DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo practico 1

Especificacion y Weakest Precondition

15 de septiembre de 2024 — Algoritmos y Estructura de Datos

Grupo HIBTAYIGAFWKBCHZLZPJ

Integrante	LU	Correo electrónico
Dominguez, Mateo Felipe	923/24	`matedominguez2@gmail.com`
Morrone, Valentina	35/24	`valenmorrone@hotmail.com`
Moran, Juana Gala	119/24	`juanagalamoran.u@gmail.com`
Cuiña, Carolina	874/24	`cuinacarolina43@gmail.com`

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

1. Especificacion

1.1. grandesCiudades

`proc grandesCiudades` (in ciudades: $seq\langle Ciudad\rangle$) : $seq\langle Ciudad\rangle$
    `requiere` $\{\neg ciudadesRepetidas(ciudades)\}$
    `asegura` $\{\neg ciudadesRepetidas(res) \land (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |res| \longrightarrow_L res[i] \in ciudades \land res[i][1] > 50{,}000)\}$

`pred ciudadesRepetidas` (s: $seq\langle Ciudad\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \longrightarrow_L (\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \land i \neq j \land_L s[i] = s[j]))$
}

1.2. sumaDeHabitantes

`proc sumaDeHabitantes` (in menoresDeCiudades: $seq\langle Ciudad\rangle$, in mayoresDeCiudades: $seq\langle Ciudad\rangle$) : $seq\langle Ciudad\rangle$
    `requiere` $\{\neg ciudadesRepetidas(menoresDeCiudades) \land \neg ciudadesRepetidas(mayoresDeCiudades)\}$
    `requiere` $\{mismasCiudades(menoresDeCiudades, mayoresDeCiudades)\}$
    `asegura` $\{mismasCiudades(res, menoresDeCiudades)\}$
    `asegura` $\{\neg ciudadesRepetidas(res)\}$
    `asegura` $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |menoresDeCiudades| \land_L menoresDeCiudades[i][0] = mayoresDeCiudades[j][0] \longrightarrow_L$
    $(res[i][1] = menoresDeCiudades[i][1] + mayoresDeCiudades[j][1]))))\}$

`pred mismasCiudades` (s: $seq\langle Ciudad\rangle$, t: $seq\langle Ciudad\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \longrightarrow_L (\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |t| \land_L s[i][0] = t[j][0]))$
}

1.3. hayCamino

`proc hayCamino` (in distancias: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, in desde: $\mathbb{Z}$, in hasta: $\mathbb{Z}$) : Bool
    `requiere` $\{esCuadrada(distancias)\}$
    `requiere` $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |s| \longrightarrow_L s[i][j] = s[j][i] \land s[i][j] \geq 0)\}$
    `requiere` $\{0 \leq desde, hasta < |distancias|\}$
    `asegura` $\{res = True \iff (\exists\ camino : seq\langle \mathbb{Z}\rangle)(esCamino(distancias, camino, desde, hasta))\}$

`pred esCuadrada` (A : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |A| \longrightarrow_L |A[i]| = |A|)$
}
`pred esCamino` (s: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, t: $seq\langle \mathbb{Z}\rangle$, n: $\mathbb{Z}$, m: $\mathbb{Z}$) {
  $(2 \leq |t| \leq |s| \land_L t[0] = n \land_L t[|t| - 1] = m \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |t| - 1 \longrightarrow_L 0 \leq t[i] < |s| \land s[t[i]][t[i + 1]] > 0))$
}

1.4. cantidadCaminosNSaltos

`proc cantidadCaminosNSaltos` (inout conexion: $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, in n: $\mathbb{Z}$)
    `requiere` $\{conexion = C_0\}$
    `requiere` $\{esCuadrada(C_0)\}$
    `requiere` $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |C_0| \longrightarrow_L (C_0[i][j] = C_0[j][i] \land (C_0[i][j] = 0 \lor C_0[i][j] = 1)))\}$
    `requiere` $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |C_0| \land i = j \longrightarrow_L C_0[i][j] = 0)\}$
    `requiere` $\{n \geq 1\}$
    `asegura` $\{|conexion| = |C_0|\}$
    `asegura` $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |conexion| \longrightarrow_L conexion[i][j] = conexion[j][i])\}$
    `asegura` $\{(\exists t : seq\langle seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle\rangle)(|t| = n \land t[0] = C_0 \land_L (\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |t| - 1 \land 0 \leq j < |t| \longrightarrow_L |t[i]| = |t[j]| \land$
    $esCuadrada(t[j]) \land APorBEsC(t[i], C_0, t[i + 1])) \land conexion = t[n - 1])\}$

