

Apunte Final PLP

Mateo Ziffer

5 de julio de 2025

Índice

1. Introducción	2
2. Haskell	3
2.1. Programación funcional	3
2.1.1. Gramática	3
2.1.2. Tipos	3
2.1.3. Condiciones de tipado	4
2.1.4. Polimorfismo	4
2.1.5. Modelo de cómputo	4
2.1.6. Listas	5
2.1.7. Funciones de orden superior	7
2.1.8. Más funciones y propiedades	8
2.1.9. Tipos de datos algebraicos	10
2.2. Esquemas de Recursion	11
2.2.1. Sobre Listas	11
2.2.1.1. Recursión estructural	11
2.2.1.2. Propiedad universal de fold	13
2.2.1.3. Recursión primitiva	14
2.2.1.4. Recursión iterativa	14
2.2.1.5. Ejercicios	15
2.2.2. Sobre Otras Estructuras	17
2.3. Razonamiento Ecuacional	18
2.3.1. Reemplazo	19
2.3.2. Inducción sobre booleanos	19
2.3.3. Inducción sobre pares	19
2.3.4. Inducción sobre naturales	19
2.3.5. Inducción estructural	20
2.3.5.1. Lemas de generación	20
2.3.6. Extensionalidad	20
2.3.7. Isomorfismos de tipos	20

1. Introducción

En esta sección escribiré algunas definiciones generales y el objetivo de la materia.

Def: la *programación* es el proceso de escribir instrucciones que una computadora puede ejecutar para resolver algún problema.

Def: un *programa* es una serie de instrucciones/definiciones que una computadora sigue para realizar una tarea específica.

Def: un *lenguaje de programación* es un formalismo artificial en el que se pueden describir computaciones.

Def: un *paradigma* es una marco filosófico y teórico de una escuela científica o disciplina en la que se formulan teorías, leyes y generalizaciones y se llevan a cabo experimentos que les dan sustento.

Def: un *paradigma de programación* es una marco filosófico y teórico en el que se formulan soluciones a problemas de naturaliza algorítmica.

Lo entendemos como un estilo de programación en el que se escriben soluciones a problemas en términos de algoritmos.

Estudiamos la gramática, semántica, pragmática e implementación de los lenguajes de programación.

Def: la *gramática* responde a ¿Qué frases son correctas?, establece el alfabeto, las palabras (o tokens), es decir, la secuencia válida de símbolos y la sintaxis, es decir, las secuencias de palabras que son frases legales.

Def: la *semántica* responde a ¿Qué significa una frase correcta?, estableciéndole un significado a cada frase correcta.

Def: la *pragmática* responde a ¿Cómo usamos una frase significativa?. Las frases con el mismo significado pueden usarse de diferentes maneras, diferentes contextos pueden requerir frases más elegantes, eficientes, dialectales, etc.

Def: la *implementación* responde a ¿Cómo ejecutar una frase correcta, de manera que respetemos la semántica?. Es fundamentas para los diseñadores e implementadores del lenguaje, no necesariamente para el usuario (programador).

Hay tres aspectos importantes de los lenguajes de programación:

Motivación de la *programación*: los lenguajes de programación tienen distintas características que permiten abordar un mismo problema de distintas ma los lenguajes de programación tienen distintas características que permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

Motivación de la *semántica*: probar teoremas sobre el comportamiento de los programas, para darles significado matemático y poder confiar en que hace lo que queremos, en AED vimos como hacerlo con triplas de Hoare, pero en PLP veremos otras maneras de dar semántica.

Motivación: la *implementación*: una computadora física ejecuta programas escritos en un lenguaje, el código máquina, pero necesita poder ejecutar programas escritos en otros lenguajes, a través de la interpretación, el chequeo e inferencia de tipos y la compilación.

2. Haskell

2.1. Programación funcional

La *programación funcional* consiste en definir funciones y aplicarlas para procesar información.

Las *funciones* son verdaderamente funciones (parciales):

- Aplicarlas no tiene efectos secundarios.
- A una misma entrada corresponde siempre la misma salida (determinismo).
- Las estructuras de datos son inmutables.

Las funciones son datos como cualquier otro, se pueden pasar como parámetros, devolver como resultado y formar parte de estructuras de datos.

Un *programa funcional* está dado por un conjunto de ecuaciones.

2.1.1. Gramática

Las *expresiones* son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. Una expresión puede ser:

1. Un constructor: True False [] (:) 0 1 2 ...
2. Una variable: longitud ordenar x xs (+) (*) ...
3. La aplicación: de una expresión a otra: ordenar lista, not True, ((+) 1) (alCuadrado 5)
4. ...

La aplicación es asociativa a izquierda

$$\begin{aligned} f\ x\ y &\equiv (f\ x)\ y \neq f\ (x\ y) \\ f\ a\ b\ c\ d &\equiv (((f\ a)\ b)\ c)\ d \end{aligned} \tag{1}$$

2.1.2. Tipos

Hay secuencias de símbolos que no son expresiones bien formadas como 1,2 ó)f x(, y hay expresiones que están bien formadas pero no tienen sentido, como True + 1, 0 1 y [], (+)].

