Amirkabir University of Technology
(Tehran Polytechnic)

Vehicle Routing with Refueling Problem (VRRP)

Professor:
Dr. F. Hooshmand (f.hooshmand.khaligh@aut.ac.ir)
Teaching Assistant:
Vista Farahi
Fatemeh Vahdat

Student:

Fatemeh Ebrahimnia (f.ebrahimnia@gmail.com , 9513001)
Mohammadreza Ardestani (**ardestani.zr@gmail.com, 9513004**)

3 Dec, 2021

0) **Introduction and purpose**

- 0.1) VRP problem
- 0.2) VRP variation (VRRP)

Part 1) **Preprocessing the data and preparing it**

- 1.1) generating data
- 1.2) Calculating distances

Part 2) **Phase One (Modeling the problem on paper)**

- 2.1) Defining indices, parameters, variables
- 2.2) Defining objective function and constraints

part 3) **Phase Two (Implementation with GAMS software)**

- 3.0) GAMS modeling overview
- 3.1) Code

part 4) **Tests and results**

- 4.1) First test
- 4.2) Second test

Part 5) **Contributions**

0.1) VRP problem

مسئله مسیریابی وسیله نقلیه ورژنی از مسئله فروشنده دوره گرد است با این تفاوت که ما از راس مبدا (انبار) میتوانیم به تعداد وسایل نقلیه امان خارج شویم و هدف مسئله این خواهد بود که نهایتا بهترین دور (یا دورهای) همیلتونی را پیدا کنیم.[1]

0.2) VRP variation (VRRP)

مسئله مسیریابی وسیله نقلیه به همراه سوختگیری، یک ورژنی از مسئله VRP است به طوری که ما میتوانیم به مراکز سوخت چندین بار مراجعه کنیم و مانند نود های مشتری حتما مجبور به یک بار ملاقات آن ها نیستیم.

صورت دقیق مسئله:

گراف کامل و بدون جهت $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ را در نظر بگیرید که $\mathbb{V}$ (با اندیس i,j) بیانگر مجموعهٔ رئوس است و به صورت $\mathbb{V} = \mathbb{I} \cup \{o\} \cup \mathbb{F}$ تعریف می‌شود و در آن، $\mathbb{I}$ مجموعهٔ مشتریان، o رأس متناظر با انبار و $\mathbb{F}$ (با اندیس f) مجموعهٔ مراکز سوخت‌گیری را نشان می‌دهد. یک شرکت حمل‌ونقل قصد دارد با مجموعه‌ای شامل K وسیلهٔ نقلیهٔ همگن که در انبار مستقرند، مشتریان را سرویس دهد. با هر کمان $(i,j) \in \mathbb{E}$ فاصلهٔ $d_{i,j}$ نظیر می‌شود و فرض بر آن است که مقادیر فاصله در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند. وسایل نقلیه دارای سرعت ثابت v هستند و لذا $t_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{v}$ بیانگر زمان سفر روی کمان (i,j) می‌باشد. همچنین، s_i و s_f به ترتیب، مدت زمان لازم برای سرویس‌دهی به مشتری i و سوخت‌گیری در مرکز f را نشان می‌دهند.

ظرفیت مخزن سوختِ هر وسیلهٔ نقلیه محدود و برابر با Q است و ممکن است نیاز باشد وسیلهٔ نقلیه در طول سفر خود در برخی مراکز $f \in \mathbb{F}$، سوخت‌گیری کند. محدودیتی روی تعداد دفعات سوخت‌گیری وجود ندارد و در هر بار سوخت‌گیری، مخزنِ سوخت به طول کامل پر می‌شود. همچنین، موجودی سوخت اولیهٔ وسایل نقلیه هنگام خروج از انبار، برابر با $\frac{Q}{2}$ و نرخ مصرف سوخت در واحد فاصله برابر با r فرض می‌شود. زمان سفر هر وسیلهٔ نقلیه نباید از آستانهٔ T_{max} تجاوز کند.

