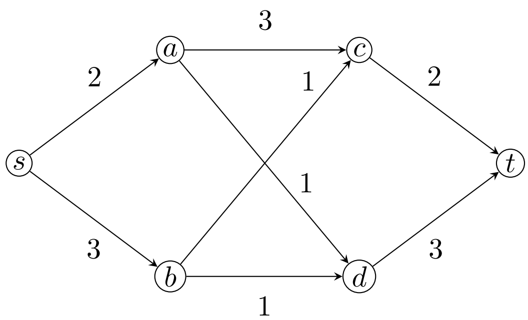
Examen — session 1

- L'épreuve dure **deux heures**.
- L'utilisation d'ordinateurs, de calculatrices, de tablettes ou de téléphones portables est interdite.
- Seules vos notes de cours et de TD sont autorisées.
- La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
- Les exercices sont indépendants, prenez le temps de lire l'énoncé avant de commencer.

Question 1.

(a) Quelle est la complexité au pire cas de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp, en fonction du nombre de sommets et d'arcs du graphe donné en entrée ?

(b) Illustrez les étapes de l'algorithme de Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp sur le graphe suivant, en donnant à chaque étape le graphe résiduel, un chemin augmentant et la valeur dont le flot augmente.



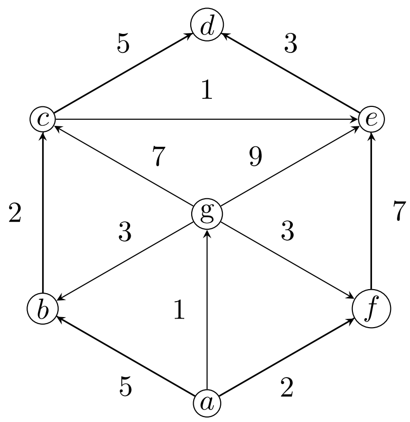
(c) Donnez la coupe minimale obtenue à la dernière étape de l'algorithme ainsi que la valeur du flot maximal.

Question 2.

(a) Sous quelle(s) hypothèse(s) sur le graphe donné en entrée l'algorithme de Dijkstra est-il correct ?

(b) Indiquez le temps d'exécution de l'algorithme en fonction du nombre de sommets et d'arcs (ou d'arêtes) du graphe et expliquez quelle structure de données est utilisée pour l'obtenir. Expliquez brièvement pourquoi la structure de données choisie est adaptée.

(c) Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe orienté ci-dessous à partir du sommet a, en précisant à chaque étape les valeurs du tableau des distances.



(d) Dessinez un arbre des plus courts chemins issus de a correspondant à votre solution.

Question 3.

Afin de lutter contre l'espionnage industriel, l'entreprise pharmaceutique *Paranoral* veut surveiller les allées et venues dans les couloirs de son site de production à l'aide de caméras de sécurité 360°. On suppose que la portée d'une caméra placée à l'extrémité d'un couloir ou à l'intersection de plusieurs couloirs est suffisante pour visualiser chaque couloir qu'elle couvre jusqu'à la prochaine extrémité/intersection. Il est donc inutile de placer une caméra aux deux extrémités d'un tronçon de couloir. Pour des raisons de budget, l'entreprise veut limiter au maximum le nombre de caméras à acheter pour mettre en place la surveillance.

On modélise le plan du site sous la forme d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ où chaque sommet représente un potentiel point d'installation d'une caméra et les arêtes représentent les tronçons de couloir.

(a) Reformulez le problème précédent comme un problème sur le graphe G.

(b) Proposez une stratégie gloutonne pour calculer un placement de caméras qui permet de surveiller tous les tronçons.

(c) Expliquez en quelques phrases pourquoi votre algorithme est correct *(c'est-à-dire qu'il construit bien une solution)*.

(d) Écrivez en pseudocode l'algorithme correspondant.

(e) Votre stratégie est-elle optimale ? Si oui, démontrez-le. Sinon, donnez un exemple de cas où la solution renvoyée par l'algorithme ne minimise pas le nombre de caméras.

Question 4.

On considère un graphe non-orienté $G = (V, E)$.

(a) Rappelez et justifiez brièvement l'égalité vue en cours liant les degrés des sommets de G et son nombre d'arêtes.

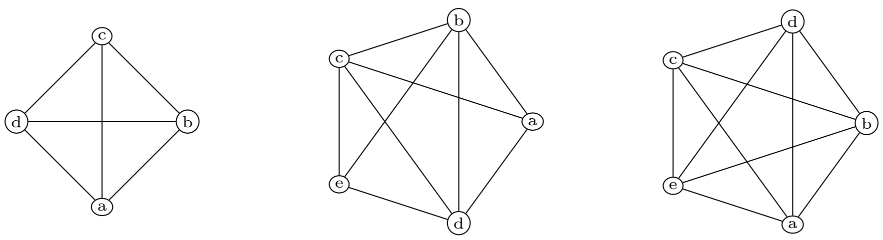
(b) Démontrez que tout graphe contient un nombre pair de sommets de degré impair.

Définition : Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* si on peut le dessiner dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent.

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

Propriété $\star$: Si $G = (V, E)$ est un graphe planaire, alors il vérifie $|E| \leq 3|V| - 6$.

(c) Les graphes suivants sont-ils planaires ? Si oui, donnez-en une représentation planaire, sinon justifiez votre réponse.



G_1 G_2 G_3

(d) En utilisant la propriété $\star$ et l'égalité de la première question, montrez que tout graphe planaire contient au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

Question 5.

Le village de vacances Crater Park propose un hébergement en petits bungalows autour des sources chaudes de Krosslaug. Afin de pouvoir exploiter le village en hiver, les propriétaires veulent construire un réseau de chauffage utilisant l'eau de la source.

Afin de construire au mieux ce réseau, ils reportent sur une carte la source (notée s_1) ainsi que tous les bungalows (notés $s_2, \dots, s_n$). Pour chaque point s_i, on note (x_i, y_i) ses coordonnées dans le plan. On note V l'ensemble des points (source et bungalows). Une entreprise de terrassement fait une étude de terrain et fournit la liste des paires de points qu'il est possible de relier en ligne droite par une canalisation. Dans la suite, on note E cette liste.

(a) Donnez une expression $d_{i,j}$ de la distance entre le point s_i et s_j.

Répondez aux questions suivantes en utilisant une modélisation sous forme de graphe. Vous pouvez utiliser les algorithmes vus en cours comme des boîtes noires, mais précisez-en bien leurs entrées et sorties.

(b) L'entreprise CheapSol veut répondre à l'appel d'offre en minimisant le coût de construction. En supposant que le coût d'installation de chaque canalisation est proportionnel à sa longueur, proposez un algorithme pour aider CheapSol à répondre à l'appel d'offre. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

(c) L'entreprise HeatSol veut quant à elle assurer une température d'eau aussi haute que possible dans chaque bungalow.
En supposant que la déperdition de chaleur entre la source et un bungalow est proportionelle à la distance qui les sépare dans le réseau des canalisations, proposez un algorithme pour aider HeatSol à répondre à l'appel d'offre. Quelle est la complexité de votre algorithme ?

(d) On considère le graphe ci-dessous représentant toutes les canalisations constructibles identifiées par l'entreprise de terrassement. La source est représentée par le sommet 1 et la pondération de chaque arête correspond à la distance entre les deux points correspondant aux sommets qu'elle relie.
Déroulez les algorithmes proposés aux questions précédentes sur ce graphe afin de donner les deux réseaux proposés par CheapSol et HeatSol.