۸-۲ مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی

امروزه در مراکز آموزشی، سامانهٔ برنامه‌ریزیِ کلاس‌ها، دروس، آزمایشگاهها و امتحانات در راستای بهبود عملکرد مؤسسه و استفادهٔ بهینه از منابع موجود از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در حال حاضر، روند تهیهٔ این گونه برنامه‌ها در مؤسسات آموزشی به تجربه و دقتِ نیروی انسانی متکی است و به ندرت، امکاناتِ مکانیزه برای این امر وجود دارد. با گسترش و توسعهٔ مؤسسات و افزایش تعداد دانشجویان و رشته‌های آموزشی، انجام این مهم به یک روندِ زمان‌بر و طاقت‌فرسا تبدیل شده است. با استفاده از مدل‌های ریاضی، امکانِ برنامه‌ریزی مکانیزه فراهم می‌گردد به طوری که با امکانات موجود، با سرعت بیشتر و در زمان کمتر تا حد زیادی از بروز خطاهای انسانی ناشی از پیچیدگی و زمان‌بریِ روند برنامه‌ریزی جلوگیری شده و همچنین، ابزاری مناسب برای اِعمال قوانین و مدیریت منابع در اختیار برنامه‌ریزان قرار می‌گیرد. به علاوه، با استفاده از یک بستر مناسبِ اینترنتی، امکان تعامل مناسب بین مدرسین، دانشجویان و مؤسسهٔ آموزشی فراهم می‌شود.

در این قسمت، ضمن تعریف دقیقِ مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی[۱]، مدلی برای آن ارائه داده و آن را به عنوان نمونه‌ای از مسائل چند هدفه که شامل مجموعه‌ای از قیود سخت و نرم است، بررسی می‌کنیم.

۸-۲-۱ توصیف مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی

مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی، به ارائهٔ یک جدول زمان‌بندی می‌پردازد که هدفِ آن، تخصیص دروس به بازه‌های زمانیِ مختلف در طول هفته و تعیین چینشی از دروس است که ضمن رعایت مقررات آموزشی، از نظر مدرس، دانشجو و امکانات مؤسسهٔ آموزشی، قابل قبول و انجام‌پذیر باشد.

نیازهای کلیِ یک برنامهٔ آموزشیِ هفتگی به شرح زیر است:

۱- مجموعهٔ دروس، روزها و بازه‌های زمانیِ مجازِ هفته معلوم هستند و فرض می‌شود که مدت بازه‌های زمانی یکسانند (مثلاً دو ساعت) و هیچ یک از بازه‌های زمانی با یکدیگر تداخل ندارند.

۲- دروس باید در روزها و بازه‌های زمانیِ مجازِ هفته برنامه‌ریزی شوند.

۳- تعداد جلساتِ هفتگیِ مورد نیازِ هر درس معلوم است و تعداد بازه‌های زمانی که به یک درس تخصیص داده می‌شود، باید برابر با تعداد جلساتِ آن باشد.

۴- برای هر رشتهٔ تحصیلی یک درختواره وجود دارد که قوانین مربوط به رعایت تقدم و تأخر دروس را بیان می‌کند و دانشجویان عموماً در هر نیمسال، دروس خود را بر اساس

[۱] Course timetabling problem

دروس پیشنهادیِ درختواره انتخاب می‌کنند. بر اساس درختواره، می‌توان دانشجویان را گروه‌بندی و برآورد نمود که دانشجویان هر گروه (مثلاً دانشجویانی که این نیمسال، سومین نیمسال تحصیلیِ آنهاست)، چه دروسی را اخذ می‌کنند و برنامهٔ هفتگی را به گونه‌ای تنظیم کرد که این دروس، با یکدیگر تداخل نداشته باشند. بنابراین، به طور کلی، فرض می‌کنیم که بر اساس تجربیات کارشناسان آموزش و درختوارهٔ رشتهٔ تحصیلی، چند زیرمجموعه از دروس، مشخص شده‌اند و برنامهٔ هفتگی باید به گونه‌ای تنظیم شود که درس‌هایی که در یک زیرمجموعه قرار دارند، با یکدیگر تداخل زمانی نداشته باشند.