`pred APorBEsC` (A : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, B : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$, C : $seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle$) {

$$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |C| \longrightarrow_L (C[i][j] = \sum_{k=0}^{|C|-1} A[i][k] * B[k][j]))$$

}

1.5. caminoMinimo

$\texttt{proc caminoMinimo}$ (in origen: $\mathbb{Z}$, in destino: $\mathbb{Z}$, in distancias: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle) : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$

$\quad\texttt{requiere}$ $\{esCuadrada(distancias)\}$

$\quad\texttt{requiere}$ $\{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |s| \longrightarrow_L s[i][j] = s[j][i] \wedge s[i][j] \geq 0)\}$

$\quad\texttt{requiere}$ $\{0 \leq origen, destino < |distancias|\}$

$\quad\texttt{asegura}$ $\{res = \langle\rangle \iff \neg(\exists\ camino : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)(esCamino(distancias, camino, origen, hasta))\}$

$\quad\texttt{asegura}$ $\{esCamino(distancias, res, origen, destino) \wedge esMinimo(distancias, res, origen, destino)\}$

$\texttt{pred esMinimo}$ (s: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, t: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, n: $\mathbb{Z}$, m: $\mathbb{Z}$) {

$\quad(\forall w : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)(esCamino(s, w, n, m) \longrightarrow_L sumaDistancias(s, t) \leq sumaDistancias(s, w))$

}

$\texttt{aux sumaDistancias}$ (s: $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$, t: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) : $\mathbb{Z} = \sum\limits_{i=0}^{|t|-2} s[t[i]][t[i+1]]$;

2. Demostraciones de correctitud

```
res = 0
i = 0
while (i < ciudades.length) do
    res = res + ciudades[i].habitantes
    i = i + 1
endwhile
```

2.1. Demostrar que la implementacion es correcta con respecto a la especificacion

Demostrar {P}S{Q}

Supongamos ciudades = [(a,10),(b,15)]

Iteracion	i	res
0	0	0
1	1	10
2	2	10+15=25

Tabla 1: Tabla de iteracion

$I \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes$

$P_c \equiv res = 0 \wedge i = 0$

$Q_c \equiv res = \sum\limits_{i=0}^{|c|-1} ciudades[i].habitantes$

$B \equiv i < |ciudades|$

Paso 1

$P_c \implies I$?

$(res = 0 \wedge i = 0) \implies (0 \leq i < |ciudades| \wedge res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes)$

Analizamos por partes:

- $i = 0 \implies 0 \leq i < |ciudades|$
- $res = 0 \implies res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes = \sum\limits_{j=0}^{-1} ciudades[j].habitantes = 0$

$\therefore P_c \implies I$

Paso 2

$\{I \wedge B\}S\{I\}$

$\{I \wedge B\} \implies wp(S, I)$?

$\{I \wedge B\} \equiv 0 \leq i < |ciudades| \wedge \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes$

$wp(S_1; S_2, I) = wp(S_1, wp(S_2, I))$

1. $wp(S_2, I) = wp(i := i+1, 0 \leq i < |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes) \equiv$

   $def(i+1) \land_L 0 \leq i+1 < |ciudades| \land_L res = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \equiv$

   $0 \leq i+1 < |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes$

2. $wp(S_1, wp(S_2, I)) \equiv wp(res := res+ciudades[i].habitantes, 0 \leq i+1 < |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes) \equiv$

   $def(ciudades) \land def(ciudades[i].habitantes) \land_L 0 \leq i+1 < |ciudades| \land_L res+ciudades[i].habitantes = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitant$

   $0 \leq i < |ciudades| \land 0 \leq i+1 < |ciudades| \land res + ciudades[i].habitantes = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res + ciudades[i].habitantes = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes - ciudades[i].habitantes \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes$

$(0 \leq i < |ciudades| - 1 \land \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes) \implies (0 \leq i < |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes)$

$\therefore$ La tripla de Hoare es correcta

Paso 3

$I \land \neg B \implies Q$?

