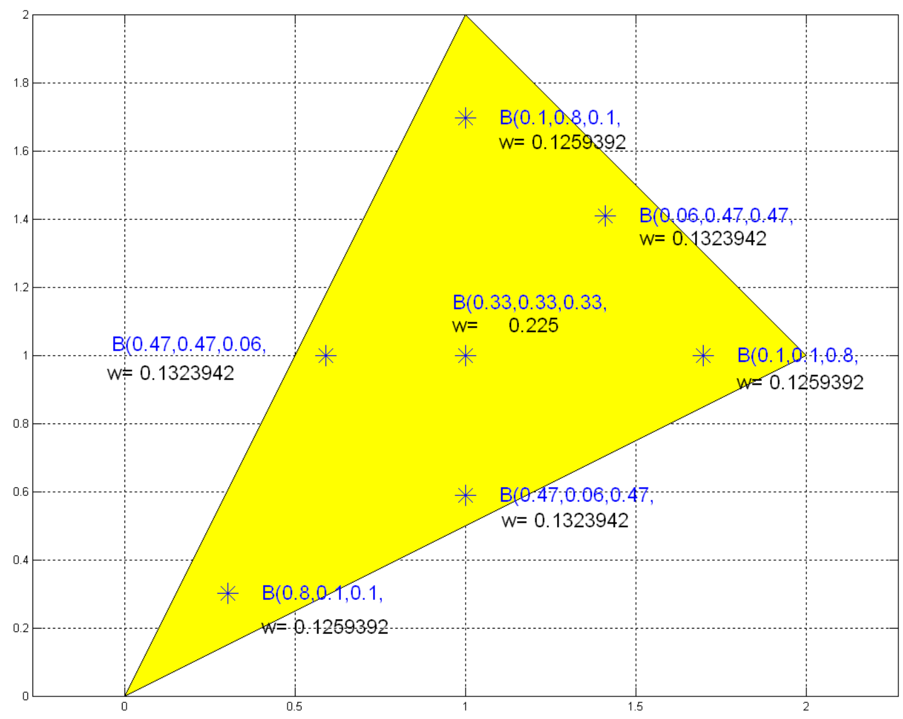
Pvz_SMA_12_4_Baricentrines_koordinates

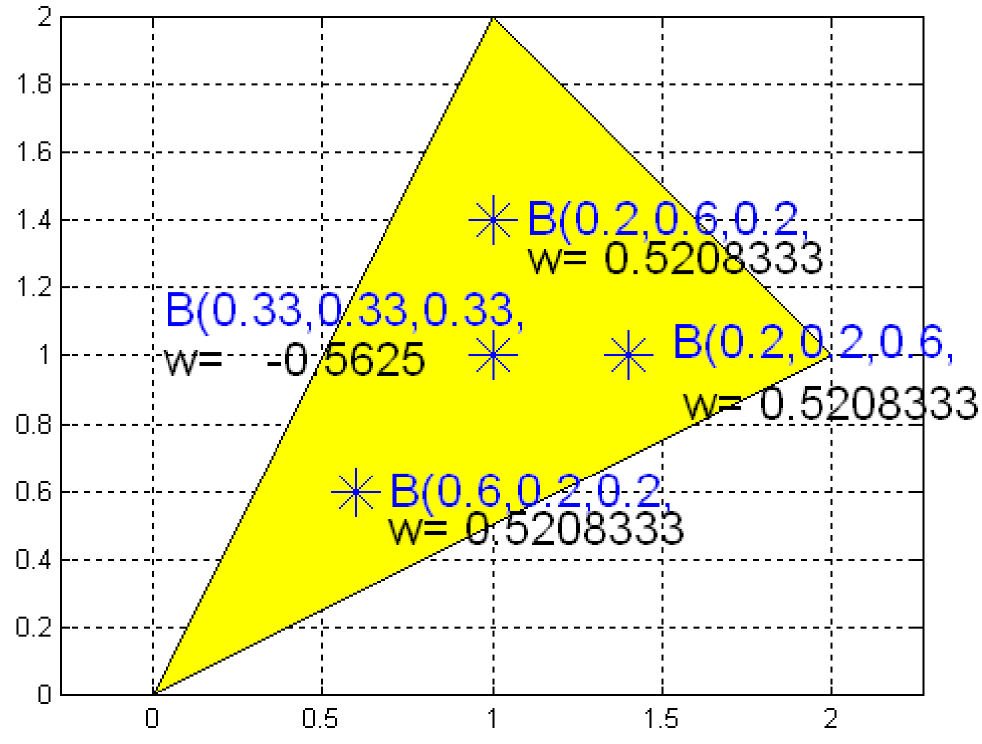
Gauso-Ležandro integravimo taškai ir svoriai *trikampėje srityje:*

$$\iint_S f(t,s)dsdt = A\sum_{i=1}^{n} w_i f_i$$

Trikampio plotas







SMA_12_Klausimai savikontrolei:

1.Koks svarbiausias skirtumas tarp Gauso ir Niutono-Koteso formulių šeimų, skirtų apibrėžtinio integralo (AI) apskaičiavimui;

2.Naudodamiesi literatūra, paaiškinkite Gauso formulių išvedimą Hemingo būdu;

3.Kaip reikia naudotis lentele pateiktais Gauso-Ležandro formulių koeficientais AI apskaičiavimui;

4.Kam naudojamos Gauso-Ermito bei Gauso-Legero formulės;

5.Kaip dvilypis integralas (DI) apskaičiuojamas stačiakampėje srityje, taikant Gauso-Ležandro metodą. Kaip gaunami integravimo taškai ir atitinkami svoriniai daugikliai;

6.Kas yra baricentrinės koordinatės ir kaip jos taikomos DI integralui trikampėje srityje apskaičiuoti(paaiškinti naudojantis literatūra);