۵- تعداد کلاس‌های مؤسسهٔ آموزشی معلوم است و فرض بر آن است که همهٔ کلاس‌ها از نظر ظرفیت و امکاناتِ آموزشی مشابهند.

۶- بازه‌های زمانی که به دروس یک مدرس تخصیص داده می‌شوند، نباید با یکدیگر تداخل داشته باشند.

۷- در یک بازهٔ زمانیِ مشخص نمی‌توان در یک کلاس بیش از یک درس، ارائه داد.

۸- در یک بازهٔ زمانیِ مشخص حداکثر می‌توان به تعداد کلاس‌های موجود، درس ارائه کرد.

۹- ارائهٔ درس برای برخی مدرسین در برخی بازه‌های زمانی مقدور نیست (مثلاً به دلیل حضور در جلسات هفتگی). از این رو، از مدرسین خواسته می‌شود که زمان‌هایی را که برای تدریس آمادگی دارند، مشخص کنند. به عنوان مثال، یک مدرس ممکن است نسبت به بازه‌های زمانی قبل‌ازظهرِ روزهای شنبه و دوشنبه و بازه‌های زمانیِ بعدازظهرِ روزهای یک‌شنبه و سه‌شنبه، اعلام آمادگی نماید.

محدودیت‌های فوق، بیانگر شرایط الزامی و ضروریِ مؤسسهٔ آموزشی است (قیود سخت) و لازم است مدل ریاضی، همهٔ ضروریات فوق را رعایت کند. اما مؤسسه شرایط ترجیحی (قیود نرم) را نیز در نظر دارد که باید به طور مناسب مورد توجه قرار گیرند. ترجیحات مؤسسه به ترتیب اولویت، به شرح زیر است:

۱- به دلیل کاهش بازدهیِ دانشجویان در اولین بازهٔ زمانی بعدازظهر، مدرسین تمایل دارند در صورت امکان در این زمان کلاس نداشته باشند.

۲- مؤسسه تمایل دارد جلسات مختلفِ یک درس در دو روز متوالی نباشند و حداقل یک روز بین آنها فاصله باشد.

۳- مؤسسه تمایل دارد دروسی که تعداد جلسات هفتگی آنها بیشتر از یک جلسه است، در روزهای مختلف ولی در بازه‌های زمانیِ مشابه ارائه شوند. مثلاً اگر جلسات یک درس خاص در روزهای شنبه و دوشنبه است، بهتر است بازهٔ زمانیِ هر دو جلسه مشابه باشد. مثلاً هر دو در دومین بازهٔ زمانی قرار داده شوند.

تذکر ۸-۱:

با توجه به نیاز مؤسسات آموزشی، مفروضات دیگری نیز ممکن است مطرح گردند که در ادامه به چند مورد از آنها اشاره می‌شود. وارد کردن این مفروضات در مدل، در تمرینات پایان فصل مطرح شده است.

۱- لزوماً مدتِ بازه‌های زمانی مشابه نیست. به عنوان مثال، به دروس ۴ واحدی عموماً دو جلسهٔ ۲ ساعته و به دروس ۳ واحدی، دو جلسهٔ ۱/۵ساعته اختصاص داده می‌شود. همچنین، ممکن است برخی از بازه‌های زمانی، هم‌پوشانی داشته باشند. به عنوان مثال، بازه‌های زمانی ۹:۱۵-۷:۴۵ و ۱۰-۸ با یکدیگر اشتراک دارند و از این رو، در یک روز مشخص، یک مدرس حداکثر در یکی از دو بازهٔ زمانیِ مذکور می‌تواند درس ارائه کند.

۲- زمان‌بندی برخی از دروس از قبل مشخص است و یا باید به به بازه‌های زمانی و یا روزهای خاصی اختصاص یابند.

۳- برخی دروس به بیش از یک مدرس نیاز دارند (مثل دروس گروه پزشکی).

۴- برخی دروس به امکانات کمک آموزشیِ خاص (مانند ویدئو پروژکتور) نیاز دارند و باید در کلاس‌هایی دایر گردند که امکانات لازم را داشته باشند.