1. $(0 \leq i < |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land i \geq |ciudades|) \implies res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \equiv$

   $(i = |ciudades| \land res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes) \implies res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \equiv$

   $res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \implies res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes$

$\therefore I \land \neg B \implies Q$

Teorema de terminacion

$f_v = |ciudades| - i$

Paso 1

$\{I \land B \land f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\}$

Queremos ver que $\forall\ v_0,\ \{I \land B \land f_v = v_0\} \implies wp(S_1, wp(S_2, f_v < v_0))$?

$\{I \land B \land f_v = v_0\} \equiv 0 \leq i < |ciudades| \land \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land |ciudades| - i = |ciudades|$

1. $wp(S_2, f_v < v_0) \equiv wp(i := i+1, |ciudades| - i < v_0) \equiv def(i) \land def(1) \land_L |ciudades| - (i+1) < v_0 \equiv |ciudades| - i - 1 < v_0$

2. $wp(S_1, wp(S_2, f_v < v_0)) \equiv wp(res := res + ciudades[i].habitantes, |ciudades| - i - 1 < v_0) \equiv$
   $def(res) \land def(ciudades) \land 0 \leq i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < v_0 \equiv$
   $0 \leq i < |ciudades| \land_L |ciudades| - i - 1 < |ciudades| \equiv 0 \leq i < |ciudades|$

$(0 \leq i < |ciudades| \land \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land |ciudades| - i = |ciudades|) \implies 0 \leq i < |ciudades|$

$\therefore$ La tripla de Hoare es correcta

Paso 2

$I \land f_v \leq 0 \implies \neg B$?

1. $0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[i].habitantes \wedge |ciudades| - i \leq 0 \implies i \geq |ciudades| \equiv$

   $i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[i].habitantes \wedge |ciudades| \leq i \implies i \geq |ciudades| \equiv$

   $i = |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[i].habitantes \implies i \geq |ciudades|$

$\therefore I \wedge f_v < 0 \implies \neg B$

$Por\ ultimo, tenemos\ que:$
$P \equiv (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].nombre = ciudades[j].nombre)$

Queremos ver que :
$P \implies wp(res = 0; i = 0, P_c)$
$wp(res = 0, wp(i = 0, res = 0 \wedge i = 0)) \equiv wp(res = 0, res = 0 \wedge True) \equiv 0 = 0 \equiv True$
$\therefore$ Como se cumple$\{P\}S\{P_c\}\ y\ \{P_c\}S\{Q\}$, por monotonia, queda demostrado que se cumple la tripla$\{P\}S\{Q\}$

2.2. Demostrar que el valor devuelto es mayor a 50.000

$I \equiv 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$
$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$

$P_c \equiv i = 0 \wedge res = 0 \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$
$Q_c \equiv res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \wedge res > 50.000$
$B \equiv i < |ciudades|$

Paso 1

$P_c \implies I$?
$(i = 0 \wedge res = 0 \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \implies 0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$
$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

Analizamos por partes:
• $i = 0 \implies 0 \leq i < |ciudades|$
• $res = 0 \implies res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes = \sum_{j=0}^{-1} ciudades[j].habitantes = 0$
$\therefore P_c \implies I$

Paso 2

$\{I \wedge B\}S\{I\}$
$\{I \wedge B\} \implies wp(S, I)$?
$\{I \wedge B\} \equiv 0 \leq i < |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$
$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$

$wp(S_1; S_2, I) = wp(S_1, wp(S_2, I))$

1. $wp(S_2, I) = wp(i := i + 1, 0 \leq i < |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
   $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \equiv$
   $def(i + 1) \wedge_L 0 \leq i + 1 < |ciudades| \wedge_L res = \sum_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \wedge$
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

$0 \leq i+1 < |ciudades| \land res = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land$
$(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
$(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$

2. $wp(S_1, wp(S_2, I)) \equiv$

   $wp(res := res + ciudades[i].habitantes, 0 \leq i+1 < |ciudades| \land res = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \equiv$

