Q1)

Part A)

since $BV^* = \{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow S_1^*, S_2^*, S_3^* = 0$

$\bar{b} = B^{-1} b \quad , \quad Z^* = C^T \cdot b^*$

$$C_{BV} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = b_{\text{in opt table}} = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{Bmatrix}$$

$$Z^* = 2 \times 1 + 1 \times 2 + 0 = 4$$

Part B) in Maximization problems Normal Form for our Constraint is $AX \leq b$

Dual Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Min } W = 1y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\begin{cases} \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 >= 2 \\ -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 >= 1 \\ +\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 >= 1 \end{cases} \\ &\& \; y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}}$$

$$y^{*T} = C_{BV}^T \cdot B^{-1} = [2 \;\; 1 \;\; 1] \cdot B^{-1} = [1 \;\; 0 \;\; 1]$$

$$\Rightarrow y_1^* = 1 \;,\; y_2^* = 0 \;,\; y_3^* = 1 \;,\; Z^* = W^* = 4$$

Q2)
Primal Problem is feasible and its Dual problem must be feasible as well.
since Figure (ب) is not feasible so it cannot be Dual for primal problem.

Q3)

اگر قید iام مسألهٔ اولیه به صورت کوچکتر مساوی باشد

$$\bar{c}_{s_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{s_i} - c_{s_i} = \text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1} = \boldsymbol{y_i^*}$$

اگر قید iام مسألهٔ اولیه به صورت بزرگتر مساوی باشد

$$\bar{c}_{e_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{e_i} - c_{e_i} = -\left(\text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1}\right) = \boldsymbol{-y_i^*}$$

اگر قید i ام مسألهٔ اولیه به صورت تساوی باشد

$$\bar{c}_{a_i} = c_{BV}^T B^{-1} a_{e_i} - c_{e_i} = \left(\text{مؤلفهٔ } i \text{ اُم بردار } c_{BV}^T B^{-1}\right) \mp M = \boldsymbol{y_i^* \mp M}$$

And also we know :

اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهین داشته باشد، آنگاه هردو مسأله جواب بهین دارند. به علاوه اگر z^* مقدار بهین تابع هدف مسألهٔ اولیه و w^* مقدار بهین تابع هدف مسألهٔ دوگان باشد، داریم $z^* = w^*$.

and finally :

Dual problem :
min W = b^T*Y = 0.5*y1 + 0.5*y2

W* = (b^T)*(Y*)= 0.5*0.4 + 0.5*1.4 = 0.9

So, Z* = 0.9

Thanks for your time and consideration
Mohamadreza ardestani