۵- برنامهٔ هفتگی باید تا حد امکان برای دانشجویان فشرده باشد. به عنوان مثال، در یک روز، از ایجاد زمان آزادِ طولانی بین دو درس حتی‌المقدور خودداری شود یا مثلاً برنامه به گونه‌ای نباشد که تعدادی از دانشجویان در یک روز مشخص تنها یک درس داشته باشند. به طور مشابه، برنامهٔ هفتگیِ مدرسین نیز نباید بیش از حد پراکنده باشد.

۶- بهتر است کلاسِ دروسِ متوالیِ دانشجویان در یک ساختمان باشد تا از تردد زیاد و ازدحام آنها جلوگیری شود.

۷- برخی دروس به زیرگروه‌های کوچک‌تر تجزیه می‌شوند (آزمایشگاه، سمینار و...) و دانشجویان باید به صورت متعادل به این گروه‌ها اختصاص یابند.

۸- کلاس‌های درس باید تا حد امکان پر شوند، اما تعداد دانشجویان نباید از ظرفیت کلاس تجاوز کند.

۸-۲-۲ مدل مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی

مجموعه‌ها، اندیس‌ها و پارامترها

مجموعهٔ دروس با اندیس c : $\mathbb{C}$

مجموعهٔ مدرسین با اندیس l : $\mathbb{L}$

مجموعهٔ روزهای مُجاز با اندیس d, d' : $\mathbb{D}$

D	:	عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{D}$ بیانگر آخرین روز مُجاز
$\mathbb{H}$	:	مجموعهٔ بازه‌های زمانیِ مجاز در هر روز با اندیس h, h'
$\bar{h}$	:	عضوی از مجموعهٔ $\mathbb{H}$ بیانگر اولین بازهٔ زمانیِ بعدازظهر
$\mathbb{S}_j$	:	زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{C}$ که دربردارندهٔ دروسی هستند که نباید با یکدیگر تداخل داشته باشند ($j \in \mathbb{J} = \{۱, \ldots, m\}$). مثلاً مجموعهٔ $\mathbb{S}_۱$ می‌تواند شامل دروسی باشد که عموماً دانشجویان در اولین نیمسالِ تحصیلیِ آنها را اخذ می‌کنند و لذا، زمان ارائهٔ این دروس نباید با هم تداخل داشته باشد. البته مجموعه‌های $\mathbb{S}_۱, \mathbb{S}_۲, \ldots, \mathbb{S}_m$ لزوماً از هم مجزا نیستند و ممکن است برخی از آنها با هم اشتراک داشته باشند.
n_c	:	تعداد جلسات هفتگی مورد نیاز درس c
K	:	تعداد کلاس‌های دانشکده
$a_{c,l}$	:	یک پارامتر دودوئی که اگر درس c به مدرس l تخصیص داده شده باشد، یک و در غیر این صورت، صفر است.
$b_{l,d,h}$	:	پارامتر دودوئی که اگر مدرس l برای تدریس در بازهٔ زمانی h از روز d آمادگی داشته باشد، یک و در غیر این صورت، صفر است.

متغیرهای تصمیم

$\delta_{c,d,h}$	:	متغیر دودوئی که اگر درس c در روز d و بازهٔ زمانیِ h ارائه شود، یک و در غیر این صورت، صفر است. ($c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{D}, h \in \mathbb{H}$)

تابع هدف

این مسأله می‌تواند فاقد تابع هدف باشد. در این صورت، صرفاً به دنبال برنامه‌ای مناسب هستیم که در آن، همهٔ قیود سخت و نرم رعایت گردند و هیچ ترجیح خاصی مطرح نیست. برای وارد کردنِ یک مدل فاقد تابع هدف در نرم‌افزار بهینه‌یاب، می‌توان تابع هدف را به صورت زیر تعریف نمود:

$$min\, z = ۰$$

اما در عمل، ممکن است امکانِ رعایتِ همهٔ قیود نرم فراهم نباشد. در این حالت، می‌توان امکان نقضِ آنها را فراهم کرد و توابع هدف را کمینه‌سازیِ میزانِ نقضِ قیود نرم تعریف نمود. بدین ترتیب، به یک مدل سه هدفه می‌رسیم که اهداف آن به ترتیب اولویت، عبارتند از:

۱- کمینه‌سازی میزان نقض اولین قید نرم (کمینه‌سازیِ تعداد جلساتی که در اولین بازهٔ زمانیِ بعدازظهر قرار داده می‌شوند).