باید در خصوص تخصیص مشتریان به وسایل نقلیه و ترتیب ملاقات آنها تصمیم‌گیری شود. همچنین، تعیین گردد که هر وسیلهٔ نقلیه در کدام مراکز و چه موقع سوخت‌گیری کند به طوری که هر مشتری دقیقاً یک بار ملاقات شود، وسایل نقلیه در طول سفر خود با کمبود سوخت مواجه نشوند. هدف، کمینه‌سازی میزان مصرف سوخت است.

متغیرهای تصمیم را به صورت زیر تعریف و یک مدل بهینه‌سازی ارائه کنید (ممکن است نیاز باشد علاوه بر متغیرهای زیر، متغیرهای دیگری نیز تعریف گردند).

$\delta_{i,j}$: متغیر دودوئی که اگر یکی از وسایل نقلیه مستقیماً از رأس i به رأس j برود، یک و در غیر این صورت صفر است. $(\forall i,j \in \{o\} \cup \mathbb{I}: (i,j) \in \mathbb{E})$

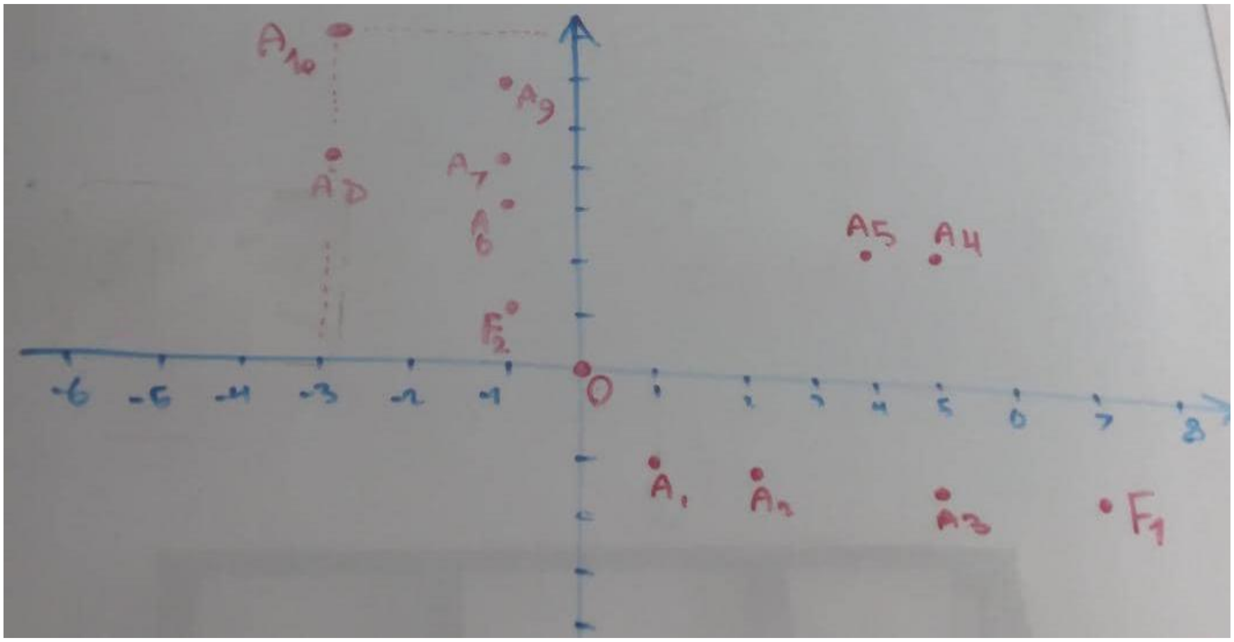
$\gamma_{i,f,j}$: متغیر دودوئی که اگر یکی از وسایل نقلیه از رأس i به رأس j برود و در میان راه در مرکز f سوخت‌گیری کند، یک و در غیر این صورت، صفر است. $(\forall i,j \in \{o\} \cup \mathbb{I}, f \in \mathbb{F}: r d_{j,f} \le Q, (i,f) \in \mathbb{E}, (f,j) \in \mathbb{E})$

