

Programmation fonctionnelle

Fiche de TP 8

L3 Informatique 2020-2021

Automates cellulaires

Ce TP ressemble dans son déroulement, sa présentation et le type des questions posées à l'**examen final** à venir. Il s'agit d'une version révisée et augmentée d'un examen passé.

1 Explications générales

Nous allons dans ce sujet considérer les automates cellulaires unidimensionnels, des objets informatiques célèbres qui possèdent une très grande richesse. Notre objectif sera d'implanter des fonctions de base pour les manipuler.

Soit A un ensemble non vide quelconque. Un *automate cellulaire unidimensionnel* (abrégé en *automate* dans ce sujet) sur A est la donnée

- d'un *ruban* bi-infini dont les cases contiennent des valeurs de A . Les cases du ruban sont indexées par l'ensemble des entiers. Le ruban est représenté par

	-3	-2	-1	0	1	2	3	
...	e_{-3}	e_{-2}	e_{-1}	e_0	e_1	e_2	e_3	...

où les valeurs situées en haut des cases sont leurs indices, et chaque e_i est la valeur de la case d'indice i du ruban ;

- d'une valeur fixée spéciale v de A , appelée *vide* ;
- d'une *fonction évolution* $f : A \times A \times A \rightarrow A$. Cette fonction est paramétrée par trois éléments de A et renvoie un nouvel élément de A .

Le principe de fonctionnement de l'automate est le suivant. Son ruban r est rempli avec une configuration initiale (au choix) d'éléments de A . Ensuite, le ruban évolue en remplaçant chaque valeur de ses cases par la valeur calculée par la fonction d'évolution f en tenant compte de ses voisines. Plus précisément, le contenu e_i de chaque case d'indice $i \in \mathbb{Z}$ du ruban devient $f(e_{i-1}, e_i, e_{i+1})$. Ceci est résumé schématiquement par



Notons que comme le ruban est bi-infini, il n'y a pas à prévoir de conditions spéciales aux bords. Par ailleurs, la valeur vide v de l'automate intervient lors de sa création : on ne créera que des automates dans lesquels toutes les cases du ruban sont initialisées à v (la configuration initiale de l'automate est placée après sa création).

Prenons maintenant un exemple simple. Considérons l'automate sur \mathbb{N} où 0 est défini comme la valeur vide et la fonction d'évolution est définie par $f(a, b, c) := a + b$. Alors, depuis la configuration initiale

	-1	0	1	2	3	4	5	
...	0	1	0	0	0	0	0	...

nous pouvons faire évoluer l'automate itérativement. Voici quatre itérations, la lecture se faisant naturellement de haut en bas :

	-1	0	1	2	3	4	5	
...	0	1	0	0	0	0	0	...
...	0	1	1	0	0	0	0	...
...	0	1	2	1	0	0	0	...
...	0	1	3	3	1	0	0	...
...	0	1	4	6	4	1	0	...

Les figures 1, 2 et 3 contiennent d'autres exemples d'automates, dont certains sont plus élaborés et font apparaître des motifs remarquables.

2 Recommandations

- Bien lire le sujet avant de commencer à programmer, en particulier la première partie.
- L'élégance dans la programmation sera appréciée, l'inélégance sanctionnée. Cela peut se manifester dans la bonne utilisation des fonctions sur les listes (`map`, `fold_left`, *etc.*), un bon choix pour les identificateurs et la qualité des algorithmes sélectionnés.
- Il est impératif de respecter les signatures spécifiées.

FIGURE 1 – L'automate de « Sierpinski ». Il s'agit d'un automate sur l'ensemble $\{0, 1\}$, la valeur vide est 0 et la fonction d'évolution est $f(a, b, c) = (a + b + c) \bmod 2$. Les valeurs 0 (resp. 1) sont représentées par des « . » (resp. « * »).

