۲.۵ روش تبدیل مستقیم

فرض کنید توانایی شبیه‌سازی بُردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ را داریم و توزیع تبدیلی از آن مانند $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ را می‌خواهیم. در **روش تبدیل مستقیم**، برای شبیه‌سازی بُردار تصادفی $\boldsymbol{Y}$، مقدار شبیه‌سازی شده‌ی $\boldsymbol{X}$ را به‌طور مستقیم در تبدیل $\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X})$ قرار می‌دهیم. شایان ذکر است که در این روش نیاز به دانستن ارتباط بین توزیع‌ها داریم.

مثال ۱.۲.۵ توزیع $\mathrm{U}(a, b)$ را شبیه‌سازی کنید.

حل. بنابر قضیه‌ی ۱.۴.۲، اگر $U \sim \mathrm{U}(۰, ۱)$، آنگاه

$$X = (b - a)U + a \sim \mathrm{U}(a, b).$$

درنتیجه با توجه به روش مستقیم کافی است مقداری تصادفی u از توزیع $\mathrm{U}(۰, ۱)$ را تولید کنیم. مقدار $x = (b - a)u + a$ مقداری تصادفی از توزیع $\mathrm{U}(a, b)$ خواهد بود. $\triangle$

۱.۲.۵ روش باکس-مولر

قضیه ۲.۲.۵ فرض کنید $U_۱, U_۲ \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(۰, ۱)$ و

$$\begin{cases} Z_۱ = \sqrt{-۲\log(U_۱)}\cos(۲\pi U_۲) \\ Z_۲ = \sqrt{-۲\log(U_۱)}\sin(۲\pi U_۲), \end{cases}$$

که در آن، واحد اندازه‌گیری زاویه، رادیان است. در این صورت $Z_۱, Z_۲ \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(۰, ۱)$.

به این روش مستقیم قضیه‌ی ۲.۲.۵، برای شبیه‌سازی دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد که توسط باکس و مولر [۸] ارائه شده است، **روش باکس-مولر**[۱] گفته می‌شود.

مثال ۳.۲.۵ دو مقدار تصادفی از توزیع نرمال استاندارد و سپس با بهره‌گیری از آن‌ها، دو مقدار تصادفی از توزیع خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی شبیه‌سازی کنید.

حل. با به‌کارگیری ماشین‌حساب، مقادیر تصادفی از توزیع $\mathrm{U}(۰,۱)$، $u_۱ = ۰/۳۴۷$ و $u_۲ = ۰/۸۴۰$ به‌دست آمده است. بنابراین

$$\begin{cases} z_۱ = \sqrt{-۲\log(۰/۳۴۷)}\cos(۲\pi(۰/۸۴۰)) = ۰/۷۸ \\ z_۲ = \sqrt{-۲\log(۰/۳۴۷)}\sin(۲\pi(۰/۸۴۰)) = -۱/۲۳. \end{cases}$$

اما می‌دانیم که اگر $Z \sim \mathrm{N}(۰,۱)$، آنگاه $Z^۲ \sim \chi^۲(۱)$. درنتیجه دو مقدار تصادفی از توزیع خی‌دو با یک درجه‌ی آزادی برابر ۰/۶۱ و ۱/۵۱ می‌شود. $\triangle$

مثال ۴.۲.۵ توزیع $\mathrm{N}(\mu,\sigma^۲)$ را شبیه‌سازی و سپس دو مقدار تصادفی از توزیع $\mathrm{N}(۴,۲۵)$ تولید کنید.

حل. با روش باکس-مولر، شبیه‌سازی نرمال استاندارد آسان است. از طرفی می‌دانیم که اگر $Z \sim \mathrm{N}(۰,۱)$، آنگاه $X = \sigma Z + \mu \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^۲)$. بنابراین به سادگی می‌توان هر توزیع نرمالی را شبیه‌سازی کرد.