۲- کمینه‌سازی میزان نقض دومین قید نرم (کمینه‌سازی تعداد مواردی که جلساتِ یک درس در دو روز متوالی قرار می‌گیرند).

۳- کمینه‌سازی میزان نقض سومین قید نرم (کمینه‌سازی تعداد دروسی که بازه‌های زمانیِ همهٔ جلساتشان مشابه نیست).

قیود

$$\sum_{d\in\mathbb{D}}\sum_{h\in\mathbb{H}}\delta_{c,d,h}=n_c \quad \forall c\in\mathbb{C} \tag{۸-۱}$$

$$\sum_{c\in\mathbb{C}}\delta_{c,d,h}\le K \quad \forall d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H} \tag{۸-۲}$$

$$\sum_{c\in\mathbb{C}:a_{c,l}=۱}\delta_{c,d,h}\le ۱ \quad \forall d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H}, l\in\mathbb{L} \tag{۸-۳}$$

$$\sum_{c\in\mathbb{S}_j}\delta_{c,d,h}\le ۱ \quad \forall d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H}, j\in\mathbb{J} \tag{۸-۴}$$

$$\delta_{c,d,h}\le b_{l,d,h} \quad \forall c\in\mathbb{C}, l\in\mathbb{L}: a_{c,l}=۱,\ \forall d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H} \tag{۸-۵}$$

$$\sum_{h\in\mathbb{H}}\delta_{c,d,h}\le ۱ \quad \forall c\in\mathbb{C}: n_c>۱,\ \forall d\in\mathbb{D} \tag{۸-۶}$$

$$\sum_{c\in\mathbb{C}}\sum_{d\in\mathbb{D}}\delta_{c,d,\bar{h}}\le ۰ \tag{۸-۷}$$

$$\sum_{h\in\mathbb{H}}\delta_{c,d,h}+\sum_{h\in\mathbb{H}}\delta_{c,d+۱,h}\le ۱ \quad \forall c\in\mathbb{C}: n_c>۱, \forall d\in\mathbb{D}: d<D \tag{۸-۸}$$

$$\sum_{d'\in\mathbb{D}:d'\neq d}\ \sum_{h'\in\mathbb{H}:h'\neq h}\delta_{c,d',h'}\le M\big(۱-\delta_{c,d,h}\big)\ \forall c\in\mathbb{C}: n_c>۱, \quad \forall d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H} \tag{۸-۹}$$

$$\delta_{c,d,h}\in\{۰,۱\} \quad \forall c\in\mathbb{C}, d\in\mathbb{D}, h\in\mathbb{H} \tag{۸-۱۰}$$

روابط (۸-۶)-(۸-۱) مجموعهٔ قیود سخت را تشکیل می‌دهند. قید (۸-۱) تضمین می‌کند که تعداد بازه‌های زمانی که در طول هفته به یک درس تخصیص داده می‌شود، برابر با تعداد جلساتِ هفتگیِ مورد نیاز آن درس باشد. قید (۸-۲) ایجاب می‌کند که تعداد دروسی که در یک روز و بازهٔ زمانیِ مشخص ارائه می‌شوند، از تعداد کلاس‌ها بیشتر نباشد. قید (۸-۳) سبب می‌شود که یک مدرس در یک بازهٔ زمانی، حداکثر یک درس داشته باشد. عدم تداخل دروس مجموعهٔ $\mathbb{S}_j$، توسط قید (۸-۴) تضمین می‌گردد. قید (۸-۵) تضمین می‌کند که دروس هر مدرس در بازه‌های زمانی که وی اعلام آمادگی کرده است، قرار داده شوند. قید (۸-۶) ایجاب می‌کند که جلسات مختلف یک درس در یک روز قرار داده نشوند.