- ### 3 Travail à faire

Exercice 1. (Outils)

1. Définir une fonction

3/20

FIGURE 2 – Un automate chaotique. Il s'agit d'un automate sur l'ensemble $\{., o\}$. La valeur vide est « . » et la fonction d'évolution sera décrite plus loin.

```
1# interval 0 8;;
2- : int list = [0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8]
3
4# interval 2 5;;
5- : int list = [2; 3; 4; 5]
6
7# interval 3 3;;
8- : int list = [3]
9
10# interval (-5) 2;;
11- : int list = [-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2]
12
13# interval 9 3;;
14- : int list = []
```

```
1 val string_of_list : 'a list -> ('a -> string) -> string = <fun>
```

4/20

FIGURE 3 – L'automate « max ». Il s'agit d'un automate sur l'ensemble \mathbb{Z} , la valeur vide est 0 et la fonction d'évolution est $f(a, b, c) = \max\{a, b, c\}$. Les valeurs vides sont représentées par des « . ».

```
1# string_of_list [0; 1; 2] string_of_int;;
2- : string = "012"
3
4# string_of_list [] string_of_int;;
5- : string = ""
6
7# string_of_list [true; false; true] string_of_bool;;
8- : string = "truefalsetrue"
9
10# string_of_list [2; 0; 101; 0; 0] (fun x -> if x = 0 then "." else "*");;
11- : string = ".*.*."

```

```
1 val compose_iter : ('a -> 'a) -> 'a -> int -> 'a list = <fun>
```

5/20

```

1# compose_iter (fun x -> x + 1) 0 5;;
2- : int list = [0; 1; 2; 3; 4; 5]
3
4# compose_iter (fun x -> -x) 8 6;;
5- : int list = [8; -8; 8; -8; 8; -8; 8]
6
7# compose_iter (fun u -> u ^ "a") "b" 5;;
8- : string list = ["b"; "ba"; "baa"; "baaa"; "baaaa"; "baaaaa"]
9
10# compose_iter (fun u -> u) "a" 0;;
11- : string list = ["a"]

```

4. Définir une fonction

```

1val is_prefix_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun>

```

qui teste si la liste en 1^{er} paramètre est préfixe de la liste en 2^e paramètre.

```

1# is_prefix_lists [2; 1; 2; 3] [2; 1; 2; 3; 6; 2; 7];;
2- : bool = true
3
4# is_prefix_lists [] [2; 1; 2; 3];;
5- : bool = true
6
7# is_prefix_lists [2; 1] [];;
8- : bool = false
9
10# is_prefix_lists [] [];;
11- : bool = true
12
13# is_prefix_lists ['a'; 'b'; 'b'] ['a'; 'b'; 'b'];;
14- : bool = true
15
16# is_prefix_lists [2; 1; 3] [2; 1; 2; 3; 6; 2; 7];;
17- : bool = false

```

5. Définir une fonction

```

1val is_factor_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun>

```

qui teste si la liste en 1^{er} paramètre est facteur de la liste en 2^e paramètre. On rappelle qu'un facteur d'une liste est une portion contiguë de ses éléments débutant à un endroit arbitraire.

```

1# is_factor_lists [2; 1; 3] [4; 2; 1; 3; 4];;
2- : bool = true
3
4# is_factor_lists [2; 1; 3] [2; 1; 3; 4];;
5- : bool = true

```

```

6
7# is_factor_lists [2; 1; 3] [4; 2; 1; 3];;
8- : bool = true
9
10# is_factor_lists ['a'; 'a'] ['a'; 'b'; 'a'];;
11- : bool = false
12
13# is_factor_lists [] ['a'];;
14- : bool = true
15
16# is_factor_lists [] [];;
17- : bool = true

```

6. Définir une fonction

```

1val is_subword_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun>

```

qui teste si la liste en 1^{er} paramètre est sous-mot de la liste en 2^e paramètre. On rappelle qu'un sous-mot d'une liste est une liste obtenue en extrayant quelques-uns de ses éléments et en conservant leur ordre d'apparition.

```

1# is_subword_lists [1; 3; 5] [1; 2; 3; 4; 5];;
2- : bool = true
3
4# is_subword_lists [1; 5; 3] [1; 2; 3; 4; 5];;
5- : bool = false
6
7# is_subword_lists ['a'; 'b'] ['a'; 'b'; 'c'];;
8- : bool = true
9
10# is_subword_lists [] ['a'];;
11- : bool = true
12
13# is_subword_lists [] [];;
14- : bool = true

