Bland's Rule Proof

Linear programing course - M.Ardestani

May 9, 2020

Part I
introducito

1 Basic terms

We already know that we have 4 type of situation can happen in Linear programing problems:

- one unique optimal solution
- there isn't any solution (infeasible problem)
- unbounded optimal solution
- alternative optimal solution

In each first three cases, we can use Big M algorithem (or Two phase method) and easily come up with the solution.
But we can not use this methods in last case. Actually we can fell into loop and never exit it.
We can save our basic variables set and check it after each itration. if we visit one basis that we had visited it before, we can make sure that we heve fell into loop and now we should use "Bland's rule".

2 Bland's rule

Suppose we have a minimization problem (also same way for maximazation problem with a llitle difference).
In this rule, the variables are first ordered in some sequence, say, $x_1, x_2, ..., x_n$, without loss of generality.
Suppose A is a set of NBVs that have a non-negative reduced cost coefficient. The one that has the smallest index is selected to enter the basis. (compare this step with simplex algorithem)
For example $x_i \in A$ is selected in last step as .

And Suppose B is a set of BVs which tie in the usual minimum ratio test in the corresponding column of x_i.
Similarly, the one that has the smallest index is chosen as the exiting variable.
we repeat these step until we reach to optimal table.

Part II

Proof

- فرض کنیم دور ایجاد شود نشان می‌دهیم تناقض ایجاد می‌شود

+ توجه داریم که در جدول هایی که در دور هستند همگی $\theta = 0$ دارند و نیز RHS همه‌ی جدول های دور یکسان است.

+ در حین دور هر ستون ورودی در یک جدول، یک جدول متناظر به آن ستون برای خارج شدن آن داریم و برعکس

+ T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$T = \{$ ستون j ; $1 \leq j \leq n \wedge$ j در حین دوره پایه‌ای شده است $\}$

1*

می‌توان به جای *1 نوشت: "j در حین دور، غیرپایه‌ای شده است"
چون فرقی نمی‌کند و به هر حال هر خارج شدنی یک وارد شدن دارد و هر وارد شدنی یک خارج شدنی.
چون ما در انتهای دور باید به همان پایه‌ای برسیم که با آن شروع کرده‌ایم.

+ می‌دانیم که ما در این روش باید متغیرها را ترتیب‌گذاری کنیم که این ترتیب فرقی ندارد بر چه اساسی باشد ولی در تمام مراحل این ترتیب ثابت خواهد بود و تغییر نمی‌کند

+ تعریف "$<$" : می‌گوییم "$x_i < x_j$" اگر در ترتیب تعریف شده روی متغیرها x_i زودتر ظاهر شده باشد

+ به طور مشابه "max" را نیز می‌توان تعریف کرد.

+ تعریف: $q = \text{"max"}\{j \in T\} =$
$\{$ اندیسی در T که دیرتر ظاهر شده است $\}$

+ حالا باید 2 جدول متناظر با q توجه کنیم

	Z	x_k $(k \in \mathbb{R})$
جدول B	1	$y_q > 0$
	0	Y

در این جدول a_q پایه‌ای می‌شود.

$\mathbb{B}$ = مجموعه‌ی پایه‌ای در جدول B

$\mathbb{R}$ = مجموعه‌ی غیر پایه‌ای ها در B

+ برای مقاصد بعدی ما سطر صفر جدول را ذخیره می‌کنیم

$$\xrightarrow{\text{تعریفا}} \quad f_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ y_{0j} & 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f_j = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ 0 & j = \mathbb{B}_i \ (1 \leqslant i \leqslant m) \\ y_{0j} & j \in \mathbb{R} \end{cases}$$

+ چون پایه‌ای در سطر صفر مقدار صفر دارند

+ حال ما می‌دانیم که در سطر صفر چه عناصری صفر نیستند و بعداً از آن‌ها استفاده می‌کنیم