قیود نرم نیز با روابط (۸-۹)-(۸-۷)، بیان می‌گردند. قید (۸-۷) ایجاب می‌کند که در اولین بازهٔ زمانیِ بعدازظهر، درسی قرار داده نشود. قید (۸-۸) سبب می‌شود که جلسات مختلف یک درس در دو روز متوالی نباشند و حداقل یک روز بین آنها فاصله باشد. قید (۸-۹) تضمین می‌کند که دروسی که بیش از یک جلسه در طول هفته نیاز دارند، در روزهای مختلف اما در بازه‌های زمانیِ مشابه ارائه شوند. لازم به ذکر است که قید (۸-۹) نامعادلهٔ نظیر گزارهٔ زیر است و در آن، M یک عدد مثبت بزرگ است و می‌تواند برابر با $|\mathbb{D}| \times |\mathbb{H}|$ قرار داده شود.

$$\delta_{c,d,h} = ۱ \;\; \Rightarrow \left(\sum_{d' \in \mathbb{D}: d' \neq d} \; \sum_{h' \in \mathbb{H}: h' \neq h} \delta_{c,d',h'} = ۰ \right)$$
$$\forall c \in \mathbb{C}: n_c > ۱, \forall d \in \mathbb{D}, h \in \mathbb{H}$$

بدین ترتیب، مدل فاقد تابع هدف به صورت زیر است:

مدل ۸-۱: فرمول‌بندی مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی (فاقد هدف)

$$min\, z = ۰$$

$s.t.$ (۸-۱)-(۸-۱۰)

اما همان‌طور که قبلاً گفته شد، ممکن است امکان رعایت همهٔ قیود نرم وجود نداشته باشد و لذا، مدل فوق نشدنی گردد. از این رو، با معرفیِ متغیرهای کمکی، امکان نقض قیود نرم را فراهم می‌کنیم.

برای آنکه امکان نقض قید نرمِ (۸-۷) فراهم شود، متغیر پیوسته و نامنفی w را به عنوان متغیر کمکی تعریف و قید (۸-۷) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{c \in \mathbb{C}} \sum_{d \in \mathbb{D}} \delta_{c,d,\bar{h}} - w \leq ۰ \qquad (۸\text{-}۱۱)$$

برای آنکه امکان نقض قید نرم (۸-۸) فراهم شود، متغیر پیوسته و نامنفی $v_{c,d}$ $(\forall c \in \mathbb{C}: n_c > ۱, \forall d \in \mathbb{D})$ را به عنوان متغیر کمکی تعریف و قید (۸-۸) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{h \in \mathbb{H}} \delta_{c,d,h} + \sum_{h \in \mathbb{H}} \delta_{c,d+۱,h} - v_{c,d} \leq ۱ \;\; \forall c \in \mathbb{C}: n_c > ۱, \forall d \in \mathbb{D}: d < D \quad (۸\text{-}۱۲)$$

برای آنکه امکان نقض قید نرم (۸-۹) فراهم گردد، متغیر دودوئیِ γ_c $(\forall c \in \mathbb{C}: n_c > ۱)$ را معرفی می‌کنیم که اگر بازهٔ زمانیِ حداقل یکی از جلسات درس c با بقیهٔ جلسات آن مشابه نباشد، مقدار یک و در غیر این صورت، مقدار صفر اختیار می‌کند. بدین ترتیب، قید (۸-۹) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{d' \in \mathbb{D}: d' \neq d} \; \sum_{h' \in \mathbb{H}: h' \neq h} \delta_{c,d',h'} - (n_c - ۱)\gamma_c \leq M\left(۱ - \delta_{c,d,h}\right) \qquad (۸\text{-}۱۳)$$
$$\forall c \in \mathbb{C}: n_c > ۱, \forall d \in \mathbb{D}, h \in \mathbb{H}$$

با توجه به اولویت‌بندی که روی اهداف وجود دارد، مسأله در قالب یک مسألهٔ سه هدفه به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