```

7. Définir une fonction

```

1val is_duplicate_free : 'a list -> bool = <fun>

```

qui teste si la liste en paramètre contient exactement une occurrence de chacun de ses éléments.

```

1# is_duplicate_free [1; 2; 3];;
2- : bool = true
3
4# is_duplicate_free [1; 2; 1];;
5- : bool = false
6

```

```

7# is_duplicate_free [1; 2; 1; 1; 2];;
8- : bool = false
9
10# is_duplicate_free [3];;
11- : bool = true
12
13# is_duplicate_free [];;
14- : bool = true

```

Exercice 2. (Le type automaton)

Conformément aux explications données plus haut, on définit le type permettant de représenter les automates par le type enregistrement générique

```

1type 'a automaton = {
2  ribbon : int -> 'a;
3  evol : 'a * 'a * 'a -> 'a;
4  void : 'a;
5}

```

où le champ ribbon est le ruban de l'automate représenté comme une fonction qui associe à chaque indice entier i la valeur de la case du ruban à l'indice i , où le champ evol est la fonction d'évolution prenant un triplet de valeurs et renvoyant une valeur et où le champ void contient la valeur vide.

1. Définir une fonction

```

1val create : ('a * 'a * 'a -> 'a) -> 'a -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par une fonction d'évolution evol et une valeur vide void. La fonction renvoie l'automate possédant la fonction d'évolution et valeur vide spécifiée, et dont le ruban contient des valeurs vides en toutes cases.

```

1# create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2- : int automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0}
3
4# create (fun (a, b, c) -> b) true;;
5- : bool automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = true}
6
7# create (fun (a, b, c) -> a ^ b ^ c) "";;
8- : string automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = ""}

```

2. Définir une fonction

```

1val get_value : 'a automaton -> int -> 'a = <fun>

```

paramétrée par un automate et un indice. Cette fonction renvoie la valeur du ruban de l'automate en l'indice spécifié.


```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# get_value aut1 0;;
4- : int = 0
5
6# get_value aut1 1024;;
7- : int = 0
8
9# let aut2 = create (fun (a, b, c) -> b) true;;
10
11# get_value aut2 (-2048);;
12- : bool = true

```

3. Définir une fonction

```

1val set_value : 'a automaton -> int -> 'a -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par un automate, un indice et une valeur. Cette fonction renvoie l'automate obtenu en considérant l'automate en paramètre dans lequel la valeur à l'indice spécifié est la valeur spécifiée.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut2 = set_value aut1 16 4;;
4
5# get_value aut2 15;;
6- : int = 0
7
8# get_value aut2 16;;
9- : int = 4
10
11# get_value aut1 16;;
12- : int = 0

```

Exercice 3. (Le type bunch)

Le caractère infini des rubans des automates fait qu'il est impossible de demander à les visualiser totalement. Il est cependant possible de visualiser une partie du ruban d'un automate spécifiée par un indice de début et un indice de fin. On appelle cette information une *portion* et est représentée par le type

```

1type bunch = int * int

```

où la 1^{re} (resp. 2^e) coordonnée contient l'indice de départ (resp. de fin) de la portion.

1. Définir une fonction

```

1val get_bunch_values : 'a automaton -> bunch -> 'a list = <fun>

```

paramétrée par un automate et une portion. Cette fonction renvoie, sous forme de liste, l'extrait du ruban de l'automate spécifié la portion.

Indication : utiliser la fonction `interval` de l'exercice 1.

```
1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# get_bunch_values aut1 (-2, 6);;
8- : int list = [0; 2; 0; 0; 0; 0; 4; 0; 0; 0]
```

2. Définir une fonction

```
1val to_string : 'a automaton -> bunch -> ('a -> string) -> string = <fun>
```

paramétrée par un automate, une portion et une fonction qui convertit une valeur en une chaîne de caractères. Cette fonction renvoie la chaîne de caractère représentant la portion du ruban de l'automate spécifié.

Indication : utiliser la fonction `string_of_list` de l'exercice 1.