---

[1] برای اطلاعات بیشتر رجوع شود به: "روش های مدل سازی، تالیف دکتر هوشمند"

1.1) generating data

به این خاطر که پروسه تست کردن بتواند سریع تر انجام شود ما نقاط اولیه را در صفحه اقلیدسی در نظر گرفتیم تا بتوان فاصله نقاط را به دست آورد و شهودی از بهترین دور (یا دورها) داشت.



10 مشتری ما با A مشخص شده اند و نقاط سوخت گیری با F1,F2 مشخص شده اند.
انبار (center) مبدا مختصات است.

1.2) Calculating distances

فاصله نقاط با یک دیگر در پایتون حساب شده و در یک فایل اکسل برای گمز ارسال شده است.

d(i,j)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1.4	2.2	5.1	5.4	4.5	3.2	4.1	5	6.1	7.6	7.1	1.4
1	1.4	0	1	4	5	4.2	4.5	5.4	6.4	7.3	8.9	6	2.8
2	2.2	1	0	3	4.2	3.6	5	5.8	7.1	7.6	9.4	5	3.6
3	5.1	4	3	0	3	3.2	7.2	7.8	9.4	9.2	11.3	2	6.3
4	5.4	5	4.2	3	0	1	6.1	6.3	8.2	7.2	9.4	3.6	6.1
5	4.5	4.2	3.6	3.2	1	0	5.1	5.4	7.3	6.4	8.6	4.2	5.1
6	3.2	4.5	5	7.2	6.1	5.1	0	1	2.2	3	4.5	8.9	2
7	4.1	5.4	5.8	7.8	6.3	5.4	1	0	2	2	3.6	9.4	3
8	5	6.4	7.1	9.4	8.2	7.3	2.2	2	0	2.8	3	11.2	3.6
9	6.1	7.3	7.6	9.2	7.2	6.4	3	2	2.8	0	2.2	10.6	5
10	7.6	8.9	9.4	11.3	9.4	8.6	4.5	3.6	3	2.2	0	12.8	6.3
11	7.1	6	5	2	3.6	4.2	8.9	9.4	11.2	10.6	12.8	0	8.2
12	1.4	2.8	3.6	6.3	6.1	5.1	2	3	3.6	5	6.3	8.2	0

df(f,i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	7.1	6	5	2	3.6	4.2	8.9	9.4	11.2	10.6	12.8	0	8.2
12	1.4	2.8	3.6	6.3	6.1	5.1	2	3	3.6	5	6.3	8.2	0

2.1) Defining indices, parameters, variables

اندیس ها:

مرکز (انبار) و مشتری ها با اندیس j, i مشخص شده اند که اولین اندیس (اندیس صفر) بیان گر مبدا میباشد.

مراکز سوخت با اندیس f مشخص شده اند.

پارامترها:

به جز پارامترهایی که در صورت سوال تعریف پارامتر دیگری استفاده نشده است، اما برای سادگی و وضوح بیشتر کد پارامترهای زمان بین نود ها و زمان سرویس دهی/سوختگیری و فاصله بین نود ها، برای مراکز سوخت یک پارامتر مجزا از نودهای مشتری(ویا مبدا) در نظر گرفته شده است.
به عنوان مثال، $t\_f_{\ fj}$ برای زمان بین نود j با مرکز سوخت f است در صورتی که t_{ij} زمان بین دو نود مشتری(و یا مبدا) است.