+ جدول متناظر با q که در آن a_q از پایه خارج می‌شود

	Z		x_k $(k \in \mathbb{R}$	
	1		y'_{0k}	
$x_{B'_r} = x_q$			y'_{rk}	

جدول B'

$\mathbb{B}'$ پایه‌ای ها ، $\mathbb{R}'$ غیرپایه‌ای ها

+ برای مقاصد بعدی خود ستون متناظر را ذخیره می‌کنیم

$$g_j \begin{cases} y'_{0k} & j = 0 \\ y'_{ik} & j = B'_i \quad (1 \leq i \leq m) \\ -1 & j = k \\ 0 & j = R - \{k\} \end{cases}$$

+ ادعا می‌کنیم $f^T \circ g = 0$ و از آن برای رسیدن به تناقض استفاده می‌کنیم

+ اثبات ادعا:

می‌دانیم که سطر صفرم جدول با عملیات سطری مقدماتی و روش حذف گاوس روی ماتریس ضرایب دستگاه اولیه بدست می‌آید پس داریم:

$$f^T = \lambda^T \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

+ بنابراین کافی است نشان دهیم $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ 0 & A \end{pmatrix} \circ g}_{*} = 0$

$$* \begin{pmatrix} 1 \times g_0 - \sum_{j=1}^{m} c_j g_j \\ \sum_{i=1}^{m} g_j a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{0k} - c_k g_k - \sum_{j=1}^{m} c_{B'_j} \cdot g_{B'_j} \\ g_k a_k + \sum_{i=1}^{m} a_{B'_i} \cdot g_{B'_i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y'_{0k} + c_k - C_{B'}^T \cdot y'_k \\ -a_k + B' \cdot y'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{0k} - y'_{0k} \\ -a_k + a_k \end{pmatrix} = 0$$

درایه‌ی اول را جدا می‌کنیم ⟵ $f^T \cdot g = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f_0}_{1} \cdot \underbrace{g_0}_{y'_{0k}>0} + \sum_{j=1}^{n} f_j g_j = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot g_j < 0$$

⇐ حداقل یک اندیس l باید وجود داشته باشد که $1 \leq l \leq n$ و $f_l \cdot g_l < 0$ به عبارتی

★1

$$\left[\Rightarrow \exists l;\ 1 \leq l \leq n,\ f_l \cdot g_l < 0 \Rightarrow f_l \wedge g_l \neq 0\right]$$

+ 2 مورد زیر را می‌بینیم و بعد از گزاره‌ی بالا (★1) ادامه می‌دهیم

• چون $f_l \cdot g_l \neq 0$ و $f_l \cdot g_l < 0$ پس l یک بار از پایه خارج شده و بار دیگر وارد شده است
پس l در T هست ⇐

$l \in T'$

•• آیا l می‌تواند برابر q باشد؟

$$f_l \cdot g_l = \underbrace{y_{0q}}_{\text{مثبت}} \cdot \underbrace{y'_{rk}}_{\text{مثبت}} > 0 \ \times \Rightarrow l \neq q$$

+ ادامه ★1 با توجه به 2 مورد بالا

$$\Rightarrow q \neq l \in T,\ f_l \neq 0 \Rightarrow f_l = y_{0l} < 0$$

علت: چون اگر y_{0l} مثبت باشد آنگاه در جدول مربوط به B، با توجه به قاعده‌ی بلند باید ستون x_l اختیار می‌شد و نتیجتاً $g_l > 0$ ⇐ .

حال تناقض اینجا پیدا می‌شود. اگر $g_l < 0$ و $1 \leq l$ پس g_l باید یکی از این y'_{ik}ها باشد و نمی‌تواند y_k باشد چون مقدار آن «1-» است و البته

البته می دانیم q "ر" $B_i=l$ (طبق تعریف q)
که تناقض است چون در جدول q، B
انتخاب شد
در صورتی که طبق قاعده‌ی بلند باید l انتخاب
می شد
بنابراین فرض ایجاد دور محال است

$\blacksquare$