Un *tipo* es una especificación del invariante de un dato o de una función. El tipo de una función expresa un *contrato*.

```
99 :: Int
not :: Bool -> Bool
not True :: Bool
((+) 1) 2 :: Int
```

→es asociativo a derecha.

$$\begin{aligned} a \rightarrow b \rightarrow c &\equiv a \rightarrow (b \rightarrow c) \neq (a \rightarrow b) \rightarrow c \\ a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d &\equiv a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)) \end{aligned} \tag{2}$$

2.1.3. Condiciones de tipado

Para que un programa esté *bien tipado*:

1. todas las expresiones deben tener tipo.
2. cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.
4. el argumento de una función debe tener el tipo del dominio.
5. el resultado de una función debe tener el tipo del codominio.

$$\frac{f :: a \rightarrow b \quad x :: a}{f\ x :: b} \quad (3)$$

Sólo tienen sentido los programas bien tipados. No es necesario escribir explícitamente los tipos (Inferencia).

2.1.4. Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo, usamos variables de tipo a , b , c para denotar tipos desconocidos:

```
id :: a -> a
[] :: [a]
(·) :: a -> [a] -> [a]
fst :: (a,b) -> a
flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c
```

2.1.5. Modelo de cómputo

Dada una expresión, se computa su valor usando las ecuaciones.

Hay expresiones bien tipadas que no tienen valor como $1 / 0$. Decimos que se indefinen o tienen el valor \perp .

Un programa funcional está dado por un conjunto de *ecuaciones orientadas*. Ena ecuación $e1 = e2$ se interpreta desde dos puntos de vista:

Def: Punto de vista denotacional: declara que $e1$ y $e2$ tienen el mismo significado.

Def: Punto de vista operacional: computar el valor de $e1$ se reduce a computar el valor de $e2$.

El lado izquierdo de una ecuación no es una expresión arbitraria, debe ser una función aplicada a *patrones*. Un patrón puede ser una variable, un comodín ó un constructor aplicado a patrones. Este no debe contener variables repetidas.

Evaluar una expresión consiste en:

1. buscar la subexpresión más externa que coincida con el lado izquierdo de una ecuación.
2. reemplazar la subexpresión que coincide con el lado izquierdo de la ecuación por la expresión correspondiente al lado derecho.
3. continuar evaluando la expresión resultante.

La evaluación se detiene cuando se da uno de los siguientes casos:

1. la expresión en un constructor o un constructor aplicado. `True`, `(:)` `1`, `[1,2,3]`.

- la expresión es una función parcialmente aplicada. $(+)$, $(+)$ 5.
- se alcanza un estado de error, es decir, una expresión que no coincide con las ecuaciones que definen a la función aplicada.

Ejemplos de evaluaciones y resultados

- constructor: $\text{tail } (\text{tail } [1,2,3]) \rightsquigarrow \text{tail } [2,3] \rightsquigarrow [3]$
- función parcialmente aplicada: $\text{const } (\text{const } 1) 2 \rightsquigarrow \text{const } 1$
- error: $\text{head } (\text{head } [], [1], [1,1]) \rightsquigarrow \text{head } [] \rightsquigarrow \perp$
- no terminación: $\text{loop } n = \text{loop } (n + 1)$, $\text{loop } 0 \rightsquigarrow \text{loop } (1 + 0) \rightsquigarrow \text{loop } (1 + (1 + 0)) \rightsquigarrow \text{loop } (1 + (1 + (1 + 0))) \rightsquigarrow \dots$
- evaluación no estricta: $\text{indefinido} = \text{indefinido}$, $\text{head } (\text{tail } [\text{indefinido}, 1, \text{indefinido}]) \rightsquigarrow \text{head } [1, \text{indefinido}] \rightsquigarrow 1$
- listas infinitas: $\text{desde } n = n : \text{desde } (n + 1)$, $\text{desde } 0 \rightsquigarrow 0 : \text{desde } 1 \rightsquigarrow 0 : (1 : \text{desde } 2) \rightsquigarrow 0 : (1 : (2 : \text{desde } 3)) \rightsquigarrow \dots$
- listas infinitas 2: $\text{head } (\text{tail } (\text{desde } 0)) \rightsquigarrow \text{head } (\text{tail } (0 : \text{desde } 1)) \rightsquigarrow \text{head } (\text{desde } 1) \rightsquigarrow \text{head } (1 : \text{desde } 2) \rightsquigarrow 1$

Obs: en Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante, si hay varias ecuaciones que coinciden siempre se usa la primera.

2.1.6. Listas

El tipo $[a]$ denota listas de elementos de tipo a . Por ejemplo, $[1,2,3]$ abrevia a $1:2:3:[]$, $(:) :: a \rightarrow [a] \rightarrow [a]$ es el operador cons, que es el constructor de listas, asocia a derecha y no tiene una definición asociada ya que es un constructor, luego la expresión no se puede simplificar más.

Las listas toman una de las siguientes formas. Una lista indefinida, $\text{undefined} :: [a]$, una lista vacía $[] :: [a]$ y una lista de la forma $x:xs$ donde $x :: a$ y $xs :: [a]$.