متغییرها:

به جز پارامترهایی که در صورت سوال تعریف شده اند از متغییرهای زیر نیز بهره گرفته شده است.

w_i زمان ملاقات نود مشتری و یا مبدا

$x_{\ i}$ میزان سوخت وسیله نقلیه به هنگام رسیدن به مشتری یا مبدا

$u_{\ ij}$ متغییر کمکی برای خطی سازی

2.2) Defining objective function and constraints

قید ۱:

قید یک تضمین می‌کند حداکثر k وسیله ی نقلیه از انبار خارج شوند (چه به یک مشتری بروند($\delta_{0j} = 1$) چه به مرکز سوخت گیری $\gamma_{0,f,j} = 1$)

قید ۲:

برای هر نود مشتری تعداد وسایل نقلیه عمومی باید برابر تعداد وسایل نقلیه خروجی باشد.

قید ۳:

به هر نود مشتری باید دقیقا یک بار وارد شویم این قید و قید قبلی تضمین میکنند برای هر نود مشتری دقیقا یک ورود و یک خروج داشته باشیم.

قید ۴:

سوخت اولیه همه ی وسایل نقلیه در انبار برابر $\frac{q}{2}$ است.

قید ۵:

برای نود مشتری j، یا از یک مشتری دیگر مستقیم به آن رفتیم یا بین راه سوخت گیری کردیم. اگر از نود مشتری i مستقیم به مشتری j ام رفته باشیم یعنی $\delta_{ij} = 1$ میزان سوخت در نود j برابر است با میزان سوخت نود i منهای سوختی که در مسیر بین این دو مصرف کردیم (فاصله ضربدر نرخ مصرف سوخت). و اگر در بین راه سوخت گیری کرده باشیم(γ_{ij}) در مرکز سوخت گیری سوخت کامل شده (q) و بعد در مسیر مرکز سوخت تا نود j مقدار سوخت کم شده (فاصله مرکز سوخت و نود j ضربدر نرخ مصرف سوخت).

پس:

$$x_j = \sum_{i:i\neq j} \delta_{ij} \times (x_i - rd_{ij}) + \sum_f \sum_{i:i\neq j} \gamma_{ij} \times (q - r \times d_{fj})$$

در سیگمای اول ضرب متغیر باینری δ در x را داریم که مدل را از حالت خطی خارج میکند پس قید را خطی می‌کنیم:

$$x_j = \sum_{i:i\neq j} (\delta_{ij}x_i - \delta_{ij}rd_{ij}) + \sum_f \sum_{i:i\neq j} \gamma_{ij} \times (q - r \times d_{fj})$$

$\delta_{ij}x_i$ را با متغیر نامنفی v_{ij}جایگزین می‌کنیم (ارتباط این متغیرها را در قید های ۱۳و ۱۴ و ۱۵ نشان داده ایم)

پس قید به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$x_j = \sum_{i:i\neq j} (v_{ij} - \delta_{ij}rd_{ij}) + \sum_f \sum_{i:i\neq j} \gamma_{ij} \times (q - r \times d_{fj})$$

قید ۶:

این قید تضمین می‌کند برای هر دو مشتری متمایز i و j اگر $\gamma_{ifj} = 1$ شود (از نود مشتری i ام به مرکز سوخت رفته باشیم و بعد به مشتری j) وسیله ی نقلیه در نود i سوخت کافی برای رسیدن به مرکز سوخت را داشته باشد.

قید ۷:

این قید تضمین می‌کند برای بازگشت به انبار سوخت کافی داشته باشیم.

قید ۸:

این قید و چهار قید بعدی محدودیت های زمانی مساله را کنترل می‌کنند.

در نود مرکز زمان صفر است.

قید ۹:

اگر از مشتر ی i ام یا مبدا به صورت مستقیم به مشتری j ام رفته باشیم، ملاقات مشتری j ام باید بعد از ملاقات نود قبلی، سرویس دهی به این نود (برای مبدا این زمان صفر است) و سفر بین این دو نود باشد. یعنی:

$$\delta_{ij} = 1 \Rightarrow w_j \geq w_i + sc_i + d_{ij}$$

خطی سازی:

$$w_j \geq w_i + sc_i + t_{ij} - M(1 - \delta_{ij})$$

برای تعیین M:

$$M \geq w_i + sc_i + t_{ij} - w_j$$

چون این نامساوی برای هر i,j که بین i و j یال نیست باید برقرار بشود و ممکن است این دو نود توسط دو وسیله ی نقلیه ی مختلف ملاقات شده باشند ممکن است مقدار d_{ij} خیلی بزرگ باشد برای داده های تست ما، دو برابر زمان ماکسیمم، M مناسبی بود اما برای داده های دیگر ممکن است مقدار بزرگ تری نیاز باشد.