مدل ۸-۲: فرمول‌بندی مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی (چند هدفه)

$$min\left(z_{۱}=w,\ \ z_{۲}=\sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\ \sum_{d\in\mathbb{D}:d<D} v_{c,d}\ ,\ \ z_{۳}=\sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\gamma_c\right)$$

$s.t.$ (۱-۸)-(۶-۸), (۱۰-۸)-(۱۳-۸)

$$w\geq ۰ \tag{۱۴-۸}$$

$$v_{c,d}\geq ۰\quad \forall c\in\mathbb{C}:n_c>۱,\forall d\in\mathbb{D}:d<D \tag{۱۵-۸}$$

$$\gamma_c\in\{۰,۱\}\quad \forall c\in\mathbb{C}:n_c>۱ \tag{۱۶-۸}$$

هدف اول، $z_{۱}$، بیانگر تعداد جلساتی است که در اولین بازهٔ زمانیِ بعدازظهر ارائه شده‌اند. هدف دوم، $z_{۲}$، بیانگر تعداد دفعاتی است که در برنامه، جلساتِ یک درس در دو روز متوالی قرار داده شده‌اند و هدف سوم، $z_{۳}$، بیانگر تعداد دروسی است که بازه‌های زمانیِ جلسات مختلف آن، مشابه نیستند.

۸-۲-۳ حل مدل برنامه‌ریزی درسی

داده‌ها

فرض کنید تعداد مدرسین مؤسسهٔ آموزشی برابر با ۶ ($\mathbb{L}=\{۱,\dots,۶\}$) و تعداد کلاس‌ها برابر با ۲ است ($K=۲$) و ۱۸ درس باید برای نیمسال آتی برنامه‌ریزی شوند ($\mathbb{C}=\{۱,\dots,۱۸\}$). مجموعهٔ روزهای مُجاز به صورت $\mathbb{D}=\{۱,\dots,۵\}$ است که $d=۱$ بیانگر شنبه و $d=۵$ بیانگر چهارشنبه است و آخرین روز مُجاز $D=۵$ می‌باشد. همچنین، مجموعهٔ بازه‌های زمانیِ مُجاز در هر روز به صورت $\mathbb{H}=\{۱,۲,۳,۴\}$ است که به ترتیب، متناظر با بازه‌های زمانیِ ۸-۱۰، ۱۰-۱۲، ۱۳-۱۵ (اولین بازهٔ زمانیِ بعدازظهر) و ۱۵-۱۷ می‌باشند و بنابراین، $\bar{h}$ متناظر با بازهٔ زمانی ۱۳-۱۵ است. جدول ۸-۱، تعداد جلساتِ مورد نیاز هر درس را در طول هفته نشان می‌دهد.

جدول ۸-۱: تعداد جلسات مورد نیاز هر درس

c	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
n_c	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳

دروس هر یک از مجموعه‌های زیر نباید با یکدیگر تداخل داشته باشند.

$$\mathbb{S}_{۱}=\{۱,۲,۸,۹,۱۸\},\ \ \mathbb{S}_{۲}=\{۲,۳,۱۰,۱۱,۱۸\},\ \ \mathbb{S}_{۳}=\{۳,۴,۵,۱۲,۱۳,۱۴\},$$
$$\mathbb{S}_{۴}=\{۷,۸,۱۶,۱۷\},\mathbb{S}_{۵}=\{۵,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۷\}$$

جدول ۸-۲ نشان می‌دهد که هر درس به عهدهٔ کدام مدرس است (پارامتر $a_{c,l}$):

جدول ۸-۲: تخصیص دروس به مدرسین

l \ c	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
۱	✓	✓																✓
۲			✓					✓	✓									
۳				✓						✓	✓							
۴					✓	✓						✓						
۵							✓						✓	✓				
۶															✓	✓	✓	

بازه‌های زمانی که هر یک از مدرسین پیشنهاد داده‌اند، به شرح زیر است (پارامتر $b_{l,d,h}$):