Luego hay tres tipos de listas. Las listas finitas como $1:2:3:[]$, las listas parciales como $1:2:3:\text{undefined}$ ó $\text{filter } (<4) [1..] \rightsquigarrow 1:2:3:\text{undefined}$ y las listas infinitas como $[1..]$.

```
iterate :: (a -> a) -> a -> [a]
iterate f x = x:iterate f (f x)
-- ghci> iterate (+1) 1

-- ghci> divisors n = filter (\m -> n `mod` m == 0) [1..(n-1)]
-- ghci> divisors 6
-- [1,2,3]
-- ghci> head (filter (\n -> n == sum (divisors n)) [1..])
-- 6

until p f = head . filter p . iterate f
-- ghci> until (\n -> n == sum (divisors n)) (+1) 1
-- 6
```

Las listas pueden ser enumeradas por la clase Enum, por ejemplo:

```

[m..n] ~> [m,m+1,..,n]
[m..] ~> [m,m+1,..]
[m,n..p] ~> [m,m+(n-m),m+2(n-m),..,p]
[m,n..] ~> [m,m+(n-m),m+2(n-m),..]
['a'..'z'] ~> "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"

```

Las listas también pueden ser definidas por comprensión:

```

[x*x | x <- [1..5]] ~> [1,4,9,16,25]
[(i,j) | i <- [1..5], even i, j <- [i..5]]
  ~> [(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(4,4),(4,5)]
[x | xs <- [(3,4)],[(5,4),(3,2)]], (3,x) <- xs] ~> [4,2]

```

```

divisors x = [d | d <- [2..x-1], x `mod` d == 0]

```

```

disjoint [] _ = True

```

```

disjoint (x:xs) ys = not (x `elem` ys) && disjoint xs ys

```

```

coprime x y = disjoint (divisors x) (divisors y)

```

```

triads n = [(x,y,z) | x <- [1..m], y <- [x+1..n],
                      coprime x y,
                      z <- [y+1..n], x*x+y*y==z*z]
  where m = floor (fromIntegral n / sqrt 2) -- optimizacion aprovechando
                                             -- que  $2x^2 < x^2 + y^2 = z^2 \leq n^2$ , luego  $x < \left\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \right\rfloor$ 

```

```

map f xs = [f x | x <- xs]
filter p xs = [x | x <- xs, p x]
concat xss = [x | xs <- xss, x <- xs]

```

En realidad Haskell hace lo contrario, evalúa las listas por comprensión en términos de map y concat, sus reglas de traducción son:

```

[e | True]          = [e]
[q | q]             = [e | q, True]
[e | b, Q]          = if b then [e | Q] else []
[e | p <- xs, Q] = let ok p = [e | Q]
                   ok _ = []
                   in concat (map ok xs)
[e | Q1, Q2] = concat [[e | Q2] | Q1]

```

La definición de ok usa un patrón don't care, o un wild card. Dice que la lista vacía se retorna para cualquier elemento que no une con el patrón p.

Podemos definir funciones sobre listas con pattern matching y sabemos que [] y x:xs son disjuntos y exhaustivos. También podemos usar el don't care pattern.

```

null :: [a] -> Bool
null [] = True
null (x:xs) = False

null2 :: [a] -> Bool

```

```

null2 [] = True
null2 _ = False

head :: [a] -> a
head (x:xs) = x

head :: [a] -> [a]
head (x:xs) = xs

-- en last el orden importa!
last :: [a] -> a
last [x] = x -- [x] ≡ (x:_)
last (_:xs) = last xs

```

2.1.7. Funciones de orden superior

```

(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(g . f) x = g (f x)
-- o bien (g . f) = \x -> g (f x), con notación lambda

```

```

map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs

```

```

dobleL = map (*2)
longitudL = map length

```

```

filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p [] = []
filter p (x : xs) = if p x
  then x : filter p xs
  else filter p xs

```

```

curry :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (x, y)

```

```

uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y

```

Prop: Sean `suma x y = x + y`, `suma' (x, y) = x + y`,

- `suma = curry suma'`
- `suma' = uncurry suma`

Obs: Por notación lambda, una expresión de la forma `\ x -> e` representa una función que recibe un parámetro `x` y devuelve `e`.

$$(\backslash x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow e) \equiv (\backslash x_1 \rightarrow (\backslash x_2 \rightarrow \dots (\backslash x_n \rightarrow e)))$$

2.1.8. Más funciones y propiedades

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x:(xs ++ ys)
```

Ejemplo de secuencia de evaluación

```
[1,2] ++ [3,4,5]
= (1:(2:[])) ++ (3:(4:(5:[])))
= 1:((2:[]) ++ (3:(4:(5:[]))))
= 1:(2:([] ++ (3:(4:(5:[]))))
= 1:(2:(3:(4:(5:[]))))
= [1,2,3,4,5]
```

La concatenación es asociativa, ¿Pero esta implementación la hace conmutativa?

```
undefined ++ [1,2] = undefined
[1,2] ++ undefined = 1:2:undefined
```

Listaré propiedades que pueden ser probadas con razonamiento ecuacional:

```
filter p = concat . map (\x -> if p x then [x] else [])
```

-- estas dos se llamas functor laws of map, nombre prestado de Teoría de Categorías

```
map id = id
```

```
map (f . g) = map f . map g
```

-- Haskell provee una clase de tipos Function cuya definición es

```
class Functor f where
```

```
  fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
```

-- ahora que lo generalizé puedo aplicarlo a otras estructuras

```
data Tree a = Tip a | Fork (Tree a) (Tree a)
```

```
instance Functor Tree where
```

```
  fmap f (Tip x) = Tip (f x)
```

```
  fmap f (Fork u v) = Fork (fmap f u) (fmap f v)
```

-- En realidad map es un sinónimo para la instancia fmap para listas

```
map(+1) [2,3,4] ≡ fmap (+1) [2,3,4]
```

-- Para operaciones que no dependen de la naturaleza de los elementos de la lista.

-- Son funciones que mezclan, descartan o extraen elementos de listas.

-- funciones con tipos polimorficos satisfacen alguna.

-- ley que se pueden cambiar valores antes de aplicar la función.

-- En matemáticas se llaman transformaciones naturales y

-- las leyes asociadas leyes de naturalidad.