قید نهایی:

$$w_j \geq w_i + sc_i + t_{ij} - 2 \times Tmax(1 - \delta_{ij})$$

قید ۱۰:

اگر از مشتر ی i ام یا مبدا به مشتری j ام رفته باشیم و در بین راه برای سوخت گیری توقف کرده باشیم، ملاقات مشتری j ام باید بعد از ملاقات نود قبلی، سرویس دهی به نود قبلی(برای مبدا این زمان صفر است)، سفر به جایگاه سوخت، زمان سوخت گیری و سفر از جایگاه سوخت به مشتری j باشد. یعنی:

$$\gamma_{ifj} = 1 \Rightarrow w_j \geq w_i + sc_i + df_{fi} + sf_f + df_{fj}$$

خطی سازی:

$$w_j \geq w_i + sc_i + df_{fi} + sf_f + df_{fj} - M(1 - \gamma_{ifj})$$

برای تعیین M:

$$M \geq w_i + sc_i + df_{fi} + sf_f + df_{fj} - w_j$$

مشابه قید قبلی این جا هم مقدار مناسب برای M باید با توجه به داده های مساله تعیین شود. باز هم برای داده های ما، دو برابر زمان ماکسیمم، M مناسبی بود اما برای داده های دیگر ممکن است مقدار بزرگ تری نیاز باشد.

قید نهایی:

$$w_j \geq w_i + sc_i + df_{fi} + sf_f + df_{fj} - 2 \times Tmax(1-\gamma_{ifj})$$

قید ۱۱:

زمان برگشت به انبار باید قبل از T_{max} باشد. در این قید حالتی را بررسی می‌کنیم که از نود مشتری i ام بعد از سوخت گیری به انبار بازگشته باشیم.

$$\gamma_{if0} = 1 \Rightarrow w_i + sc_i + sf_f + df_{fi} + df_{fo} \leq Tmax$$

خطی سازی:

$$w_i + sc_i + sf_f + df_{fi} + df_{fo} \leq Tmax + M(1-\gamma_{if0})$$

با توجه به این که این قید برای i و f های مختلفی که ممکن است توسط وسیله ی نقلیه ی یکسانی ملاقات نشده باشند باید زائد شود فاصله های df ممکن است مقادیر بزرگی اختیار کنند و M باید به قدر کافی بزرگ باشد. برای داده های تست ما T_{max} مقدار مناسبی برای M بود:

$$w_i + sc_i + sf_f + df_{fi} + df_{fo} \leq Tmax + Tmax(1-\gamma_{if0})$$

قید ۱۲:

زمان برگشت به انبار باید قبل از T_{max} باشد. در این قید حالتی را بررسی می‌کنیم که از نود مشتری i ام مستقیما به انبار بازگشته باشیم.

$$\delta_{i0} = 1 \Rightarrow w_i + sc_i + d_{i0} \leq Tmax$$

خطی سازی:

چون بعد از سرویس دهی به هر مشتری باید زمانی کافی برای برگشت به مبدا وجود داشته باشد و فرض کردیم نامساوی مثلث برای فواصل داده شده برقرار است این نامساوی مستقل از مقدار دلتا باید برقرار باشد و نیازی به خطی سازی ندارد.

قید نهایی:

$$w_i + sc_i + d_{i0} \leq Tmax$$

قید ۱۳:

این قید و قید های ۱۴ و ۱۵ برای خطی سازی $x_i\delta_{ij}$ که در قید پنجم ظاهر شده بود اضافه شده اند.