```
1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# to_string aut1 (-2, 6) string_of_int;;
8- : string = "020004000"
9
10# to_string aut1 (-2, 6) (fun x -> if x = 0 then "." else "*");;
11- : string = ".*****"
```

3. Définir une fonction

```
1val has_factor : 'a automaton -> bunch -> 'a list -> bool = <fun>
```

paramétrée par un automate, une portion et une liste. Cette fonction teste si la portion du ruban de l'automate spécifié contient la liste en tant que facteur.

Indication : utiliser la fonction `is_factor_lists` de l'exercice 1.

```
1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
```

```

6
7# let aut1 = set_value aut1 5 9;;
8
9# has_factor aut1 (1, 8) [4; 0; 9; 0];;
10- : bool = true
11
12# has_factor aut1 (1, 5) [4; 0; 9; 0];;
13- : bool = false

```

4. Définir une fonction

```

1val has_subword : 'a automaton -> bunch -> 'a list -> bool = <fun>

```

paramétrée par un automate, une portion et une liste. Cette fonction teste si la portion du ruban de l'automate spécifié contient la liste en tant que sous-mot.

Indication : utiliser la fonction `is_subword_lists` de l'exercice 1.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# let aut1 = set_value aut1 5 9;;
8
9# has_subword aut1 (1, 8) [4; 9];;
10- : bool = true
11
12# has_subword aut1 (7, 8) [4; 9];;
13- : bool = false

```

Exercice 4. (Transformations et propriétés)

Tout est prêt pour finalement se concentrer sur la fonctionnalité la plus importante des automates, à savoir, leur évolution. Nous allons commencer dans cet exercice par programmer des fonctions de transformation d'automates.

1. Définir une fonction

```

1val shift : 'a automaton -> int -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par un automate et un entier `k`. Cette fonction renvoie l'automate obtenu en décalant le ruban de l'automate spécifié de `k` pas **vers la gauche**.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4

```

```

5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# to_string aut1 (-2, 6) string_of_int;;
8- : string = "020004000"
9
10# let aut2 = shift aut1 3;;
11val aut2 : int automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0}
12
13# to_string aut2 (-2, 6) string_of_int;;
14- : string = "004000000"
15
16# let aut3 = shift aut1 (-4);;
17val aut3 : int automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0}
18
19# to_string aut3 (-2, 6) string_of_int;;
20- : string = "000002000"
21
22# to_string aut3 (-2, 12) string_of_int;;
23- : string = "000002000400000"

```

2. Définir une fonction

```

1val mirror : 'a automaton -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par un automate. Cette fonction renvoie l'automate obtenu en inversant le ruban de l'automate spécifié.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# to_string aut1 (-8, 8) string_of_int;;
8- : string = "00000002000400000"
9
10# let aut2 = mirror aut1;;
11
12# to_string aut2 (-8, 8) string_of_int;;
13- : string = "00000400020000000"

```

3. Définir une fonction

```

1val map : 'a automaton -> ('a -> 'a) -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par un automate et une fonction de transformation sur les valeurs. Cette fonction renvoie l'automate obtenu en remplaçant les valeurs des cases du ruban par leurs images par la fonction de transformation.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
6
7# to_string aut1 (-8, 8) string_of_int;;
8- : string = "00000002000400000"
9
10# let aut2 = map aut1 (fun x -> x + 1);;
11
12# to_string aut2 (-8, 8) string_of_int;;
13- : string = "11111113111511111"

```

4. Définir une fonction

```

1val evolution : 'a automaton -> 'a automaton = <fun>

```

paramétrée par un automate et qui renvoie l'automate obtenu en faisant évoluer l'automate spécifié.

```

1# let aut1 = create (fun (a, b, c) -> a + b + c) 0;;
2
3# let aut1 = set_value aut1 3 4;;
4
5# let aut1 = set_value aut1 2 1;;
6
7# let aut1 = set_value aut1 (-1) 2;;
8
9# to_string aut1 (-8, 8) string_of_int;;
10- : string = "00000002001400000"
11
12# let aut2 = evolution aut1;;
13
14# to_string aut2 (-8, 8) string_of_int;;
15- : string = "00000022215540000"

```

5. Définir une fonction

```

1val evolutions : 'a automaton -> int -> 'a automaton list = <fun>

```

paramétrée par un automate aut et un entier n. Cette fonction renvoie la liste des automates obtenus en faisant évoluer itérativement n fois l'automate aut. Plus précisément, la tête de la liste renvoyé est aut, le 2^e élément est l'automate obtenu en faisant évoluer aut, le 3^e est l'automate obtenu en faisant évoluer aut deux fois, etc.