جدول ۸-۳: بازه‌های زمانی پیشنهادی توسط هر مدرس

	شنبه				یکشنبه				دوشنبه				سه‌شنبه				چهارشنبه			
l \ h	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۱	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
۲	✓	✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓
۳	✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓		✓	✓	✓	
۴	✓	✓			✓	✓			✓	✓			✓	✓			✓	✓		
۵					✓	✓	✓	✓					✓	✓						
۶	✓	✓			✓	✓			✓	✓			✓	✓						

ابعاد مدل

در اولین مدل که فاقد تابع هدف است (مدل ۸-۱)، تعداد متغیرهای دودوئی و قیود به ترتیب برابر با ۳۶۰ و ۹۳۸ (۶۷۳ قید سخت و ۲۶۵ قید نرم) و چگالی ماتریس ضرایب، برابر با ۱٫۶۲ درصد می‌باشد.

جواب مسأله

مدل فاقد هدف (مدل ۸-۱) نشدنی است. بنابراین، برای تعیین یک جواب مناسب، مدل چندهدفه (مدل ۸-۲) را حل می‌کنیم. ابتدا هدف اول را بررسی می‌نماییم. بدین منظور، قید (۸-۱۱) را به مجموعهٔ قیود سخت (قیود (۸-۱) إلی (۸-۶)) اضافه و مدل ۸-۳ را با هدف $min\ z_1 = w$ حل

می‌کنیم. با توجه به اینکه قیود (۸-۱۲)، (۸-۱۳)، (۸-۱۵) و (۸-۱۶) در این مدل وجود ندارد، تعداد متغیرهای دودوئی و پیوستهٔ آن، به ترتیب برابر با ۳۶۰ و ۱ و تعداد قیود ۶۷۵ است.

مدل ۸-۳: فرمول‌بندی متناظر با اولین تابع هدف

$min\ z_۱ = w$

$s.t.$ (۱-۸)-(۶-۸), (۱۰-۸), (۱۱-۸), (۱۴-۸)

مقدار بهین تابع هدف مدل ۸-۳، $z_۱^* = ۳$ می‌باشد. قید زیر را در نظر می‌گیریم که مقدار هدف اول را برابر با $z_۱^*$ قرار می‌دهد.

$$w = z_۱^* \qquad (۱۷\text{-}۸)$$

برای بررسی هدف دوم، قیود (۸-۱۲) و (۸-۱۷) را به قیود مدل ۸-۳ اضافه و آن را با تابع هدف $min\ z_۲ = \sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\sum_{d\in\mathbb{D}:d<D} v_{c,d}$ حل می‌کنیم (مدل ۸-۴). این مدل، دارای ۳۶۰ متغیر دودوئی، ۴۵ متغیر پیوسته و ۷۲۰ قید است.

مدل ۸-۴: فرمول‌بندی متناظر با دومین تابع هدف

$$min\ z_۲ = \sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\ \sum_{d\in\mathbb{D}:d<D} v_{c,d}$$

$s.t.$ (۱-۸)-(۶-۸), (۱۰-۸)-(۱۲-۸), (۱۴-۸), (۱۵-۸),(۱۷-۸)

مقدار بهین تابع هدف مدل ۸-۴، $z_۲^* = ۱$ می‌باشد. قید زیر را در نظر می‌گیریم که مقدار هدف دوم را برابر با $z_۲^*$ قرار می‌دهد.

$$\sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\ \sum_{d\in\mathbb{D}:d<D} v_{c,d} = z_۲^* \qquad (۱۸\text{-}۸)$$

برای بررسی هدف سوم، قیود (۸-۱۳) و (۸-۱۸) را به قیود مدل ۸-۴ اضافه و آن را با تابع هدف $min\ z_۳ = \sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\gamma_c$ حل می‌کنیم (مدل ۸-۵). این مدل، دارای ۳۷۱ متغیر دودوئی، ۴۵ متغیر پیوسته و ۹۴۱ قید است.

جواب بهینی که توسط این مدل ارائه می‌شود را به عنوان جواب کارا برای مسألهٔ چندهدفه معرفی می‌نماییم.