متغیر نامنفی u_{ij} را تعریف و با $x_i\delta_{ij}$ جایگزین می‌کنیم:

$$x_i\delta_{ij} = u_{ij} \qquad \forall i,j \in I \cup \{o\} : i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \ \Rightarrow u_{ij} \leq x_i \ \wedge u_{ij} \geq x_i$$

و:

$$\delta_{ij} = 0 \ \Rightarrow u_{ij} \leq 0 \ \wedge u_{ij} \geq 0$$

چون x_i نامنفی ست مستقل از مقدار δ_{ij} دو شرط $u_{ij} \leq x_i$ و $u_{ij} \geq 0$ باید برقرار باشند. از مثبت بودن v_{ij} در تعریف متغیر مطمئن شدیم و قید ۱۳ تضمین می‌کند $u_{ij} \leq x_i$.

قید ۱۴:

$$\delta_{ij} = 1 \ \Rightarrow u_{ij} \geq x_i$$

خطی سازی:

$$u_{ij} \geq x_i - M(1 - \delta_{ij})$$

حداکثر مقدار x_i می‌تواند حداکثر سوخت ممکن یعنی q باشد. پس M را برابر q قرار می‌دهیم.

$$u_{ij} \geq x_i - q(1 - \delta_{ij})$$

قید ۱۵:

$$\delta_{ij} = 0 \ \Rightarrow u_{ij} \leq 0$$

خطی سازی:

$$u_{ij} \leq 0 \ + \ M\delta_{ij}$$

چون حداکثر مقدار x_i،u_{ij} است که از سوخت کامل نمی‌تواند بیشتر باشد اینجا هم M را برابر q قرار می‌دهیم:

$$u_{ij} \leq q\delta_{ij}$$

تابع هدف مسئله: هدف کمینه کردن میزان سوخت است که رابطه ی مستقیمی با میزان کل مصافت طی شده دارد.

$$x_j = \sum_{i}\sum_{j:i\neq j} \left(\delta_{ij}\, d_{ij}\, r\right) + \sum_{f}\ \sum_{i}\ \sum_{j:i\neq j} \gamma_{ij} \times \left(d_{fi} + d_{fj}\right) \times r$$

3.0) GAMS modeling overview

همان طور که میدانیم پیاده سازی مدل در گمز 7 بخش مختلف دارد که تمام مراحل آورده شده است. توجه شود که ما برای سادگی، بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، خیلی از پارامتر ها را برابر 1 گرفته ایم.