Indication : utiliser la fonction `compose_iter` de l'exercice 1.

```

1# let aut = create (fun (a, b, c) -> a + b) 0;;
2
3# let aut = set_value aut 0 1;;
4
5# let lst = evolutions aut 4;;
6val lst : int automaton list =
7  [{ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0};
8   {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0};
9   {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0};
10  {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0};
11  {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0}]

```

Pour le moment, nous ne visualisons pas dans ce test si les évolutions sont calculées correctement. Ceci nous sera accessible à l'issue de la question suivante.

6. Définir une fonction

```

1val evolutions_bunch : 'a automaton -> bunch -> int -> 'a list list = <fun>

```

paramétrée par un automate aut, une portion b et un entier n. Cette fonction renvoie la liste des contenus des rubans sur la portion b des automates obtenus en faisant évoluer itérativement n fois l'automate aut.

```

1# let aut = create (fun (a, b, c) -> a + b) 0;;
2
3# let aut = set_value aut 0 1;;
4
5# evolutions_bunch aut (-1, 5) 4;;
6- : int list list =
7 [[0; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0]; [0; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0]; [0; 1; 2; 1; 0; 0; 0; 0];
8 [0; 1; 3; 3; 1; 0; 0; 0]; [0; 1; 4; 6; 4; 1; 0; 0]]

```

Cet exemple est celui de l'automate donné dans la 1^{re} partie du sujet. Comme nous pouvons le constater, il permet de calculer le triangle de Pascal.

7. Définir une fonction

```

1val is_resurgent : 'a automaton -> bunch -> int -> bool

```

paramétrée par un automate aut, une portion b et un entier n. Cette fonction teste si la portion b de aut est résurgente au bout d'au plus n évolutions. On dit que b est *résurgente* en au plus n évolutions s'il existe deux automates aut' et aut'' obtenus depuis aut par respectivement k et k' évolutions et sont tels que $0 \leq k \neq k' \leq n$ et les contenus des rubans de aut' et aut'' dans les portions spécifiées par b sont identiques.

Indication : utiliser la fonction is_duplicate_free de l'exercice 1.

```

1# let aut = create (fun (a, b, c) -> a + b) 0;;
2
3# let aut = set_value aut 0 1;;

```

```

4
5# is_resurgent aut (-1, -1) 4;;
6- : bool = true
7
8# is_resurgent aut (-1, 0) 4;;
9- : bool = true
10
11# is_resurgent aut (-1, 1) 4;;
12- : bool = false

```

Exercice 5. (Constructions)

Dans cet exercice, nous allons construire quelques exemples d'automates.

1. Définir le nom

```

1val sierpinski : int automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0}

```

comme l'automate dont le ruban contient des valeurs entières, la fonction d'évolution vérifie $f(a, b, c) := (a + b + c) \bmod 2$ et la valeur vide est 0.

```

1# let aut = set_value sierpinski 0 1;;
2
3# print_string (String.concat "\n"
4    (List.map
5      (fun a -> to_string a (-8, 8) string_of_int)
6      (evolutions aut 8)));;
700000000100000000
800000001110000000
900000010101000000
1000000110101100000
1100001000100010000
1200011101110111000
1300101000100010100
1401101101110110110
1510000000100000001- : unit = ()