```
f . head = head . map f -- sólo si f es estricta (mirar caso [])
```

```
map f . tail = tail . map f
```

```
map f . concat = concat . map (map f)
```

-- otro ejemplo


```
map f . reverse = reverse . map f
```

```
-- mas propiedades
```

```
concat . map concat = concat . concat
```

```
filter p . map f = map f . filter (p . f)
```

Las siguientes son las definiciones de zip y zipWith

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
```

```
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y): zip xs ys
```

```
zip _ _ = []
```

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
```

```
zipWith f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith f xs ys
```

```
zipWith _ _ _ = []
```

```
-- zip se puede definir con zipWith y el constructor de pares
```

```
zip ≡ zipWith (,)
```

```
nondec :: (Ord a) => [a] -> Bool
```

```
nondec xs = and (zipWith (≤) xs (tail xs))
```

```
position :: (Eq a) => a -> [a] -> Int
```

```
position x xs = head ([j | (j,y) <- zip [0..] xs, y==x] ++ [-1])
```

```
sort :: (Ord a) => [a] -> [a]
```

```
sort [] = []
```

```
sort [x] = [x]
```

```
sort xs = merge (sort ys) (sort zs)
```

```
  where (ys,zs) = halve xs
```

```
halve xs = (take n xs, drop n xs)
```

```
  where n = length xs `div` 2
```

```
merge :: (Ord a) => [a] -> [a] -> [a]
```

```
merge [] ys = ys
```

```
merge xs [] = xs
```

```
merge (x:xs) (y:ys)
```

```
  | x ≤ y = x:merge xs (y:ys)
```

```
  | otherwise = y:merge (x:xs) ys
```

```
-- esta ultima linea se podria escribir asi
```

```
merge xs'(x:xs) ys'(y:ys)
```

```
  | x ≤ y = x:merge xs ys'
```

```
  | otherwise = y:merge xs' ys
```

```
enumerarPares :: (Num a) -> [(a,a)]
```

```
enumerarPares = [(x,y) | n <- [0..], x <- [0..n], y <- [n-x]]
```

Obs: Haskell define la comparación ≤ en pares como

```
(x1,y1) <= (x2,y2) = (x1,x2) || (x1 == x2 && y1 <= y2)
```

2.1.9. Tipos de datos algebraicos

Conocemos algunos tipos de datos "primitivos", como Char, Int, Float, (a -> b), (a, b), [a], String (sinónimo de [Char]).

Se pueden definir nuevos tipos de datos con la cláusula `data Tipo = <declaración de los constructores>`

Por ejemplo, `data Dia = Dom | Lun | ... | Sab` declara que existen constructores `Dom :: Dia`, `Lun :: Dia`, ..., `Sab :: Dia` y que son los únicos constructores del tipo Dia.

```
esFinDeSemana :: Dia -> Bool
esFinDeSemana Sab = True
esFinDeSemana Dom = True
esFinDeSemana _ = False
```

Un constructor puede tener muchos parámetros, por ejemplo, `data Persona = LaPersona String String String` declara que el único constructor de persona es `LaPersona :: String -> String -> String -> Persona`.

```
nombre :: Persona -> String
nombre (LaPersona n _ _) = n
```

Un tipo puede tener muchos constructores,

```
data Forma = Rectangulo Float Float
           | Circulo Float
```

declara que el tipo Forma tiene dos constructores y sólo esos.

Los constructores pueden ser recursivos,

```
data Nat = Zero
        | Succ Nat
```

```
-- valores de la forma
```

```
Zero
Succ Zero
Succ (Succ Zero)
Succ (Succ (Succ Zero))
...
```

```
doble :: Nat -> Nat
doble Zero = Zero
doble (Succ n) = Succ (Succ (doble n))
```

```
-- Haskell permite trabajar con estructuras infinitas
-- porque las definiciones recursivas se interpretan de manera
-- coinductiva en lugar de inductiva
```

```
infinito :: Nat
infinito = Succ infinito
```

Forma general de tipos algebraicos:

```
data T = CBase1 <parámetros>
      ...
      | CBasen <parámetros>
      | CRecursoivo1 <parámetros>
      ...
      | CRecursoivon <parámetros>
```

Los constructores base no reciben parámetros de tipo T y los recursivos reciben al menos uno. Los valores de tipo T son los que se pueden construir aplicando constructores base y recursivos un número finito de veces y sólo esos, es decir, entendemos la definición de T de forma inductiva.

Ejemplo `data Lista a = Vacía | Cons a (Lista a)`

Ejemplo `data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)`. Definir preorder, postorder e inorder.

```
data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)

preorder :: AB a -> [a]
preorder Nil = []
preorder (Bin i v d) = v : (preorder i ++ preorder d)

inorder :: AB a -> [a]
inorder Nil = []
inorder (Bin i v d) = inorder i ++ (v : inorder d)

postorder :: AB a -> [a]
postorder Nil = []
postorder (Bin i v d) = postorder i ++ postorder d ++ [v]
```

2.2. Esquemas de Recursion

2.2.1. Sobre Listas

2.2.1.1. Recursión estructural

Sea `g :: [a] -> b` definida por dos ecuaciones:

```
g []      = <caso base>
g (x:xs)  = < caso recursivo>
```

g está dada por recursión estructural si:

- El caso base devuelve un valor fijo z.
- El caso recursivo se escribe usando (cero, una o muchas veces) x y (g xs), pero sin usar el valor de xs ni de otros llamados recursivos.

Ejemplo suma, (++), isort están dadas por recursión estructural, pero sort no.