3.1) Code

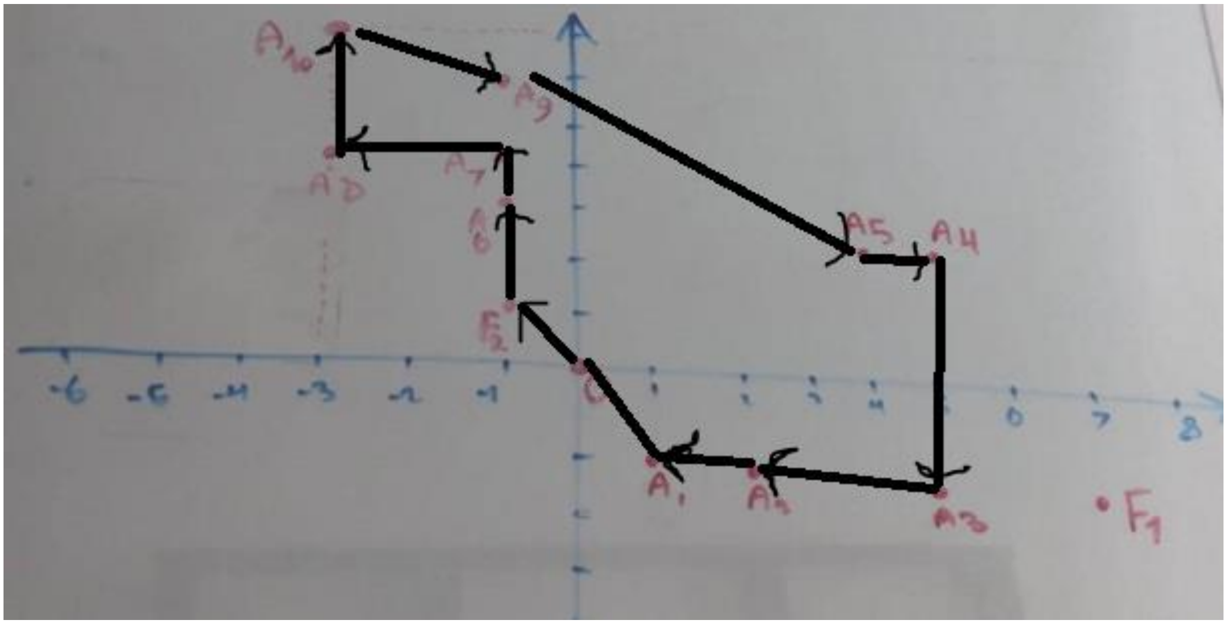
تمام برنامه دارای کامنت هست که شما میتوانید به راحتی از آن ها جریان برنامه را متوجه شوید.

```
const4..
* initial gas of every vehicle
    x("0") =e= q/2;

const5(j)$(j.val <>0)..
* Gas of vehicle in node j is from one anncestor either a customer or a gas station minus the amount of used gas during the path
* notice this amount is always positive
    x(j) =e= sum(i$(i.val <> j.val), v(i,j)- delta(i,j)*(d(i,j)*r)) + sum((i,f)$(i.val <> j.val), gamma(i,f,j)*(Q-(d_f(f,j)*r)));

const6(i,f,j)$(i.val <> j.val)..
* We need enough gas for reaching any GAS STATION from a Customer
    x(i)=g= d_f(f,j)*r*gamma(i,f,j);

const7(i)$(i.val<>0)..
* if we are going to reach the center, we must have enough gas
    x(i) =g= d(i,"0")*r*delta(i,"0");


const8..
* center visit time
    w("0") =e= 0;

const9(i,j)$(i.val <> j.val and j.val<>0)..
* node j should have greater visit time from its previous node
    w(j) =g= w(i)+sc(i)+d(i,j) - 2*tmax*(1-delta(i,j));

const10(i,f,j)$(i.val <> j.val and j.val<>0)..
* node j should have greater visit time from its previous node (in this case we have also an intermediate node f)
    w(j) =g= w(i) + sc(i) + sf(f) + d_f(f,i) + d_f(f,j) - 2*tmax*(1-gamma(i,f,j));

const11(i,f)$(i.val<>0)..
* we should come back the center sooner than Maximum travel time ( in this case we come back from Gas Station f)
    w(i) + sc(i) + sf(f) + d_f(f,i) + d_f(f,"0") =l= tmax + tmax*(1-gamma(i,f,"0"));
```