```

2. Définir le nom

```

1val chaos : wb automaton = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = White}

```

comme l'automate dont le ruban contient les valeurs White ou Black, la fonction d'évolu-

tion vérifie

$$f(a, b, c) = \begin{cases} \text{White} & \text{si } (a, b, c) = (\text{Black}, \text{Black}, \text{Black}), \\ \text{White} & \text{si } (a, b, c) = (\text{Black}, \text{Black}, \text{White}), \\ \text{White} & \text{si } (a, b, c) = (\text{Black}, \text{White}, \text{Black}), \\ \text{Black} & \text{si } (a, b, c) = (\text{Black}, \text{White}, \text{White}), \\ \text{Black} & \text{si } (a, b, c) = (\text{White}, \text{Black}, \text{Black}), \\ \text{Black} & \text{si } (a, b, c) = (\text{White}, \text{Black}, \text{White}), \\ \text{Black} & \text{si } (a, b, c) = (\text{White}, \text{White}, \text{Black}), \\ \text{White} & \text{si } (a, b, c) = (\text{White}, \text{White}, \text{White}) \end{cases}$$

et la valeur vide est `White`. Définir au préalable un type somme `wb` qui contient les deux constructeur `White` et `Black`. La fonction d'évolution devra obligatoirement être écrite en mettant en place un filtrage de motifs à bon escient.

```
1# let aut = set_value chaos 0 Black;;
2
3# print_string (String.concat "\n"
4    (List.map
5      (fun a -> to_string a (-8, 8)
6        (fun x -> if x = Black then "*" else "."))
7      (evolutions aut 8)));;
8.....*.....
9*****.*****
10*****..*****
11*****..**.*
12*****.*....*
13*****..**.*
14****.*.....
15***..**.*
16**.*.....- : unit = ()
```

Exercice 6. (Mémoïsation) — Bonus (mais bonus très instructif!)

Fixons pour cet exercice la définition

```
1# let aut = set_value sierpinski 0 1;;
```

Ici, `aut` est donc l'automate de Sierpinski (programmé dans l'exercice 5) dans lequel le ruban contient 1 dans sa case d'indice 0 et des 0 partout ailleurs.

1. Essayer de lancer la phrase

```
1# evolutions aut 16;;
```

puis la phrase


```

1
2# print_string (String.concat "\n"
3  (List.map
4    (fun a -> to_string a (-8, 8) string_of_int)
5    (evolutions aut 16)));;

```

Résumer ce qu'il se passe (en comparant le comportement obtenu en lançant ces deux phrases) puis proposer une explication rigoureuse.

2. Pour accélérer le calcul du contenu du ruban d'un automate obtenu par plusieurs itérations d'évolution, nous allons recourir à la technique suivante. Pour connaître le contenu d'une case d'indice i d'un automate, nous appelons (comme depuis le début du sujet) la fonction `ribbon` de l'automate. Nous allons accompagner cet appel d'une *mise en cache* qui consiste à sauvegarder le résultat dans une liste d'association de sorte que, lors d'un prochain appel, le résultat soit directement donné après recherche dans la liste d'association. On appelle ce procédé *mémoïsation*. Il permet dans la très grande majorité des cas d'obtenir un gain spectaculaire de temps de calcul (au détriment d'un compromis sous forme d'une occupation mémoire souvent plus conséquente).

Pour mettre en place ce mécanisme, il est fourni la fonction

```

1val memo : ('a -> 'b) -> 'a -> 'b = <fun>

```

dans le fichier `Memo.ml`. Cette fonction, programmée dans un **paradigme non fonctionnel**, permet de transformer une fonction (non récursive¹) en sa version mémoïsée. Ceci utilise des mécanismes offerts par les fonctions d'ordre supérieur.

Par exemple, considérons la fonction

```

1# let f x y =
2  (x + y) / 2;;
3val f : int -> int -> int = <fun>

```

Pour en obtenir une version mémoïsée, il suffit simplement d'écrire

```

1# let f_mem = memo f;;
2val f_mem : int -> int -> int = <fun>

```

Cette nouvelle fonction s'utilise exactement comme `f` et se comporte comme cette dernière.

```

1# f 1 8, f_mem 1 8;;
2- : int * int = (4, 4)
3
4# f 10 20, f_mem 10 20;;
5- : int * int = (15, 15)

```

1. Il existe des variantes de la fonction `memo` adaptées pour la mémoïsation de fonction récursives mais plus complexes à utiliser.

Modifier le code proposé dans les exercices précédents pour faire en sorte de mémoriser quand cela est nécessaire la fonction ribbon des automates programmés.