با به‌کارگیری ماشین‌حساب، مقادیر تصادفی از توزیع $\mathrm{U}(۰,۱)$، $u_۱ = ۰/۶۴۱$ و $u_۲ = ۰/۱۴۱$ به‌دست آمده است. بنابراین

$$\begin{cases} z_۱ = \sqrt{-۲\log(۰/۶۴۱)}\cos(۲\pi(۰/۱۴۱)) = ۰/۶۰ \\ z_۲ = \sqrt{-۲\log(۰/۶۴۱)}\sin(۲\pi(۰/۱۴۱)) = ۰/۷۳, \end{cases}$$

مقادیر خواسته شده از رابطه‌ی $x_i = ۵z_i + ۴$، $i = ۱, ۲$، چنین به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_۱ = ۵(۰/۶۰) + ۴ = ۷/۰۰ \\ x_۲ = ۵(۰/۷۳) + ۴ = ۷/۶۵. \end{cases}$$

$\triangle$

توجه ۵.۲.۵ بسیاری از متغیرهای تصادفی را می‌توان از مجموع چند متغیر تصادفی مستقل به دست آورد. به بیان دقیق‌تر، فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ مستقل باشند و داشته باشیم: $Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=۱}^{n} X_i$. در این صورت اگر بتوان متغیرهای $X_۱, \ldots, X_n$ را شبیه‌سازی کرد، آنگاه به‌سادگی می‌توان متغیر تصادفی Y را نیز شبیه‌سازی کرد؛ به این حالت ویژه از روش مستقیم، روش پیچش گفته می‌شود.

در قضیه‌ی زیر به چند مورد از این توزیع‌ها اشاره می‌شود:

$X_i \rightarrow$ تعداد پیروزی‌ها در m_i آزمایش

$m_i \rightarrow$ تعداد آزمایش‌ها

قضیه ۶.۲.۵

برنولی

الف) اگر $X_i \sim \mathrm{B}(m_i, p)$، $i = ۱, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \mathrm{B}\left(\sum_{i=۱}^{n} m_i, p\right);$$

دوجمله‌ای

تعداد آزمایش‌ها تا پیروزی

ب) اگر $X_i \sim \mathrm{NB}_j(r_i, p)$، $i = ۱, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه دوجمله‌ای منفی

انجام دادن آزمایش برنولی تا رسیدن به r امین پیروزی

$$\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \mathrm{NB}_j\left(\sum_{i=۱}^{n} r_i, p\right), \quad j = ۰, ۱;$$

پ) اگر $X_i \sim \mathrm{P}(\lambda_i)$، $i = 1, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه

پواسون

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right);$$

ت) اگر $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$، $i = 1, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه

گاما

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right);$$

ث) اگر $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$، $i = 1, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه

نرمال

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

با به‌کارگیری این قضیه، نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه ۷.۲.۵

الف) اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Ber}(p)$، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{B}(n, p)$؛

ب) اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{G}_j(p)$، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{NB}_j(n, p)$، $j = 0, 1$؛

توزیع هندسی = آزمایش برنولی تا اولین پیروزی

پ) اگر $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{E}(\theta)$، آنگاه $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta)$؛ نمایی ← گاما

ت) اگر $X_i \sim \chi^2(\nu_i)$، $i = 1, \ldots, n$ و مستقل باشند، آنگاه

کای دو

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} \nu_i\right).$$

مثال ۸.۲.۵ توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p، $\mathrm{B}(n,p)$، را شبیه‌سازی و سپس یک مقدار تصادفی از توزیع $\mathrm{B}(۲, ۰/۴)$ تولید کنید.

حل. بنابر نتیجه‌ی ۷.۲.۵ قسمت «الف»، اگر $X_۱, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Ber}(p)$، آنگاه $\sum_{i=۱}^{n} X_i \sim \mathrm{B}(n,p)$. اما روشن است که $I(U \geq q) \sim \mathrm{Ber}(p)$، که در آن، $I(U \geq q) = I_{[q,۱)}(U)$، تابع نشانگر بازه‌ی $[q, ۱)$ در نقطه‌ی U است و $U \sim \mathrm{U}(۰, ۱)$. توجه کنید که $I(U \geq q) \overset{d}{=} I(U \leq p)$. چرا؟ درنتیجه اگر $U_۱, \dots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}(۰, ۱)$، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n} I(U_i \leq p) \sim \mathrm{B}(n,p).$$

با به‌کارگیری ماشین‌حساب، اعداد تصادفی ۰/۱۸۵ و ۰/۶۹۳ به‌دست آمده است و بنابراین مقدار شبیه‌سازی شده از توزیع $B(۲, ۰/۴)$،

$$I(۰/۱۸۵ \leq ۰/۴) + I(۰/۶۹۳ \leq ۰/۴) = ۱ + ۰ = ۱,$$

به‌دست می‌آید. $\triangle$

$$X_i \sim Ber(p)$$

$$X_i = \begin{cases} 0 & 0 < U_i \leq 1-p \\ 1 & 1-p < U_i < 1 \end{cases}$$

اثبات:

$$P(X_i = 0) = 1-p$$

$$P(U_i \leq 1-p) = F_U(1-p) = 1-p$$

تابع توزیع U_i

توجه: تابع توزیع متغیر uniform خودش می‌شود.