4.1) First test

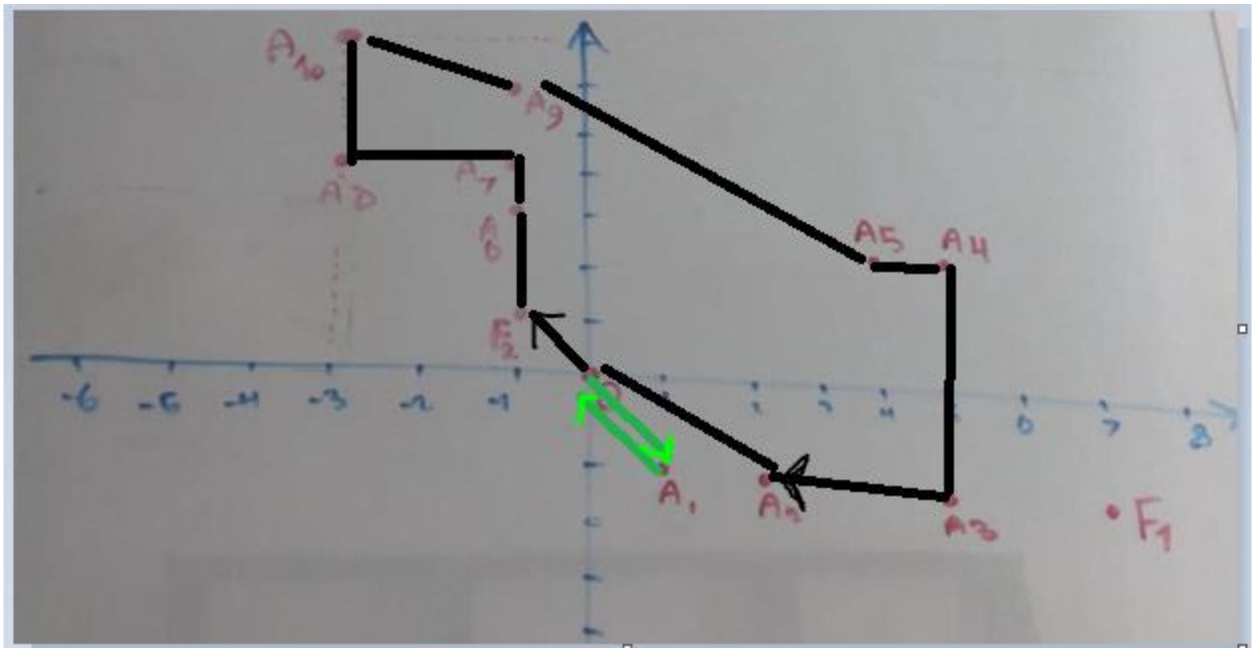
در تست اول ما ماکسیمم زمان سفر را برابر 60 ثانیه قرار دادیم. نتیجه مدل سازی، بر خلاف انتظار اولیه ما، ملاقات کردن تمام مشتری ها تنها با یک ماشین شد، که بهینه ترین حالت ممکن است.

در این مسیر بهینه ابتدا در مرکز سوخت شماره 2 سوخت گیری شده و بعد تمام نود ها ویزیت شده اند.



4.2) Second test

در تست دوم ما ماکسیمم زمان سفر را برابر40 ثانیه قرار دادیم. نتیجه مدل سازی ، ملاقات کردن تمام مشتری ها تنها با یک ماشین شد، اما برای ویزیت کردن نود شماره 1 یک ماشین جدا از مبدا فرستاده شده است.



علت آن است که ما وقتی به نود شماره 2 میرسیم، اگر چه هنوز 16 لیتر بزنین داریم، دیگر زمانی برای ویزیت کردن نود 1 باقی نخواهد ماند لذا مستقیما ب نود شماره 0 میرویم تا کمتر از ماکسیسم زمان (ینی 40 ثانیه) به مبدا بازگشته باشیم.

```
----    137 VARIABLE x.L

0  20.000,    1  18.600,    2  16.400,    3  19.400,    4  22.400,    5  23.400
6  38.000,    7  37.000,    8  35.000,    9  29.800,    10 32.000


----    137 VARIABLE w.L

1   2.400,    2  36.800,    3  32.800,    4  28.800,    5  26.800,    6   6.400
7   8.400,    8  11.400,    9  19.400,    10 15.400
```

Part 5) **Contributions**

این کار همکاری مشترک دو اعضا است که با همفکری هم انجام داده ایم. اگر چه هر دو مدل سازی خود را به صورت جداگانه داشته ایم، نهایتا به دلیل کمبود وقت یک گزارش برای آن ارائه خواهیم داد.
تشکربسیارازآقای محمد برنوسی که ما را در رفع خطای خواندن از اکسل در گمز یاری کردند.

سپاس از وقت و توجه تان.