```
-- dada por recursion estructural
isort :: Ord a => [a] -> [a]
```

```

isort [] = []
isort (x:xs) = insertar x (isort xs)

-- no dada por recursion estructural
ssort :: Ord a => [a] -> [a]
ssort [] = []
ssort (x:xs) = minimo (x:xs)
               : ssort (sacarMinimo (x:xs))

```

foldr abstrae el esquema de recursión estructural

```

foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f z [] = z
foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)

```

toda recursión estructural es una instancia de foldr.

Ejemplo

```
suma = foldr (+) 0
```

```

suma [1, 2]
  ~> foldr (+) 0 [1,2]
  ~> (+) 1 (foldr (+) 0 [2])
  ~> (+) 1 ((+) 2 (foldr (+) 0 []))
  ~> (+) 1 ((+) 2 0)
  ~>* 3

```

Ejemplo

```

reverse = foldr (\x rec -> rec ++ [x]) []
  ≡ foldr (\x rec -> (++) rec [x]) []
  ≡ foldr (\x rec -> flip (++) [x] rec) []
  ≡ foldr (\x -> flip (++) [x]) []
  ≡ foldr (\x -> flip ((++) (:[])) x) []
  ≡ foldr (flip (++) . (:[])) []

```

Prop:

- foldr (:) [] = id
- foldr ((:) . f) [] = map f
- foldr (const (+ 1)) [] = length

Ejemplo Casos degenerados

```

length [] = 0
length (_,xs) = 1 + length xs -- no usa la cabeza

head [] = error "No tiene cabeza."
head (x:_) = x -- no usa el llamado recursivo sobre la cola

```

2.2.1.2. Propiedad universal de fold

Al igual que el operador fold encapsula un patrón simple de recursión para procesar listas, la propiedad universal de fold encapsula un patrón simple de prueba inductiva para listas.

Prop: universalidad de fold

```
g [] = v                ⇔ g = fold f v
g (x:xs) = f x (g xs)
```

Ejemplo universalidad como principio de prueba

Queremos ver que `(+1) . sum = fold (+) 1`. Primero notamos que satisface el lado derecho de la propiedad universal de fold, con `g = (+1) . sum`, `f = (+)` y `v = 1`. Luego, por la propiedad universal, concluimos que la ecuación a ser probada es equivalente a las dos siguientes ecuaciones:

```
((+1) . sum) [] = 1
((+1) . sum) (x:xs) = (+) x ((+1) . sum) xs
```

Luego simplificando

```
sum [] + 1 = 1
sum (x:xs) + 1 = x + (sum xs + 1)
```

Ahora, se puede calcularlo sólo con definiciones

```
sum [] + 1
  = 0 + 1      {Definicion de sum}
  = 1          {Aritmética}
sum (x:xs) + 1
  = (x + sum xs) + 1 {Definicion de sum}
  = x + (sum xs + 1) {Asociatividad de la suma}
```

Y queda probado sin uso explícito de inducción. \square

Con la propiedad de universalidad de fold se pueden probar propiedades más específicas, como la propiedad de fusión de fold. Esta puede ser un poco más simple en los casos que se puede aplicar, pero siempre que se puede hacer una prueba for fusión se puede hacer por universalidad.

Ejemplo universalidad como principio de definición.

Sea la función sum sum definida por recursión estructural de la siguiente forma:

```
sum :: [Int] -> Int
sum [] = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

Queremos definir sum con fold. Luego queremos resolver la ecuación `sum = fold f v` para una función f y un valor v. Observamos que la ecuación une con el lado derecho de la propiedad universal, así que concluimos que la ecuación es equivalente a las siguientes ecuaciones:

```
sum [] = v
sum (x:xs) = f x (sum xs)
```

De la primera ecuación y la def de sum, `v = 0`. De la segunda ecuación calculamos f

```

sum (x:xs) = f x (sum xs)
⇔ x + sum xs = f x (sum xs) {Definición de sum}
⇔ x + y = f x y               {Generalizando (sum xs) a y}
⇔ f = (+)                     {Funciones}

```

Luego, usando la propiedad universal obtuvimos que `sum = fold (+) 0`. \square

2.2.1.3. Recursión primitiva

Sea `g :: [a] -> b` definida por dos ecuaciones:

```

g []      = <caso base>
g (x:xs) = <caso recursivo>

```

`g` está dada por recursión primitiva si:

- El caso base devuelve un valor fijo `z`.
- El caso recursivo se escribe usando (cero, una o muchas veces) `x`, `(g xs)` y también `xs`, pero sin hacer otros llamados recursivos.

Es decir, es similar a la recursión estructural, pero permite referirse a `xs`.

Obs: Todas las definiciones dadas por recursión estructural también están dadas por recursión primitiva.

Obs: Hay definiciones dadas por recursión primitiva que no están dadas por recursión estructural.

Es decir, estructural \Rightarrow primitiva, pero primitiva \nRightarrow estructural.