$$P(X_i = 1) = p$$

$$P(U_i > 1-p) = 1 - P(U_i \leq 1-p)$$

$$= 1 - (1-p) = p$$

نتیجه: با تولید $U_1, \ldots, U_n$ می‌توانیم $X_1, \ldots, X_n \sim Ber$ را تولید کنیم.

$$\sum X_i \sim B$$

دوجمله‌ای

مثال ۱۰.۲.۵ یک مقدار تصادفی از توزیع خی‌دو با دو درجه‌ی آزادی شبیه‌سازی کنید.

حل. بنابر نتیجه‌ی ۷.۲.۵ قسمت «ت»، اگر $X_۱, X_۲ \overset{\text{iid}}{\sim} \chi^۲(۱)$، آنگاه $X_۱ + X_۲ \sim \chi^۲(۲)$.
درنتیجه برای مقادیر شبیه‌سازی شده‌ی مثال ۳.۲.۵، مقدار $۲/۱۲ = ۱/۵۱ + ۰/۶۱$ به‌دست می‌آید. $\triangle$

$$Z_1 = \sqrt{-2\log(U_1)}\ \cos(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

7

جمعه
شهریور
۱۶

September 2018
Friday

۱۴۳۹ ذی‌الحجه ۲۶

$$Z_2 = \sqrt{-2\log(U_1)}\ \sin(2\pi U_2) \sim N(0,1)$$

$$Z^2 \sim \chi^2_{(1)} \qquad X_1, X_2 \overset{iid}{\sim} \chi^2_{(1)} \qquad X_1 + X_2 \sim \chi^2_{(2)}$$

نرمال → نمایی ، کوشی ، t

۰/۰ پذیرش 8

$Y \sim G$

$U \sim U(0,1)$ if $U < \frac{f(Y)}{c\,g(Y)}$ then $X = Y$ ("accept")

else "reject"

نکته: U از Y مستقل است.

مثال: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $X = \sigma Z + \mu$ $Z \sim N(0,1)$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0 \longrightarrow |Z|$

$g(x) = e^{-x} \quad x \geq 0$ تابع چگالی نمایی با نرخ $\frac{1}{2}$

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{x - \frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2/\pi}} \xrightarrow{max?} h'(x) = 0$ کافی است $\longrightarrow$

زمانی ماکزیمم می‌شود که $x - \frac{x^2}{2}$ ماکزیمم شود. ← در $x = 1$

$f_X(y) \leq c\, f_Y(y) \longrightarrow \frac{f_X(y)}{f_Y(y)} \leq c$

عید سعید غدیر خم(۱۰هـ.ق)(تعطیل) - روز مبارزه با تروریسم(انفجار دفتر نخست وزیری به دست منافقان و شهادت مظلومانه شهیدان رجایی و باهنر-۱۳۶۰هـ.ش)

$\hookrightarrow C = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.32$

$\frac{f(y)}{c\,g(y)} = e^{-(y-1)^2/2}$

الگوریتم تولید Z : ① تولید Y با توزیع نمایی $Y = -\ln(U)$

② تولید U

③ اگر $U < e^{-(Y-1)^2/2}$ ← $|Z| = Y$ در غیر این صورت به ① برگرد.