   $def(ciudades) \land def(ciudades[i].habitantes) \land_L 0 \leq i+1 < |ciudades| \land_L$
   $res + ciudades[i].habitantes = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| \land 0 \leq i+1 < |ciudades| \land res + ciudades[i].habitantes = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res + ciudades[i].habitantes = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res = \sum\limits_{j=0}^{i} ciudades[j].habitantes - ciudades[i].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \equiv$

   $0 \leq i < |ciudades| - 1 \land res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$

$(0 \leq i < |ciudades| - 1 \land \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land$
$(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
$(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \implies (0 \leq i < |ciudades| \land res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes)$

$\therefore$ La tripla de Hoare es correcta

Paso 3

$I \land \neg B \implies Q$?

1. $(0 \leq i < |ciudades| \land res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \land$
   $i \geq |ciudades|) \implies (res = \sum\limits_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \land res > 50.000) \equiv$

   $(i = |ciudades| \land res = \sum\limits_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \land$
   $(\exists i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \land_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \land$
   $(\forall i:\mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \implies (res = \sum\limits_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \land res > 50.000) \equiv$

$(res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \implies (res = \sum_{j=0}^{|c|-1} ciudades[j].habitantes \wedge res > 50.000)$

$\therefore I \wedge \neg B \implies Q$

Teorema de terminacion

$f_v = |ciudades| - i$

Paso 1

$\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} S \{f_v < v_0\}$

Queremos ver que $\forall\ v_0,\ \{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} \implies wp(S_1, wp(S_2, f_v < v_0))$?

$\{I \wedge B \wedge f_v = v_0\} \equiv 0 \leq i < |ciudades| \wedge \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$

$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0 \wedge |ciudades| - i = |ciudades|$

1. $wp(S_2, f_v < v_0) \equiv wp(i := i+1, |ciudades| - i < v_0) \equiv def(i) \wedge def(1) \wedge_L |ciudades| - (i+1) < v_0 \equiv |ciudades| - i - 1 < v_0$
2. $wp(S_1, wp(S_2, f_v < v_0)) \equiv wp(res := res + ciudades[i].habitantes, |ciudades| - i - 1 < v_0) \equiv$
   $def(res) \wedge def(ciudades) \wedge 0 \leq i < |ciudades| \wedge_L |ciudades| - i - 1 < v_0 \equiv$
   $0 \leq i < |ciudades| \wedge_L |ciudades| - i - 1 < |ciudades| \equiv 0 \leq i < |ciudades|$

$(0 \leq i < |ciudades| \wedge \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$

$(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \wedge |ciudades| - i = |ciudades|) \implies 0 \leq i < |ciudades|$

$\therefore$ La tripla de Hoare es correcta

Paso 2

$I \wedge f_v \leq 0 \implies \neg B$?

1. $0 \leq i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[j].habitantes \wedge$
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
   $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \wedge |ciudades| - i \leq 0 \implies i \geq |ciudades| \equiv$

   $i \leq |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[i].habitantes \wedge$
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
   $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \wedge |ciudades| \leq i \implies i \geq |ciudades| \equiv$

   $i = |ciudades| \wedge res = \sum_{j=0}^{i-1} ciudades[i].habitantes \wedge$
   $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$
   $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \implies i \geq |ciudades|$

$\therefore I \wedge f_v < 0 \implies \neg B$

$Por\ ultimo, tenemos\ que:$

$P \equiv (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0) \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].nombre = ciudades[j].nombre)$

Queremos ver que :

$P \implies wp(res := 0; i := 0, P_c)$

$wp(res := 0, wp(i := 0, i = 0 \wedge res = 0 \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0))) \equiv$

$wp(res := 0, True \wedge res = 0 \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)) \equiv$

$True \wedge (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \wedge_L ciudades[i].habitantes > 50.000) \wedge$

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |ciudades| \longrightarrow_L ciudades[i].habitantes \geq 0)$
$\therefore$ Como se cumple$\{P\}S\{P_c\}$ y $\{P_c\}S\{Q\}$, por monotonia, queda demostrado que se cumple la tripla$\{P\}S\{Q\}$