Ejemplo `trim` se puede definir con recursión primitiva, pero no con recursión estructural.

`recr` abstrae el esquema de recursión primitiva

```

recr :: (a -> [a] -> b -> b) -> b -> [a] -> b
recr f z [] = z
recr f z (x:xs) = f x xs (recr f z xs)

```

toda recursión primitiva es una instancia de `recr`.

Ejemplo

```

trim = recr (\ x xs rec -> if x == ' ' then rec else x:xs) []

```

2.2.1.4. Recursión iterativa

Sea `g :: [a] -> b` definida por dos ecuaciones:

```

g ac []      = <caso base>
g ac (x:xs) = < caso recursivo>

```

`g` está dada por recursión iterativa si:

- El caso base devuelve el acumulador `ac`.
- El caso recursivo invoca inmediatamente a `(g ac' xs)` donde `ac'` es el acumulador actualizado en función de su valor anterior y el valor de `x`.

Es decir, es similar a la recursión estructural, pero permite referirse a `xs`.

Ejemplo

```
reverse :: [a] -> [a] -> [a]
reverse ac [] = ac
reverse ac (x:xs) = reverse (x:ac) xs
```

foldl abstrae el esquema de recursión iterativa

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
foldl f ac [] = ac
foldl f ac (x:xs) = foldl f (f ac x) xs
```

toda recursión iterativa es una instancia de foldl.

En general foldr y foldl tienen comportamiento diferentes:

```
foldr (⊕) z [a,b,c] = a ⊕ (b ⊕ (c ⊕ z))
foldl (⊕) z [a,b,c] = ((z ⊕ a) ⊕ b) ⊕ c
```

si \oplus es un operador asociativo y conmutativo, foldr y foldl definen la misma función.

Ejemplo

```
suma = foldr (+) 0 = foldl (+) 0
producto = foldr (*) 1 = foldl (*) 1
and = foldr (&&) True = foldl (&&) True
or = foldr (||) False = foldl (||) False
```

Ejemplo

```
tern2dec :: [Int] -> Int
tern2dec = foldl (\ ac b -> b + 3 * ac) 0
```

```
tern2dec [2,1,1]
  ~> foldl (\ ac b -> b + 3 * ac) 0 [2,1,1]
  ~> foldl (\ ac b -> b + 3 * ac) (2 + 3 * 0) [2,1]
  ~> foldl (\ ac b -> b + 3 * ac) (1 + 3 * (2 + 3 * 0)) [1]
  ~> foldl (\ ac b -> b + 3 * ac) (1 + 3 * (1 + 3 * (2 + 3 * 0))) []
  ~> 1 + 3 * (1 + 3 * (2 + 3 * 0))
  ~> 22
```

La función foldl es un operador de iteración. Pseudocódigo imperativo:

```
función foldl f ac xs
  mientras xs no es vacía
    ac := f ac (head xs)
    xs := tail xs
  devolver ac
```

Se puede demostrar que `foldl (flip (:)) [] = reverse`.

2.2.1.5. Ejercicios

Ejercicio Definir la siguiente función usando foldr.

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip [] [] = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x, y) : zip xs ys
```

Primero mostraré que `zip` está definida sii los largos de las dos listas son iguales.

Demo: Sean a, b tipos, $A :: [a], B :: [b]$ listas, $n, m \in \mathbb{Z}$ las longitudes de las listas A y B respectivamente. Quiero ver que `zip A B` está definida si y sólo si $n = m$ y no hay elementos indefinidos en las listas.

Si hay algun elemento indefinido en alguna de las listas claramente en algún momento de la recursión ese elemento será x ó y si $n \neq m$, luego la expresión se indefinirá ó ocurrirá que $n = m$. Luego me reduzco a ver que `zip` está definida sii $n = m$.

Para la demostración usaré como invariante que a través de las llamadas recursivas de `zip`, la igualdad/desigualdad de n y m se preserva. En el caso base se ve que no hay llamadas recursivas. En el caso recursivo sólo se llama a `zip xs ys`, es decir, los nuevos valores de n y m son $n - 1$ e $y - 1$, luego como $n = m \Leftrightarrow n - 1 = m - 1$ se mantiene el invariante.

Si $n = m$. Por inducción en n ,

Caso base. Si $n = m = 0$ luego A y B son listas con cero elementos y por lo tanto $A = []$ y $B = []$. Luego `zip A B = zip [] [] = []` por la primera regla y entonces está definida.

Caso inductivo. Si $n = m > 0$, luego A y B son listas con $n > 0$ elementos, luego se usa la segunda ecuación de `zip`, que está definida si y sólo si $(x, y) : \text{zip } xs \text{ } ys$ está definida. Claramente (x, y) está definido, pues x e y están definidos. Además `zip xs ys` está definido por hipótesis inductiva. Luego la expresión entera está definida.

Luego por inducción en n , $\forall k$, si ambas listas tienen tamaño k la función está definida.

Si $n \neq m$, por invariante se mantiene la desigualdad de las llamadas recursivas. Además el tamaño de ambas listas se reduce en uno en cada llamado recursivo. Luego eventualmente alguna de las listas se intentará llamar con tamaño 0 y la otra con tamaño mayor a 0, por lo cual no habrá definición de la función.

Queda probado que `zip A B` está definida si y sólo si $n = m$ y los elementos de ambas listas están definidos.

