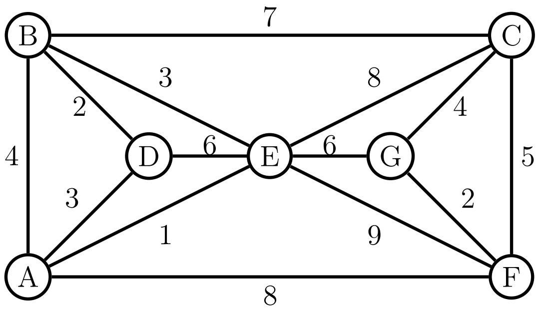
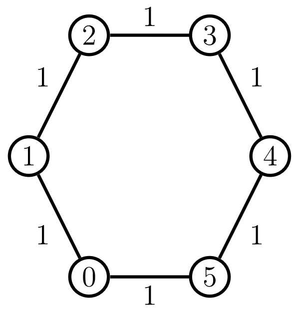
TD 3 - Arbres couvrants de poids minimum.

Exercice 1.





1. En utilisant l'algorithme de Prim, calculez des arbres couvrants de poids minimum sur les deux graphes ci-dessus.
2. Les arbres obtenus sont-ils uniques ?
3. Démontrez la propriété suivante :

   Soit G un graphe pondéré non-orienté connexe et T un arbre couvrant. Si T est de poids minimum alors il contient au moins une arête de G de poids minimum.
4. Écrivez la réciproque de cette propriété.
5. La réciproque est-elle vraie ? Si oui, démontrez-la. Si non donnez un contre-exemple.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on considère uniquement des graphes connexes et on suppose donné un algorithme ACPM qui prend en entrée un graphe non orienté connexe et renvoie un arbre couvrant de poids minimum.

1. En utilisant l'algorithme ACPM comme une boîte noire, écrivez un algorithme qui calcule un arbre couvrant de poids *maximum*.
2. En utilisant l'algorithme ACPM comme une boîte noire, écrivez un algorithme qui calcule un arbre couvrant tel que le *produit* du poids de ses arêtes est minimum.
3. Oublions l'algorithme ACPM et revenons à l'algorithme de Prim vu en cours. Montrez que l'on peut légèrement modifier l'algorithme de Prim pour trier un tableau de taille n. Déduisez-en une borne inférieure pour la complexité de l'algorithme de Prim. *(Rappelez-vous la notation Ω en cours de MPI...)*

Exercice 3.

Votre binôme propose un nouvel algorithme récursif pour calculer un ACPM pour un graphe connexe G :

1. on partitionne arbitrairement $V(G)$ en deux ensembles V_1 et V_2 de même taille (ou avec une différence de 1 si $|V(G)|$ est impair),
2. on trouve un ACPM T_1 sur V_1 et un ACPM T_2 sur V_2 par deux appels récursifs,
3. et on obtient un ACPM pour G en rajoutant une arête de poids minimum ayant une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2.

Cet algorithme est-il correct ? Si oui, prouvez-le. Sinon, donnez un contre-exemple.

Exercice 4.

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré connexe dans lequel chaque arête a un poids différent. Prouvez qu'il n'existe qu'un seul arbre couvrant de poids minimum pour G.

Exercice 5.

Etant donné un graphe simple non-orienté pondéré G, on dit qu'une arête est :

— *dangereuse* ssi elle fait partie d'un cycle de G dont toutes les autres arêtes sont de poids strictement inférieur ;

— *utile* ssi elle n'appartient à aucun cycle de G.

Montrez les deux propriétés suivantes :

P1 Si T est un arbre couvrant de G, alors il contient toutes les arêtes utiles.

P2 Si T est un arbre couvrant de G de poids minimum, alors il ne contient aucune arête dangereuse.