④ U تولید کن اگر $U < 0.5$ ← $Z = |Z|$

اگر $U > 0.5$ ← $Z = -|Z|$

مثال ۲: توزیع بتا $x\in(0,1)$ ← $f(x)=bx^n(1-x)^m$

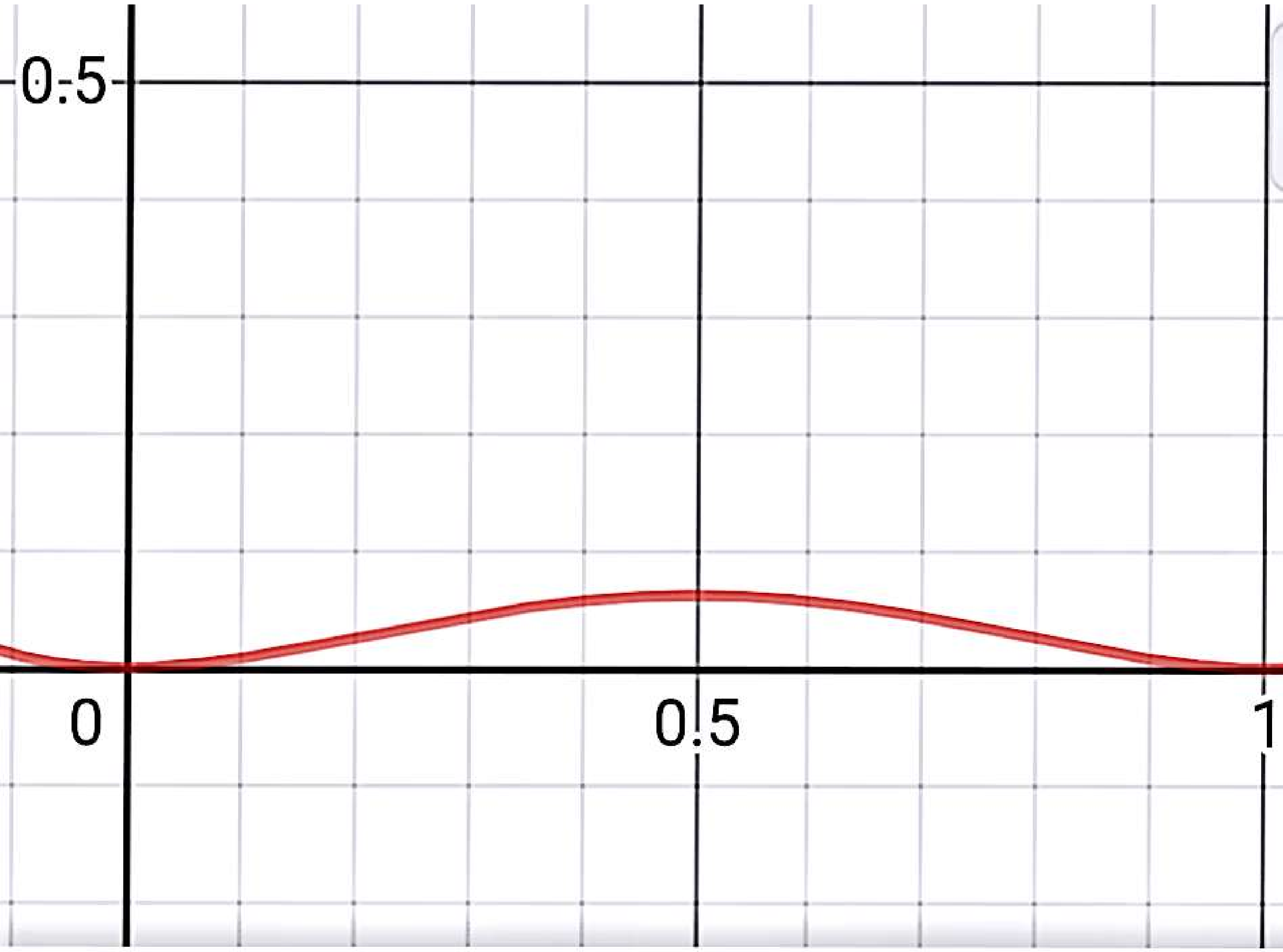
مورد خاص $n=m$ را در نظر بگیرید و با روش رد و پذیرش از آن عدد تصادفی تولید کنید.

$$b=\left[\int_0^1 x^n(1-x)^m dx\right]^{-1} \leftarrow \text{normalizing constant}$$

$$f(x)=bx^n(1-x)^n=b\,(x(1-x))^n$$

شکل توزیع کاملاً متقارن روی $(0,1)$ میانگین $\frac{1}{2}$ است ولی وزن آن بیشتر سمت $\frac{1}{2}$ متمرکز است و کمتر سمت $0, 1$ متمرکز است. $g(x)=1 \quad x\in(0,1)$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=f(x) \qquad c=\sup_x f(x) \longrightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow c=b\left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$



1

$$\left(x(1-x)\right)^2$$

① تولید U_1 و U_2

② اگر $U_2 \leq 4^{9}\left(U_1(1-U_1)\right)^{9}$ ← $X = U_1$ در غیر این صورت به ① برگرد.