□

Quisiera escribir algo de la forma `zip xs ys = foldr f z xs ys`, con f siendo la función que hay que definir y z el caso base, para poder reescribirlo como `zip = foldr f z`. Si hago esto, estoy evaluando el `foldr` con xs , y esto debería devolver una función que al evaluarla con ys me de el resultado de `zip`. Es decir, `foldr f z xs :: [b] -> [(a, b)]`. Entonces `z :: [b] -> [(a,b)]`, así que defino z como $(_ \rightarrow [])$ definiendo el caso base de la función que retornaré. Ahora quiero en cada paso de la recursión agregar un caso a la función. Luego defino a f como $(\ x \text{ } rec \ (y:ys) \rightarrow (x, y) : rec \ ys)$.

Luego tengo

```
zip xs ys = foldr (\ x rec -> (y:ys) -> (x, y) : rec ys) (_ -> []) xs ys
```

Que es equivalente a

```
zip = foldr (\ x rec (y:ys) -> (x, y) : rec ys) (_ -> [])
```

Ejercicio Definir `foldr` en términos de `recr`.

Recordemos que todas las definiciones dadas por recursión estructural también están dadas por recursión primitiva. La única diferencia entre `recr` y `foldr` es que en la función que se pasa se recibe el parámetro xs , solo debemos ignorarlo.

Ahora, `foldr f z xs = recr (\ x xs rec -> f x rec) z xs`.

Esto es equivalente a `foldr f = recr (\ x _ -> f x)`.

Ejercicio Definir `recr` en términos de `recr`.

Recordemos que hay definiciones dadas por recursión primitiva que no están dadas por recursión estructural. Esto no significa que el ejercicio sea imposible, sino que tenemos que modificarla definición para que siempre sea posible. Esto lo haremos devolviendo una tupla con una copia de la lista original en el caso base de la recursión, así toda la lista es accesible en todas las ejecuciones de la función a través de la tupla `rec` que renombramos `(xs,rec)` ya que contiene la lista original además el llamado recursivo que antes devolvíamos.

```
recr f z xs = foldr (\ x (xs,rec) -> ??) (z,xs) xs
```

Ahora nos falta devolver el valor recursivo, es decir, `f x xs rec`, pero no hay que olvidarse de preservar la tupla `(xs,rec)`.

```
recr f z xs = foldr (\ x (xs,rec) -> (xs, f x xs rec)) (z,xs) xs
```

El problema que tenemos ahora es que la función `recr` devolvería la tupla `(xs,resultado)`, y solo queremos el resultado, así que usamos la función `snd` para obtener el segundo valor de la tupla.

```
recr f z xs = snd (foldr (\ x (xs,rec) -> (xs, f x xs rec)) (z,xs) xs)
```

El último problema que tenemos es que en `xs` tenemos siempre toda la lista, pero en realidad queremos que tenga los elementos siguientes, no todos. Entonces lo que hacemos es en vez de pasar toda la lista en el caso base, pasamos una lista vacía, y en cada paso de la recursión agregamos el elemento actual, así en el backtracking iremos teniendo una cada vez un elemento más.

```
recr f z xs = snd (foldr (\x((x:xs),rec) -> (xs, f x xs rec)) ([], z) xs)
```

Ejercicio definir `foldl` en términos de `foldr`.

Lo único que cambia entre `foldl` y `foldr` es el orden de los términos.

```
foldl f z xs = foldr (flip f) z (reverse xs)
```

Y `reverse` sabemos que se puede escribir en términos de `foldr`.

Ejercicio definir `foldr` en términos de `foldl`.

```
foldr f z xs = foldl (flip f) z (reverse xs)
```

Y `reverse` sabemos que se puede escribir en términos de `foldl`.

2.2.2. Sobre Otras Estructuras

La recursión estructural se generaliza a tipos algebraicos en general. Supongamos que `T` es un tipo algebraico.

Dada una función `g :: T -> Y` definida por ecuaciones:

```
g (CBase1 <parámetros>) = <caso base1>
...
g (CBasen <parámetros>) = <caso basen>
g (CRecurso1 <parámetros>) = <caso recursivo1>
```

...

`g (CRecursoivon <parámetros>) = <caso recursivon>`

Decimos que `g` está dada por recursión estructural si:

- Cada caso base se escribe combinando los parámetros.
- Cada caso recursivo se escribe combinando los parámetros del constructor que no son de tipo `T` y el llamado recursivo sobre cada parámetro de tipo `T`, pero sin unar los parámetros del constructor que son de tipo `T` y sin hacer otros llamados recursivos.

Ejemplo `data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)`

```
foldAB :: b -> (b -> a -> b -> b) -> AB a -> b
foldAB cNil cBin Nil = cNil
foldAB cNil cBin (Bin i r d) =
  cBin (foldAB cNil cBin i) r (foldAB cNil cBin d)
```

```
idAB :: AB a -> AB a
idAB = foldAB Nil Bin
```

```
mapAB :: (a -> b) -> AB a -> AB b
mapAB f = foldAB Nil (\i r d -> Bin i (f r) d)
```

```
maximoAB :: AB a -> Maybe a
maximoAB = foldAB Nothing (\i r d -> maxMaybe i (maxMaybe r d))
  where maxMaybe Nothing Nothing = Nothing
        maxMaybe (Just x) Nothing = x
        maxMaybe Nothing (Just y) = y
        maxMaybe (Just x) (Just y) = max x y
```

```
altura :: AB a -> Int
altura = foldAB (const 0) (\i _ d -> 1 + max i d)
```

```
-- Se puede definir ordenado :: AB a -> Bool retornado
-- en cada paso recursivo un booleano ordenado, el valor
-- minimo y el valor maximo. Luego en ordenado retorno la
-- primera componente de la tripla.

-- Se puede definir directamente caminoMasLargo :: AB a -> [a]
-- con una idea similar retornando tanto la rama mas larga
-- como el camino mas largo, y eligiendo la rama como la mejor
-- de las dos y el camino como el mejor de los dos caminos y unir las ramas.
```