مدل ۸-۵: فرمول‌بندی متناظر با سومین تابع هدف

$$min\ z_۳ = \sum_{c\in\mathbb{C}:n_c>۱}\gamma_c$$

$s.t.$ (۱-۸)-(۶-۸), (۱۰-۸)-(۱۸-۸)

پس از حل مدل ۸-۵، مقدار بهین تابع هدف، برابر با $z_۳^* = ۱$ و جواب کارا مطابق با جدول ۸-۴ به دست می‌آید:

جدول ۸-۴: برنامهٔ هفتگیِ حاصل از حل مدل

h \ c	شنبه				یکشنبه				دوشنبه				سه‌شنبه				چهارشنبه			
	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۱												✓								
۲																✓				
۳												✓								
۴									✓											
۵																		✓		
۶						✓														
۷							✓▲													
۸			✓▲																✓▲	
۹										✓								✓		
۱۰	✓																✓			
۱۱		✓												✓						
۱۲					✓												✓			
۱۳						✓								✓						
۱۴								✓■					✓■							
۱۵	✓								✓											
۱۶					✓								✓							
۱۷		✓								✓										
۱۸				✓•				✓•												✓

تحلیل جواب

همان‌طور که در جدول ۸-۴ ملاحظه می‌شود، همهٔ قیود سخت رعایت شده‌اند. در خصوص اولین قید نرم، تنها جلسات دروسِ ۷ و ۸ در بازهٔ زمانیِ ۱۵-۱۳ قرار داده شده‌اند که در جدول با نماد ▲ نمایش داده شده است. همچنین، در خصوص دومین قید نرم، به جز جلسهٔ اول و دومِ درسِ ۱۸ که در دو روز متوالی ارائه شده‌اند (در جدول با نماد • مشخص شده است)، بین جلسات سایر دروس و نیز بین جلسات دوم و سومِ درس ۱۸ حداقل یک روز فاصله وجود دارد. به علاوه، در خصوص سومین قید نرم، به جز جلسات درس ۱۴ (در جدول با نماد ■ مشخص شده است)، بازه‌های زمانیِ جلساتِ سایر دروس مشابهند.

توجه کنید که اگر جواب بهین مدل ۸-۳ منحصر به فرد باشد (مدل ۸-۳ دارای جواب دگرین نباشد)، حل مدل ۸-۴ عملاً بی‌فایده است. مشابهاً حل مدل ۸-۵ زمانی اهمیت می‌یابد که مدل ۸-۴ جواب دگرین داشته باشد.

تذکر ۸-۲:

در مراکز آموزشی علاوه بر برنامهٔ هفتگی دروس، تهیهٔ برنامهٔ امتحانات[۱] نیز امری متداول است. در واقع، اکثر مؤسسات آموزشی باید مجموعه‌ای از امتحانات را در پایان هر نیمسال یا سال تحصیلی زمان‌بندی کنند. به شکل ساده‌تر این مسأله می‌تواند به عنوان یک مسألهٔ تخصیص مطرح شود که هدف آن، تخصیص یک مجموعه از امتحانات به تعداد ثابتی از بازه‌های زمانی می‌باشد، به‌طوری که در یک بازهٔ زمانیِ مشخص، هیچ دانشجویی بیش از یک امتحان نداشته باشد. البته، یک سری محدودیت‌ها و اهداف دیگر نیز باید رعایت شوند که بسته به قوانین و شرایط هر مؤسسهٔ آموزشی متفاوت است. بین مسألهٔ برنامه‌ریزی درسی و مسألهٔ زمان‌بندی امتحانات تفاوت‌های اساسی وجود دارد که به دو مورد از آنها اشاره می‌کنیم:

- در برنامهٔ امتحانات این امکان وجود دارد که امتحانات چندین درس در یک کلاس و در یک زمان برگزار شود؛ در حالی که این امر در برنامهٔ هفتگیِ دروس امکان‌پذیر نیست و باید در یک زمان و در یک کلاس مشخص، حداکثر یک درس ارائه گردد.
- در برنامهٔ هفتگیِ دروس، فشرده بودن برنامهٔ درسیِ دانشجویان یک مزیت می‌باشد، در حالی که این امر در برنامهٔ امتحانات مناسب نیست و ایجاد فاصله بین دو امتحان، امری مطلوب برای دانشجویان است.

[۱] Examination timetabling