Indication : il y a **très peu** de modifications à faire pour que cela fonctionne. Pour être certain que les modifications apportées répondent bien à la question, bien tester que le comportement original des automates est respecté et vérifier que la phrase qui demande d'afficher les 16 itérations d'évolution de l'automate de Sierpinski du début de l'exercice s'évalue **instantanément**.

4 Annexes

Le fichier Automaton.ml :

```
1 (*****  
2 (***** Exercice 1 *****)  
3 (*****  
4  
5 (* 1.1. *)  
6 (* val interval : int -> int -> int list = <fun> *)  
7  
8 (* 1.2. *)  
9 (* val string_of_list : 'a list -> ('a -> string) -> string = <fun> *)  
10  
11 (* 1.3. *)  
12 (* val compose_iter : ('a -> 'a) -> 'a -> int -> 'a list = <fun> *)  
13  
14 (* 1.4. *)  
15 (* val is_prefix_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun> *)  
16  
17 (* 1.5. *)  
18 (* val is_factor_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun> *)  
19  
20 (* 1.6. *)  
21 (* val is_subword_lists : 'a list -> 'a list -> bool = <fun> *)  
22  
23 (* 1.7. *)  
24 (* val is_duplicate_free : 'a list -> bool = <fun> *)  
25  
26 (*****  
27 (***** Exercice 2 *****)  
28 (*****  
29  
30 type 'a automaton = {  
31   ribbon : int -> 'a;  
32   evol : 'a * 'a * 'a -> 'a;  
33   void : 'a  
34 }  
35  
36 (* 2.1. *)
```

```

37 (* val create : ('a * 'a * 'a -> 'a) -> 'a -> 'a automaton = <fun> *)
38
39 (* 2.2. *)
40 (* val get_value : 'a automaton -> int -> 'a = <fun> *)
41
42 (* 2.3. *)
43 (* val set_value : 'a automaton -> int -> 'a -> 'a automaton = <fun> *)
44
45 (*****)
46 (***** Exercice 3 *****)
47 (*****)
48
49 type bunch = int * int
50
51 (* 3.1. *)
52 (* val get_bunch_values : 'a automaton -> bunch -> 'a list = <fun> *)
53
54 (* 3.2. *)
55 (* val to_string : 'a automaton -> bunch -> ('a -> string) -> string
56    = <fun> *)
57
58 (* 3.3. *)
59 (* val has_factor : 'a automaton -> bunch -> 'a list -> bool = <fun> *)
60
61 (* 3.4. *)
62 (* val has_subword : 'a automaton -> bunch -> 'a list -> bool = <fun> *)
63
64 (*****)
65 (***** Exercice 4 *****)
66 (*****)
67
68 (* 4.1. *)
69 (* val shift : 'a automaton -> int -> 'a automaton = <fun> *)
70
71 (* 4.2. *)
72 (* val mirror : 'a automaton -> 'a automaton = <fun> *)
73
74 (* 4.3. *)
75 (* val map : 'a automaton -> ('a -> 'a) -> 'a automaton = <fun> *)
76
77 (* 4.4. *)
78 (* val evolution : 'a automaton -> 'a automaton = <fun> *)
79
80 (* 4.5. *)
81 (* val evolutions : 'a automaton -> int -> 'a automaton list = <fun> *)
82
83 (* 4.6. *)
84 (* val evolutions_bunch : 'a automaton -> bunch -> int -> 'a list list
85    = <fun> *)
86
87 (* 4.7. *)

```

```

88 (* val is_resurgent : 'a automaton -> bunch -> int -> bool *)
89
90 (*****)
91 (***** Exercice 5 *****)
92 (*****)
93
94 (* 5.1. *)
95 (* val sierpinski : int automaton
96    = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = 0} *)
97
98 (* 5.2. *)
99 (* Type wb. *)
100 (* val chaos : wb automaton
101    = {ribbon = <fun>; evol = <fun>; void = White} *)
102
103 (*****)
104 (***** Exercice 6 *****)
105 (*****)
106
107 (* 6.1. *)
108
109 (* 6.2. *)

```

Le fichier Memo.ml :

```

1 let memo f =
2   let m = ref [] in
3   fun x ->
4     try
5       List.assoc x !m
6     with
7       Not_found ->
8         let y = f x in
9           m := (x, y) :: !m;
10          y

```