2.3. Razonamiento Ecuacional

Para razonar sobre equivalencia de expresiones vamos a asumir:

- Que trabajamos con estructuras de datos finitas. Específicamente con tipos de datos inductivos.
- Que trabajamos con funciones totales, es decir, las ecuaciones deben cumplir todos los casos y la recursión siempre debe terminar.

- El programa no depende del orden de las ecuaciones.

2.3.1. Reemplazo

Principio de reemplazo. Sea $e1 = e2$ una ecuación incluida en el programa. Las siguientes operaciones preservan la igualdad de expresiones:

- Reemplazar cualquier instancia de $r1$ por $e2$.
- Reemplazar cualquier instancia de $e2$ por $e1$.

Si podemos demostrar una igualdad usando sólo el principio de reemplazo decimos que la igualdad vale *por definición*.

Ejemplo `length ["a", "b"] = suma [1, 1]`

```
{L0} length [] = 0
{L1} length (_,xs) = 1 + length xs
{S0} suma [] = 0
{S1} suma (x:xs) = x + suma xs
```

```
length ["a", "b"]
= 1 + length ["b"]      por L1
= 1 + (1 + length [])   por L1
= 1 + (1 + 0)           por L0
= 1 + (1 + suma [])     por S0
= 1 + suma [1]          por S1
= suma [1, 1]           por S1
```

2.3.2. Inducción sobre booleanos

Principio de inducción sobre booleanos.

Si $P(\text{True})$ y $P(\text{False})$ entonces $\forall x :: \text{Bool}. P(x)$.

Ejemplo probar que $\forall x :: \text{Bool}. \text{not} (\text{not } x) = x$

```
{NT} not True = False
{NF} not False = True
```

Por el principio de inducción sobre booleanos, basta probar que `not (not True) = True` y que `not (not False) = False`, los cuales pueden ser probados por definición.

2.3.3. Inducción sobre pares

Principio de inducción sobre pares.

Si $\forall x :: a. \forall y :: b. \text{Si } P((x, y)) \text{ entonces } \forall p :: (a, b). P(p)$.

2.3.4. Inducción sobre naturales

Principio de inducción sobre naturales.

```
data Nat = Zero | Suc Nat
```

Si $P(\text{Zero})$ y $\forall n :: \text{Nat}. (P(n) \Rightarrow P(\text{suc } n))$, entonces $\forall n :: \text{Nat}. P(n)$.

2.3.5. Inducción estructural

Principio de inducción estructural.

Sea P una propiedad acerca de las expresiones tipo T tal que vale sobre todos los constructores base de T y vale sobre todos los constructores recursivos de T asumiendo como hipótesis inductiva que vale para los parámetros de tipo T , entonces $\forall x :: T. P(x)$.

Ejemplo `data [a] = [] | a : [a]`

Sea P una propiedad sobre expresiones de tipo $[a]$ tal que $P([])$ y $\forall x :: a. \forall xs :: [a]. (P(xs) \Rightarrow P(x:xs))$, entonces $\forall xs :: [a]. P(xs)$.

2.3.5.1. Lemas de generación

Lema de generación para pares.

Si $p :: (a, b)$, entonces $\exists x :: a. \exists y :: b. p = (x, y)$.

Principio de inducción sumas.

`data Either a b = Left a | Right b`

Si $e :: Either a b$, entonces o bien $\exists x :: a. e = Left\ x$ ó $\exists y :: b. e = Right\ y$.

2.3.6. Extensionalidad

Punto de vista intensional. Dos valores son iguales si están contruidos de la misma manera.

Punto de vista extensional. Dos valores son iguales si son indistinguibles al observarlos.

Principio de extensionalidad funcional.

Si $(\forall x :: a. f\ x = g\ x)$ entonces $f = g$.

Corrección con respecto a observaciones Si demostramos $eq = e2 :: A$, entonces: $obs\ e1 \rightsquigarrow True$ sii $obs\ e2 \rightsquigarrow True$ para toda posible observacion $obs :: A \rightarrow Bool$.

Desigualdades Hay que buscar una observación que las distinga. *Ejemplo* Demostrar que no vale `id = swap`

```
obs :: ((Int, Int) -> (Int, Int)) -> Bool
obs f = fst (f (1, 2)) == 1
```

```
obs id ~> True
obs swap ~> False
```

2.3.7. Isomorfismos de tipos

Dos tipos son isomorfo si representan la misma información, pero escrita de otra manera. Entonces podemos transformar los valores de un tipo en valores de otro, como una biyección.

Def: decimos que dos tipos de datos A y B son isomorfos si:

1. Hay una funcion $f :: A \rightarrow B$ total.
2. Hay una funcion $g :: B \rightarrow A$ total.
3. Se puede domostrar que $g \circ f = id :: A \rightarrow A$.
4. Se puede domostrar que $f \circ g = id :: B \rightarrow B$.

Escribimos $A \simeq B$.